FRACCIONES EQUIVALENTES Y ADICIÓN DE NÚMEROS RACIONALES:

Su comprensión mediada por el uso de material concreto

EDUARDO CORREDOR ROJAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BUCARAMANGA

2004

FRACCIONES EQUIVALENTES Y ADICIÓN DE NÚMEROS RACIONALES:

Su comprensión mediada por el uso de material concreto

EDUARDO CORREDOR ROJAS

Trabajo de Grado para optar el título de:

Especialista en Educación Matemática

Directora:

DIANA VICTORIA JARAMILLO QUICENO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

ESPECIALIZACIÓN EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BUCARAMANGA

2004

A Dios, por la vida, salud, bienestar, iluminación y fortaleza constantes;

a mis padres ya fallecidos que me supieron orientar;

a mi esposa Silvia Ney, quien me animó para realizar este proyecto;

a mis estimados hermanos, por su apoyo en todo momento.

AGRADECIMIENTOS

A los estudiantes del grado 7-01 del Instituto Técnico Superior de Comercio de Barrancabermeja, jornada de la mañana quienes, con su aceptación y su consentimiento, participaron en la experiencia de aula que constituye este trabajo.

Al grupo de 18 alumnos del grado 7-01 escogidos para el análisis de esta experiencia de aula, por sus aportes, colaboración y disposición para el buen desarrollo de la experiencia de aula.

A mis compañeros de trabajo y directivos del Instituto Técnico Superior de Comercio de Barrancabermeja, por sus aportes desinteresados y estímulo constante a este proyecto.

A mis compañeros de estudio por su amistad y mutua solidaridad.

A cada uno de los docentes de la Universidad Industrial de Santander que hicieron parte de la Especialización en Educación Matemática por sus enseñanzas, orientaciones y motivación dadas en todo momento.

A la Dra. Diana Jaramillo por su apoyo, asesoría y valioso acompañamiento en la realización del presente trabajo.

CONTENIDO

LISTA DE ANEXOS

RESUMEN

TÍTULO: LAS FRACCIONES EQUIVALENTES Y ADICIÓN DE NÚMEROS RACIONALES: su comprensión mediada mediante el uso de material concreto. *

AUTOR: CORREDOR Rojas, Eduardo. * *

PALABRAS CLAVES: Educación Matemática, experiencia de aula, números racionales, material concreto, formas de representación de números racionales.

DESCRIPCION O CONTENIDO:

La presente experiencia de aula, tiene como objetivo contribuir en el desarrollo de la comprensión de los alumnos del grado séptimo del Instituto Técnico Superior de Comercio de Barrancabermeja, sobre el concepto de fracciones equivalentes y sobre el algoritmo de la adición de números racionales. Se utilizaron instrumentos como talleres, tabletas de madera, dominó ampliado, dominó de fracciones equivalentes, solución de casos cotidianos o contextuales, entre otros materiales de apoyo. El diario de campo del docente fue esencial para los registros y reflexiones de la experiencia de aula.

Esta experiencia de aula se llevó a cabo con un grupo de 40 alumnos, de los cuales se seleccionaron previamente para el análisis 18, que fueron escogidos de acuerdo a ciertos criterios descritos en la metodología. El marco teórico se estructuró en antecedentes del tema, definición de términos matemáticos básicos en la experiencia de aula, y fundamentaciones teóricas sobre el aprendizaje significativo y la enseñanza para la comprensión. El análisis de la experiencia de aula se hizo a través de la formulación de cinco categorías emergentes: interacción grupal y colectiva, mediación del aprendizaje mediante el uso de material concreto, manejo de diferentes formas de representación, comprobación de desempeños flexibles, y acción comunicativa. La interrelación de estas categorías, algunas veces de forma simultánea y otras de manera complementaria fue básica para lograr el objetivo propuesto.

Se considera que los materiales y la información fueron potencialmente significativos, ya que motivaron el interés de los alumnos, lo cual hizo que tuvieran una disposición al aprendizaje. Así mismo los alumnos respondieron favorablemente el desarrollo de competencias flexibles, mediante casos dados o construidos por ellos.

* Trabajo de grado

* * Facultad de Ciencias. Especialización en Educación Matemática. Dra. Jaramillo, Diana

SUMMARY

TITLE: THE EQUIVALENT FRACTIONS AND ADDITION OF RATIONAL NUMBERS: their half-filled comprehensión by means of the use of concrete material. *

AUTHOR: CORREDOR, Rojas Eduardo. * *

KEY WORDS: Mathematical education, classroom experience, racional numbers, concrete material, forms of representation of rational numbers.

DESCRIPTION OR CONTENT:

The present classroom experience, has as objective to contribute in the development of the comprehensión of the students of the grade seventh of the Superior Technical Institute of Trade of Barrancabermeja, on the concept of equivalent fractions and on the algorithm of the addition of rational numbers. During the classroom experience instruments like were used, study shops, wooden tablets, extended domino, domino of equivalent fractions, solution of daily or contextual cases among other support materials. The newspaper of field of the Teaching one was essential for the registrations and reflections of the classroom experience.

This classroom experience was carried out with a group of 40 students, of which were selected previously for the analysis 18 that were chosen according to certain approaches described in the Methodology. The theoretical mark was structured in antecedent of the theme, definition of basic mathematical terms in the classroom experience, and some theoretical foundations on the significant learning and the teaching for the comprehensión. The analysis of the classroom experience was made through the formulation of five emergent categories: interaction grupal and collective, mediation of the learning by means of the use of concrete material, handling in different representation forms, confirmation of flexible competitions, and communicative talkative action. The interrelation of these categories, sometimes in a simultaneous way and others in a complementary way were basic to achieve the proposed objective.

It is considered that the materials and the information were potentially significant, since they motivated the interest of the students, that which made that they had a disposition to the learning. Likewise the students responded the development of flexible competitions favorably, by means of given cases or built by them.

---

* Work of Degree

* * Ability of Sciences. Specialization in Mathematical Education.. Dra. Jaramillo, Diana

PRESENTACIÓN

Es muy común escuchar en los estamentos educativos y en los cuestionamientos que se hacen a la educación, que los alumnos aprenden mecánica y memorísticamente lo que se les enseña, y que por lo general no comprenden lo que “aprenden”. De igual forma, se escucha también que los docentes son renuentes a cambiar y siguen manteniendo una enseñanza tradicional, autoritaria y represiva. Sin embargo, considero que muchos docentes han venido buscando nuevas formas de llegar a los estudiantes con estrategias que permitan una mejor comprensión de lo que se enseña. Es cierto que los docentes tenemos una responsabilidad y un compromiso con la educación, que debemos asumirlos con una actitud crítica, reflexiva, positiva y propositiva, que nos posibilite avanzar y transformar nuestro quehacer docente tanto en el aula como fuera de ella. Para esa transformación se hace necesario trabajar permanentemente en propuestas alternativas de enseñanza y estar analizando diferentes experiencias de aula; sin embargo, para ese trabajo y análisis se requiere que el docente esté en una continua formación y capacitación. En ese proceso de preparación y cualificación de los docentes, las universidades y centros especializados de capacitación juegan un papel importante. Es por esto que ingresé al programa de Especialización en Educación Matemática de la UIS.

Como docente de varios años (más de 20 años) he observado que existen unos temas que se les dificultan más que otros al estudiante para aprenderlos y, por más que el profesor se esfuerce en repetirlo varias veces, por lo general haciéndolo de la misma manera, no se obtiene un resultado favorable. Generalmente la estrategia utilizada para enseñar estos temas es con la que aprendimos nosotros o, en el mejor de los casos, la que traen los textos escolares. Por lo general esta estrategia es: enseñar un algoritmo, el alumno aprende sus pasos y lo repite mediante ejercicios. En la enseñanza de los números fraccionarios positivos, y posteriormente en los números racionales, es rutinaria esta estrategia.

A través de mi práctica docente he constatado que los estudiantes aprenden el algoritmo sobre la adición de números racionales, como:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}$$

o el procedimiento de hallar el mínimo común denominador, sin entender porqué, y luego de un corto tiempo, y en especial después de verse la multiplicación de números racionales, algunos terminan convirtiendo el algoritmo en:

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{a + c}{b + d}$$

Otros aún recuerdan el procedimiento mecánicamente sin hallarle sentido y se les dificulta su aplicación para la solución de situaciones problemáticas.

En dos conversatorios celebrados en el Instituto Técnico Superior de Comercio de Barrancabermeja, en junio de 2002 y en enero de 2003, con 23 profesores de matemáticas del Instituto Técnico Superior de Comercio, de primaria y secundaria se planteó la necesidad de buscar cambios didácticos en el proceso de enseñanza aprendizaje, sobre todo en los temas relacionados a números enteros y racionales, el álgebra y la geometría. Desde entonces los profesores vienen intentando superar el hecho de que en la institución se han venido utilizando, por varios años, apenas el tablero, marcadores y en algunos cursos un texto guía, para dar o enseñar algoritmos y su ejercitación.

Motivado por estos conversatorios y teniendo en cuenta que uno de los propósitos generales del currículo de matemáticas, según los Estándares Curriculares para Matemáticas (MEN, 2002, p.14), es: "desarrollar en los estudiantes una sólida comprensión de los conceptos, procesos y estrategias básicas de las matemáticas e, igualmente, la capacidad de utilizar todo ello en la solución de problemas", comencé a preguntarme ¿cómo llegar, o cómo ayudar en la comprensión de las fracciones equivalentes y la adición de números racionales?, a partir de esta pregunta inicial comencé a pensar en la experiencia de aula y la estrategia didáctica que a continuación expongo.

Así, el presente trabajo muestra una experiencia en el aula y una estrategia didáctica cuyo objetivo general es: contribuir en el desarrollo de la comprensión, de los alumnos del grado séptimo del Instituto Técnico Superior de Comercio de

Barrancabermeja, sobre el concepto de fracciones equivalentes y sobre el algoritmo de la adición de números racionales.

Por lo tanto la estrategia didáctica implementada busca ayudar al estudiante en la construcción del concepto de fracciones racionales equivalentes a partir de un racional dado, con la utilización de un material de apoyo propuesto. De igual forma, con base en el material de apoyo construido y organizado para la estrategia, se espera la comprensión del alumno sobre el algoritmo de la adición de los números racionales. También se presentarán casos del quehacer cotidiano que posibiliten observar la comprensión de los estudiantes referente a los temas propuestos.

El material de apoyo consta de los talleres, tabletas, dominó ampliado, dominó de fracciones equivalentes y guías para su manejo. El material construido se considera innovador en el Instituto Técnico Superior de Comercio de Barrancabermeja, donde como ya fue mencionado, se trabajó con alumnos del grado séptimo haciendo referencia a los temas de racionales equivalentes (fracciones racionales equivalentes) y la adición de números racionales.

La monografía se encuentra estructurada fundamentalmente en cuatro capítulos: Marco Teórico, Metodología, Análisis de la experiencia, Conclusiones y Recomendaciones.

Para la elaboración del primer capítulo “Marco Teórico” se abordaron tres ejes de referencia: los antecedentes del tema, la definición de algunos conceptos matemáticos sobre el tema de la experiencia de aula y el aprendizaje significativo y la enseñanza para la comprensión.

En el capítulo de “Metodología” describo, entre otros aspectos, cómo se escogió el curso 7-01 y el grupo seleccionado de estudiantes para la experiencia de aula, los instrumentos que se utilizaron, y las formas como se elaboraron las categorías de análisis.

En el capítulo de “Análisis de la Experiencia” expongo, desde los datos recolectados y desde la teoría, cada categoría de análisis, su incidencia e interpretación de las mismas.

En el capítulo de “Conclusiones y Recomendaciones” doy a conocer si la estrategia didáctica utilizada en la experiencia de aula cumplió o no con los objetivos específicos propuestos, una vez hecho el análisis de las categorías formuladas y otros planteamientos derivados de la experiencia de aula, así mismo las recomendaciones que hago para mejorar o ampliar la estrategia.

1. MARCO TEORICO

El marco teórico para la presente experiencia de aula está desarrollado en tres secciones: antecedentes, definición de conceptos y términos matemáticos básicos para la estrategia, y las teorías pedagógicas orientadoras de la experiencia.

Considero necesario, como introducción a este marco teórico, iniciar con esta reflexión de Alan H. Schoenfeld:

> “La enseñanza de las matemáticas debe desarrollar la comprensión, por parte del estudiante, de conceptos dentro de un contexto de contenido apropiado... la enseñanza debe buscar la comprensión conceptual en cambio de puras habilidades mecánicas y debe buscar en los estudiantes el desarrollo de la habilidad para aplicar el tema que han estudiado con flexibilidad y resolución.
>
> La enseñanza de las matemáticas debe ayudar a los estudiantes a desarrollar lo que se puede llamar un punto de vista matemático: una predilección por analizar y comprender, por percibir estructuras y relaciones estructurales, por ver cómo las cosas se ajustan entre sí. Debe ayudar a los estudiantes a desarrollar sus habilidades analíticas, su capacidad para razonar dentro de argumentos claros y coherentes, que reflejen un estilo y una sofisticación matemática apropiada para su nivel matemático. Los estudiantes deben aprender a comunicarse con nosotros y con ellos mismos, usando el lenguaje de las matemáticas” (Schoenfeld, 1990, p.2)

Esta reflexión es coherente con la estrategia que estoy planteando en la experiencia de aula, ya que resalta la importancia de analizar, comprender, y razonar, así como la de comunicarse usando el lenguaje de las matemáticas. La anterior idea se puede reforzar con el mismo autor en el siguiente párrafo:

> “Si uno espera que los estudiantes logren los objetivos aquí descritos –en particular, a desarrollar los hábitos matemáticos apropiados, junto con las disposiciones de interpretación y comprensión y la forma de pensamiento matemático apropiado- entonces las comunidades o contextos de práctica dentro de las cuales ellos aprenden matemáticas

> deben reflejar y apoyar estas formas de comunidad en la cual la comprensión matemática, en el sentido en el que esperamos que los estudiantes la desarrollen sea practicada" (Schoenfeld, 1992, p.345)

El tema de la estrategia que estoy presentando: las fracciones equivalentes y la adición de números racionales: la comprensión mediada por el uso de material concreto, hace parte del pensamiento numérico y sistemas numéricos. Este componente del currículo, pensamiento numérico y sistemas numéricos, procura que los estudiantes adquieran una comprensión sólida tanto de los números, las relaciones y operaciones que existen entre ellos, como de las diferentes maneras de representarlos. Incluye, por lo tanto el pensamiento numérico y sistemas numéricos como lo menciona la Cartilla Herramientas Pedagógicas para la Contextualización de los Estándares (2003, p.18) "la comprensión de los números y de la numeración, la comprensión del concepto de las operaciones, sus propiedades, las relaciones entre ellas, los cálculos y las aplicaciones de dichas operaciones a diferentes contextos"

1.1 ANTECEDENTES

Bello y Salazar (2004) hacen un breve recuento de la historia de las fracciones y para ello se basan en estudios de diversos investigadores sobre el tema de las fracciones en la escuela como, entre otros, Llinares (1988) y, especialmente, en las propuestas de Godino, Cid y Batanero (2003), en los cuales reconocen la importancia de analizar históricamente cómo aparecieron las nociones de fracción y razón. Según Bello y Salazar (2004) las fracciones y razones surgieron como conceptos distintos en las matemáticas y se diferenciaban concretamente por su funcionalidad. Las primeras permitían repartir y las otras medir. Muchos años después estos conceptos se sintetizaron y generalizaron dando pie a los números racionales positivos y posteriormente a los números racionales.

Los autores también consideran que la consolidación de los números racionales involucró el concepto de fracciones equivalentes, el cual estableció las distintas clases de equivalencia. Así mismo, afirman que los problemas de estructura aditiva en los números racionales, como lo proponen Godino, Cid y Batanero (2003), pueden clasificarse en:

- Situaciones parte/todo
- Situaciones de transformación
- Situaciones de reunión
- Situaciones de comparación

Bello y Salazar (2004) plantean para cada una de las anteriores clasificaciones un ejemplo aclaratorio y estructural de la situación. Sintetizando los ejemplos que los autores ofrecen sobre cada situación podemos mencionar:

- Situaciones parte/todo: “Julián compró una finca, en la parte destinada para los cultivos hay sembrados árboles frutales: 1/4 para limón y 1/4 para naranjas”. Aquí se presentan dos partes y un todo. Las dos partes son el área destinada al limón y las naranjas y un todo que es la mitad del terreno.
- Situaciones de transformación: “el hermano de Julián es propietario de una finca de la misma área que la finca de Julián. Si él le regala a Julián la mitad

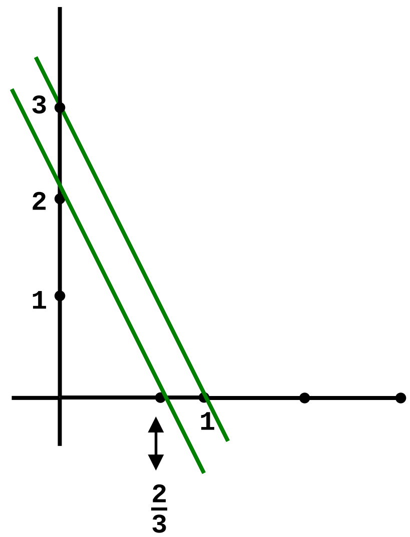
del terreno, ¿qué parte del área de las fincas le corresponde ahora a Julián?" En esta situación se evidencia una transformación en el área inicial de la que era dueño Julián.

- Situaciones de reunión: "María y Juan tienen cada uno partes distintas de dos pasteles de igual tamaño; María tiene 2/3 de pastel y Juan tiene 1/3 de pastel. ¿qué parte de los pasteles tienen entre los dos?" Observamos aquí que se reúnen la parte de Juan y la parte de María.
- Situaciones de comparación: "María y Juan tienen cada uno partes distintas de pasteles de igual tamaño. María tiene 1/4 más de pastel que Juan. Si Juan tiene 2/4 de pastel, ¿qué parte de pastel tiene María?" Obsérvese que aquí se presenta una comparación entre la cantidad de pastel de María y de Juan.

En Centeno, G., Centeno, H., y Jiménez, N (1997) encontramos que los egipcios fueron los primeros que usaron las fracciones. Los babilonios desarrollaron un sistema de notación fraccionaria que permitió establecer aproximaciones decimales. En la antigua china se aplicaba la división de fracciones utilizando la forma de reducirlas a un común denominador, por ejemplo:

$$\frac{5}{4} \div \frac{2}{8} = \frac{10}{8} \div \frac{2}{8} = \frac{10 \div 2}{8 \div 8} = \frac{5}{1} = 5.$$

De igual forma podemos mencionar que los griegos, muy interesados en la geometría, hicieron construcciones de fracciones. Por ejemplo, para representar el número 2/3 en la recta numérica trazaban una línea vertical no necesariamente perpendicular a la recta numérica y la dividían en el número de partes iguales que expresara el denominador y luego realizaban el proceso como lo señala a continuación la gráfica:



Por otra parte, es muy importante referirse a uno de los documentos sobre números fraccionarios realizado por Carlos Eduardo Vasco Uribe, (Vasco 1994) como asesor del Ministerio de Educación Nacional, titulado el "Archipiélago Fraccionario". En él se realiza un detallado análisis de los fraccionarios y se presentan consideraciones sobre cómo deben ser tratados y enseñados con los niños y jóvenes.

El autor inicialmente nos coloca una comparación entre el procedimiento pedagógico usual y el procedimiento recomendado sobre cómo debe ser el paso por los sistemas simbólicos, conceptuales y concretos. El procedimiento pedagógico usual es el de tratar de pasar de los sistemas simbólicos a los conceptuales, que según Vasco (1994), sólo logran unos pocos alumnos, los más hábiles para la abstracción y la conceptualización; mientras que la mayoría no logra este paso y trata de defenderse manipulando mecánicamente los símbolos, repitiendo definiciones de memoria y adivinando lo que quiere el profesor. El procedimiento recomendado por Vasco (1994) es el de partir de la investigación de los sistemas concretos, que ya manejan en alguna forma los alumnos, para llegar a los sistemas conceptuales que se desea que ellos construyan, por ejemplo, abreviaturas del lenguaje ordinario, inventar nuevos sistemas simbólicos, etc.

En el archipiélago fraccionario existen varias islas que podríamos llamar las islas de los fraccionarios, tales como: operadores, partidores, medidores, razones, cocientes indicados y la isla de los puntos conmensurables. A través del documento, (Vasco, 1994) nos explica cómo deben ser tratadas estas islas y cómo se debe pasar de una isla a otra y, además, nos hace caer en la cuenta de los posibles errores que se pueden cometer.

Se recalca, en el texto de Vasco (1994), que en la básica secundaria hay que completar los fraccionarios positivos con los negativos. Y en ello debemos tener en cuenta que si vamos a construir el puente entre los operadores y los puntos de la recta numérica, hay que empezar primero con la semirrecta numérica, porque las magnitudes físicas que manejan los alumnos generalmente no tienen valores negativos. Al introducir los fraccionarios negativos hay que tener cierto cuidado entre el sistema aditivo, que corre los puntos de la recta numérica hacia adelante y hacia atrás, y el sistema multiplicativo, que aumenta y disminuye las distancias desde el origen. Por lo tanto, cuando se está hablando sólo del sistema aditivo es mejor no hablar de “achicar” y “agrandar”, o de “aumentar” y “disminuir”, como se hacía en el sistema multiplicativo, sino de correr, empujar o deslizar los fraccionarios como puntos hacia adelante o hacia atrás.

Nos dice el autor que se observa que es natural considerar que a cada número fraccionario marcado a la derecha del cero le corresponde uno opuesto o inverso aditivo marcado a la izquierda, y que el opuesto de ese opuesto es otra vez el de la derecha. Nos afirma además que si se quiere recuperar el sistema multiplicativo una vez introducido el grupo aditivo de los fraccionarios positivos y negativos, hay que presentar el operador -(-) como un operador aparte, que lo llama reflejador o reflector, que ni aumenta ni disminuye las distancias medidas a partir del cero, pero sí cambia la orientación. Por eso si se aplica dos veces, vuelve a dejar las cosas como estaban.

Sobre las fracciones también es importante mencionar el trabajo de Llinares y Sánchez (1996) sobre la comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. En este estudio resaltan el papel que pueden desempeñar los diferentes modos de representación de las fracciones en su proceso de aprendizaje. Afirman Llinares y Sánchez (1996, p.115) que “se necesita conocer el papel que desempeñan los distintos modos de representación que se pueden utilizar con los números racionales, en el proceso de aprendizaje de estas ideas por los estudiantes”. Sobre este particular, Llinares y Sánchez (1996, p.100) hacen claridad que “entendemos por modos de representación a referentes concretos, gráficos, situaciones, etc., vinculados a una noción matemática que puedan ayudar a los alumnos a comprenderla"

Resaltan Llinares y Sánchez (1996) que una parte esencial de lo que debe saber el docente de los números racionales, cuando se mira desde la perspectiva de la enseñanza, es que el "profesor sea capaz de trasladarse de significados asociados a las fracciones y de utilizar diferentes modos de representación como una forma de ayudar a sus alumnos a comprender los números racionales" (Llinares y Sánchez, 1996, p.108)

Además los autores hacen hincapié en que una de las consecuencias más importantes que se derivan de la influencia de los símbolos en la comprensión de las fracciones, son las dificultades puestas de manifiesto en manejar la idea de unidad.

Estiman los autores Llinares y Sánchez (1996, p.107) que "la posibilidad de dotar de significados a los procesos de resolución de las tareas propuestas, utilizando referentes concretos indica una característica de la comprensión matemática necesaria para los profesores".

En la Universidad Industrial de Santander he podido conocer el trabajo de Rey (1996) denominado: "Ensayo Metodológico para el Aprendizaje de Fraccionarios", trabajo de grado en la Especialización en Educación Matemática, el cual tiene como objetivo realizar una experiencia didáctica para el aprendizaje de fraccionarios en el grado sexto del Colegio de Santander de Bucaramanga. Rey (1996) partió de la formulación del siguiente problema: ¿Es posible desarrollar el pensamiento matemático y construir el concepto de fraccionarios y los criterios que conllevan a la adición y la sustracción de fraccionarios?. En este proyecto se trabajan únicamente los fraccionarios positivos y en él se utilizaron como recursos didácticos: guías individuales; una esfera y un cubo de plastilina subdividido en cuarenta fichas plásticas, de colores, por grupos, para construir el concepto de fraccionarios como partidores; fichas individuales de trabajo; cintas plásticas y pitas no elásticas de una vara de magnitud, para inducir a los estudiantes a estructurar el concepto de fraccionarios como medidor; monedas de cinco pesos; un juego de carreras sobre fraccionarios, para manejar las equivalencias.

En una de las conclusiones del trabajo, Rey (1996) dice que el enfoque constructivista a través de problemas es bastante estimulador del interés por el estudio de la matemática.

También en la Universidad Industrial de Santander está el trabajo de grado de la Especialización en Educación Matemática de Silva (1996) titulado "Ensayo Metodológico para la Construcción del Concepto de Fraccionarios". Este proyecto se desarrolló mediante actividades lúdicas, utilizando el geoplano para facilitar los conceptos de fracción, fracciones equivalentes, orden y adición, sustracción de fracciones en el aula de clase. El autor señala que el uso del geoplano permitió la posibilidad de construir y visualizar los conceptos de una forma precisa y concreta y afirma que se llegó a la conceptualización de una manera clara y sencilla en menos tiempo y sin mayor dificultad que cuando se trabaja en el tablero.

1.2 DEFINICIÓN DE ALGUNOS CONCEPTOS MATEMÁTICOS SOBRE EL TEMA DE LA EXPERIENCIA DE AULA

Para el presente trabajo es importante clarificar el concepto de fracciones equivalentes y el de número racional y por consiguiente de la igualdad de números racionales.

Hay que recordar que toda relación de equivalencia definida sobre un conjunto determina una partición sobre dicho conjunto. La relación de igualdad de fracciones es: dos fracciones **a/b** y **c/d** son iguales si y sólo si **ad = bc**. La relación de igualdad definida en los fraccionarios es una relación de equivalencia, entonces el conjunto de los fraccionarios queda particionado en clases de equivalencia, donde los elementos de cada clase de equivalencia son todas las fracciones equivalentes. A cada una de estas clases les podemos asociar un número, que llamaremos número racional. Por lo tanto un número racional esta constituido por una fracción irreducible y todas sus equivalentes.

Teniendo en cuenta que la experiencia de aula se aplica en el grado 7º podemos dar esta definición en forma de conjunto:

$$\mathbf{Q = \{a/b;\ a, b \in Z,\ b \neq 0\}}$$

Debemos resaltar que los números enteros son racionales, pues se pueden expresar como cociente de ellos mismos por la unidad: **a = a/1**.

La adición de los números racionales va a tener como base principal el hecho de poder reemplazarlos por fracciones equivalentes (racionales equivalentes o igualdades de racionales).

1.3 EL APRENDIZAJE SIGNIFICATIVO Y LA ENSEÑANZA PARA LA COMPRENSIÓN

Esta experiencia de aula tiene como soporte orientador las teorías pedagógicas del aprendizaje significativo y la enseñanza para la comprensión.

1.3.1 El Aprendizaje Significativo. La principal contribución de la teoría de Ausubel fue el acento puesto en el poder del aprendizaje significativo, en contraste con el aprendizaje mecánico o memorístico, y la claridad con la que describió el importante papel que juega el conocimiento anterior en la adquisición del nuevo conocimiento. El aprendizaje significativo puede ser representacional (aprender significados de símbolos o palabras), conceptual (aprendizaje de conceptos) o proposicional (aprendizaje de ideas), (Ausubel, Novak y Hanesian, 1990)

Es de anotar que el aprendizaje memorístico o repetitivo se produce cuando “la tarea de aprendizaje consta de puras asociaciones arbitrarias” (Ausubel, Novak y Hanesian, 1990, p.37) esto quiere decir que en este aprendizaje memorístico me aprendo de memoria números, listas, pares asociados, etc., y por lo tanto en la asociación de los conceptos no hay una relación sustancial y con significado lógico, sino una relación de aprendizaje al pie de la letra y sin comprender el significado de lo que se aprende.

Ausubel, Novak y Hanesian, (1990, p.48) afirman que:

> "El aprendizaje significativo comprende la adquisición de nuevos significados y, a al inversa, éstos son producto del aprendizaje significativo. La esencia del proceso del aprendizaje significativo reside en que ideas expresadas simbólicamente son relacionadas de modo no arbitrario y sustancial (no al pie de la letra) con lo que el alumno ya sabe. Por relación sustancial y no arbitraria queremos decir que las ideas se relacionan con algún aspecto existente específicamente relevante de la estructura cognoscitiva del alumno, como una imagen, un símbolo ya significativo, un concepto o una proposición. El aprendizaje significativo presupone que el alumno manifiesta una disposición para relacionar sustancial y no arbitrariamente el nuevo material con su estructura cognoscitiva"

De todo lo anterior, puedo decir que el aprendizaje significativo necesita de tres condiciones para que se produzca:

- ❖ Los nuevos materiales o información a aprender debe ser potencialmente significativos, para poder ser relacionados con las ideas relevantes que posee el alumno.
- ❖ La estructura cognitiva previa del alumno debe poseer las necesarias ideas relevantes para que se puedan relacionar con los nuevos conocimientos.
- ❖ La disposición del alumno al aprendizaje significativo. Es decir, hay una disposición en el alumno que indica interés por dedicarse a un aprendizaje en el que intenta dar un sentido a lo que aprende.

¿Cuándo un material es potencialmente significativo? La significación potencial quiere decir que el material de aprendizaje (contenido cultural) puede ser puesto en conexión, de modo no arbitrario, superficial y objetivo, con la estructura cognitiva de un determinado individuo. En general, podemos decir que el nuevo material debe ser "susceptible de dar lugar a la construcción de significados" (Coll, 1990, p.195).

Podemos observar que el aprendizaje significativo debe estar relacionado con la comprensión de la estructura de la unidad temática de trabajo que el alumno debe adquirir, es decir, de las ideas fundamentales y sus relaciones. Necesariamente este aprendizaje de estructuras conceptuales tiene que implicar la comprensión de las mismas, ya que, como se dijo anteriormente, no se puede obtener con el aprendizaje repetitivo – memorístico.

1.3.2 La Enseñanza para la Comprensión. Es importante destacar los planteamientos y reflexiones de Martínez y Herrera (2002), en los cuales señalan que los contenidos curriculares son necesarios pero debemos decir que no solamente son informaciones, datos e instrucciones. Y a grosso modo, Martínez y Herrera (2002) nos dicen que por lo general siempre se ha criticado que el currículo se limite a que el estudiante memorice una información (datos, fechas, sucesos, propiedades, características, instrumentos, procedimientos) en cualquiera de las áreas del conocimiento y que luego, cuando se produzca la evaluación el estudiante repita con la mayor fidelidad posible lo que oyó, observó o leyó, sin comprender el dónde, por qué, para qué de lo memorizado.

Los contenidos, según Martínez y Herrera (2002, p.71) “además de satisfacer la necesidad de saber algo que no se conocía, deben permitir el desarrollo de la comprensión, el análisis crítico, la imaginación, la creatividad, y también son la base para entender y apropiarse de unos valores o desarrollar unas habilidades y unas destrezas”.

Lo que quiere decirse en lo anterior, es que en cuanto a temas y contenidos, el estudiante comprenda más allá de lo que fue grabado en su cerebro, permitiéndole saber qué tiene que ver eso con otros conocimientos, con la realidad, o con la comprensión del mundo.

Al respecto, para hablar de la comprensión, voy a tomar apartes de un escrito de Vito Perrone, contenido en el libro “Didáctica” El Arte de Enseñar, de Osorio (2002), donde nos deja ver pautas y afirmaciones sobre la enseñanza para la comprensión, que son orientadoras para la propuesta.

Perrone nos dice que lo que cada persona aprende tiene que ser internalizado y factible de ser utilizado en muchas circunstancias diferentes dentro y fuera de las aulas, como base para un aprendizaje constante y amplio, siempre lleno de posibilidades.

Describe Perrone, que el uso de la palabra comprensión en propuestas educativas particulares también tiene una larga historia. Según Perrone, *El Oxford Dictionary of the English Language* nos dice que en la Edad Media, la palabra tenía un sentido bastamente moderno: captar la idea, comprender algo, ser consciente. En 1898 el *Universal Dictionary of the English Language* definía “comprender” de esta manera: “Aprehender o captar plenamente; saber o aprehender el sentido, importancia, intención, motivo de; percibir por medio de la mente; apreciar la fuerza o valor de; asociar un sentido o interpretación a; interpretar; explicar; ser inteligente y consciente”.

También dice Perrone que nuestro enfoque para la comprensión se beneficia del legado de Froebel, Herbart, Pestalozzí, Parker y Dewey. Y dice que Johann Pestalozzí en sus obras de pedagogía sugería evitar la memorización, la verbalización de reglas y conceptos en ausencia de la comprensión y, por cierto, todas las actividades de aprendizaje que no podían conectarse fácilmente con la vida del alumno. Sus puntos de partida pedagógicos eran el niño y las experiencias del niño, los materiales concretos con los cuales el niño trabajaba, las relaciones de estos materiales y experiencias con otros objetos e ideas, lo cual es, en lo esencial, la base para la comprensión.

El autor también cita al *Nacional Council of Teachers of Mathematics* (NCTM) para indicar que éste pone el énfasis en integrar tópicos para que los estudiantes comprendan las ideas matemáticas relacionadas entre sí y en relación con el mundo de todos los días. Las normas piden que se cambie el énfasis de un currículo dominado por la memorización de hechos y procedimientos aislados y por la solvencia en las habilidades con papel y lápiz, a uno que enfatice la comprensión conceptual, las representaciones y conexiones múltiples, la modelación matemática y la resolución matemática de problemas.

Y sobre los avances de la comprensión y los desempeños de la misma es conveniente citar también a Jaramillo, Escobedo y Bermúdez (2002), que analizan:

> "En las últimas décadas hemos visto diversos e interesantes cambios en la forma como se dan los procesos de enseñanza y aprendizaje en la escuela y en el aula. Vale destacar los cambios habidos en los propósitos tanto pedagógicos como sociales que se le plantean a la enseñanza, ahora orientados en mayor medida hacia el desarrollo de las potencialidades de pensamiento, valorativas, comunicativas, creativas de los estudiantes, y hacia el desarrollo de seres autónomos. De igual manera se han dado cambios importantes en el tipo de contenidos incluidos, no sólo por su carácter más explicativo, sino también por la mayor inclusión explícita de contenidos valorativos y procedimentales. Finalmente, no deben olvidarse los cambios sustanciales en las relaciones sociales escolares, cada vez menos autoritarias y verticales.
>
> A pesar del panorama alentador que se desprende de estas transformaciones, sigue presente en la raíz de los procesos educativos un problema altamente preocupante relacionado con el tema que nos ocupa: la comprensión. En efecto, la gran mayoría de los estudiantes que se gradúan de la educación básica, lo hacen sin haber comprendido lo que aprendieron. Y esto les sucede no sólo a los estudiantes que logran terminar sus estudios después de muchos fracasos, sino también a aquellos que siempre tuvieron "éxito" en el proceso".

Para darle peso teórico a lo anterior, los autores se basan en varias investigaciones de otros autores, señalando:

> "que la mayoría de los estudiantes, tanto los que tienen mucho éxito académico como los que tienen poco, responden a los exámenes sin comprender la esencia de los problemas que están resolviendo; y entre otras cosas dicen que los estudiantes juzgan sin analizar los fenómenos sociales que los afectan; que defienden posiciones sin presentar evidencias o argumentos sólidos; que los problemas morales y éticos los consideran tan relativos que raras veces los enfrentan racionalmente o que, cuando lo hacen, argumentan sus posiciones sin ninguna consideración por "el otro"; que reducen la complejidad de cualquier obra artística a descripciones ligeras sin exploración de sentido, etc. En pocas palabras sostienen que lo que aprenden los estudiantes no les sirve para orientar su acción en el mundo en el que viven" (Jaramillo, Escobedo y Bermúdez, 2002, p.30)

Jaramillo, Escobedo y Bermúdez (2002), manifiestan que, las investigaciones del Proyecto Zero[1] mostraron que si en vez de pedirles a los estudiantes que reproduzcan los conocimientos aprendidos de manera casi idéntica, de memoria o mecánicamente, más bien se les pidiera que utilizaran el conocimiento aprendido y comprendido para crear o producir un producto, se fortalecería la comprensión ya que los estudiantes utilizarían de manera creativa e ingeniosa sus conocimientos para resolver o crear una obra nueva y propia, además afirman los autores, que tanto el estudiante como el maestro pueden tomar conciencia de las fortalezas y los vacíos de esta comprensión y reorientar los siguientes pasos de su aprendizaje.

Se puede analizar que la comprensión se reconoce por medio de un criterio de desempeño flexible. Esa comprensión, puedo decir, que se va a presentar cuando la persona puede pensar y actuar con flexibilidad a partir de lo que ya sabe.

[1] En 1990 un equipo de investigadores de la Escuela de Educación de la Universidad de Harvard inició un conjunto de investigaciones llamado Proyecto Zero que se proponían llegar a precisar las características de la comprensión -y la ausencia de ella- con el fin de dilucidar el tipo de acciones pedagógicas que los profesores debían llevar a cabo para promoverla y que recibió el nombre de “Enseñanza para la Comprensión”.

2. METODOLOGÍA

Para planear la experiencia de aula y la estrategia didáctica desarrollada, partí de la inquietud de buscar una manera de enseñar los números racionales, que no fuera el simple aprendizaje de sus algoritmos y su ejercitación, sino que contribuyera al desarrollo de la comprensión. Sin embargo, ante la necesidad de lograr algo en corto plazo (máximo un año) empecé a analizar cómo lograrlo. Con la insinuación de varios docentes durante las asignaturas de la especialización, ví la necesidad de limitar este propósito a algo más realizable y factible de llevar en el tiempo disponible; de ahí que la estrategia didáctica se desarrolló sobre las fracciones equivalentes y la adición de números racionales.

Una vez definido el tema y el objetivo del trabajo, y conociendo además el plan curricular de estudios del Instituto Técnico Superior de Comercio de Barrancabermeja, donde el tema de los números racionales se estudia en 7º grado, y considerando que precisamente en el año 2003 tenía a mi cargo cuatro de los seis cursos de 7º grado que había en la jornada de la mañana, decidí entones llevar a cabo la estrategia didáctica.

De los cuatro cursos de 7º grado a mi cargo, tomé la decisión de realizar la experiencia de aula en el curso 7-01. Fueron varios los motivos que me llevaron a esa decisión: que las cuatro horas de aritmética[2] estaban ubicadas en dos bloques de dos horas, que permitían un trabajo más secuencial y la posibilidad para completar las actividades sin tener que ser suspendidas, siempre y cuando fueran planeadas adecuadamente. También, porque las horas de clase no correspondían al horario del día lunes, lo cual aseguraba que no se cruzaban con los lunes festivos. Y algo muy importante, cuando se les comentó la idea a los alumnos, fueron muy receptivos y mostraron disposición a colaborar.

En el curso 7-01, en junio de 2003, apliqué y analicé, una prueba diagnóstica. El objetivo de esta prueba era saber qué recordaban o conocían de las fracciones positivas y sus operaciones, y si tenían conocimiento de los números racionales, o qué conjeturas podían aportar. Con esta información pasé a formular el proyecto de grado.

Se escogieron para la experiencia de aula a 18 de los 40 alumnos del curso 7-01. Para la selección de los 18 alumnos se tuvo en cuenta los siguientes criterios: se escogieron dos grupos de alumnos, un grupo donde estaban los alumnos que se consideraban “sobresalientes o excelentes”[3] según los dos boletines[4] anteriores y otro grupo donde estaban alumnos “aceptables o insuficientes”, también según los dos boletines anteriores. En cada uno de estos grupos se hicieron unos subgrupos teniendo en cuenta la edad de 11, 12 y 13 años y se hizo una selección

2 En la Institución se asignan para el grado 7º cinco horas de matemáticas, de las cuales cuatro horas corresponden a Aritmética y una hora a Geometría.
3 Según el Decreto 230 del 11 de febrero de 2002, se utilizan 5 criterios de valoración: Excelente, Sobresaliente, Aceptable, Insuficiente y Deficiente. En el plantel el criterio de valoración Deficiente se aplica con mucho cuidado, para cuando el alumno no tiene ningún tipo de asimilación y desempeño, o presenta numerosas faltas de asistencia.
4 En el Colegio se entregan cuatro boletines, es decir, el año lectivo se divide en 4 períodos de 10 semanas cada uno.

al azar de 2 alumnos de 11 años, 5 alumnos de 12 años y 2 alumnos de 13 años, es decir, en cada grupo se sacaron 9 estudiantes. Es de anotar que el promedio de edad del curso es 12,03 $\cong$ 12 años.

A los estudiantes seleccionados se les pidió el consentimiento para formar parte de la respectiva experiencia. Para ello, además de hacerlo verbalmente, lo dejaron por escrito al inicio y final de la experiencia en el diario de campo del docente, al cual me seguiré refiriendo como (DC). Los 18 alumnos seleccionados fueron: Claret Maryory, Luis Fernando, Andrea Isabel, Cristian Andrés, Shirley, Daniela, Erika, Mayra Alejandra, Yurleidy Saray, Adriana Lucía, Lizeth Johanna, Lizeth, Ingri Johanna, Gilberto, Jhulianys, Mario Andrés, Alejandra y Mayerly[5]

Las descripciones de las observaciones de las actividades y acciones de la experiencia, se registraron en el DC. Según Porlán y Martín (1993, p.32) el diario de campo es considerado como "Un instrumento útil para la descripción, el análisis y la valoración de la realidad escolar". En la experiencia de aula el diario de campo fue fundamental para registrar las relatorías de las observaciones y reflexiones durante el desarrollo de la propuesta. El DC según Acero (1997) está constituido por las notas diarias en el momento de la observación o después. También dice el autor que en él se consignan, además de las observaciones, las experiencias, apreciaciones, sentimientos, reacciones. Hay algo muy importante del DC que lo da a conocer el mismo Acero (1997, p.14) en los siguientes términos:

[5] Nombres reales de los alumnos que participaron en la experiencia de aula.

> “El Diario de Campo es el instrumento que favorece la reflexión sobre la praxis, llevando a la toma de decisiones acerca del proceso de evolución y la relectura de los referentes, acciones estas, normales en un docente investigador, agente mediador entre la teoría y la práctica educativa. A través del Diario de Campo se pueden realizar focalizaciones sucesivas en las problemáticas cotidianas sin perder la relación de contexto; propicia el desarrollo de niveles descriptivos, analítico – explicativos, valorativos y prospectivos dentro del proceso investigativo y reflexivo del docente – educador”

En la implementación de la estrategia didáctica se utilizaron además del DC instrumentos como:

- ❖ Las tabletas
- ❖ El dominó ampliado y el dominó representativo de las fracciones equivalentes
- ❖ Las guías con la finalidad de servir de orientación paso a paso en el manejo de las tabletas
- ❖ Talleres: se diseñaron 3 talleres
- ❖ Un escrito o caso relacionado con la vida real, donde los estudiantes plantean alternativas de solución de acuerdo a la comprensión del mismo
- ❖ Así mismo, escritos realizados por los estudiantes

La aplicación de estos instrumentos en la experiencia de aula fue en el siguiente orden: taller N° 1; manejo de las tabletas con la guía N° 1; manejo de las tabletas con la guía N° 2; taller N° 2; caso a resolver por parte de cada grupo de trabajo; dominó representativo de fracciones equivalentes; dominó ampliado; y taller N° 3.

La aplicación y evaluación de cada uno de estos instrumentos se realizó en el Análisis de la Experiencia de Aula en el capítulo 3. A continuación se presenta el esquema de cada uno de ellos:

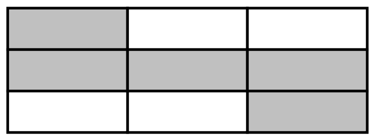
TALLER N° 1

INSTITUTO TËCNICO SUPERIOR DE COMERCIO DE BARRANCABERMEJA

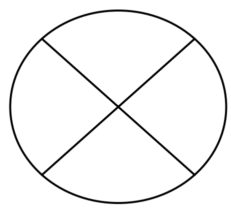
II semestre de 2003

OBJETIVO: que los estudiantes comprendan que las fracciones operan sobre las magnitudes y no sobre los objetos y analizar la representación de las fracciones en la recta numérica y en gráficas.

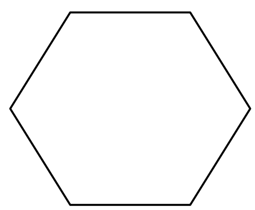
1. Qué parte del rectángulo está sombreado:



2. Colorea los $\frac{2}{4}$ del área del círculo

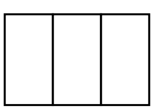


3. En la siguiente figura colorea los $\frac{2}{6}$ del perímetro.

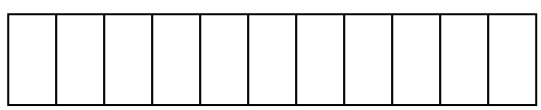


4. Si tengo los siguientes dos rectángulos

P



Q

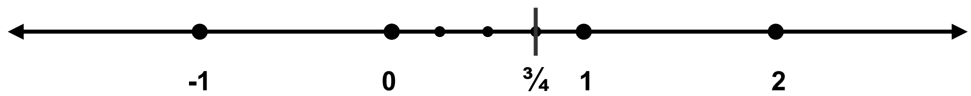


Si el rectángulo **P** se utiliza para medir el área del rectángulo **Q**, completa las siguientes frases:

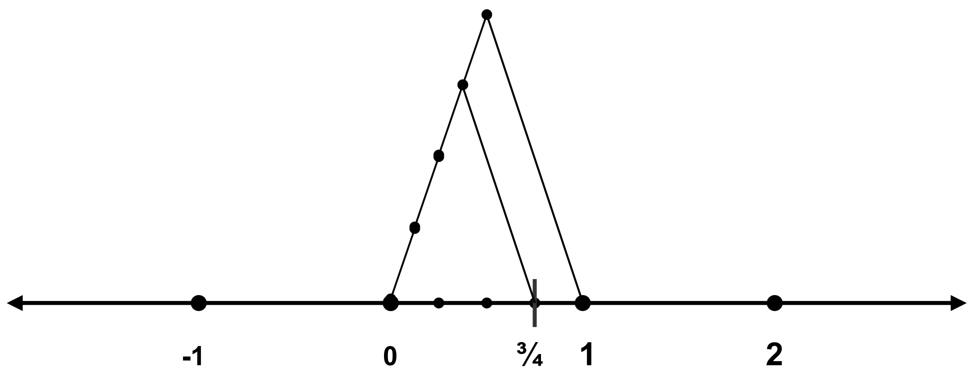
“El área de **Q** es igual a ________________ del área de **P**“

“El área de **P** es igual a ________________ del área de **Q**”

5. Observa que si en la recta numérica represento 3/4 quedaría:

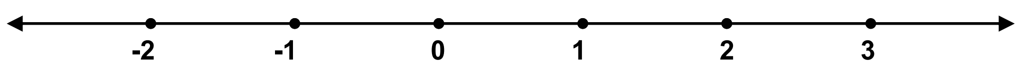


También lo puedo representar así:



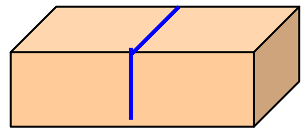
Por favor, utilizando el método anterior (usa el compás y la regla) representa en la siguiente recta numérica:

$\frac{3}{5}$, $\frac{7}{4}$ y $\frac{2}{2}$

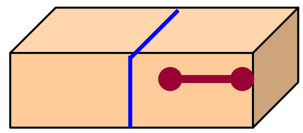


Con relación a 3/4 ¿Qué puede decir de **3/5**, **7/4** y **2/2**?

6. Tengo el siguiente ladrillo:



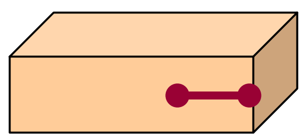
donde su volumen (espacio que ocupa el ladrillo) lo he dividido en dos partes como lo señala la línea azul en la figura. Luego cada parte me representa la mitad (1/2) del ladrillo. Por insinuación de un amigo le introduje un tornillo de hierro como muestra la figura.



Realice y analiza las siguientes situaciones:

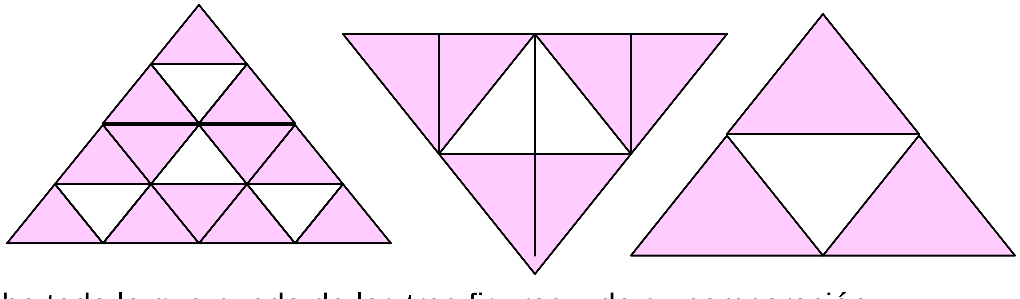
a) Al dividir la masa del ladrillo en dos partes iguales, de tal manera que cada parte sea 1/2 ¿Cómo se haría en la figura de abajo?

b) ¿Cada parte del ladrillo dividido de acuerdo a la masa y cada parte del ladrillo dividido según el volumen serán iguales?



7. Al representar en una recta numérica: 2/2, 3/3, 4/4, 5/5, 6/6 ¿Dónde los ubicaría? Explica. ¿Qué puede concluir?

8. Observa las siguientes figuras:

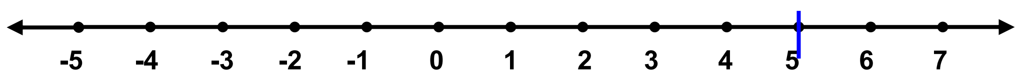


Describe todo lo que pueda de las tres figuras y de su comparación.

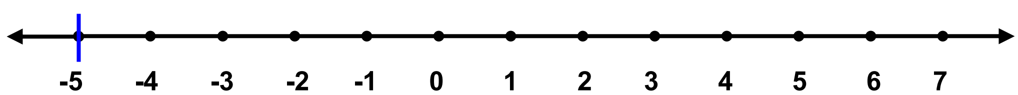
Para comprobar lo que consignaste, utiliza tres figuras congruentes a las anteriores, dibújalas por aparte, recórtalas y compáralas.

Representa los números que expresan cada figura en la recta numérica, ¿Qué observas? ¿Qué puedes decir?

9. Sabemos, por los números enteros, que 5 queda en la recta numérica en la parte derecha del cero.

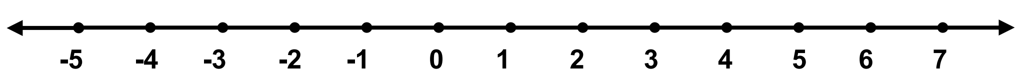


Y su inverso u opuesto aditivo es -5 lo encontramos en la parte izquierda del cero, con la misma distancia.



Luego para **a** su opuesto es **–a** y para **–a** su opuesto es **– (–a) = a**.

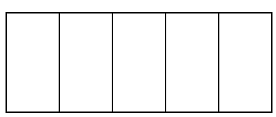
Para los números racionales ocurre lo mismo. Representa en la recta numérica a **5/3** y su opuesto aditivo.



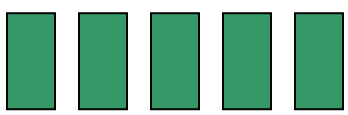
Material de las tabletas

Las tabletas tienen como objetivo representar simbólicamente números racionales positivos y números racionales negativos, y luego manipular dichas tabletas en la comprensión de las fracciones equivalentes y adición de números racionales.

Las tabletas utilizadas en la experiencia de aula fueron elaboradas en madera de balso y en cartón paja. Se elaboraron unas tabletas guías de color blanco divididas en partes iguales por líneas verticales para representar unidades positivas y otras tabletas de color verde para representar las partes de esa unidad, por ejemplo:



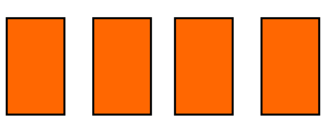
Guía blanca que representa una unidad positiva dividida en 5 partes iguales.



Partes de color verde que representan cada una 1/5, es decir una parte de las 5 partes de la unidad.

Se elaboraron otras tabletas guías de color negro divididas en partes iguales por líneas verticales para representar unidades negativas y otras tabletas de color naranja para representar las partes de esa unidad, por ejemplo:

Guía negra que representa una unidad negativa dividida en 4 partes iguales



Partes de color anaranjado que representan cada una 1/4, es decir una parte de las 4 partes de la unidad.

GUÍA N° 1

INSTITUTO TËCNICO SUPERIOR DE COMERCIO DE BARRANCABERMEJA

II semestre de 2003

Los estudiantes formarán grupos de 3 alumnos, e irán desarrollando cada actividad utilizando los materiales dados (las tabletas) y con la orientación del profesor se van sacando conclusiones y construyendo conceptos.

1. Representar con el material de las tableta los siguientes racionales:

   a) $\frac{1}{2}$; $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{6}$; $\frac{4}{8}$; $\frac{3}{5}$; $\frac{6}{10}$; $\frac{9}{15}$.

   b) $-\frac{1}{2}$; $-\frac{2}{4}$; $-\frac{3}{6}$; $-\frac{4}{8}$; $-\frac{3}{5}$; $-\frac{6}{10}$; $-\frac{9}{15}$.

2. Una vez representados los anteriores racionales cada grupo va a comparar los siguientes pares de racionales y, a cada par, analizan qué observan y en una hoja lo consignan:

   a) $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{4}$; $\frac{3}{6}$ y $\frac{4}{8}$; $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{6}$; $\frac{1}{2}$ y $\frac{4}{8}$; $\frac{2}{4}$ y $\frac{3}{6}$; $\frac{2}{4}$ y $\frac{4}{8}$.

   b) $\frac{3}{5}$ y $\frac{6}{10}$; $\frac{3}{5}$ y $\frac{9}{15}$; $\frac{6}{10}$ y $\frac{9}{15}$.

   c) $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{2}{4}$; $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{3}{6}$; $-\frac{1}{2}$ y $-\frac{4}{8}$; $-\frac{2}{4}$ y $-\frac{4}{8}$.

   d) $-\frac{3}{5}$ y $-\frac{6}{10}$; $-\frac{6}{10}$ y $-\frac{4}{8}$; $-\frac{2}{4}$ y $-\frac{4}{8}$.

   e) $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{5}$; $\frac{9}{15}$ y $\frac{2}{4}$; $-\frac{3}{5}$ y $-\frac{1}{2}$; $\frac{6}{10}$ y $-\frac{2}{4}$.

3. Cada grupo de estudiantes, en una hoja adicional, va a representar en la recta numérica de cada ítem anterior un par de fracciones del punto 2 y describir qué observan en la representación de cada pareja.

4. Escriban en cada casilla un número que cumpla el resultado:

$\frac{1 \times [\ \ ]}{2 \times [\ \ ]} = \frac{2}{4}$ $\quad \frac{1 \times [\ \ ]}{2 \times [\ \ ]} = \frac{4}{8}$ $\quad \frac{1 \times [\ \ ]}{2 \times [\ \ ]} = \frac{3}{6}$.

$\frac{2 \times [\ \ ]}{4 \times [\ \ ]} = \frac{4}{8}$ $\quad \frac{3 \times [\ \ ]}{5 \times [\ \ ]} = \frac{9}{15}$.

$\frac{9 \div [\ \ ]}{15 \div [\ \ ]} = \frac{3}{5}$ $\quad \frac{6 \div [\ \ ]}{10 \div [\ \ ]} = \frac{3}{5}$ $\quad \frac{4 \div [\ \ ]}{8 \div [\ \ ]} = \frac{1}{2}$.

A qué conclusiones llegan en relación a la actividad realizada con las tabletas.

GUIA N° 2

INSTITUTO TËCNICO SUPERIOR DE COMERCIO DE BARRANCABERMEJA

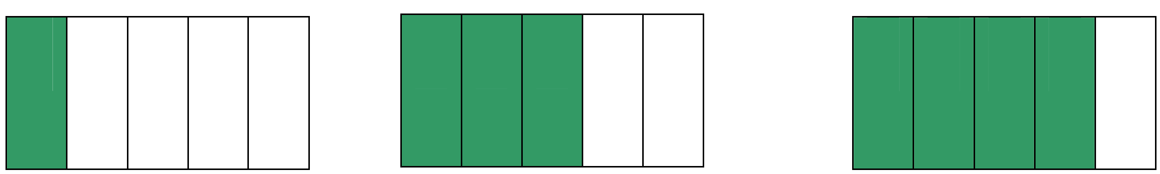
II semestre de 2003

Se utilizará el mismo material de las tabletas de las dos bolsas. El docente en cada paso irá orientando y guiando a los alumnos para que vayan construyendo los conceptos y procedimientos. Además el docente va aclarando las dudas y apoyando y reforzando cada construcción.

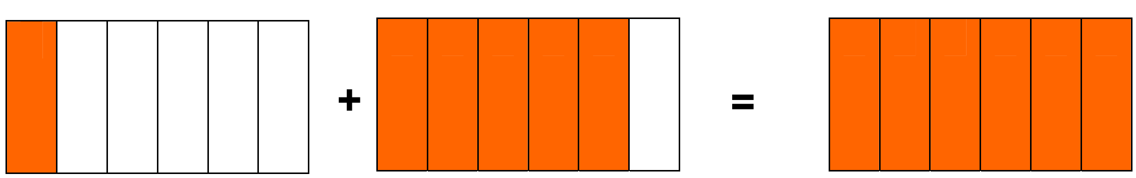
Cada una de estas actividades se desarrollarán utilizando las tabletas bases guías blancas y negras y las partes verdes y anaranjadas

- Queremos realizar: $\frac{1}{5} + \frac{3.}{5}$

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{5}} \quad + \quad \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{5}} \quad = \quad \square$$

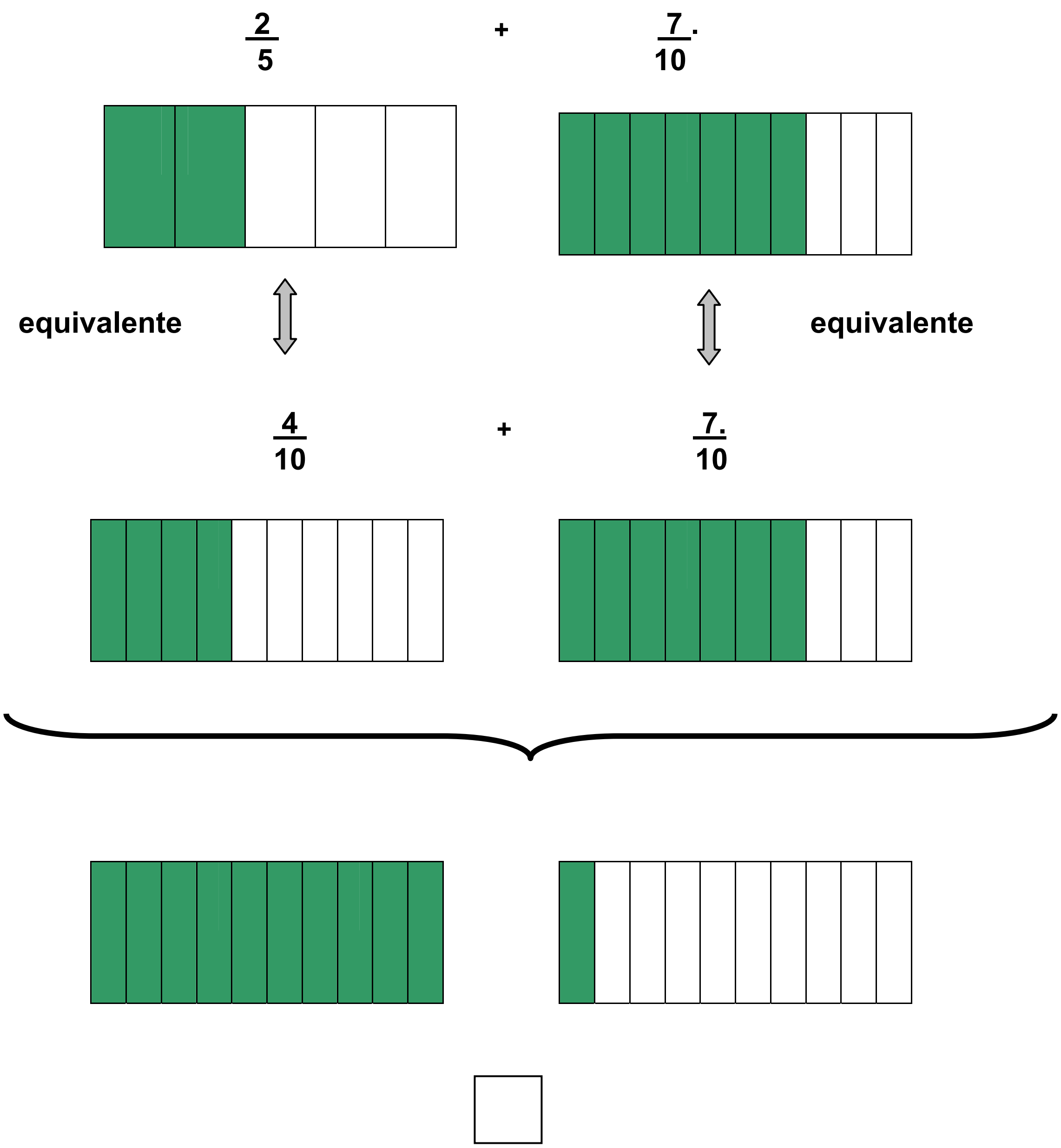


- Ahora realizar: $-\frac{1}{6} + \left(-\frac{5}{6}\right)$



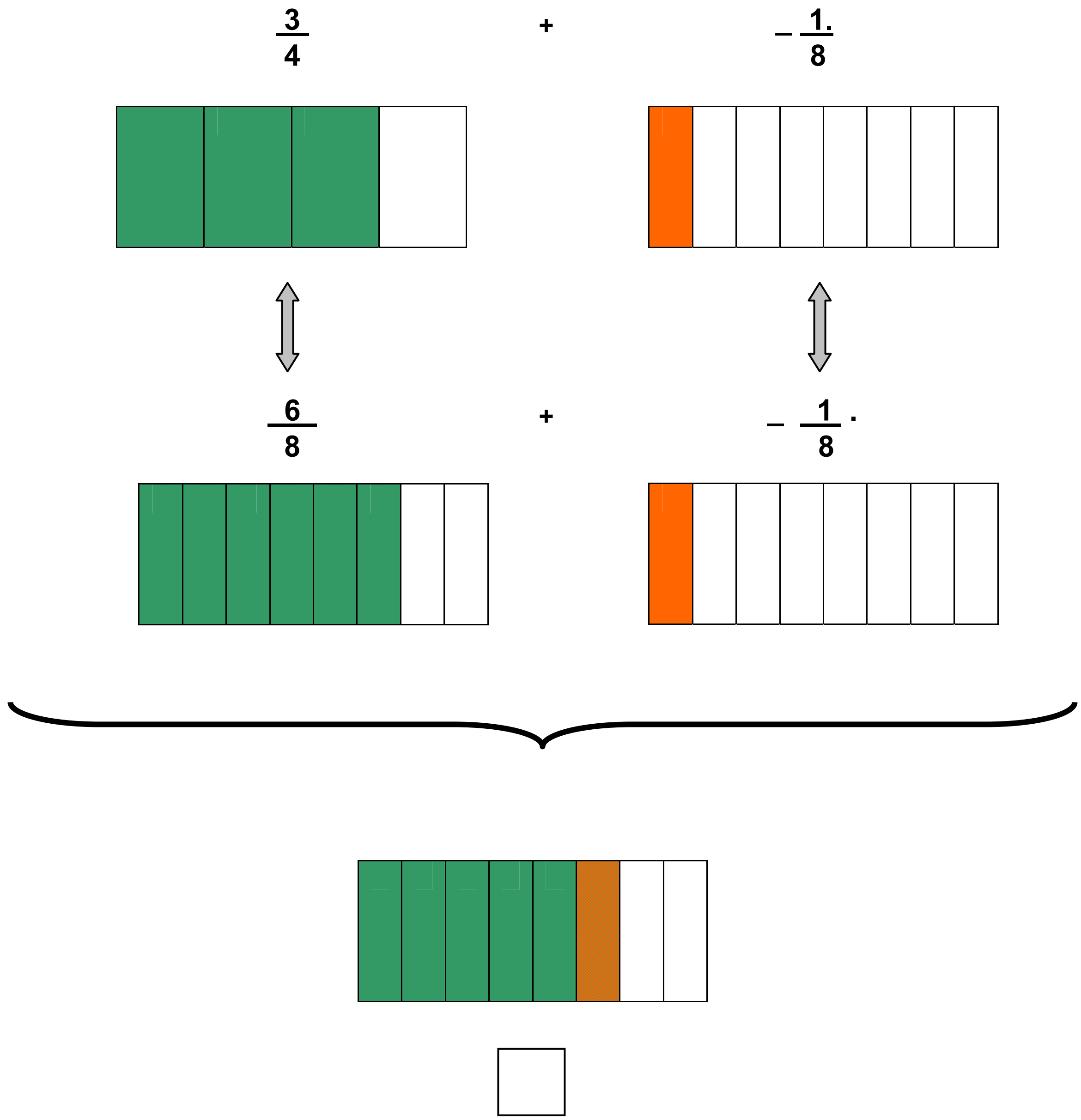
Describe lo que observan y da una explicación de la forma en que se obtiene los resultados.

- Queremos realizar: $\frac{2}{5} + \frac{7}{10}$



Describe lo que observan y da una explicación de la forma en que se obtiene el resultado.

- Queremos realizar: $\frac{3}{4} + \left(- \frac{1}{8} \right)$



Describe lo que observan y da una explicación de la forma en que se obtiene el resultado.

TALLER N° 2

INSTITUTO TËCNICO SUPERIOR DE COMERCIO DE BARRANCABERMEJA

II semestre de 2003

OBJETIVO: aplicar el manejo y manipulación de las tabletas en el proceso de la adición de números racionales

Se seguirá con los grupos de 3 alumnos, se tendrá en cuenta que las bases guías blancas y las partes verdes sirven para representar los racionales positivos; las bases guías negras y las partes anaranjadas para representar los racionales negativos.

1. Realizar las siguientes adiciones de racionales:

   a) $\left(\frac{1}{5}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)$ b) $\left(\frac{3}{8}\right) + \left(\frac{2}{8}\right)$ c) $\left(\frac{7}{4}\right) + \left(\frac{5}{4}\right)$.

   d) $\left(\frac{3}{15}\right) + \left(\frac{4}{15}\right)$ e) $\left(-\frac{3}{20}\right) + \left(-\frac{5}{20}\right)$ f) $\left(\frac{9}{15}\right) + \left(-\frac{4}{15}\right)$.

Escriban con sus palabras, cómo se pueden adicionar números racionales con igual denominador.

2. Como los estudiantes saben hallar números racionales equivalentes (fracciones equivalentes), irán representando para cada racional su racional equivalente de tal manera que los dos racionales queden con el mismo denominador (piense qué procedimiento debe seguir para hallar el

número que le sirve para que queden racionales con el mismo denominador).

Con lo anterior realice:

a) $\left(\frac{7}{15}\right) + \left(\frac{1}{3}\right)$ b) $\left(\frac{2}{3}\right) + \left(-\frac{1}{4}\right)$ c) $\left(-\frac{5}{8}\right) + \left(-\frac{3}{4}\right).$

d) $\left(\frac{1}{2}\right) + \left(\frac{3}{5}\right)$ e) $\left(\frac{1}{4}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)$ f) $\left(-\frac{3}{10}\right) + \left(\frac{4}{2}\right)$ g) $\left(\frac{8}{15}\right) + \left(\frac{3}{2}\right)$

Caso a resolver por parte de cada grupo de trabajo

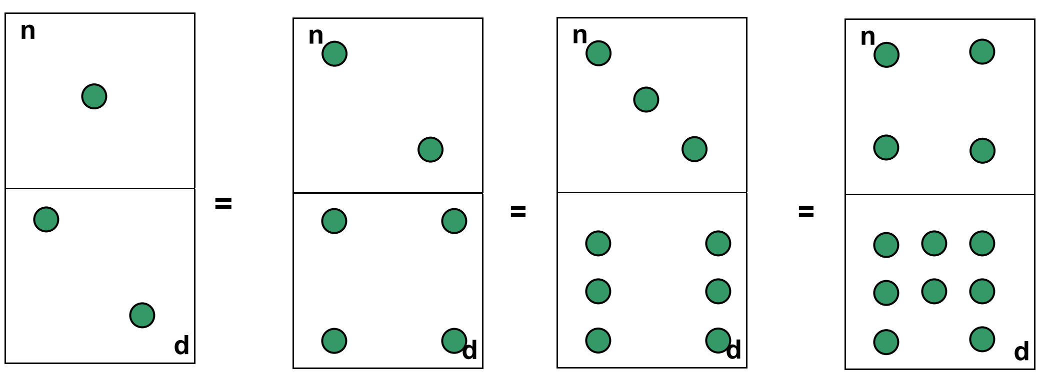
El grupo de alumnos del cual hacen parte: ______________________________ ,_________________ y ________________ deben hacer unas cuentas para que otro grupo pueda pintar el salón y otro grupo aporte el dinero para la pintura. A ustedes no les interesa saber cuáles son esos dos grupos, es un secreto, lo importante es que ustedes resuelvan correctamente la situación que se presenta enseguida:

Al empleado de servicios generales y reparaciones le solicitamos el favor de informarnos cuánta pintura se necesitará para pintar el salón de clase. El ha hecho los cálculos y teniendo en cuenta las medidas nos dio a conocer lo siguiente: para 2 de las paredes paralelas más grandes se necesitan 3 recipientes de pintura verde con una cantidad de 3/8 de galón cada uno; para las otras dos paredes paralelas más pequeñas 5 tarros de pintura rosada de 1/4 de galón y el techo va a necesitar 2/5 de galón de pintura blanca. Una vez entregado el informe por el empleado, la comisión de embellecimiento del salón acordó que lo mejor sería pintar las paredes y el techo de un mismo color, conviniéndose el color blanco. Se quiere saber cuánta pintura se va a gastar para que nosotros podamos luego averiguar en un almacén de pinturas cuánto costará y darles el valor al grupo que le corresponde, acordando comprar la mayor cantidad de pintura por galones, llevando esto a una mayor economía.

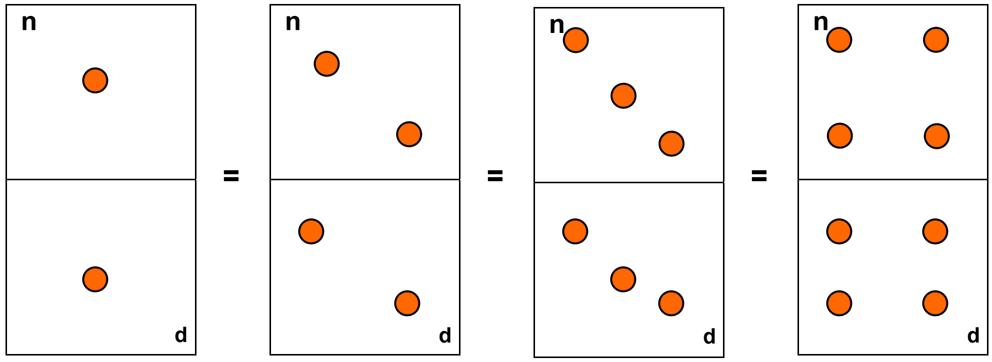
Dominó representativo de fracciones equivalentes

Esta variante de dominó tiene como objetivo afianzar de manera lúdica el concepto de fracciones equivalentes y que el alumno distinga una forma adicional de representación (en este caso representación simbólica) a las otras formas de representación utilizadas (recta numérica, tabletas, figuras representativas de objetos, expresión numérica, etc.)

Consiste en un dominó donde existen un conjunto de fichas que caracterizan fracciones equivalentes. Se elaboraron fichas tanto para fracciones positivas, como para fracciones negativas, las fichas de las fracciones positivas se pintaron los puntos de color verde, y las fichas de las fracciones negativas los puntos de color anaranjado, como por ejemplo:



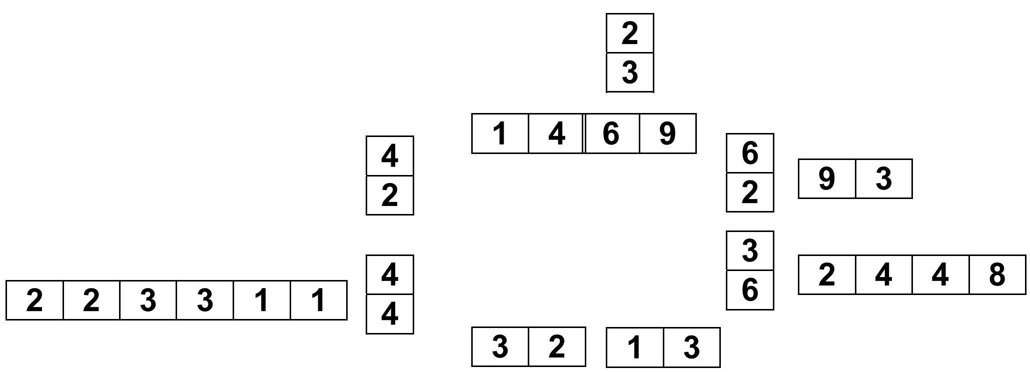
Las fichas tienen escrito en la parte superior una **n** y en la parte inferior una **d**, para identificar cuál es el numerador y cuál el denominador



Así mismo se elaboraron los siguientes conjuntos de fracciones equivalentes:

[2/3, 4/6, 6/9, 8/12] ; [1/3, 2/6, 3/9, 4/12] ; [3/1, 6/2, 9/3, 12/4] ;
[3/2, 6/4, 9/6, 12/8] ; [1/4, 2/8, 3/12, 4/16] ; [2/1, 4/2, 6/3, 8/4]
[1/1, 2/2, 3/3, 4/4] ; [-2/3, -4/6, -6/9, -8/12] ; [-1/3, -2/6, -3/9, -4/12] ;
[-3/1, -6/2, -9/3, -12/4] ; [-3/2, -6/4, -9/6, -12/8] ; [-1/4, -2/8, -3/12, -4/16]
[-2/1, -4/2, -6/3, -8/4] ; [-1/2, -2/4, -3/6, -4/8]

El juego consiste en salir en un determinado orden y, cada vez que le corresponda el turno a un jugador, él puede colocar una ficha con puntos de color verde y/o una ficha con puntos de color anaranjados, dependiendo si las puede ubicar de acuerdo a la situación del juego en ese momento. Gana el juego quien termine primero de colocar todas las fichas.



Este es el esquema de juego con las fracciones positivas.

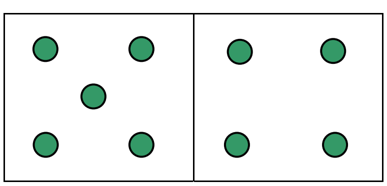
Dominó Ampliado

El objetivo del dominó ampliado es buscar que los alumnos utilicen cada ficha como representativa de un número racional.

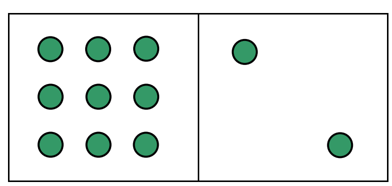
El dominó que se utilizó de manera lúdica en la experiencia de aula es un dominó que tiene las combinaciones de los números del 0 al 9. Lo que significa que el dominó corriente que consta de 28 fichas que van del 0 al 6, se amplía. Por consiguiente el dominó ampliado tiene una mayor cantidad de fichas que en total son 110.

El dominó ampliado aplicado a la experiencia de aula tiene 55 fichas representativas de fracciones positivas con puntos de color verde y 55 fichas representativas de fracciones negativas con puntos de color anaranjado.

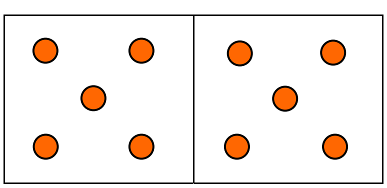
Por ejemplo:



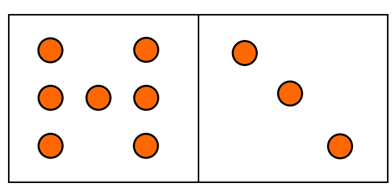
$\frac{5}{4}$ ó $\frac{4}{5}$



$\frac{9}{2}$ ó $\frac{2}{9}$



$-\frac{5}{5}$



$-\frac{7}{3}$ ó $-\frac{3}{7}$

La manera de utilizar el dominó ampliado es muy variada y depende de las reglas que se acuerden para el juego, pero sin olvidar que cada ficha representa simbólicamente un número racional.

La variante del juego utilizado de común acuerdo con los alumnos es salir inicialmente con el doble 9 de puntos verdes y el doble nueve de puntos anaranjados y cada jugador puede colocar por el lado que más le sea favorable, si por el lado de puntos verdes, o por el lado de puntos anaranjados. En cada juego participan 6 equipos de 2 personas, y a cada equipo le corresponden 17 fichas. Se juegan 15 turnos, el turno inicial es para el equipo que primero encuentre la ficha doble seis de puntos verdes. Ganará el juego el equipo que una vez jugados los 15 turnos correspondientes y al adicionar los números racionales que representan las fichas sobrantes de cada equipo, tenga la menor cantidad, es decir, el resultado cuyo número sea menor. Las fichas sobrantes de cada jugador las deberá adicionar teniendo en cuenta la norma que se acuerde al inicio del juego, por ejemplo. Puede pactarse que el número menor de la ficha representa el numerador y el número mayor de la ficha es para el denominador.

TALLER N° 3

INSTITUTO TËCNICO SUPERIOR DE COMERCIO DE BARRANCABERMEJA

II semestre de 2003

OBJETIVO: evaluar de forma individual la comprensión tanto conceptual como procedimental de las fracciones equivalentes y adición de números racionales.

1. Completa de tal manera que las fracciones sean equivalentes:

a) $\frac{7}{4} = \frac{\_\_\_\_}{12} = \frac{35}{\_\_\_\_} = \frac{\_\_\_\_}{68} = \frac{49}{\_\_\_\_}$

b) $\frac{12}{18} = \frac{\_\_\_\_}{9} = \frac{36}{\_\_\_\_} = \frac{\_\_\_\_}{3} = \frac{\_\_\_\_}{18}$.

2.

+	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{7}$
$\frac{1}{3}$			
$-\frac{3}{4}$			
8			

3. Roberto cortó 3/8 del césped en la mañana y 5/8 en la tarde. ¿Alcanzó a cortar todo el césped?

4. Facundo salió de su casa en Barrancabermeja y recorrió a la derecha de ella 5/4 de cuadras, descansó, y luego avanzó 2/3 de cuadra, pero se acordó que debía darle un mensaje a su amigo Teodoro y se regresó por el mismo camino 2 cuadras y 1/6 de cuadra más.

   a) ¿Está Facundo a la derecha o izquierda de su casa?

   b) ¿Exactamente a cuánto está?

   c) ¿Facundo volvió a pasar por su casa para dar el mensaje?

   d) Facundo inicialmente iba para donde su Tía Dolores que vive a 2 cuadras y media de su casa, a reclamar una plata. Qué le recomendaría a Facundo en las situaciones siguientes:

      d_1) En el momento que se acordó del mensaje para su amigo.

      d_2) Si Facundo al salir de su casa se acordó del mensaje para su amigo y de reclamar la plata a su Tía.

Observaciones:

- Las cuadras tienen la misma longitud
- Cuando avanza o retrocede lo realiza en línea recta
- La Tía Dolores vive a la derecha de la casa de Facundo

El trabajo de campo de la experiencia de aula se llevó a cabo desde el 21 de octubre hasta el 15 de noviembre de 2003. Durante la experiencia de aula, los estudiantes se distribuyeron en grupos (básicamente de 3 alumnos) para el desarrollo de los talleres y el trabajo con el material de las tabletas. Además hubo socialización de los resultados e inquietudes de las actividades grupales en plenarias; así mismo se dieron las explicaciones y retroalimentaciones individuales y colectivas.

Posteriormente se llevó a cabo el análisis y sistematización de la experiencia de aula, teniendo en cuenta el DC, los talleres, los escritos o casos realizados por los estudiantes y el marco teórico. La sistematización de la experiencia en el aula debemos entenderla como: “un proceso en el cual se fundamenta teóricamente y se describe la experiencia, se identifican los aciertos y las fallas en su ejecución para generar conclusiones” (Osorio, 2003, p.65)

Para la sistematización fue necesario tener en cuenta unas categorías de análisis emergentes, que nos llevaron a unas conclusiones y recomendaciones. Las categorías de análisis se construyeron o formularon teniendo en cuenta los datos recogidos y observados en las diferentes actividades. Para llegar a dichas categorías se analizó que a través de la experiencia se mostraban o se establecían unas relaciones de regularidad, es decir, el analizar la información y clasificarla llevaron a formular las categorías. Para ello fue necesario leer y analizar muchas veces el DC, los talleres, los escritos de los alumnos, consultar las opiniones de otros docentes de la institución, los comentarios de los alumnos, y la asesoría y sugerencias de la directora del trabajo.

Estas son las categorías de análisis formuladas: 1) Interacción grupal y colectiva, 2) La mediación del aprendizaje mediante el uso de material concreto, 3) El manejo de diferentes formas de representación, 4) La comprobación de desempeños flexibles, y 5) La acción comunicativa.

En el análisis de cada una de las categorías, aparecerán mis apreciaciones y descripciones, las sustentaciones teóricas tomadas de distintos autores para cada categoría y las intervenciones de los alumnos en la experiencia de aula.

Es de anotar que la parte lúdica dentro de la experiencia de aula fue fundamental, y no se estructuró como una categoría porque está implícita en el análisis de todas las categorías anteriores.

Una vez sistematizada y analizada la experiencia se sacaron las conclusiones y recomendaciones teniendo como directriz los objetivos propuestos.

A través de todo el desarrollo del trabajo de grado se efectuó una permanente revisión bibliográfica referente a: cómo elaborar una investigación o proyecto, las teorías pedagógicas básicas orientadoras de la experiencia, antecedentes y teorías sobre el tema a desarrollar, las sustentaciones teóricas sobre cada categoría de análisis, y todo aquello que ayudara a un mejor desarrollo de la experiencia de aula.

3. ANÁLISIS DE LA EXPERIENCIA DE AULA

El análisis de la estrategia didáctica desarrollada en la experiencia de aula tiene como base fundamental los registros y reflexiones consignados en el diario de campo del docente. Los estudiantes participantes de la experiencia de aula hicieron una lectura de los registros del diario de campo para verificar y dar nuevos aportes. También para este análisis se consideraron los talleres y escritos realizados por los alumnos y el marco teórico.

Las categorías de análisis que emergieron, fueron:

- ✓ Interacción grupal y colectiva.
- ✓ La mediación del aprendizaje mediante el uso de material concreto.
- ✓ Manejo de diferentes formas de representación.
- ✓ Comprobación de desempeños flexibles.
- ✓ La acción comunicativa.

3.1 INTERACCIÓN GRUPAL Y COLECTIVA

Es evidente que en las actividades fue de gran importancia el trabajo en equipo: básicamente en el trabajo grupal y en las plenarias. Pero siempre se destinó tiempo antes, durante, o después de los trabajos grupales o colectivos, a las reflexiones, conjeturas y argumentaciones individuales, algunas traídas de sus concepciones o presaberes, otras, adquiridas durante las actividades y otras, de cuestionamientos posteriores.

En la experiencia de aula se realizó la mayoría de las actividades de manera grupal como el desarrollo de los talleres, el manejo de las tabletas, la comprobación de avances, los cuestionamientos por medio de preguntas lo que llevó a que los estudiantes expresaran sus inquietudes y expusieran sus opiniones, dudas y argumentaciones. Se observó que estudiantes que poco o nada se atrevían a exteriorizar sus ideas lo hicieran; otros que no tenían la disposición a escuchar y tolerar, fueran más accesibles a ello, abriendo espacios con sus compañeros.

Es cierto que no existe un número ideal por grupo y esto depende de la tarea a realizar. Pero considero que para tareas de aprendizaje con talleres y material manipulable es mejor grupos pequeños. Cuando los grupos son de menor número de integrantes, según GENTE[6] (2003 a, p.18):

- Se refuerza la responsabilidad individual
- Es apropiado si el tiempo disponible es poco
- Es más fácil la solución de conflictos
- Todos tienen que aportar
- Aumenta la visibilidad de esfuerzos
- Hay facilidad para identificar dificultades.

En la experiencia de aula se trabajó básicamente en equipos de 3 alumnos, observándose bastante motivación y armonía en las “discusiones” de opiniones

[6] Grupo de Estudio e Investigación en Tecnologías y Educación de la UIS.

diferentes. El trabajo en grupos de 3 alumnos permitió llegar más fácilmente a consensos, en la mayoría de las ocasiones por el número reducido de alumnos.

No hay que olvidar, como lo afirma el grupo GENTE (2003 a, p.11), que “el aprendizaje, aunque es un fenómeno individual, se da en un marco social de relaciones, interrelaciones y de ayuda que implican un afecto mutuo”.

Al respecto, sobre el trabajo grupal y la importancia de la persona como ser social es de anotar uno de los conceptos de Vygotsky (1979, p.133) en su teoría como es el concepto de Zona de Desarrollo Próximo, entendido como:

> “La distancia entre el nivel real de desarrollo determinado por la capacidad de resolver independientemente un problema, y el nivel de desarrollo potencial, determinado a través de la resolución de un problema, bajo la guía de un adulto o en colaboración con otro compañero más capaz”.

Colocar al niño o joven en la zona de desarrollo próximo significa crear para él unas condiciones que le permitan, a partir del desarrollo que ya ha logrado, acceder a funciones que en el momento apenas comienzan a aparecer y cumplir con tareas cada vez más complejas o, como afirma Wertsch (1988, p.84), “se trata de establecer no como el niño llega a ser lo que es, sino, cómo puede llegar a ser lo que aún no es”.

En el primer trabajo en grupo de la propuesta, que hacía referencia a unas preguntas para clarificar el concepto de número racional, los alumnos se organizaron espontáneamente y más que todo buscando a los compañeros que estuvieran más cerca de su puesto como quedó registrado en el diario de campo:

> ...Los alumnos buscaron aquellos compañeros que se encontraban más cerca, aunque unos seis alumnos escogieron a sus compañeros que eran sus amigos (as) y afirmaban que *"nos gusta trabajar con ellos"*.... (DC, 21-10-03)

En esta primera vez, los 38 alumnos que estaban en clase se organizaron en 10 grupos de 3 alumnos y 2 grupos de 4 alumnos, pero en la siguiente actividad grupal, los 18 alumnos seleccionados para el análisis, se distribuyeron según sus preferencias y empatía, en 6 grupos entre ellos mismos. Por lo general los estudiantes buscaron una persona líder, ya sea porque le consideraban un buen estudiante o por ser el "líder compinche" [7]:

> Se vio que en cada grupo había prácticamente un estudiante que llevaba la iniciativa, y además cuando pasaba por los grupos, me di cuenta que algunos alumnos tenían dificultad para intervenir. Aproveché la ocasión de hacerles ver que no se trataba sólo de presentar el taller y mirar si quedó bien o mal, sino que tenían que sustentar lo que se afirmara en el mismo. (DC, 28-10-03)

En estas dos ocasiones, pude detectar que esta manera de conformar los grupos no era la más adecuada, observé que uno de los estudiantes realizaba de forma individual las actividades del grupo, sin que los otros dos compañeros participaran en ellas. En este sentido el Grupo GENTE (2003 a, p.17) plantea:

> "Los estudiantes pueden ser agrupados de varias formas, pero el procedimiento menos adecuado es el de dejar que los estudiantes elijan sus propios grupos, a menos que se trate de un grupo experimentado en el proceso de aprendizaje colaborativo con habilidades interpersonales ya formadas y que haya alcanzado el máximo nivel de excelencia.
> Los grupos formados por los propios estudiantes suelen ser en forma general homogéneos; es decir, estudiantes de un mismo nivel de habilidades, deshabilidades académicas (bueno, regular, malo), muy amigos entre sí, sólo mujeres, sólo hombres. Los estudiantes reunidos en grupos heterogéneos incluyen estudiantes de uno y otro sexo, diferente procedencia social y habilidades. Cuando los niveles de desempeño son muy diferentes, el trabajo en grupos colaborativos se transforma en una ayuda y no en una debilidad, como suele suceder en la enseñanza tradicional. Por lo tanto, son en forma general más efectivos los grupos heterogéneos que los homogéneos, porque realizan razonamientos más elaborados, dan y reciben explicaciones más frecuentemente y tienen en cuenta una perspectiva más amplia. Lo anterior hace que necesariamente un grupo heterogéneo aumente su comprensión, la calidad de su razonamiento y la precisión de aprendizaje a largo plazo".

6 Los alumnos consideran dentro de su jerga o vocabulario estudiantil al "líder compinche" como su amigote o cómplice de sus actividades.

Teniendo en cuenta lo anterior, para el tercer trabajo en grupo los alumnos se distribuyeron según unas papeletas o fichas, de la siguiente manera:

> Una vez los alumnos iban entrando se les dio a escoger una papeleta cerrada y les solicité que todavía no la abrieran.
>
> Previamente se habían formado dos filas, una de los 18 alumnos escogidos para el análisis y otra con los 22 alumnos que no hacían parte de esa selección.
>
> Estando ya todos los alumnos ubicados procedieron a abrir las papeletas. En cada papeleta había una figura diferente, que sólo se repetía 3 veces, es decir, a 3 alumnos les saldría la misma figura donde formarían un grupo y así con los demás. (DC, 29-10-03)

Al realizar esta organización hubo un poco de resistencia por parte de los alumnos, aludiendo incompatibilidades entre algunos compañeros: no se llevaban bien, no se trataban adecuadamente entre sí, y otros argumentaron que no trabajaban con determinados estudiantes porque eran perezosos. Sin embargo, hice unas reflexiones y precisiones sobre el trabajo en equipo, en donde les manifesté que la organización de los grupos de trabajo no siempre se debe dejar a la libre elección de los estudiantes, porque muchas veces, se debe privilegiar formas particulares de interacción teniendo en cuenta las características del tema y las situaciones académicas, disciplinarias y emocionales de los estudiantes. Así, los alumnos aceptaron de buena manera los compañeros que les correspondió en su equipo. Ya en el trabajo grupal observé lo siguiente:

> ...En los alumnos de los 6 grupos seleccionados observé que unos trataban de darles explicaciones a otros, otros sugerían preguntas o inquietudes de qué pasaría si esto ocurriese o no, y en general trataban de encontrarle sentido a lo que hacían. (DC, 29-10-03)

Más adelante, en las siguientes actividades, observé por parte de los alumnos una mayor coherencia y disposición para trabajar con sus compañeros. Por ejemplo, el día de la actividad del manejo de las tabletas para la adición de racionales, los estudiantes se organizaron rápidamente y sin ningún contratiempo:

> Una vez se organizaron en los mismos grupos de 3 alumnos, se les entregó las bolsas con las tabletas y luego la guía para el manejo de las mismas. En la organización de esta actividad se tomaron 10 minutos. Los alumnos se buscaron sin ningún problema y nadie se quejó de porque le tocaba con alguno que no le gustaba trabajar, como ocurrió con siete estudiantes en la clase anterior, tres de los cuales eran del grupo seleccionado para el análisis. (DC, 04-11-03)

Desde luego que hubo momentos, en el desarrollo de las actividades en grupo, donde fue necesario orientarlos porque se presentaban incomprensiones del trabajo a realizar, como ocurrió por ejemplo en el momento del manejo de las tabletas en los puntos **1** y **2** de la guía N° 2:

> Un grupo preguntó sobre los paréntesis en las actividades **e** y **f**, del punto **1**, y por qué los otros no los tenían. Se realizó la aclaración, afirmando que era para especificar más claramente los números racionales que se estaban sumando ya que en estos ítems había números racionales negativos, un estudiante de este grupo puntualizó que era para señalar claramente cuáles eran los números que se estaban adicionando con su respectivo signo. Esta primera parte resultó muy productiva por parte de los alumnos. En el punto 2 fue necesaria una mayor orientación a los grupos, pero con las ideas que se daban, los alumnos desarrollaban cada punto con las tabletas. (DC, 05-11-03)

Es obvio que en los trabajos grupales quedaban algunas dudas, pero que luego se subsanaban o eran resueltas en las actividades colectivas o plenarias, y existía un enriquecimiento de gran utilidad.

En cada actividad realizada de forma grupal junto a la socialización de las mismas, pienso que fue notoria la productividad que se logró. A través de la interacción grupal y colectiva, los estudiantes tuvieron más facilidad de preguntar a sus compañeros o realizar cuestionamientos sobre el porqué se hacía un tal procedimiento, o qué pasaba si se realizaba otro, y de consultar o pedir la orientación del docente en esos procesos, permitiendo una mejor comprensión de los temas; posteriormente, en las plenarias, los estudiantes pudieron confirmar si lo que habían hecho estaba de acuerdo a lo que se buscaba en la actividad.

3.2 LA MEDIACIÓN DEL APRENDIZAJE MEDIANTE EL USO DE MATERIAL CONCRETO

La mediación para promover el aprendizaje, ya sea realizada por alguien o con el apoyo de materiales o recursos, es una acción constante en los procesos educativos. Así como el hombre, para cultivar una extensión de terreno, utiliza la mediación de herramientas materiales, el desarrollo del pensamiento no se explica sin la intervención de instrumentos mediadores como, por ejemplo, los sistemas de notación, el lenguaje oral, las representaciones gráficas, etc. Los distintos sistemas simbólicos son ejemplos de herramientas mentales.

Esta idea de la mediación de los instrumentos culturales en el desarrollo de la mente constituye una de las bases de la teoría socio-cultural de la mente propuesta por Vygotsky. Según este autor (1979), hay dos clases de instrumentos mediadores, según los distintos modos como estos sirven para orientar la actividad humana. Las herramientas propiamente dichas actúan directamente sobre el mundo material; su uso produce cambios en los objetos sobre los que se ejerce la actividad. Un hacha, por ejemplo, sirve para facilitar la conquista del espacio territorial. Pero hay otro tipo de instrumentos mediadores –los signos o sistemas simbólicos– que no producen cambios en el objeto, sino en la persona que los utiliza como mediadores y, por tanto, modifican su interacción con el entorno.

En todo caso, como lo afirman Rojano y Moreno (1999), el conocimiento producido depende de los instrumentos de mediación que pongamos en juego para su construcción, y del lugar que tales instrumentos tengan en el entorno sociocultural.

Bajo este enfoque, toda acción cognitiva es una acción mediada por instrumentos materiales o simbólicos. Puede tratarse de un lapicero, de un texto, de una escoba, de una calculadora, de unas tabletas, por ejemplo.

De esa manera, en la experiencia de aula se han utilizado, para la comprensión del aprendizaje de las fracciones racionales equivalentes y la adición de números racionales, como mediadores, el uso de material concreto como los talleres y la manipulación de las tabletas, que buscaron que el estudiante comprendiera el porqué de cada concepto o procedimiento. Estos materiales se convirtieron en los enlaces temporales que permitieron una elaboración más comprensiva del tema.
Esto atendiendo a lo que debe ser una mediación pedagógica donde, como lo señala el grupo GENTE (2003 b) corresponde al docente el compromiso de señalar las características de la mediación que va a realizar, cuáles instancias de mediación utilizar y qué papel deben jugar estas de forma que realmente promuevan el aprendizaje de los estudiantes a quienes acompaña en el proceso de mediación.

El manejo de las tabletas en la presente experiencia de aula fue importante para comprender mejor los temas, así, por ejemplo, al trabajar la guía elaborada en el manejo de las tabletas para la comprensión de las fracciones equivalentes o números racionales equivalentes se apreció su necesidad:

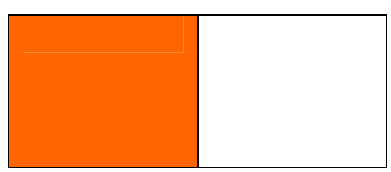
> En el 4º punto de la guía N° 1, los alumnos no tuvieron inconveniente en encontrar por qué número se debería multiplicar o dividir la fracción inicial para que diera la otra fracción racional propuesta, y la mayoría comprobó con el material de las tabletas que significaban lo mismo. Sin embargo había dos grupos que presentaban dificultad para hallar los números que multiplicados y divididos servían, pero les insistí en la importancia de hacer la experiencia con las tabletas para observar qué pasaba y así sacar las debidas conclusiones.
>
> Fue interesante escuchar a algunos decir que esos números duplicaban, triplicaban, achicaban a la mitad, a una tercera parte, los dos términos de la fracción y las fracciones seguían expresando lo mismo, otros fueron más allá, y con las tabletas miraron qué pasaba si multiplicaban por 2 o 3 sólo el numerador o el denominador, y se observaron que en estos casos ya las fracciones o racionales resultantes no expresaban lo mismo. (DC, 29-10-03)

En esta última parte, por ejemplo, el grupo de Gilberto, Cristian y Lizeth Johanna, en la fracción 1/2 multiplicaron el numerador por 3 y el denominador por 2 así:

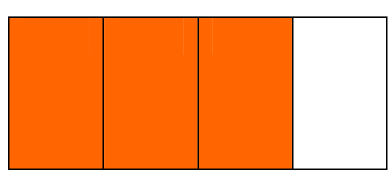
$$\frac{1 \times 3}{2 \times 2} = \frac{3}{4}$$

y luego realizaron la experiencia en las tabletas así:

$\frac{1}{2}$



$\frac{3}{4}$



En la hoja de su guía escribieron:

“En la fracción que nos dan de 1/2 hemos multiplicado el 1 por 3 y el 2 por 2, y con la utilización de las tabletas nos damos cuenta que no da lo mismo, luego es necesario multiplicar o dividir la fracción por un mismo número ya que si no es así, no da lo mismo”. (Tomado del desarrollo de la Guía N° 1)

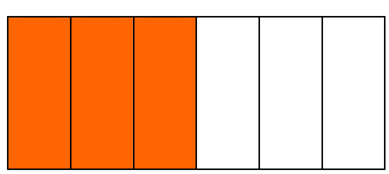
La inquietud de los alumnos de utilizar las tabletas para ir más allá de lo que se les pedía, mostró el interés y la disposición que tenían en ese momento. Lo que experimentó este grupo fue positivo, sin embargo, esto dio pie para que yo hiciera algunas aclaraciones, tales como: no es lo mismo multiplicar o dividir una fracción por un número, que multiplicar o dividir el numerador y el denominador por un mismo número, y por lo tanto, fue pertinente reforzar los conceptos de amplificación y simplificación.

También en esta guía, con el manejo de las tabletas hubo otro grupo, el de Adriana Lucía, Mario Andrés y Mayra Alejandra, que dejó esta inquietud en la hoja de desarrollo de la guía:

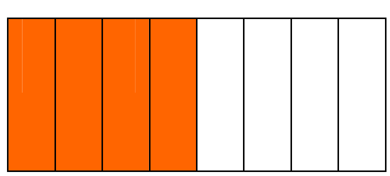
Vemos que 3/6 y 4/8 representan lo mismo, pero no encontramos un número que multiplicado por 3 de 4 y que también multiplicado por 6 de 8, es decir $\frac{3 \times [\quad]}{6 \times [\quad]} = \frac{4}{8}$

Profesor sabemos que expresan lo mismo, ya que hicimos esto:

$\frac{3}{6}$



$\frac{4}{8}$

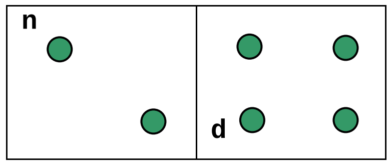


Podemos apreciar como estos estudiantes se cuestionaban, y la utilización de las tabletas era la base primaria para ello. Si los alumnos no hubiesen visualizado con las tabletas que 3/6 y 4/8 eran equivalentes, habían afirmado que no eran fracciones equivalentes, porque no encontraban los dos números que multiplicaban o dividían el numerador y el denominador para que se cumpliera la amplificación o simplificación.

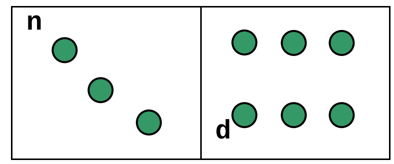
Esta inquietud se trasladó a los demás estudiantes de la experiencia y fue analizada con todos. Sin embargo, dos semanas después, con el dominó de fichas de fracciones equivalentes, se observó que aún se les complicaba esta situación, pero este juego sirvió para reforzar esta parte, como se describe en el diario de campo del docente:

> Se manejaron las fichas representativas de fracciones equivalentes, para ello se formaron grupos de 6 alumnos, los 18 alumnos de la experiencia se organizaron en 3 grupos de 6 alumnos. A los alumnos se les explicó en qué consistía y se empezó la actividad. La mayoría de los alumnos comprendió lo que se quería hacer, y aquellos que al principio tuvieron ciertas dudas, con el juego de prueba entendieron cómo era. Resultó muy interesante observar cómo colocaban las fichas que correspondían a cada situación a pesar de la falta de concentración de algunos alumnos que llevaron a ceder el turno, teniendo la ficha adecuada.
>
> Como este juego se completaba de manera rápida, en cada juego aproximadamente 10 minutos, se alcanzó a jugar 3 juegos en los 30 minutos dispuestos para esta actividad.
>
> Como las fichas tenían escrito en la parte superior una **n** y en la parte inferior una **d**, era fácil para los estudiantes distinguir en cada ficha qué número racional representaba. Eso sí, en algunas ocasiones los alumnos demoraban el juego tratando de encontrar la ficha equivalente a la ficha con la fracción que representaba en la mesa de juego.
>
> En los 3 grupos seleccionados a los cuales pertenecían los 18 alumnos escogidos para la experiencia de aula, y a los cuales les dedicaba más atención, noté que donde más presentaban dificultad era cuando tenían por ejemplo la siguiente situación en la mesa de juego:

Esta es la ficha que está
en la mesa de juego



Esta es la ficha que el jugador
tiene a su disposición



Como se aprecia no es fácil distinguir la fracción equivalente por amplificación y simplificación. Pero ya antes se habían analizado esas situaciones, y dado unos criterios.

Por lo general terminaban reconociendo la equivalencia de esas fracciones, algunos efectuaban la simplificación de las dos fracciones a una fracción irreducible comprobando que daba la misma fracción irreducible, otros deducían utilizando algo que ya se había analizado cuando existieron dudas para reconocer la equivalencia de ciertas fracciones, y se demostró que si se tienen las fracciones n_1/d_1 equivalente a n_2/d_2 se cumple que $n_1d_2 = n_2d_1$. (DC, 12-11-03)

En el tema de la adición de números racionales fue fundamental la utilización de las tabletas, esto fue notorio en la actividad de la taller N° 2 que se debía hacer con el manejo de las tabletas, en el cual los estudiantes fueron representando los números racionales que se adicionaban con las tabletas y con las mismas hallando la solución, analizando qué pasaba en cada caso y sacando conclusiones y relaciones de regularidad. Esto hizo que existiera una intencionalidad e interés por parte de los estudiantes, principio básico del aprendizaje significativo expuesto en el marco teórico.

...Unos grupos comentaban que cuando vieron las fracciones positivas en 5º y 6º grado, no podían entender porque había que hallar el mínimo común denominador y luego este se dividía por el denominador de la fracción y se multiplicaba por el numerador. Dos estudiantes Erika y Shirley, opinaron *que ellas lo aprendieron mecánicamente, pero no sabían porqué*; Daniela, Lizeth y Gilberto afirmaron *que ellos lo vieron pero se les olvidó días después*. La gran mayoría estaban convencidos que sumaban, lo que la alumna Adriana Lucía llamó, *sumar en forma normal, es decir, sumar los numeradores entre sí y sumar los denominadores entre sí*. Al pasar por cada grupo les formulé esta pregunta: Ahora que han manipulado el material de las tabletas, ¿Qué piensan de la adición de los números racionales? A lo cual respondieron: <*Ahora sí entiendo, porque es necesario hallar los racionales equivalentes a cada sumando*> (Claret), <*Me ha permitido comprender por qué no se pueden sumar los numeradores y denominadores entre sí, cuando tienen distinto denominador*> (Jhulianys). (DC, 05-11-03)

Como se infiere de la experiencia, la utilización de las tabletas fue un material potencialmente significativo, es decir, que el material de las tabletas permitió una relación intencionada (no arbitraria) e importante (sustancial) con los conocimientos e ideas de los alumnos. Además las tabletas cumplieron con ser una instancia de mediación pedagógica porque contribuyeron con el aprendizaje de los estudiantes.

Es importante anotar que ya en la década de los ochenta, según los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1997), se empezó a reconocer a nivel mundial que el énfasis dado en la matemática básica a lo estructural había sido exagerado.

A raíz de esto, se empezó a rescatar el valor de lo empírico y de lo intuitivo en los procesos de construcción del conocimiento matemático de la escuela. Esto ha llevado a involucrar significativamente la manipulación y la experiencia con los objetos que sirven de apoyo a los procesos de construcción sin restar importancia a la formalización rigurosa.

3.3 MANEJO DE DIFERENTES FORMAS DE REPRESENTACIÓN:

Por representación, en el ámbito de las matemáticas, entendemos, como lo expresan Lupiáñez y Moreno (2003, p.248) "notaciones simbólicas o gráficas, o bien manifestaciones verbales, mediante las que se expresan los conceptos y procedimientos en esta disciplina como sus características y propiedades más relevantes". Estos autores, tomando como referencia a Duval[8], afirman que estas representaciones se clasifican en registros según sus características. Por ejemplo, si consideramos el concepto de función, asociados a él existen registros gráficos, algebraicos, tabulares, etc.

Las diferentes representaciones de los conceptos matemáticos son fundamentales para su comprensión y el razonamiento de los estudiantes. No hay duda que el ser humano emplea diversas representaciones para aprender a conocer, por ejemplo, un taxista para ir a un sitio determinado que no conoce, se guiaría por un mapa o la ubicación de ciertos sitios especiales. En muchas ocasiones para comprender mejor se emplean para un mismo caso formas diferentes de representación. Es importante la representación de los conceptos y procedimientos en formas diferentes, acordes con el nivel de desarrollo conceptual que se vaya alcanzando.

En el desarrollo de la experiencia de aula se constató esa afirmación, porque fue el camino para que los estudiantes, en muchas ocasiones, se convencieran y encontraran sentido a muchas situaciones. Aquí se emplearon diferentes formas de representación: en la recta numérica, en figuras, en la representación simbólica de las tabletas, representaciones numéricas, representaciones espaciales con movimientos del cuerpo, etc.

[8] Los autores hacen referencia a Duval, R. 1999, con respecto a su libro Semiosis y Pensamiento Humano. Traducción al español a cargo de M. Vega, realizada en la Universidad del Valle, Colombia, del original francés del mismo título publicado por P. Lang, Suiza en 1995.

Un ejemplo de esto fue cuando se desarrolló en el taller N° 1:

> ...En el 4º ítem les insinué que en las hojas aparte realizaran las figuras, las cortaran, y observaran qué podían hacer. En el punto 5º, mirar que en la línea inclinada hacia arriba, las separaciones eran iguales y que expresaban el 4 del denominador, pero que podían dibujar otra línea, por ejemplo vertical, y con una abertura del compás mayor o menor, realizar las separaciones, hacer el mismo procedimiento y mirar qué observarían. Luego ellos mismos corroboraron que 3/4 estaba ubicado en el mismo sitio en la recta numérica (DC, 28-10-03)

En este punto 5º del taller fue fundamental la representación en la recta numérica (usando el compás y la regla) para analizar qué podían decir de 3/5, 7/4 y 2/2 con relación a 3/4, como lo podemos apreciar en las siguientes afirmaciones de los alumnos, tomadas directamente de las hojas de sus talleres:

- *“Que todas quedaron en el lado positivo” (Jhulianys, Indri y Saray)*
- *“Todas quedan positivas, ninguna negativa y 7/4 queda más hacia la derecha que 2/2 y 3/5” (Erika, Luis Fernando y Alejandra)*
- *“Que 2/2 es mayor a 3/5; que 3/5 es menor a 7/4; también que todos quedaron hacia la derecha por esta razón son positivos” (Claret, Lizeth y Daniela)*
- *“Comprendo donde quedan esos números racionales, por ejemplo que 3/5 está entre 0 y 1, que 7/4 entre 1 y 2, y que 2/2 en el 1, por tanto 7/4, 2/2, están más a la derecha que 3/4, pero 3/4 un poquito más a la derecha que 3/5”. (Andrea Isabel, Shirley y Lizeth Mayerly)*

En este mismo taller, fue satisfactorio para los alumnos comprobar en la recta numérica que 2/2, 3/3, 4/4, 5/5, 6/6 eran equivalentes según sus palabras:

- *“Todas quedaron en el mismo punto” (Andrea Isabel y otros)*
- *“Los ubicaría en el mismo lugar” (Erika ,Luis Fernando y Alejandra)*
- *“Que todos son equivalentes porque quedan en el mismo lugar y son positivos” (Claret, Lizeth y Daniela)*
- *“Todos me dan igual a 1” (Gilberto, Cristian, Lizeth Johanna)*

En las expresiones anteriores dadas por los estudiantes puedo deducir que han comprendido esas actividades. Por ejemplo, unos grupos expresan que el número respectivo está a la derecha, otros que quedan en la parte positiva, así mismo unos dicen que cierto número está más a la derecha que otro, mientras otros expresan que es mayor. También cuando comparan las fracciones 2/2, 3/3, 4/4, etc., los estudiantes los refieren como lo perciben en la gráfica y su interpretación inmediata, así unos dicen: *quedan en el mismo punto, los ubicaría en el mismo lugar*, y otros son más precisos en su apreciación, como las afirmaciones *son equivalentes, todos dan igual a 1*.

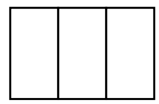
En el trabajo con la guía N° 1 para el manejo de las tabletas, además de realizar las actividades con ellas, también las representaban en la recta numérica, en la hoja de anotaciones, e hicieron observaciones como:

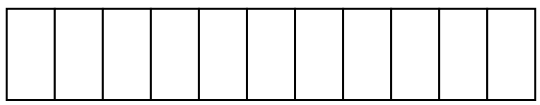
> "...*Profesor, representamos varias parejas en la recta numérica, y nos dimos cuenta que unas como 1/2, 3/6, 4/8, quedan ubicadas en el mismo sitio, lo mismo que -1/2,-3/6,-4/8, quedan a la izquierda ocupando el mismo punto, pero 1/2 y -1/2 quedan en diferentes posiciones". (DC, 29-10-03)*

Se puede destacar entonces que las diferentes formas de representación fue importante para la comprensión de los temas en la experiencia de aula. Aún más, puedo resaltar la utilización de las representaciones, como por ejemplo cuando los alumnos desarrollaron el taller N° 1:

> ...En los ítems 4º y 8º fue donde más se notó confusión y actitud de preocupación. En el punto 4º al expresar el área de **Q** que es igual a 11/3 del área de **P**, fue necesario para cuatro equipos de trabajo, recortar la figura de **P** y colocarla en **Q**, se veía que estaba 3 veces **P** mas 2/3 de la figura de **P**, es decir, 11/3, mientras que el área de **P** es 3/11 el área de **Q**. Fue necesario superponer **P** en **Q** y ver que sólo ocupaba las tres primeras partes de las 11 partes de **Q**. Al realizar este procedimiento por parte de los alumnos, fue más fácil comprenderlo. En el punto 8º también fue necesario que los alumnos recortaran los triángulos de la figura intermedia y superponerlos en la figura **3** y se dieran cuenta que expresan lo mismo, luego 6/8 igualmente equivale a 3/4. Además fue necesario que los alumnos recortaran los pequeños triángulos de la figura **1** y superponerlos en la figura **3**, y observar que expresaban lo mismo, por lo tanto, que 12/16 es igual que 3/4. Aquí los alumnos llegaron a la conclusión que 3/4 = 6/8 = 12/16, es decir, que había fracciones que significaban lo mismo.
>
> Algunos grupos habían representado las tres fracciones en la recta numérica, de los cuales 3 grupos las habían representado bien, quedando todas en el mismo punto de la recta numérica. (DC, 28-10-03)

Apreciamos aquí como el grado de comprensión de los racionales equivalentes supone establecer en qué medida el estudiante ha integrado las representaciones, les ha dado sentido y en qué grado ha conectado las representaciones. Es importante, por lo mismo, no solo la representación mental en sí misma, sino la acción que desarrolla el alumno apoyado en dicha representación:

Vemos que al realizar la acción de recortar **P** 

y colocarla en **Q**. 

Los alumnos observaron que el área de **P** e igual a 3/11 del área de **Q**, y el área de **Q** es igual a 11/3 del área de **P**.

También fue muy importante en la adición de números racionales, además de las tabletas, las gráficas de figuras planas, la recta numérica, y el desarrollo de expresiones numéricas, la utilización de representación espacio – tiempo, como cuando los alumnos realizaron una práctica con movimientos corporales y sus representaciones gráficas:

> … cada grupo realizará fuera del aula, ya sea en el descanso, en una hora libre, o en cualquier parte que se pudieran reunir, la siguiente actividad práctica: un alumno del grupo efectuará movimientos con su cuerpo, por ejemplo de media vuelta, vuelta completa, dos terceras partes de vuelta, un cuarto de vuelta, etc., girando hacia la derecha o hacia la izquierda; por decir algo, tres cuartos de vuelta hacia la derecha y luego media vuelta en sentido contrario. Mientras este alumno gira, los otros dos compañeros van tomando los datos de lo que observan representando gráfica y numéricamente esos movimientos… (DC, 04-11-03)

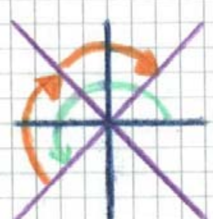
Sobre esta actividad práctica de los alumnos, es bueno conocer uno de los informes presentados por ellos. He tomado uno de los trabajos al azar, el del grupo de Gilberto, Lizeth Johanna y Cristian Andrés, en el cual se puede observar que para darle orientación positiva o negativa a los movimientos toman como referencia el sistema de ángulos positivos o negativos para expresar el movimiento giratorio corporal. Después en el piso con tiza trazan dos líneas perpendiculares dividiendo el plano en cuatro partes iguales, luego lo dividen en ocho partes iguales. Algo muy relevante es cómo hacen el paso de la representación espacio – temporal de los giros del cuerpo al sistema bidimensional y cómo a cada movimiento lo asocian con un número racional.

Gilberto, Lizeth Johanna, Cristian A.

Trabajo de Practica con movimientos giratorios del cuerpo

Profesor Eduardo para hacer las prácticas de los movimientos que hizo Gilberto, tuvimos en cuenta que cuando se giraba a la derecha, el giro es negativo, y cuando se giraba a la izquierda es positivo, así creemos que pasa con los ángulos, pero tenemos nuestras dudas, porque en la recta numérica si se va a la derecha es positivo y a la izquierda es negativo.

Profesor, Gilberto giró de la siguiente manera, nosotros dividimos la vuelta en el piso y marcamos con una tiza en 8 partes, así:



Gilberto hizo estos movimientos: se movió a la izquierda 5/8, luego se regresó 2/8 y siguió regresandose otros 2/8

$$\frac{5}{8}-\frac{2}{8}-\frac{2}{8}=\frac{1}{8}$$

así en la gráfica podemos ver que quedó ahí en 1/8

En el anterior ejercicio práctico me di cuenta que los integrantes del grupo comprendieron cuándo la adición corresponde a un número racional positivo o a un número racional negativo, y al final hay una correspondencia entre la representación de los movimientos giratorios corporales, la representación gráfica bidimensional y la representación numérica.

3.4 COMPROBACIÓN DE DESEMPEÑOS FLEXIBLES

No hay que olvidar que según La enseñanza para la comprensión (EpC) (citado en el marco teórico) reconocemos la comprensión por medio de un criterio de desempeño flexible. La comprensión se presenta cuando la gente puede pensar y actuar con la flexibilidad a partir de lo que sabe. Por contraste, cuando un estudiante no puede ir más allá de la memorización y la acción rutinaria, eso indica falta de comprensión. También es importante ver las conexiones entre lo que se aprende en la institución escolar y su vida cotidiana.

En relación con esta categoría, las investigaciones del Proyecto Zero, citado por Jaramillo, R., Escobedo, H. y Bermúdez, A. (2003), mostraron que si en vez de pedirles a los estudiantes que reproduzcan los conocimientos aprendidos de manera casi idéntica, se les pide que utilicen el conocimiento aprendido y comprendido para producir un resultado (una aplicación de un caso de la vida real), no sólo se fortalece la comprensión misma porque el estudiante tiene que utilizar de manera creativa e ingeniosa esos conocimientos para resolver o crear algo, sino también para reorientar los siguientes pasos de su aprendizaje.

No hay duda que la comprobación de avances por medio de situaciones o analogías de la vida cotidiana son una forma de ver si se ha comprendido, también es cierto que es un canal de retroalimentación muy valioso.

En el desarrollo de la experiencia se tuvo muy en cuenta esta relación. Por ejemplo, en la aplicación de fracciones equivalentes se pidió a los estudiantes que realizaran un escrito que tuviera que ver con la vida diaria, y que involucrara fracciones equivalentes. Tenemos narraciones descritas en el diario de campo, como la de Erika, escrita con un poco de imaginación y fantasía pero relacionada con la cotidianidad y expuesta para todos los alumnos:

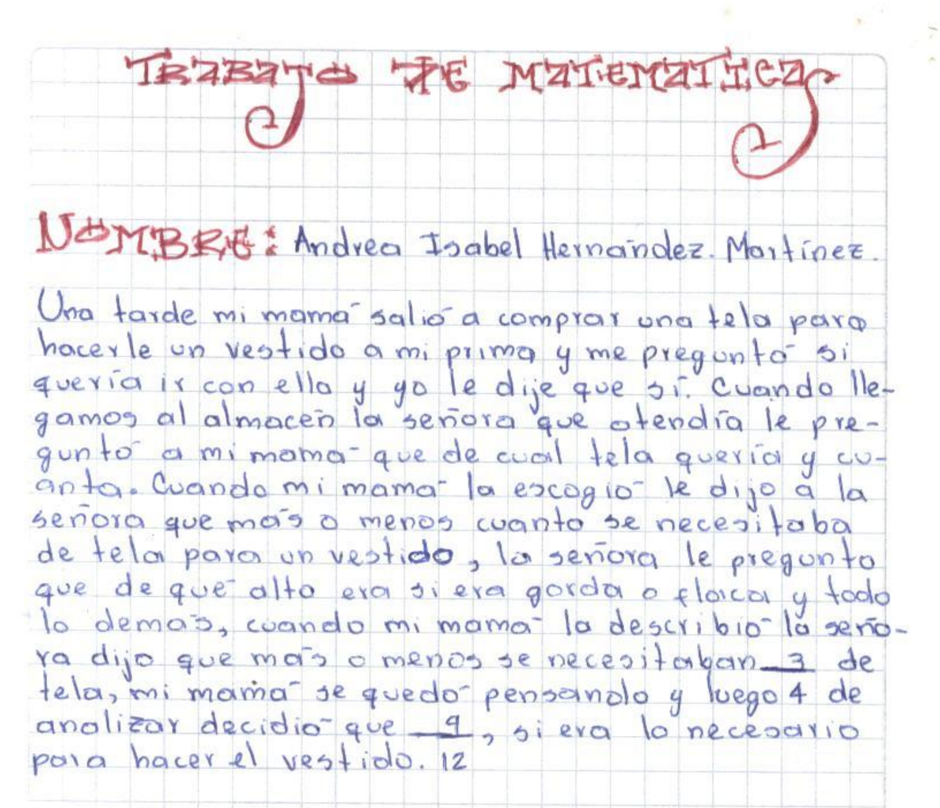
> "…Mi madre llegó muy afanada, era un poco tarde para hacer el almuerzo, estaba un poco colorada y sudorosa del fuerte calor del medio día, de todas maneras entró directo a la cocina con la bolsa del mercado, bajó unas ollas, y en una de ellas cogió agua y le agregó la legumbre. Yo la miré, y luego miré la olla y le dije con voz pausada: hoy sí vamos a estar en la olla... el almuerzo va a estar tarde, y la sopa va a ser poquita, porque veo que sólo echó 10/18 de agua. Mi madre me miró con desgano e indiferencia: ...váyase de aquí, coja la escoba y barre los 3/10 de la casa para que se gane los 6/20 de la sopa, es lo justo me dijo. Entonces le dije, hagamos un trato: no voy a barrer los 21/70 de la casa para ganarme los 15/50; sino que voy a barrer los 5/9 de la casa para ganarme los 15/27, porque tengo hambre. ¡Cómo no!, sinvergüenza ¿para que su hermana y yo aguantemos hambre? Pero Mami... usted propuso que de acuerdo a lo que barría, así comía..." (DC, 04-11-03)

En esta narración se ve que utilizan las fracciones equivalentes, y de manera jocosa relaciona lo que barre con lo que le corresponde de sopa. Si barre los 3/10 le corresponde 6/20, donde además vemos indirectamente el concepto de proporcionalidad. Obsérvese que 3/10 = 6/20 = 21/70 = 15/50 y 5/9 = 15/27. Otra narración que se leyó para todo el grupo fue la de Lizeth, que por su forma simpática despertó curiosidad:

"...Estaba mirando el jardín, y apareció la vecina con un tarro y dentro había un sapo, de pronto se le escapó, y se subió los 4/7 del árbol de mango. Allí se quedó muy quieto. Mi padre que escuchó lo que le decía a mi hermana, preguntó: supongo que la vecina volvió a coger el sapo porque se quedó quieto ahí. Le dije: no padre, ella no alcanzaba, usted sabe que ella es bajita de estatura, por lo tanto el sapo de la vecina se quedó ahí, en los 8/14 de la altura del árbol". (DC, 04-11-03)

Esto permitió aclarar ciertas inconsistencias que algunos alumnos tenían. Por ejemplo, en esta última narración, un estudiante pasó al tablero y dibujó dos árboles congruentes y en uno dibujó los 4/7 y en el otro los 8/14, comprendiendo así por qué eran equivalentes.

Así, como estas dos narraciones que se expusieron y comentaron en clase, hubo otras muy dicientes. Vamos a compartir dos más de estos escritos[9]


TRABAJO DE MATEMATICA

NOMBRE: Andrea Isabel Hernandez Martínez.

Una tarde mi mamá salió a comprar una tela para hacerle un vestido a mi prima y me preguntó si quería ir con ella y yo le dije que sí. Cuando llegamos al almacen la señora que atendía le preguntó a mi mamá que de cual tela quería y cuanta. Cuando mi mamá la escogió le dijo a la señora que más o menos cuanto se necesitaba de tela para un vestido, la señora le pregunto que de qué alto era si era gorda o flaca y todo lo demás, cuando mi mamá la describió la señora dijo que más o menos se necesitaban $\frac{3}{4}$ de tela, mi mamá se quedó pensando y luego de analizar decidió que $\frac{9}{12}$, si era lo necesario para hacer el vestido.

[9] En las narraciones de los alumnos se pueden apreciar algunos errores de ortografía y redacción.

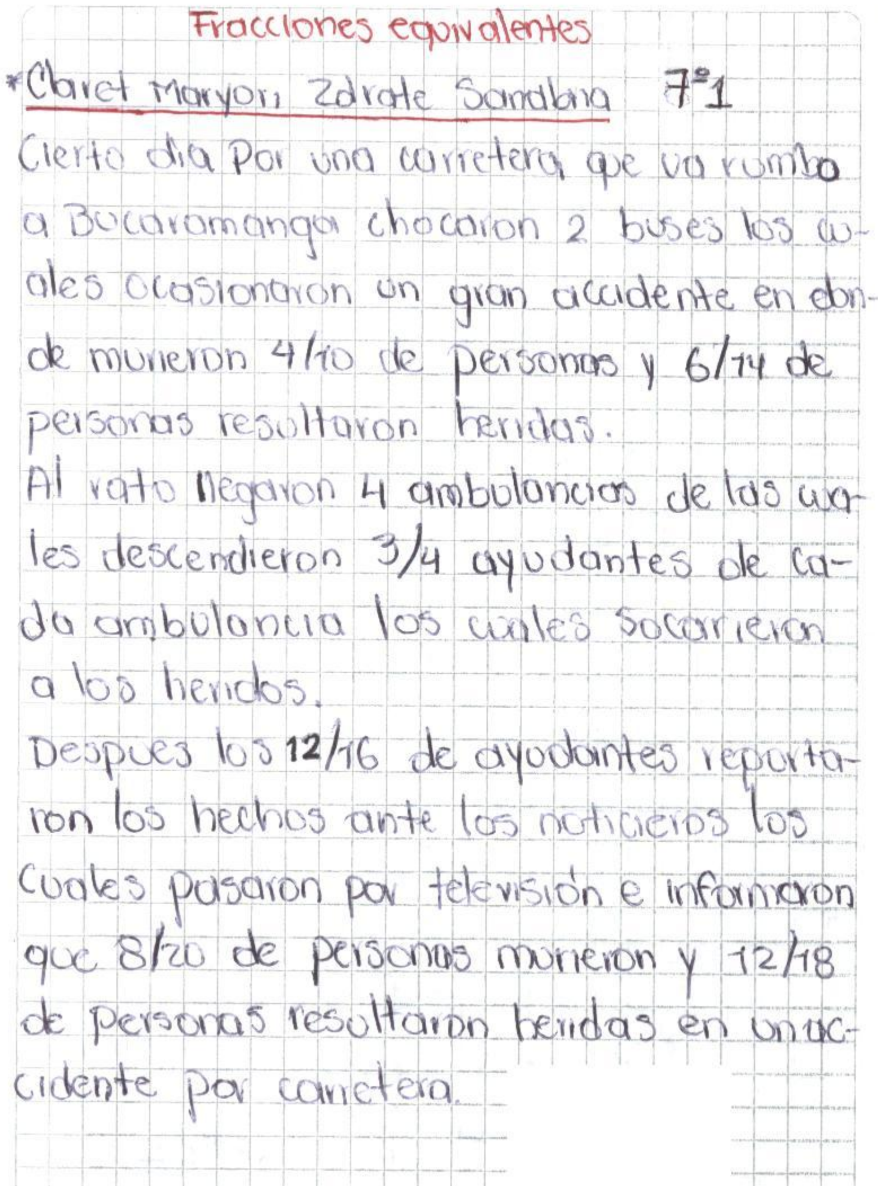
En este caso, Andrea Isabel utiliza una descripción bastante sencilla, pero concreta para indicarnos que 3/4 es equivalente con 9/12. En este caso y el anterior se puede leer que no especifican claramente el todo o la unidad, lo dan como si de antemano se conociera o que de manera lógica se debe entender, o lo más probable es que exista una falta de relación con la unidad. Es así que describe: *"…la señora dijo que más o menos se necesitaban 3/4 de tela"* no dice de que cantidad de tela se refiere, y agrega: *"…mi mamá se quedó pensando y luego de analizar decidió que 9/12, si era lo necesario para hacer el vestido"*.

Llinares y Sánchez (1996) nos hablan sobre el papel de la unidad en la forma de comprender las fracciones por parte de los estudiantes:

> "Una de las consecuencias más importantes que se derivan de la influencia de los símbolos en la comprensión de las fracciones por parte de los estudiantes son las dificultades puestas de manifiesto en manejar la idea de unidad. La desvinculación del significado asociado a las fracciones como números y como cantidad pueden explicar de alguna manera las dificultades que algunos estudiantes tenían ante las tareas que implican reconocer plenamente el papel desempeñado por la unidad" (Llinares y Sánchez 1996, p.106)

A continuación otra de las narraciones referente a las fracciones equivalentes, escrita por Claret Maryory.

Obsérvese, en la narración, que la alumna convierte una noticia que habitualmente escuchamos por los medios de comunicación, con datos precisos del número de víctimas y heridos, a unos donde su resultado necesita de más razonamiento e imaginación. Esto también le permite a ella, jugar con las fracciones equivalentes.


Fracciones equivalentes

*Claret Maryori Zárate Sandoval 7°1

Cierto dia Por una carretera que va rumbo a Bucaramanga chocaron 2 buses los cuales ocasionaron un gran accidente en donde murieron 4/10 de personas y 6/14 de personas resultaron heridas.

Al rato llegaron 4 ambulancias de las cuales descendieron 3/4 ayudantes de cada ambulancia los cuales socorrieron a los heridos.

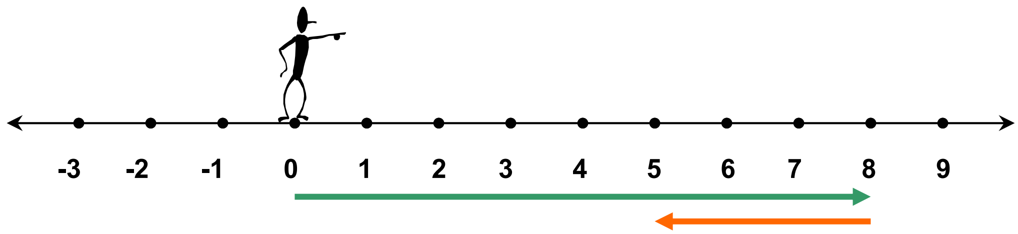
Despues los 12/16 de ayudantes reportaron los hechos ante los noticieros los cuales pasaron por televisión e informaron que 8/20 de personas murieron y 12/18 de personas resultaron heridas en un accidente por carretera.

Se analiza en el escrito que murieron 4/10 de las personas que se transportaban en los dos buses (esta última interpretación es mía) y luego en la noticia que se da en televisión, se informa que murieron 8/20, donde vemos claramente el manejo del concepto de fracciones equivalentes. Sin embargo en el escrito también se encuentra un error en la equivalencia de las fracciones 6/14 con 12/18, en la revisión de los escritos le informé a la alumna sobre este error, argumentando ella que había sido una equivocación al escribir, ya que era 28 en vez de 18.

La importancia de estas actividades como se puede analizar, es que además de verificar si existe conexión con el contexto nos permite hacer retroalimentación.

La retroalimentación en general, y utilizando los diferentes medios posibles, es fundamental para la comprensión. Cuando pretendemos dar retroalimentación es importante hacer preguntas que le ayuden a la persona a comprender mejor y a mejorar su trabajo. Para llegar a comprender algo necesitamos retroalimentación que nos permita cualificar nuestras teorías, analizar y acordar con otras personas o experimentar en un laboratorio o cosas de la vida cotidiana. En la experiencia de aula sobre los racionales equivalentes y la adición de números racionales se estuvo aplicando constantemente la retroalimentación: a través de preguntas, por casos cotidianos, supuestos hipotéticos, reversibilidad de procedimientos. Así, por ejemplo, en el taller N° 2 encontramos la siguiente situación:

> ...La estudiante Andrea Isabel y en parte su grupo, no comprendían claramente porqué en el ejercicio **c** se cogían las partes amarillas y se colocaban encima de las partes verdes. ...querían saber por qué y me pidieron el favor que antes que terminara la clase les diera unas pistas o una explicación que les permitiera comprender mejor. En los últimos 5 minutos les plantee la siguiente situación: cuando nos encontrábamos en las actividades en los números enteros, analizamos casos como este: Juancho Pilas está en el punto cero y puede caminar para la derecha o para la izquierda tantos pasos como necesite hacerlo, y después que empiece a avanzar o retroceder los pasos que crea conveniente. Si tomamos como referencia que está en el punto de origen (en la recta numérica el cero) y caminar a la derecha es positivo (para indicar esta situación voy a utilizar un color: el verde) y caminar hacia la izquierda es negativo (para indicar esta situación voy a utilizar otro color: el anaranjado), vemos lo siguiente: Juancho Pilas camina a la derecha 8 pasos y se regresa (camina en sentido contrario, es decir, a la izquierda) 3 pasos. La situación sería: **8 + (-3)** (DC, 01-11-03)



Esta retroalimentación ayudó a comprender por qué esa manipulación de las tabletas de esa manera en el caso de

$$\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{6}\right)$$

En las actividades de la adición de números racionales se trabajó en equipo un caso o situación problema. Una vez recogidas las soluciones, se escogió al azar un grupo. La solución dada por el grupo de Daniela, quien fue escogida al azar dentro del grupo para presentarla, fue complementada con la intervención de otros alumnos, que retroalimentaron y ayudaron a una mejor solución y una mejor comprensión del caso. Consultando en el DC, cuando se registró esta actividad, tenemos la forma en que se trató el caso señalado:

> Daniela nos dio a conocer la solución efectuada por ellos, para lo cual nos recordó parte del caso: . . . *"El salón tiene forma rectangular, por lo tanto cuatro paredes y el techo se deben pintar. Las paredes paralelas son congruentes. Para pintar las dos paredes paralelas más grandes se necesitan 3 recipientes de pintura verde de 3/8, las otras dos paredes paralelas necesitan 5 tarros de pintura rosada de 1/4 de galón y en el techo se va a gastar 2/5 de galón de pintura blanca. Una vez entregado el informe por el empleado, la comisión de embellecimiento del salón acordó que lo mejor sería era pintar las paredes y el techo de un mismo color.*
>
> La alumna se veía un poco nerviosa pero segura de que la alternativa de solución que daba era la correcta. Seguí la exposición dada por la alumna, con la que consignaron en la hoja que entregaron. Este grupo para hallar el total de la pintura a gastar en las paredes paralelas no multiplicaron el número de tarros de pintura por la cantidad de pintura en cada tarro, sino que hicieron la suma de ellos así:
>
> $$\frac{3}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{9}{8} \quad ; \quad \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$$

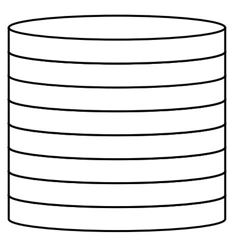
Luego sumaron estos dos valores más el gasto de pintura del techo así:

$$\frac{9}{8} + \frac{5}{4} + \frac{2}{5} = \frac{45 + 50 + 16}{40} = \frac{111}{40}$$

Revisados los trabajos de grupo la mayoría llegó hasta esta parte, realizando procedimientos parecidos pero algunos con ciertas inconsistencias, como por ejemplo, realizaron (3/8) + (5/4) + (2/5). Es bueno mencionar que fue necesaria una orientación previa sobre el caso, porque gran parte de los grupos de trabajo tenían cierta dificultad, porque entre otras cosas, el caso presentaba ciertas suposiciones no reales como por ejemplo la cantidad de 3/8 no se encuentra disponible en tarros de pintura.

Una vez terminó su exposición Daniela y constatando la respuesta, le pregunté al grupo que de acuerdo a esto, cuánta pintura se debería comprar, y contestaron que 111/40 entonces repliqué que suponiendo que el vendedor no entiende cuánto es 111/40 de pintura, lo cual hizo que los del grupo dudaran un poco, luego un alumno de otro grupo (Cristian) respondió que correspondía a 3 galones. Inmediatamente del grupo de Daniela una alumna (Claret) dijo: ya sé profesor: "Hay que dividir para saber cuántas unidades hay"; la invité a que pasara al tablero y realizara la operación, dando como respuesta 2 unidades y 31/40 de otra unidad. Seguidamente el alumno que había dicho que 3 galones afirmó: Profesor, es que 31/40 de galón no venden, y está próximo a otro galón, entonces lo mejor es comprar los 3 galones, lo digo porque mi Papá trabaja en un almacén de pinturas. Así mismo, les insinué que representaran 31/40 en una figura y miraran qué solución podríamos darle a esta situación. En un principio no hallaban como dar una solución, siendo necesario una vez más mi orientación, insinuándoles que podían dibujar un tarro de pintura de un galón y dividirlo en cantidades iguales que representaran tarros de pintura más pequeños, disponibles en la ferretería.

Aproximadamente a los 5 minutos, la alumna Shirley intervino para hacer saber que tenía la solución, no sin antes revisarla para comprobar que estaba bien, pasando al tablero y dibujando la figura así:

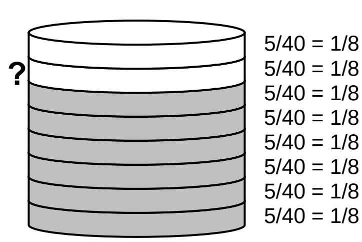


Dibujó un tarro de pintura y lo dividió en 8 partes iguales.

Explicó que cada parte representaba 5 partes de las 40, es decir **8 x 5 = 40**, luego ahí están las cuarenta partes.

Un compañero le preguntó que por qué dividía en 8 partes y no por ejemplo en 4 de 10, o en 5 de 8, etc. Ella respondió que por que sabía que vendían tarros de 1/8. Les dije que muy bien, y como ya faltaban 5 minutos para terminar la clase, que concluyeran su solución.

Entonces hizo la siguiente ilustración:



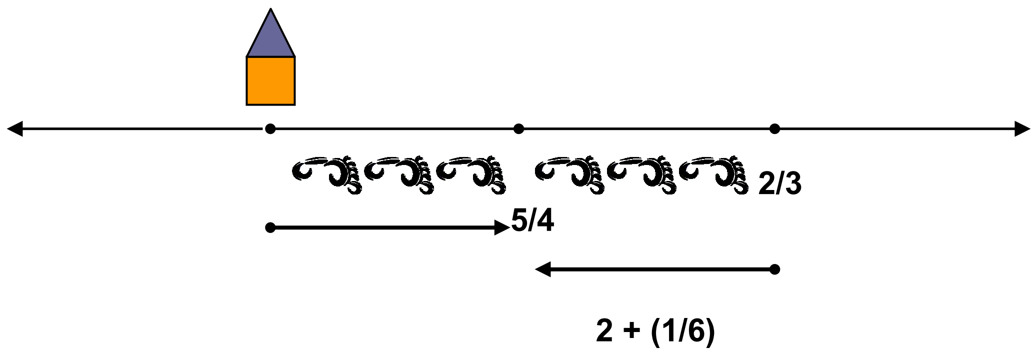
Y finalizó diciendo que: *la solución era comprar además de los 2 galones, 6 tarros de 1/8 y para completar lo que falta 1/40, se compraría un tarro de pintura de 1/32*. (DC, 11-11-03)

Como inferimos, el aprendizaje debe ser funcional en el individuo, es decir, el conocimiento adquirido debe poder ser realizado por el alumno ante distintas situaciones permitiéndole a la vez comprender e intervenir mejor en la realidad en la que vive.

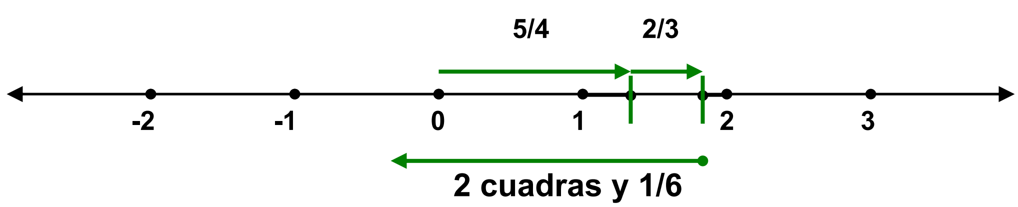
Cuando se realizó la actividad final, con el taller N° 3, que fue desarrollado por los estudiantes de manera individual, logré analizar hechos significativos, como por ejemplo en el punto 4 del taller aprecié que realmente los alumnos han alcanzado una buena comprensión de las fracciones equivalentes y adición de números racionales. Describiendo un poco esta actividad, noté que lo primero que hicieron los estudiantes al tratar de resolver ese punto, fue la representación gráfica de la situación. De los 18 estudiantes seleccionados, 15 lo hicieron con la representación en una recta numérica y luego las operaciones necesarias.

Situación planteada: Facundo salió de su casa en Barrancabermeja y recorrió a la derecha de ella 5/4 de cuadra, descansó, y luego avanzó 2/3 de cuadra, pero se acordó que debía darle un mensaje a su amigo Teodoro y se regresó por el mismo camino 2 cuadras y 1/6 de cuadra más.

Entre las representaciones que los estudiantes hicieron de la actividad, en la recta numérica analizamos estas dos gráficas:



Se observa que al representar en la recta numérica las fracciones, no se tuvo en cuenta la unidad.



En esta representación sí se tuvo en cuenta la unidad, pero la representación de los números racionales es aproximada.

Un análisis estadístico del caso es el siguiente:

a) ¿Está Facundo a la derecha o izquierda de su casa?

Catorce estudiantes contestaron que a la izquierda y cuatro que a la derecha.

b) ¿Exactamente a cuánto está?

Doce contestaron que a 1/4 de la casa, dos que a -1/4 , dos que a -2/6 y dos a -18/72.

c) ¿Facundo volvió a pasar por su casa para dar el mensaje?

Diez y seis contestaron que sí y dos que no.

d) Facundo inicialmente iba para donde su Tía Dolores que vive a 2 cuadras y media de su casa, a reclamar una plata:

d_1) En el momento que se acordó del mensaje para su amigo.

- Catorce estudiantes contestaron que primero fuera donde la tía Dolores
- Tres estudiantes contestaron que primero donde el amigo.
- Un estudiante contestó que: *"depende de la urgencia del mensaje, en tal caso estuvo correcto haberse devuelto primero, en caso contrario que el mensaje no fuera urgente y podía esperar el tiempo que faltaba por completar para llegar donde la tía Dolores y reclamar la plata, entonces fue incorrecto devolverse". (Mario Moreno)*

Además de esta reflexión hubo afirmaciones como estas (Tomadas de la hoja del taller N° 3)

- *"Yo recomendaría que primero fuera donde su tía Dolores a reclamar la plata y después darle el mensaje a su amigo"* (Gilberto)
- *"Se lo hubiera llevado de una vez"* (Mayra)
- *"Que primero fuera donde su tía y luego de regreso fuera donde su amigo"* (Daniela)
- *"Hubiera seguido para donde su tía y luego darle el mensaje a su amigo"* (Shirley)

d_2) Si Facundo al salir de su casa se acordó del mensaje para su amigo y de reclamar la plata a su Tía:

- Catorce estudiantes contestaron que primero ir donde el amigo
- Cuatro estudiantes que primero ir donde su tía.

Aquí hubo afirmaciones como estas:

- *"Primero donde el amigo y luego donde su tía"* (Claret)
- *"Me voy para donde mi amigo porque me quedaría más cerca y más fácil"* (Mayra Alejandra)
- *"Debe darle el mensaje a su amigo y luego ir a reclamar la plata donde su tía"* (Andrea Isabel)
- *"Que fuera primero donde su amigo a darle el mensaje y luego donde su tía"* (Jhulianys)

Durante el desarrollo del taller sólo un grupo cuestionó si las cuadras eran de igual longitud, hecho que se les aclaró para todos los grupos, y al mismo tiempo se aprovechó para señalarles que Facundo caminaba en línea recta. Como se puede observar en la elaboración del taller se presentaron inconsistencias que fueron aclaradas verbalmente en el desarrollo de la actividad.

Observo que existe en las aseveraciones de los alumnos unas interpretaciones y reflexiones del caso bastante acertadas.

3.5 LA ACCIÓN COMUNICATIVA

El categorizar la acción comunicativa como algo que contribuyó a la comprensión de las fracciones equivalentes y la adición de números racionales tuvo que ver con la forma en que los estudiantes manejaron dicha comunicación. Los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (1997, p.94) nos orientan en que "una necesidad común que tenemos todos los seres humanos en todas las actividades, disciplinas, profesiones y sitios de trabajo es la habilidad para comunicarnos".

Habermas (1999) expresa la acción comunicativa como una comunicación honesta y transparente, en la que opera relaciones del actor con el mundo y presupone el lenguaje como un medio de entendimiento. Sobre el particular el autor nos dice que la acción comunicativa tiene un carácter de acciones independientes y una relación reflexiva que el actor guarda con el mundo en los procesos de entendimiento.

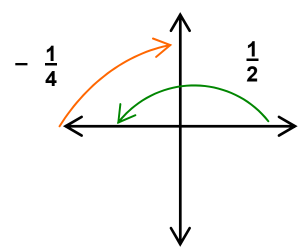
Habermas (1999) llama acciones a aquellas manifestaciones simbólicas en que el actor entra en relación al menos con un mundo (objetivo, social, subjetivo)[10]. Y dice Habermas (1999, p.139) "distingo de ellas los movimientos corporales y las operaciones que se correlacionan en las acciones y, que sólo secundariamente pueden llegar a adquirir la autonomía que caracteriza a las acciones a saber: por inclusión en un juego o en un aprendizaje". A la vez Habermas (1999) nos aclara que podemos distinguir los movimientos con que un sujeto interviene en el mundo (actúa instrumentalmente) de los movimientos con que un sujeto encarna un significado (se expresa comunicativamente) y, anota Habermas (1999, p.140), que ciertamente "los movimientos del cuerpo causan en ambos casos un cambio físico, pero en el primer caso este cambio es causalmente relevante, en el segundo, semánticamente relevante". Ejemplos de movimientos corporales causalmente relevantes son: extender la mano, levantar el brazo, mover los dedos, cruzar las piernas, estirar las piernas. Movimientos corporales semánticamente relevantes son: la inclinación de la cabeza, los encogimientos de hombros, los movimientos de los dedos al tocar el piano, o los movimientos de la mano al escribir, al dibujar, etc.

Luego, según Habermas (1999), las acciones son realizadas en cierto modo mediante movimientos corporales. Afirma Habermas (1999, p.141) "un movimiento corporal es elemento de una acción, pero no una acción".

[10] Mundo Objetivo (conjunto de todas las entidades sobre la que son posibles enunciados verdaderos). Mundo Social (conjunto de todas las relaciones interpersonales legítimamente reguladas). Mundo Subjetivo (totalidad de las vivencias del hablante, a las que éste tiene un acceso privilegiado). (Habermas 1999)

En la experiencia de aula fue importante cuando los estudiantes realizaron esas acciones comunicativas, como por ejemplo, cuando en forma lúdica, se ubicaron en distintas partes del salón, y un alumno de un grupo iba diciendo a uno de sus compañeros: de media vuelta a la derecha, y el alumno de manera independiente y reflexiva realizaba la acción y le decía a su compañero utilizando el lenguaje matemático: 1/2, el otro alumno decía regrese 1/4 de vuelta, y su compañero realizaba la acción de manera reflexiva y le decía: -1/4, además el tercer compañero de su equipo en una hoja escribía las acciones semánticamente relevantes efectuadas.

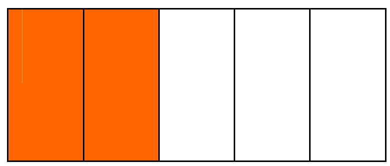
En este caso: $\frac{1}{2} + \left(-\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4}$



(Tomado de la hoja de apuntes del grupo de Adriana Lucía, Mario Andrés y Mayra Alejandra)

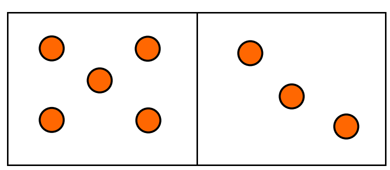
Habermas (1999, p.143) nos dice que “el concepto de acción comunicativa presupone el lenguaje como un medio dentro del cual tiene lugar un tipo de procesos de entendimiento en cuyo transcurso los participantes, al relacionarse con un mundo, se presentan unos frente a otros con pretensiones de validez que pueden ser reconocidas o puestas en cuestión”. Puede deducirse de aquí, y él mismo lo afirma en la descripción de esta idea, que el entendimiento funciona como mecanismo coordinador de la acción, y esto hace que se pongan de acuerdo los participantes acerca de la validez que pretenden para sus manifestaciones.

Hacer la comunicación verbal o escrita de las acciones posibilita la interiorización de lo que se manifiesta en forma externa. Así, por ejemplo, cuando el alumno al tener la siguiente situación con las tabletas:

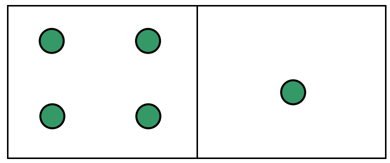


decía: *"En este caso las tabletas me están representando el número racional -2/5"*, puede verse que él esta interiorizando, por medio de la acción comunicativa, lo que estaba realizando en forma externa, y comprendía que el significado de -2/5 en las tabletas era una representación simbólica del mismo.

Lo mismo cuando en el juego del dominó ampliado los participantes (estudiantes), acompañados por el docente, convienen o acuerdan darles unas representaciones simbólicas del mismo, y dentro de la acción comunicativa del juego, los alumnos manifiestan reflexivamente que



Es -5/3 o -3/5 según la situación acordada del momento del juego, o que:



Era el 4 o 1/4 según el caso o necesidad del juego.

Habermas (1999, p.145) aclara: “El lenguaje es un medio de comunicación que sirve al entendimiento, pero las personas o actores al entenderse entre sí para coordinar sus acciones, persigue cada uno determinadas metas”, y debo agregar que lo que se busca son consensos para someterlos a criterios de verdad, de rectitud y veracidad.

Al respecto, los Lineamientos Curriculares – Matemáticas (1997, p.95) sostienen que diversos estudios han identificado la comunicación como uno de los procesos más importantes para aprender matemáticas y para resolver problemas. Cita al NCTM (Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática, 1989, p.25) textualmente así:

> “La comunicación juega un papel fundamental, al ayudar a los niños y jóvenes a construir los vínculos entre sus nociones informales e intuitivas y el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas, cumple también una función clave como ayuda para que los alumnos tracen importantes conexiones entre las representaciones físicas, pictóricas, gráficas, simbólicas, verbales y mentales de las ideas matemáticas”.

En la presente experiencia de aula, se partió de unos presaberes que el alumno ya traía (tanto formales como informales, y sus nociones intuitivas) y con base en las actividades estructuradas se fueron haciendo las conexiones. Había nociones traídas por el estudiante de su lenguaje ordinario y que se fueron complementando y perfeccionando hacia el lenguaje abstracto y simbólico de las matemáticas.

Así, por ejemplo, los estudiantes tenían la idea de fracciones o números fraccionarios solamente bajo el ejemplo numérico, y en el transcurrir de la experiencia hablaban de números racionales como a/b donde a, b **Є Z**. También al leer por ejemplo 1/2 = 2/4, mencionaban que 1/2 era una fracción equivalente con 2/4 *(tomado del DC del 29-10-03)*.

En el taller final (Taller N° 3), al escoger uno de los talleres resueltos individualmente por los alumnos, en el punto 3 que se refería a la siguiente situación: *Roberto cortó 3/8 del césped en la mañana y 5/8 en la tarde. ¿Alcanzó a cortar todo el césped?*, contestaron lo siguiente:

> "Sí, Roberto alcanzó a cortar todo el césped porque (3/7) + (5/8) =8/8 y 8/8 es igual a 1 unidad eso quiere decir que cortó todo el césped" (Tomado del taller resuelto por Daniela)
>
> "…(3/8) + (5/8) = (3+5)/8 = 8/8 Sí alcanzó a cortar todo el césped" (tomado del taller resuelto por (Claret).

Es claro que en las clases de matemáticas, ineludiblemente, debe utilizarse tanto el lenguaje común como el matemático, este último intentando puntualizar significaciones matemáticas para algunas palabras presentes en el lenguaje ordinario.

La comunicación es parte fundamental de la comprensión porque implica usar el lenguaje apropiado que le permita comunicar de manera convincente sus ideas y sus experiencias, en este caso experiencias matemáticas. Estos lenguajes usados adquieren cierta particularidad cuando se habla de comprender en matemáticas.

En matemáticas – Lineamientos Curriculares (1997, p.96) cita textualmente a NCTM (*Profesional Standard for Teaching Matematics*, 1991, p.96) así:

> "La comunicación matemática puede ocurrir cuando los estudiantes trabajan en grupos cooperativos, cuando un estudiante explica un algoritmo para resolver algo, cuando un estudiante presenta un método único para resolver un problema, cuando un estudiante construye y explica una representación gráfica de un fenómeno del mundo real, o cuando un estudiante propone una conjetura sobre una figura geométrica".

Cuando los estudiantes afirmaban en el desarrollo de una de las actividades de la adición de los números racionales que sustituían o reemplazaban a 5/4 por 50/40 porque eran fracciones equivalentes, ya que significaban lo mismo, estaban haciendo una comunicación matemática y exteriorizando una comprensión de ello.

A través de la experiencia de aula, se observó que en muchas ocasiones los alumnos, inicialmente, no utilizaban el lenguaje matemático y la acción comunicativa adecuada. Pero posteriormente, los alumnos fueron utilizando las palabras, las frases, los símbolos y las expresiones apropiadas, como lo señalé en ejemplos anteriores. Para citar un ejemplo más, en la primera actividad el alumno Luis Fernando afirmaba que para representar a 3/4 lo hago en la línea dada, posteriormente después del taller N° 1 este mismo alumno utilizaba la expresión represento a 3/4 en la recta numérica.

4. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En las distintas actividades de la experiencia de aula observé la importancia de un aprendizaje activo, participativo, y reflexivo, por parte de los alumnos, quienes desarrollaron una mejor comprensión de los temas y fueron adquiriendo hábitos, habilidades y destrezas para enfrentar problemas y darles alternativas de solución.

Analicé en la experiencia de aula, a través de las categorías emergentes, que la estrategia didáctica permitió a los estudiantes partir de lo que ya sabían, para que fueran comprendiendo los conceptos y procedimientos de las fracciones equivalentes y adición de números racionales. Es de anotar que pocos estudiantes sabían realizar los procedimientos anteriores correctamente, antes de empezar las actividades de este trabajo, pero como se detectó en la prueba diagnóstica éstos lo hacían mecánicamente y no eran muy bien comprendidos. También es cierto que aunque los alumnos de alguna manera habían visto y trabajado con fracciones en los grados 4°, 5° y 6°, había sido únicamente sobre fracciones positivas y aquí en la presente experiencia de aula, de igual forma se trabajó con fracciones negativas.

En un principio a los alumnos les parecía complicado empezar a resolver algo en lo que no se les había dado un algoritmo o un procedimiento predeterminado, pero poco a poco, empezaron a encontrar diferencias, semejanzas, relaciones, propiedades, en las diferentes actividades.

La organización de las actividades en trabajos grupales y socializaciones colectivas permitieron a los alumnos enriquecerse con las explicaciones, dudas, conjeturas, concepciones y sentimientos de sus compañeros; además de ser más colectivo el aprendizaje y tener de manera más cercana e inmediata soluciones a situaciones que no se comprendían.

A través del trabajo en grupo aprecié que los alumnos iban desarrollando su pensamiento social, ya que tenían que comprender la perspectiva del otro para poder argumentar y, por lo tanto, era necesaria la exigencia de escuchar y ser escuchado, y poniéndose de relieve la diversidad en las formas de abordar un mismo problema o actividad.

La utilización de material concreto, como las tabletas, el dominó ampliado y el dominó representativo de fracciones equivalentes hizo que los estudiantes, al manipular este material, verificaban procedimientos y dieran sentido a lo que aprendían. El uso de material como las tabletas fue muy importante para que los estudiantes hicieran conjeturas, reflexiones, verificaciones, y tuvieran una motivación más para el aprendizaje de las fracciones equivalentes y la adición de números racionales.

El manejo de diferentes formas de representación estuvo presente en el desarrollo de la mayoría de las actividades. Se utilizaron diferentes modos de representación como las tabletas, el dominó, la recta numérica, las figuras planas, como por ejemplo en rectángulos, círculos, figuras pictográficas, los modelos numéricos y las representaciones espaciales, en especial con las actividades de movimiento giratorio del cuerpo. Puedo afirmar que el manejo de las formas de representación fue una parte inherente al desarrollo de la comprensión conceptual y procedimental del tema de las fracciones equivalentes y la adición de números racionales.

El desarrollo de actividades con situaciones problemas sirvió para verificar si los alumnos eran capaces de aplicar lo aprendido. En la experiencia de aula noté que los alumnos no estaban acostumbrados a buscar alternativas de solución a una situación nueva, sin tener un modelo o ejemplo base que les permitiera seguir unos pasos para resolver el caso presentado.

El posibilitar de forma premeditada o voluntaria que los estudiantes se expresaran y presentaran sus argumentos, soluciones e inquietudes, ayudó a que se exteriorizara una acción comunicativa sin tantos prejuicios y temores; ayudó también a que constantemente se comunicaran con los demás y con ellos mismos, ya sea en forma verbal o escrita, y se usaran aproximaciones del lenguaje matemático en los temas tratados.

Se observó que en muchas ocasiones los alumnos, inicialmente, no utilizaban el lenguaje matemático y la acción comunicativa adecuada. Pero una vez se iba avanzando en las actividades, con la comprensión de los conceptos y el uso del lenguaje matemático adecuado, los alumnos fueron utilizando las palabras, las frases, los símbolos y las expresiones apropiadas.

La interacción de las categorías de análisis, algunas veces de manera simultánea y otras de manera complementaria, contribuyó al desarrollo de la comprensión de los alumnos del grado 7-01 del Instituto Técnico Superior de Comercio de Barrancabermeja, y referente a las fracciones equivalentes y la adición de números racionales.

De igual forma no se puede ignorar el efecto que en la comprensión tuvieron la motivación, la determinación, el deseo y la intención de aprender de los alumnos, en gran parte por la forma en que se diseñó e implementó la estrategia didáctica y la significación del material usado. Es de anotar que la parte lúdica dentro de la experiencia de aula fue fundamental y estaba implícita en el análisis de cada una de las categorías seleccionadas. Esto porque la utilización de las tabletas, el dominó ampliado, el dominó de fracciones equivalentes, los movimientos giratorios corporales, etc., fueron, sin dudarlo, un componente lúdico y parte importante en la motivación, el interés y la dinámica de los estudiantes en la experiencia de aula.

Es recomendable implementar esta estrategia si es posible mejorada, en los cursos de 7° grado venideros de la institución, y de igual forma en grados anteriores pero ajustado a las necesidades. Y sería interesante que en otras instituciones se pudieran aplicar para correlacionar algunos resultados.

Así mismo sería recomendable extender o continuar la estrategia con las otras operaciones con números racionales, y trabajar con el material concreto las propiedades y darle cada vez más importancia a la resolución de problemas.

Una recomendación, que hago a los docentes, es proponer la utilización, en cuanto sea posible, de material concreto manipulable a los estudiantes en los grados de básica secundaria. Me atrevería a decir que esa utilización de material concreto en cualquier edad es atrayente y posibilita que los alumnos comprendan los conceptos, relaciones y procedimientos matemáticos.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

ACERO, A. E, El Diario de Campo. Medio de investigación del docente. En: recopilación de talleres sobre el Diario de Campo. 1997.

AUSUBEL, D. P., NOVAK, J. y HANESIAN, H., Psicología educativa. Un punto de vista cognoscitivo, 2° Edición, México: Trillas, 1990.

BELLO, J. H., y SALAZAR, C., Desafíos Matemáticos 7. Guía para Docentes. Bogotá, Grupo Editorial Norma, 2004.

Cartilla Herramientas Pedagógicas para la Contextualización de los Estándares. Grupo de Apoyo Pedagógico Santillana. Editorial Santillana S.A., 2003.

CENTENO, G., CANTENO, H., JIMÉNEZ, N., Nueva Matemática Constructiva 7. Santafé de Bogotá: Libros y Libros, 1997.

COLL, C., Aprendizaje Escolar y Construcción del Conocimiento, Barcelona, Paidós, 1990.

GODINO, J., CID, E y BATANERO, C., Sistemas numéricos y su didáctica para maestros. Universidad de Granada, 2003.

GENTE (Grupo de Estudio e Investigación en Tecnologías y Educación). El Aprendizaje Colaborativo una estrategia de aprendizaje para la vida. En: cartilla Nuevas Tecnologías y Educación. Escuela de Matemáticas. Especialización en Educación Matemática. UIS. 2003 a. p 11-18.

GENTE (Grupo de Estudio e Investigación en Tecnologías y Educación). Las Tecnologías como instancias de mediación. En: cartilla Nuevas Tecnologías y Educación. Escuela de Matemáticas. Especialización en Educación Matemática. UIS. 2003 b. p.5-10.

HABERMAS, J., Teoría de la acción comunicativa, I. Unigraf S.L. Madrid, España, febrero de 1999.

JARAMILLO, R., ESCOBEDO, H., y BERMUDEZ, A., Enseñanza para la Comprensión. En: Revista Educación y Cultura, Pedagogías Hoy, N° 59. Bogotá D.C., Colombia. 2002, pp. 28-34.

LUPIÁÑEZ, J. L., y MORENO, L. E., Tecnología y representaciones semióticas en el aprendizaje de las matemáticas. En: cartilla sobre Nuevas Tecnologías en Educación. Especialización en Educación Matemática. UIS, 2003.

LLINARES, S., SÁNCHEZ, M. V. Fracciones. Síntesis, Madrid, 1988.

LLINARES, S.; SÁNCHEZ, V. Comprensión de las nociones matemáticas y modos de representación. El caso de los números racionales, en estudiantes para profesores de primaria. In: GIMÉNEZ, J; LLINARES, S; SÁNCHEZ, V. (Eds). El proceso de llegar a ser un profesor de primaria. Cuestiones desde la educación de matemática. Granada: Comares, 1996. p.95-117.

MARTINEZ, R y HERRERA, R., Finalidades y alcances del Decreto 230 del 11 de febrero de 2002. Currículo, Evaluación y Promoción de los Educandos, y Evaluación Institucional. Serie Documentos Especiales. Ministerio de Educación Nacional. Bogotá D.C.:Enlace Editores, 2002.

MEN. Matemáticas. Lineamientos Curriculares. Santafé de Bogotá, 1997.

MEN. Lineamientos Curriculares de Matemáticas, Santafé de Bogotá. Cooperativa Editorial Magisterio, 1998.

MEN. Estándares Curriculares para Matemáticas, Santafé de Bogotá. Ministerio de Educación Nacional. 2002.

MEN. La revolución educativa. Estándares Básicos de Matemáticas y Lenguaje. Educación Básica y Media, Santafé de Bogotá, mayo de 2003.

NCTM, Estándares Curriculares y de Evaluación para la Educación Matemática, edición en castellano: Sociedad Andaluza de Educación Matemática. “THALES”. Servilla, 1989, p.39.

OSORIO, R. Didáctica “El Arte de Enseñar”. (Material de clase) Especialización en Educación Matemática. UIS. Bucaramanga, 2002.

OSORIO, R. Seminario II “Investigación en Educación” (Material de clase). Especialización en Educación Matemática. UIS. Bucaramanga, 2003.

PERRONE, V., ¿Por qué necesitamos una pedagogía de la comprensión?, en: Didáctica “El Arte de Enseñar” (Material de clase), Especialización en Educación Matemática. UIS. Bucaramanga, 2002.

PORLÁN, Rafael y MARTÍN, José., El diario del profesor. Un recurso para la investigación en el aula. Díada Editoras S.L. 2ª. Edición. Sevilla (España): 1993.

REY, L. Ensayo Metodológico para el Aprendizaje de Fraccionarios. Trabajo de grado de la Especialización en Educación Matemática. UIS. Bucaramanga, 1996.

ROJANO, T. y MORENO, L., Educación Matemática: Investigación y Tecnología en el nuevo siglo. Revista Avance y Perspectiva, Edición 18, 1999, p.63.

SCHOENFELD, A. H., A Source Book for College Mathematics Teaching. Washington, D.C.: Mathematical Association of América, 1990.

SCHOENFELD, A. H., Learning to Think Mathematically: Problem Solving, Metacognitwn, and Making in Mathematics. En Grouws, D.A, (Ed). 1992. Handbook of Research en Mathematics Teaching and Learning. New Cork: Macmillan. p.334 - 369.

SILVA, J. J., Ensayo Metodológico para la Construcción del Concepto de Fraccionarios. Trabajo de Grado en la Especialización de Educación Matemática. UIS, 1996.

VASCO, C. E. El Archipiélago Fraccionario. En: Ministerio de Educación Nacional. Un Nuevo Enfoque para la Didáctica de las Matemáticas. Tunja – Boyacá: Jotamar Ltda. 1994. p. 23 - 45.

VYGOTSKY, L. S., El Desarrollo de los procesos Psicológicos Superiores. Barcelona, Grijalbo, 1979.

WERTSH, J. V., “Vygotsky y la formación social de la mente”, Barcelona, Paidós, 1988.

ANEXOS

Anexo A. Taller N° 1 resuelto por un grupo de alumnos

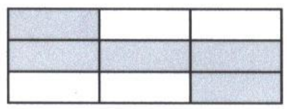
Clavet Zárate Sanabria _Liseth Tolosa Rodríguez
Daniela Ríos cabetas. 7:01-

TALLER N° 1

INSTITUTO TËCNICO SUPERIOR DE COMERCIO DE BARRANCABERMEJA

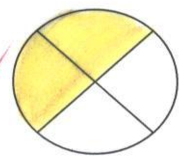
II semestre de 2003

1. Qué parte del rectángulo está sombreado:

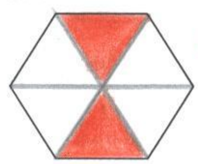


9/5

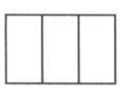
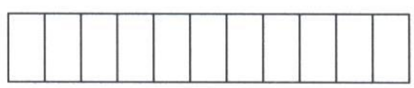
2. Colorea los $\frac{2}{4}$ del área del círculo



3. En la siguiente figura colorea los $\frac{2}{6}$ del perímetro.



4. Si tengo los siguientes dos rectángulos

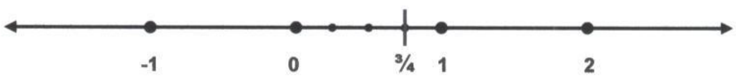
P  **Q** 

Si el rectángulo **P** se utiliza para medir el área del rectángulo **Q**, completa las siguientes frases:

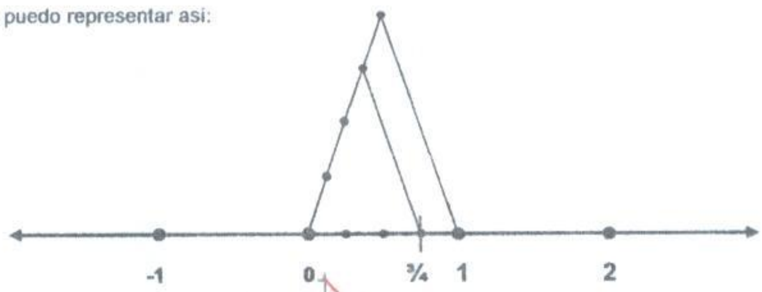
"El área de **Q** es igual a ___11/3___ del área de **P**"

"El área de **P** es igual a ___3/11___ del área de **Q**"

5. Observa que si en la recta numérica represento 3/4 quedaría:

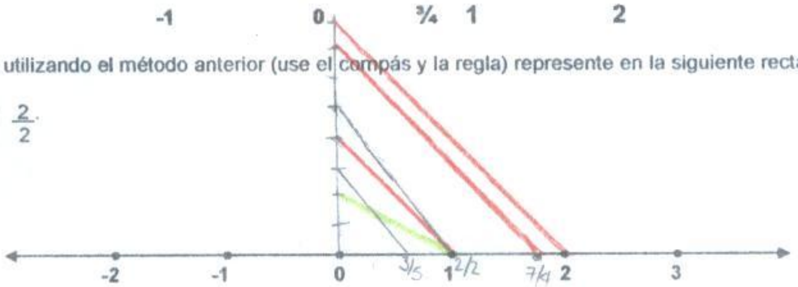


También lo puedo representar así:



Por favor, utilizando el método anterior (use el compás y la regla) represente en la siguiente recta numérica:

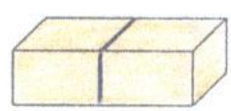
$\frac{3}{5}$, $\frac{7}{4}$ y $\frac{2}{2}$.



Con relación a ¾ ¿Qué puede decir de 3/5, 7/4 y 2/2?

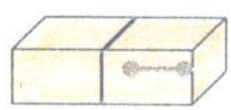
* Qué 2/2 es mayor a 3/5
* Qué 3/5 es menor a 7/4
* Tambien que todos quedaron hacia la derecha Por esta razón son Positivos

6. Tengo el siguiente ladrillo:



Donde su volumen (espacio que ocupa el ladrillo) lo he dividido en dos partes como lo señala la línea azul en la figura. Luego cada parte me representa la mitad (½) del ladrillo.

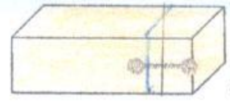
Por insinuación de un amigo le introduje un tornillo de hierro como muestra la figura.



Realice y analice las siguientes situaciones:

a) Al dividir el peso (masa) del ladrillo en dos partes iguales, de tal manera que cada parte sea ½ ¿Cómo se haría en la figura de abajo?
b) Divida el volumen del ladrillo de tal manera que cada parte sea ½.

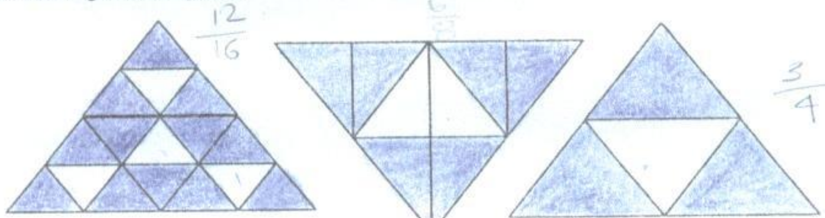
Dependiendo del peso 1/2 queda igual ya que las 2 partes pesan lo mismo



Dependiendo del volumen quedan diferente ya que queda un espacio mas grande que el otro

7. Al representar en una recta numérica: 2/2, 3/3, 4/4, 5/5, 6/6 ¿Dónde los ubicaría? Explique. ¿Qué puede concluir?

8. Observe las siguientes figuras:



Describa todo lo que pueda de las tres figuras y de su comparación. Todos son equivalentes.

Para comprobar lo que consignó, utilice las tres figuras congruentes a las anteriores, y si es necesario dibújelas por aparte, recórtelas y compárelas.

Represente los números que expresan cada figura en la recta numérica, ¿Qué observa? ¿Qué puede decir? que todos son equivalentes

9. Sabemos por los números enteros que 5 queda en la recta numérica en la parte derecha del cero.

Y su inverso u opuesto adictivo es -5 lo encontramos en la parte izquierda del cero, con la misma distancia.

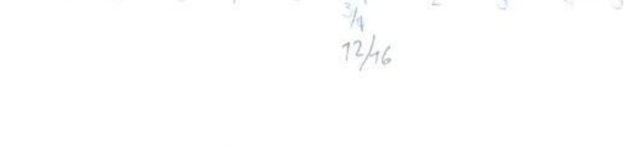
Luego para **a** su opuesto es **–a** y para **–a** su opuesto es **– (–a) = a**.

Para los números racionales ocurre lo mismo. Represente en la recta numérica a **5/3** y su opuesto adictivo. -5/3

(7)

Qué todos son equivalentes porque quedan en el mismo lugar y son positivos

(8)



Anexo B. Taller N° 2 resuelto por un grupo de alumnos

tka Jiménez

ANEXO N° B

TALLER N° 2

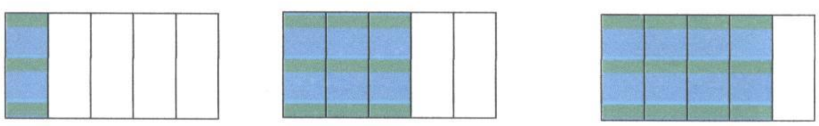
INSTITUTO TECNICO SUPERIOR DE COMERCIO DE BARRANCABERMEJA

Material elaborado por: Lic. Eduardo Corredor Rojas
II semestre de 2003

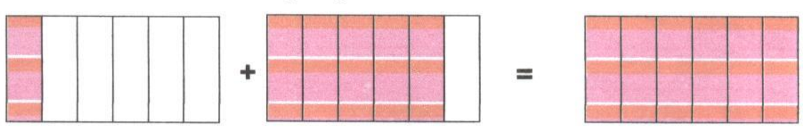
Cada una de estas actividades se desarrollarán utilizando las tabletas bases guías blancas y negras y las partes verdes y anaranjadas

- Queremos realizar: $\frac{1}{5} + \frac{3.}{5}$

$$\frac{1}{5} \quad + \quad \frac{3}{5} \quad = \quad \boxed{4/5}$$



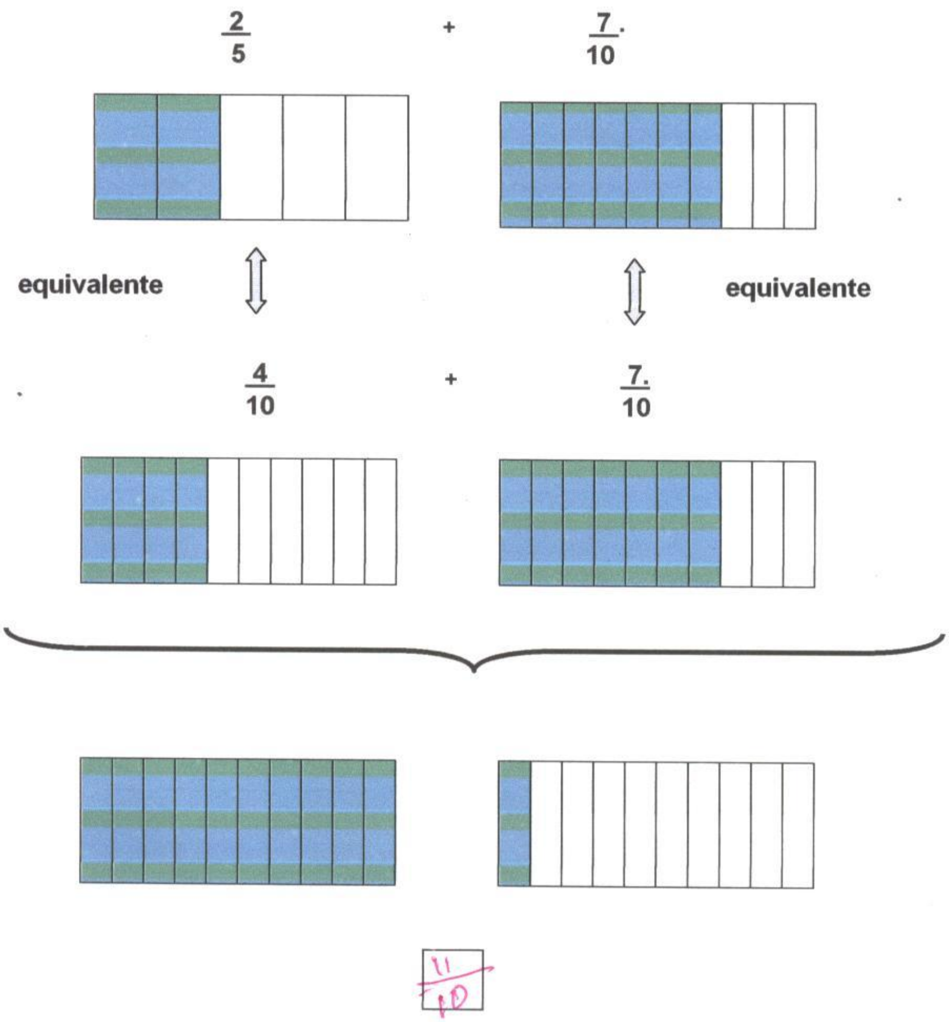
- Ahora realizar: $-\frac{1}{6} + \left(-\frac{5}{6}\right)$



Describa lo que observa y de una explicación de la forma en que se obtiene los resultados.

Simplemente el resultado se obtiene sumando los numeradores y el denominador ese el mismo

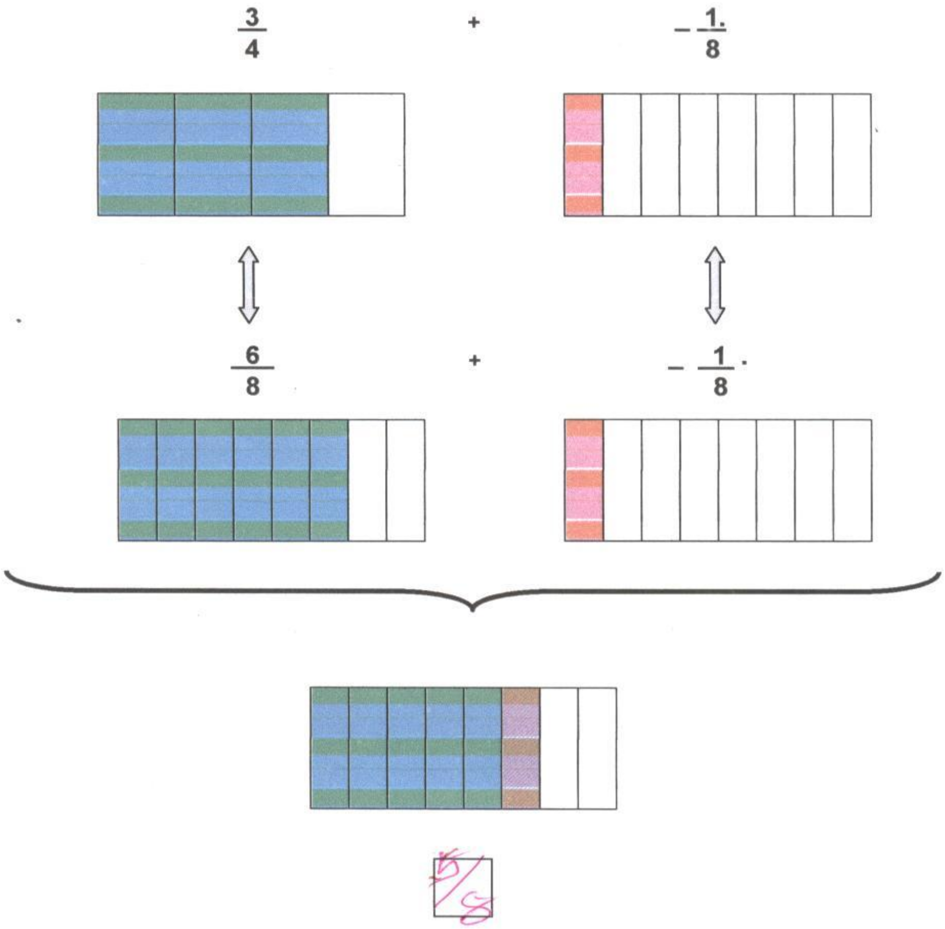
- Queremos realizar: $\frac{2}{5} + \frac{7}{10}$.



Describa lo que observa y de una explicación de la forma en que se obtiene el resultado.

Lo primero q' se hace es hallar unas fracciones equivalentes, y luego sumamos los numeradores. Queda el mismo denominador de las fracciones equivalentes.

- Queremos realizar: $\frac{3}{4} + \left(-\frac{1}{8}\right)$.



Describa lo que observa y de una explicación de la forma en que se obtiene el resultado.

Aqui la suma de un positivo y un Negativo, a cada representación se le halla la Fracción equivalente y quedan con el mismo denominador. se hace la operación que queda en el numerador, en las tabletas como habia que quitar se colocó las partes anaranjadas encima de las partes verdes.

Anexo C. Taller N° 3 resuelto por una alumna

INSTITUTO TECNICO SUPERIOR DE COMERCIO DE BARRANCABERMEJA

TALLER N° 3
Material elaborado por: Lic. Eduardo Corredor Rojas
II SEMESTRE DE 2003

1. Complete de tal manera que las fracciones sean equivalentes:

a) $\frac{7}{4} = \frac{21}{12} = \frac{35}{20} = \frac{119}{68} = \frac{49}{28}$

b) $\frac{12}{18} = \frac{6}{9} = \frac{36}{54} = \frac{2}{3} = \frac{12}{18}$

2.

+	$-\frac{1}{3}$	$\frac{2}{5}$	$\frac{5}{7}$
$\frac{1}{3}$	$\frac{0}{3}$	$\frac{11}{15}$	$\frac{22}{21}$
$-\frac{3}{4}$	$-\frac{13}{12}$	$-\frac{7}{20}$	$-\frac{1}{28}$
8	$\frac{23}{3}$	$\frac{42}{5}$	$\frac{61}{7}$

$\frac{1}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1-1}{3} = \frac{0}{3}$

$\frac{1}{3} + \frac{2}{5}\ \frac{5+6}{15} = \frac{11}{15}$

$\frac{1}{3} + \frac{5}{7} = \frac{7+15}{21} = \frac{22}{21}$

$\frac{3}{4} - \frac{1}{3} = \frac{-9-4}{12} = -\frac{13}{12}$

$-\frac{3}{4} + \frac{2}{5} = \frac{-15+8}{20} = \frac{-7}{20}$

$-\frac{3}{4} + \frac{5}{7} = \frac{-21+20}{28} = \frac{-1}{28}$

$\frac{8}{1} - \frac{1}{3} = \frac{24-1}{3} = \frac{23}{3}$ 4 $\frac{23}{3}$

$\frac{8}{1} + \frac{2}{5} = \frac{40+2}{5} = \frac{42}{5}$

$\frac{8}{1} + \frac{5}{7} = \frac{56+5}{7} = \frac{61}{7}$

3. Roberto cortó $\frac{3}{8}$ del césped en la mañana y $\frac{5}{8}$ en la tarde. ¿Alcanzó a cortar todo el césped? si

Porque: $\frac{3}{8} + \frac{5}{8} = \frac{3+5}{8} = \frac{8}{8}$

4. Facundo salió de su casa en Barrancabermeja y recorrió a la derecha de ella 5/4 de cuadras, descansó, y luego avanzó 2/3 de cuadra, pero se acordó que debía darle un mensaje a su amigo Teodoro y se regresó por el mismo camino 2 cuadras y 1/6 de cuadra más.

a) ¿Está Facundo a la derecha o izquierda de su casa? a la izquierda
b) ¿Exactamente a cuánto está? $-\frac{2}{6}$ $-\frac{1}{4}$
c) ¿Facundo volvió a pasar por su casa para dar el mensaje? si
d) Facundo inicialmente iba para donde su Tía Dolores que vive a 2 cuadras y media de su casa, a reclamar una plata. Si volviera a retroceder el tiempo qué le recomendaría a Facundo:
d₁) En el momento que se acordó del mensaje para su amigo. ubiese segido para donde su tia y luego darle el mensaje a su amigo
d₂) Si Facundo al salir de su casa se acordó del mensaje para su amigo y de reclamar la plata a su Tía. devio de darle el mensaje a su amigo y luego a reclamar la plata de su tia

4)

Anexo D. Narración sobre la aplicación de las Fracciones equivalentes en la vida real elaborada por una Alumna

Caso cotidiano sobre la aplicación de las fracciones equivalentes.

Erika 7º grado.

Era un domingo, en mi casa siempre hacemos mercado ese día, por lo general a las 7 de la mañana mi madre sale para la plaza. Pero esta vez mi madre salió más tarde de lo acostunbrado, no sé porqué. Casi siempre me dice que la acompañe, sin embargo en esta ocasión no fue así. Se demoró como dos horas en la plaza de mercado, y Mi madre llegó muy afanada era un poco tarde para hacer el almuerzo, estaba un poco colorada y sudorosa del fuerte calor del medio día, de todas maneras entró directo a la cocina con la bolsa de mercado, bajó unas ollas, y en una de ellas cogió agua y le agregó la legumbre. Yo la miré, y luego miré la olla y le dije: hoy sí vamos a estar en la olla... el almuerzo va a estar tarde, y la sopa va a ser poquita, porque veo que sólo echó 10/18 de agua. Mi madre me miró con desgano e indiferencia: ... váyase de aquí, coja la escoba y barre los 3/10 de la casa para que se gane los 6/20 de la sopa, es lo justo me dijo. Entonces le dije, hagamos un trato: me voy a barrer los 21/70 de la casa para ganarme los 15/50. sino que voy a barrer los 5/9 de la casa para ganarme los 15/27 porque tengo hambre. ¡Cómo no! simverguenza ¿para que su hermana y yo aguantemos hambre?

Pero Mami... usted propuso que de acuerdo
alo que barría, así comía... Ella no
me contestó, yo tampoco pero como
que no le gústó la idea, o no sé que
le pasaba ese día a Mi Mamá, pero
algo le preocupaba, y creo que ésa
preocupación no la dejó dormir bien la
noche que pasó, y debido a ello fue
que se levantó tarde y de mal genio.

Anexo E. Informe presentado por un grupo de alumnos para analizar la adición de números racionales con movimientos giratorios corporales

TRABAJO SOBRE ADICIÓN DE NÚMEROS RACIONALES CON MOVIMIENTOS GIRATORIOS DEL CUERPO.

Saray Pèrez 7°-01
Indry Johana
Jhulianys Pacheco.

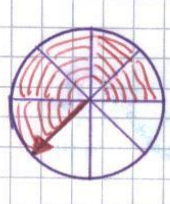
NOSOTROS DIBUJAMOS LO QUE INDRY JOHANA SE MOVIÓ Y EL RESULTADO QUE NOS DIO LO COMPARAMOS CON LA POSICIÓN DONDE QUEDO. SARAY ME IBA DICIENDO LOS MOVIMIENTOS ASÍ FUE QUE SE MOVIO: GIRO SOBRE SUS DOS PIES JUNTOS MEDIA VUELTA, ASÍ COMO LO MUESTRA LA FIGURA, LUEGO SIGUIÓ EN EL MISMO SENTIDO UN CUARTO DE VUELTA, LUEGO SE REGRESO LA MITAD DEL ANTERIOR MOVIMIENTO CREEMOS QUE NO SERÍA UN OCTAVO, Y MIRE DONDE QUEDO:

MOVIMIENTOS DE INDRY

COMO EMPEZÓ:	1° MOVIMIENTO	2° MOVIMIENTO	3° MOVIMIENTO

CON LOS NÚMEROS: $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8}$

ENTONCES EL RESULTADO QUE NOS DA, VIENDO LA GRAFICA ES:



$\frac{5}{8}$