

CONSTRUCCIÓN DE TEORÍAS ESCALAR-TENSOR CUADRÁTICAS
DEGENERADAS DE ORDEN SUPERIOR

NESTOR ALBERTO GRANADOS HERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS
ESCUELA DE FÍSICA
MAESTRÍA EN FÍSICA
BUCARAMANGA
2021

CONSTRUCCIÓN DE TEORÍAS ESCALAR-TENSOR CUADRÁTICAS
DEGENERADAS DE ORDEN SUPERIOR

NESTOR ALBERTO GRANADOS HERNÁNDEZ

Trabajo de Grado para optar al título de
Magister en Física

Director

Yeinzon Rodríguez García

Ph.D. Física

Codirector

Carlos Mauricio Nieto Guerrero

Ph.D. Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

ESCUELA DE FÍSICA

MAESTRÍA EN FÍSICA

BUCARAMANGA

2021

DEDICATORIA

Este trabajo viene dedicado para todas aquellas personas que apoyaron el desarrollo y ejecución de este trabajo de grado.

En especial reconozco la permanente presencia de Dios en mi camino de vida.

AGRADECIMIENTOS

Agradezco a Dios por permitirme darme cuenta que teniendo fé todo es posible.

Agradezco a mi familia por apoyarme y brindarme cariño y comprensión.

Agradezco a mi esposa por su dedicación y amor durante este proyecto que llegó a un buen termino.

Agradezco a mi director y codirector por su ayuda, paciencia desde el comienzo de hasta el final de esta maestría.

CONTENIDO

	pág.
INTRODUCCIÓN	13
1. TEOREMA DE OSTROGRADSKY	20
1.1. ANÁLISIS DEL TEOREMA	21
1.1.1. Primer caso: Lagrangiano estándar	21
1.1.2. Segundo caso: Lagrangianos dependientes a lo sumo de la segunda derivada temporal	23
1.1.3. Tercer caso: Lagrangianos dependientes de las primeras N-ésimas derivadas temporales	25
1.2. CAMPOS FANTASMAS	27
1.3. FANTASMAS Y TEORÍAS DE ORDEN SUPERIOR	33
1.4. EVITANDO EL TEOREMA DE OSTROGRADSKY: ANALIZANDO UN MODELO DE JUGUETE	34
2. TEORÍAS ESCALAR TENSOR	39
2.1. TEORÍAS TRADICIONALES ESCALAR TENSOR	40
2.2. TEORÍA DE HORNESKI (O DEL GALILEÓN)	41
2.2.1. Teoría de Galileones (Espacio tiempo plano)	42
2.2.2. Generalización de la teoría de Galileones (Espaciotiempo curvo)	43
2.3. TEORÍAS MÁS ALLÁ DE HORNDESKI	45
3. LAGRANGIANO GENERAL EN LA TEORÍA DHOST CUADRÁTICA	47
3.1. APLICACIÓN DEL TEOREMA DE OSTROGRADSKY	48
3.1.1. En el Lagrangiano	48

3.1.2. En las ecuaciones de campo	48
3.2. CONSTRUCCIÓN DEL TENSOR $C^{\mu\nu\rho\sigma}$	49
3.3. MODELO DE JUGUETE	51
4. CONDICIONES DE DEGENERACIÓN	55
4.1. DESCOMPOSICIÓN SOBRE LA HIPERSUPERFICIE	56
4.1.1. Proyección total sobre la hipersuperficie	57
4.1.2. Proyección total sobre el vector normal a la hipersuperficie	58
4.1.3. Proyecciones mixtas	58
4.2. LAGRANGIANO CINÉTICO	60
4.3. CONDICIÓN DE DEGENERACIÓN	65
4.3.1. Matriz cinética y condiciones de degeneración	65
4.4. CLASIFICACIÓN DE LA TEORÍA DHOST CUADRÁTICA	68
4.4.1. Clase I	69
4.4.2. Clase II	69
5. CONCLUSIONES	72
BIBLIOGRAFÍA	75
ANEXOS	84

LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Teorías de gravedad modificada.	40
Figura 2. <i>Representación de la incrustación de la variedad $\hat{\Sigma}$ en $\mathcal{M}$ mediante el homeomorfismo $\Phi(\Sigma = \Phi(\hat{\Sigma}))$. Mediante un push-forward, Φ_*, un vector es arrastrado desde $T_p(\hat{\Sigma})$ a $T_p M$</i>	85
Figura 3. <i>Representación de un cilindro incrustado en R^3. Los vectores $\mathbf{n}$ son aquéllos normales a la superficie. Esta superficie tiene siempre curvatura extrínseca pero su curvatura intrínseca es cero.</i>	86
Figura 4. <i>Representación de la foliación definida entre dos hipersuperficies vecinas Σ_t y $\Sigma_{t+\delta t}$.</i>	89

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. FORMALISMO 3+1	84

NOTACIÓN

- * n^a representa el vector normal a la hipersuperficie tipo tiempo, es decir,
 $n^a n_a = -1$.
- * N es la función lapso.
- * $(\partial_t)^a = t^a$ es el vector base asociado a la coordenada temporal.
- * $\beta^a = N n^a - t^a$ representa el vector corrimiento.
- * $\gamma_{ab} = g_{ab} + n_a n_b$ es la métrica inducida en la hipersuperficie, debido a una métrica g_{ab} cuatridimensional.
- * $g_{\mu\nu}$ es el tensor métrico.
- * g es el determinante del tensor métrico.
- * $\hat{A}_b = \gamma_b^a A_a$ es la proyección total de un cuadrivector A sobre la hipersuperficie.
- * $A_* = A_a n^a$ es la proyección total sobre el vector normal.
- * $\nabla_\mu \phi$ es la primera derivada covariante del campo ϕ .

* $\nabla_{\mu\nu}\phi = \phi_{\mu\nu}$ es la segunda derivada covariante del campo ϕ .

* $X = \frac{1}{2}\phi_{\mu}\phi^{\mu}$ es el término cinético del campo escalar.

RESUMEN

TÍTULO: Construcción de teorías escalar-tensor cuadráticas degeneradas de orden superior *

AUTOR: Nestor Alberto Granados Hernández **

PALABRAS CLAVE: TEORÍAS MODIFICADAS DE LA GRAVEDAD, TEORÍAS ESCALAR-TENSOR, TEOREMA DE OSTROGRADSKY

DESCRIPCIÓN:

Con este trabajo de investigación se lleva a cabo la construcción de un tipo de teorías modificadas de la gravedad libres de inestabilidades de Ostrogradsky. En particular, se estudian las teorías escalar-tensor. Estas teorías representan extensiones de la gravedad de Einstein a través de la inclusión de un campo escalar con acoplamiento no mínimo. En la literatura se encuentra un análisis de las teorías escalar-tensor dentro del marco de las teorías no degeneradas, es decir, teorías cuyo determinante de la matriz Hessiana (cinética) es diferente de cero. Por lo tanto, se propone incrementar el espacio de teorías modificadas incluyendo los casos en los cuales hay degeneración, eludiendo así las condiciones del teorema de inestabilidades de Ostrogradsky. Desde una perspectiva fenomenológica, la ampliación del espacio de teorías escalar-tensor abre la posibilidad a nuevas y atractivas explicaciones a diferentes interrogantes abiertos en cosmología y astrofísica, e.g., la naturaleza de la energía oscura, materia oscura e inflación. Con estas motivaciones se construye el Lagrangiano más general con términos cuadráticos en la segunda derivada covariante del campo escalar, de donde se deriva el apelativo de *teorías cuadráticas*. En general, un Lagrangiano de este tipo reproduce ecuaciones de campo de orden superior a dos. Sin embargo, cuando se aplican las condiciones de degeneración, las ecuaciones se reducen a un sistema de segundo orden espacio temporal, evitando así la aparición de grados de libertad no físicos. De esta manera, se encuentra una clasificación de todas las teorías escalar-tensor degeneradas de orden superior (en las ecuaciones de campo) cuadráticas (en la potencia de las derivadas de campo en el Lagrangiano).

* Tesis de Maestría

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Ph.D. Yeinzon Rodríguez García. Codirector: Ph.D. Carlos M. Nieto Guerrero

ABSTRACT

TITLE: Construction of higher order degenerate quadratic scalar-tensor theories ^{*}

AUTHOR: Nestor Alberto Granados Hernández ^{**}

KEYWORDS: Modified theories of gravity, Scalar-tensor Theories, Ostrogradsky's Theorem.

DESCRIPTION:

In this research project it is intended to carry out the construction of a type of modified theories of gravity free of ostrogradsky's instabilities. In particular, scalar-tensor theories are studied. These theories represent extensions of Einstein's gravity through the inclusion of a scalar field with no-minimal coupling. In the literature, we find an analysis of scalar-tensor theories that has been carried out within the framework of non-degenerate theories, that is, theories whose determinant of the Hessian (kinetic) matrix is different from zero. Therefore, we proposed to increase the space of modified theories including the cases in which there is degeneracy, thus avoiding the conditions of Ostrogradsky's instabilities theorem. From a phenomenological perspective, the expansion of the scalar-tensor theory space opens the possibility of new and attractive explanations to different open questions in cosmology and astrophysics, e.g., the nature of dark energy, dark matter and inflation. With this motivation the more general Lagrangian is built with quadratic terms in the second order covariant derivative of the scalar field; hence the name *quadratic theories*. In general, such a Lagrangian reproduces field equations of order greater than two. However, the equations can be reduced to a second order system space-time, thus avoiding the appearance of non-physical degrees of freedom. In this way, we find a classification of all degenerate quadratic (in the power of the field derivatives in the Lagrangian) scalar-tensor theories of higher order (in the scalar field equations).

^{*} Master's thesis

^{**} Faculty of Natural Sciences. Physics department. Director: Ph.D. Yeinzon Rodríguez García. Co-director: Ph.D. Carlos M. Guerrero

INTRODUCCIÓN

La teoría de la Relatividad General de Einstein ¹ ha probado ser bastante exitosa debido al creciente número de observaciones que la soportan ²³⁴. Es de particular importancia la observación del corrimiento al rojo gravitacional ⁵, de la curvatura de la luz debido al campo gravitacional solar ⁶, de la precesión del perihelio de mercurio ⁷ y la confirmación de la existencia de las ondas gravitacionales ⁸. Sin embargo, hay fenómenos que podrían requerir una versión modificada de la gravedad a gran-

-
- ¹ A. EINSTEIN. “*Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*”. En: *Annalen der Physik* 354 (1916), pág. 769. DOI: 10.1002/andp.19163540702.
- ² Clifford M. WILL. “*Confrontation between General Relativity and Experiment*”. En: *Living Reviews in Relativity* 9 (2006), pág. 3. DOI: 10.12942/lrr-2006-3. arXiv: gr-qc/0510072 [gr-qc].
- ³ Clifford M. WILL. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. 2.^a ed. Cambridge University Press, 2018. DOI: 10.1017/9781316338612.
- ⁴ G. M. CLEMENCE. “*Relativity Effect in Planetary Motions*”. En: *Reviews of Modern Physics* 19 (1947), pág. 361. DOI: 10.1103/RevModPhys.19.361.
- ⁵ R. V. POUND y G. A. REBKA. “*Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance*”. En: *Physical Review Letters* 3 (9 1959), pág. 439. DOI: 10.1103/PhysRevLett.3.439.
- ⁶ S. S. SHAPIRO y col. “*Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves using Geodetic Very-Long-Baseline Interferometry Data, 1979–1999*”. En: *Physical Review Letters* 92 (12 2004), pág. 121101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.121101.
- ⁷ SOPHIE M. V. PIREAUX y J. P. ROZELOT. “*Solar quadrupole moment and purely relativistic gravitation contributions to Mercury’s perihelion advance*”. En: *Astrophysics and Space Science* 284 (2003), pág. 1159.
- ⁸ B. P. ABBOTT y col. “*Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*”. En: *Physical Review Letters* 116 (2016), pág. 061102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102. arXiv: 1602.03837 [gr-qc].

des escalas. Por ejemplo, una comprensión de la energía oscura ⁹¹⁰¹¹¹², la materia oscura ¹³¹⁴ y el período inflacionario primordial ¹⁵¹⁶¹⁷ podría surgir dentro de teorías más allá de la Relatividad General de Einstein.

De acuerdo con el teorema de Lovelock, las modificaciones de la gravedad se pueden obtener a través de diversos mecanismos ¹⁸¹⁹. Entre ellos se encuentra, por

-
- ⁹ Miao LI y col. “*Dark Energy*”. En: *Communications in Theoretical Physics* 56 (2011), pág. 525. DOI: 10.1088/0253-6102/56/3/24.
 - ¹⁰ Ryotaro KASE y Shinji TSUJIKAWA. “*Dark energy in scalar-vector-tensor theories*”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 1811 (2018), pág. 024. DOI: 10.1088/1475-7516/2018/11/024.
 - ¹¹ Dragan HUTERER y SHAFER Daniel L. “*Dark energy two decades after: Observables, probes, consistency tests*”. En: *Reports on Progress in Physics* 81.1 (2018), pág. 016901. DOI: 10.1088/1361-6633/aa997e. arXiv: 1709.01091 [astro-ph.CO].
 - ¹² A. G. RIESS y col. “*Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*”. En: *The Astronomical Journal* 116 (1998), pág. 1009. DOI: 10.1086/300499.
 - ¹³ Manuel DREES. “*Dark Matter Theory*”. En: *PoS ICHEP2018* (2019), pág. 730. DOI: 10.22323/1.340.0730. arXiv: 1811.06406 [hep-ph].
 - ¹⁴ Gianfranco BERTONE y HOOPER Dan. “*History of dark matter*”. En: *Rev. Mod. Phys.* 90 (4 2018), pág. 045002. DOI: 10.1103/RevModPhys.90.045002.
 - ¹⁵ Jerome MARTIN. “*The Theory of Inflation*”. En: *Proc. Int. Sch. Phys. Fermi* 200 (2020). Ed. por E. Coccia, J. Silk y N. Vittorio, pág. 155. DOI: 10.3254/ENFI200008. arXiv: 1807.11075 [astro-ph.CO].
 - ¹⁶ Alan H. GUTH. “*Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*”. En: *Physical Review D* 23 (2 1981), pág. 347. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347.
 - ¹⁷ D.H. LYTH y A.R. LIDDLE. *The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*. Cambridge University Press, 2009.
 - ¹⁸ D. LOVELOCK. “*The four-dimensionality of space and the Einstein tensor*”. En: *Journal of Mathematical Physics* 13 (1972), pág. 874. DOI: 10.1063/1.1666069.
 - ¹⁹ Timothy CLIFTON y col. “*Modified Gravity and Cosmology*”. En: *Physics Reports* 513 (2012), pág. 1. DOI: 10.1016/j.physrep.2012.01.001. arXiv: 1106.2476 [astro-ph.CO].

ejemplo, el incremento en la dimensionalidad del espaciotiempo como sucede en los modelos tipo Kaluza-Klein ²⁰²¹. Otro mecanismo es a través de la inclusión de campos extra diferentes a la métrica; por ejemplo, un campo escalar con acoplamiento no mínimo. Este último conjunto de extensiones compone lo que se conoce como teorías Escalar-Tensor (ET) ²²²³²⁴²⁵²⁶. La presente tesis de Maestría se enfoca en este tipo de modificaciones, es decir, en las teorías ET.

Es indispensable que las modificaciones de la gravedad, representadas por las teorías ET, estén libres de inestabilidades. Para estudiar estas inestabilidades, se usa el teorema de Ostrogradsky, el cual determina que existe una inestabilidad lineal en el Hamiltoniano de una teoría no degenerada asociada a un Lagrangiano dependiente de derivadas superiores, las cuales no se pueden eliminar mediante integración

-
- ²⁰ Oskar KLEIN. “*Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie*”. En: *Zeitschrift für Physik A* 37 (1926), pág. 895. DOI: 10.1007/BF01397481.
 - ²¹ T. KALUZA. “*Zum Unitätsproblem der Physik*”. En: *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1921 (1921), pág. 966. DOI: 10.1142/S0218271818700017. arXiv: 1803.08616 [physics.hist-ph].
 - ²² C. BRANS y R. H. DICKE. “*Mach’s Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*”. En: *Phys. Rev.* 124 (3 1961), pág. 925. DOI: 10.1103/PhysRev.124.925.
 - ²³ Atsushi NARUKO, YOSHIDA Daisuke y MUKOHYAMA Shinji. “*Gravitational scalar-tensor theory*”. En: *Classical and Quantum Gravity* 33 (2016), 09LT01. DOI: 10.1088/0264-9381/33/9/091t01.
 - ²⁴ Marco CRISOSTOMI, Kazuya KOYAMA y Gianmassimo TASINATO. “*Extended scalar-tensor theories of gravity*”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 1604 (2016), pág. 044. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/04/044.
 - ²⁵ Bertrand CHAUVINEAU, RODRIGUES Davi C. y FABRIS Júlio C. “*Scalar-tensor theories with an external scalar*”. En: *General Relativity and Gravitation* 48 (2016), pág. 80. DOI: 10.1007/s10714-016-2075-9.
 - ²⁶ Tsutomu KOBAYASHI. “*Horndeski theory and beyond: a review*”. En: *Reports on Progress in Physics* 82 (2019), pág. 086901. DOI: 10.1088/1361-6633/ab2429.

por partes ²⁷²⁸²⁹. Una teoría no degenerada es aquella que presenta una matriz Hessiana con determinante diferente de cero. Estudios enfocados en esta clase de teorías permitieron encontrar la llamada teoría de *Galileones* escalares ³⁰. Estas teorías describen la dinámica de un campo escalar en espaciotiempo plano a través de ecuaciones de campo exclusivamente de segundo orden. El nombre de la teoría proviene de las propiedades de simetría de la acción, la cual es invariante ante una transformación del campo de la forma $\phi \rightarrow \phi + b_\mu x^\mu + c$. ³⁰. La versión de esta última en espaciotiempo curvo se denomina teoría de Galileones generalizados y covariantizados ³¹³²³³.

De manera independiente, la teoría de Galileones generalizados y covariantizados

-
- ²⁷ Richard P. WOODARD. “Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity”. En: *Lecture Notes in Physics* 720 (2007), pág. 403. DOI: 10.1007/978-3-540-71013-4_14. arXiv: astro-ph/0601672 [astro-ph].
- ²⁸ M. OSTROGRADSKY. “Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres”. En: *Mémoires de l’Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg* 6 (1850), pág. 385.
- ²⁹ R. P WOODARD. “Ostrogradsky’s theorem on Hamiltonian instability”. En: *Scholarpedia* 10 (2015), pág. 32243. DOI: 10.4249/scholarpedia.32243.
- ³⁰ Alberto NICOLIS, RATTAZZI Riccardo y TRINCHERINI Enrico. “The Galileon as a local modification of gravity”. En: *Physical Review D* 79 (2009), pág. 064036. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.064036. arXiv: 0811.2197 [hep-th].
- ³¹ C. DEFFAYET y col. “From k -essence to generalized Galileons”. En: *Physical Review D* 84 (6 2011), pág. 064039. DOI: 10.1103/PhysRevD.84.064039.
- ³² C. DEFFAYET, G. ESPOSITO-FARÈSE y A. VIKMAN. “Covariant Galileon”. En: *Physical Review D* 79 (2009), pág. 084003. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.084003. arXiv: 0901.1314 [hep-th].
- ³³ C. DEFFAYET, S. DESER y G. ESPOSITO-FARÈSE. “Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress tensors”. En: *Physical Review D* 80 (6 2009), pág. 064015. DOI: 10.1103/PhysRevD.80.064015.

había sido encontrada por Horndeski en la década de los setenta ³⁴. Recientemente se demostró formalmente la equivalencia entre la teoría de Galileones generalizados covariantizados y la teoría de Horndeski ³⁵.

Las teorías de Galileones en todas sus formas pueden ser usadas para estudiar soluciones cosmológicas y astrofísicas. De hecho, la existencia de un campo escalar resulta bastante atractiva en el estudio de los períodos de expansión acelerada del universo temprano y tardío. Diversas aplicaciones en cosmología, e igualmente en astrofísica, se han contemplado recientemente (véase la ref. ²⁶ para un revisión del tema). Ahora bien, es interesante preguntarse si existen modelos ET más allá de los descritos anteriormente.

Hasta el momento se ha asumido que las teorías son no degeneradas; por lo tanto, el teorema de Ostrogradsky es aplicable. Sin embargo, si se consideran teorías degeneradas, el teorema no aplica. De esta manera, resultaría posible construir teorías que generen ecuaciones de campo de alto orden, libres de inestabilidades

³⁴ Gregory Walter HORNDESKI. “*Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space*”. En: *International Journal of Theoretical Physics* 10 (1974), pág. 363. DOI: 10.1007/BF01807638.

³⁵ Tsutomu KOBAYASHI, YAMAGUCHI Masahide e YOKOYAMA Juníchi. “*Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations*”. En: *Prog. Theor. Phys.* 126 (2011), pág. 511. DOI: 10.1143/PTP.126.511. arXiv: 1105.5723 [hep-th].

2436373839404142. Estas teorías corresponderían a extensiones de la teoría de Horndeski. La degeneración del Lagrangiano conlleva a ligaduras que permiten escribir las ecuaciones de campo de orden superior como un sistema de ecuaciones de segundo orden. Como tal, estas teorías extendidas serían candidatas para describir fenómenos naturales que requieren una extensión de la teoría de la Relatividad General de Einstein (como se explicó anteriormente, energía oscura, materia oscura, inflación, etc). Desde el punto de vista teórico, la extensión de Horndeski amplía el espacio de teorías modificadas de la gravedad que están libres de inestabilidades. Como resultado, se obtendría una clasificación más completa de teorías ET degeneradas y no degeneradas saludables.

-
- ³⁶ D. LANGLOIS y NOUI Karim. "Hamiltonian analysis of higher derivative scalar-tensor theories". En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 1607 (2016), pág. 016. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/07/016.
 - ³⁷ Marco CRISOSTOMI y all. "Horndeski: beyond, or not beyond?" En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 1603 (2016), pág. 038. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/03/038.
 - ³⁸ David LANGLOIS y NOUI Karim. "Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability". En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 1602 (2016), pág. 034. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/02/034.
 - ³⁹ Jibril BEN ACHOUR, LANGLOIS David y NOUI Karim. "Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski and disformal transformations". En: *Physical Review D* 93 (2016), pág. 124005. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.124005. arXiv: 1602.08398 [gr-qc].
 - ⁴⁰ Marco CRISOSTOMI, KLEIN Remko y ROEST Diederik. "Higher Derivative Field Theories: Degeneracy Conditions and Classes". En: *Journal of High Energy Physics* 1706 (2017), pág. 124. DOI: 10.1007/JHEP06(2017)124. arXiv: 1703.01623 [hep-th].
 - ⁴¹ David LANGLOIS y col. "Scalar-tensor theories and modified gravity in the wake of GW170817". En: *Physical Review D* 97 (2018), pág. 061501. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.061501. arXiv: 1711.07403 [gr-qc].
 - ⁴² David LANGLOIS. "Dark energy and modified gravity in degenerate higher-order scalar-tensor (DHOST) theories: A review". En: *International Journal of Modern Physics D* 28 (2019), pág. 1942006. DOI: 10.1142/s0218271819420069.

En el presente trabajo se motiva la construcción sistemática de una subclase de teorías ET de orden superior degeneradas. Como se dijo anteriormente, la degeneración de las teorías permite la existencia de ecuaciones de campo de orden superior a dos; de allí el apelativo *orden superior*. El presente estudio parte de un Lagrangiano en el cual se escriben los términos más generales cuadráticos en $\nabla_\mu \nabla_\nu \phi$, donde ϕ es un campo escalar y ∇_μ representa la derivada covariante para una métrica $g_{\mu\nu}$.

Los contenidos de esta tesis se presentan de la siguiente manera. En el segundo capítulo se hace un análisis asociado al teorema de Ostrogradsky, además, se introduce la noción de fantasmas y las formas en las cuales se pueden evitar. En el tercer capítulo, se muestra las diferentes teorías escalar tensor no degeneradas, con dependencia a lo sumo en la segunda derivada covariante del campo; para estas últimas se observa la necesidad de incluir contratérminos los cuales no permiten ecuaciones de campo de orden superior a dos; adicionalmente, se introducen las teorías más allá de Hondeski, las cuales motivan la construcción de una teoría degenerada de orden superior: DHOST (de sus siglas en inglés Degenerate Higher Order Escalar-Tensor Theories). En el cuarto capítulo, se propone un Lagrangiano asociado a las teorías DHOST cuadráticas, es decir, un Lagrangiano con dependencia cuadrática de máximo la segunda derivada del campo escalar. Para finalizar, en el último capítulo se exponen las condiciones necesarias para que las teorías DHOST cuadráticas sean saludables.

1. TEOREMA DE OSTROGRADSKY

El teorema de Ostrogradsky determina que existe una inestabilidad lineal en los Hamiltonianos asociados a Lagrangianos no degenerados que son dependientes de derivadas temporales superiores (derivadas iguales o superiores a dos) en una variable dinámica, donde estas últimas no pueden ser eliminadas con integración por partes^{2829 43}. Esto se observa en este capítulo al realizar un análisis a Lagrangianos con dependencia las primeras n -ésimas derivadas del campo. Por otra parte, la inestabilidad lineal está asociada a un grado de libertad extra, el cual se denomina grado de libertad fantasma⁴⁴. Aunque este teorema se describe usualmente en el contexto de partículas, se le ha podido extender para el caso de campos clásicos⁴⁵⁴⁶. Este trabajo se centra en la construcción de una teoría escalar tensor a partir de un Lagrangiano que depende de a lo sumo de segundas derivadas del campo. Sin embargo, debido a que el teorema de Ostrogradsky predice una patología tipo fantasma, es necesario relajar una de sus hipótesis, la no degeneración. Esto se muestra utilizando un modelo de juguete, para después implementar una metodología similar en el capítulo 4 para el caso de las teorías DHOST cuadráticas.

⁴³ Hayato MOTOHASHI y SUYAMA Teruaki. “Quantum Ostrogradsky theorem”. En: *JHEP* 09 (2020), pág. 032. DOI: 10.1007/JHEP09(2020)032. arXiv: 2001.02483 [hep-th].

⁴⁴ Fulvio SBISÀ. “Classical and quantum ghosts”. En: *European Journal of Physics* 36 (2014), pág. 015009. DOI: 10.1088/0143-0807/36/1/015009.

⁴⁵ Hayato MOTOHASHI y col. “Healthy degenerate theories with higher derivatives”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 07 (2016), pág. 033. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/07/033. arXiv: 1603.09355 [hep-th].

⁴⁶ F.J. DE URRIES y J. JUELVE. “Ostrogradski formalism for higher derivative scalar field theories”. En: *J. Phys. A* 31 (1998), pág. 6949. DOI: 10.1088/0305-4470/31/33/006. arXiv: hep-th/9802115.

1.1. ANÁLISIS DEL TEOREMA

En esta sección se muestra el teorema de Ostrogradsky en el contexto de mecánica clásica, es decir, se estudia el caso de un Lagrangiano unidimensional no degenerado asociado a una variable dinámica $x(t)$. Para tal fin, se divide su análisis en tres casos: Lagrangiano estándar (dependencia de la primera derivada temporal de la variable dinámica), Lagrangianos que dependen a lo sumo, de la segunda derivada temporal y, el caso general donde los Lagrangianos depende de las primeras n -ésimas derivadas temporales.

1.1.1. Primer caso: Lagrangiano estándar Un Lagrangiano estándar unidimensional en mecánica clásica depende de una variable dinámica $x(t)$ y su velocidad $\dot{x}(t) = \frac{dx}{dt}$, es decir, $L = L(x, \dot{x})$. Así, la variación de la acción produce la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = 0. \quad (1)$$

Se define un Lagrangiano no degenerado como aquél que cumple: $\frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} \neq 0$. La no degeneración de un Lagrangiano del tipo $L = L(x, \dot{x})$ permite reescribir (1) de la forma

$$\ddot{x} = F(x, \dot{x}) \implies x(t) = X(t, x_0, \dot{x}_0), \quad (2)$$

donde x_0 y $\dot{x}_0$ representan las condiciones iniciales del sistema. Como la solución requiere el conocimiento de dos condiciones iniciales, se definen dos coordenadas canónicas Q y P . Usualmente, estas coordenadas se definen como

$$Q \equiv x, \quad P \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}}. \quad (3)$$

La suposición de no degeneración implica que es posible invertir (3)⁴⁷, de tal manera que es posible escribir $\dot{x}$ en términos de Q y P . Ahora, se define una nueva variable $V(Q, P)$ tal que

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right|_{\substack{x=Q \\ \dot{x}=V}} = P. \quad (4)$$

El Hamiltoniano canónico asociado a $L(x, \dot{x})$ se obtiene mediante una transformación de Legendre en $\dot{x}$:

$$H(Q, P) \equiv P\dot{x} - L \quad (5)$$

$$= PV(Q, P) - L(Q, V(Q, P)). \quad (6)$$

A partir de esta definición, se encuentra la transformación inversa en el espacio de fase y la ecuación de Euler-Lagrange (1)

$$\dot{Q} = \frac{\partial H}{\partial P} = V + P \frac{\partial V}{\partial P} - \frac{\partial L}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial P} = V, \quad (7)$$

$$\dot{P} = -\frac{\partial H}{\partial Q} = -P \frac{\partial V}{\partial Q} + \frac{\partial L}{\partial V} \frac{\partial V}{\partial Q} + \frac{\partial L}{\partial Q} = \frac{\partial L}{\partial Q}. \quad (8)$$

Como se observa en (7) y (8), el Hamiltoniano genera evolución temporal. Además, si se tiene un Lagrangiano que no depende explícitamente del tiempo, el Hamiltoniano H es asociado a una cantidad conservada (la energía). Observando la ec. (6), el hecho de que el Hamiltoniano esté acotado por debajo o no depende de la forma explícita del Lagrangiano.

⁴⁷ Esta invertibilidad se ve a partir de

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial \dot{x}^2} &= g(\dot{x}, x) \rightarrow \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \tilde{g}(\dot{x}, x) \rightarrow P = \tilde{g}(\dot{x}, x) \\ &\rightarrow f(P, x) = \dot{x} = V(P, Q) \end{aligned}$$

1.1.2. Segundo caso: Lagrangianos dependientes a lo sumo de la segunda derivada temporal Para observar el efecto de tener derivadas superiores a uno, se considera un Lagrangiano de la forma $L = L(x, \dot{x}, \ddot{x})$. En este caso, la ecuación de movimiento está dada por

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} + \frac{d^2}{dt^2} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} = 0. \quad (9)$$

Para un Lagrangiano dependiente de $\ddot{x}$, la no degeneración se define como $\frac{\partial^2 L}{\partial \ddot{x}^2} \neq 0$. Así, la ecuación (9) para un sistema no degenerado toma la forma

$$\ddot{\ddot{x}} = F(x, \dot{x}, \ddot{x}, \ddot{\ddot{x}}) \implies x(t) = X(t, x_0, \dot{x}_0, \ddot{x}_0, \ddot{\ddot{x}}_0). \quad (10)$$

Dado que en este caso la solución depende de cuatro condiciones iniciales, se definen cuatro coordenadas canónicas. En su estudio (ver. ²⁸), Ostrogradsky introdujo las variables

$$Q_1 \equiv x, \quad P_1 \equiv \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}, \quad (11)$$

$$Q_2 \equiv \dot{x}, \quad P_2 \equiv \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}. \quad (12)$$

La no degeneración del Lagrangiano permite invertir la transformación del espacio de fase (11-12) para encontrar $\ddot{x}$ en términos de Q_1 , Q_2 y P_2 . Ahora, se define una nueva variable, que se denomina aceleración, $A(Q_1, Q_2, P_2)$ tal que

$$\left. \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}} \right|_{\substack{x=Q_1 \\ \dot{x}=Q_2 \\ \ddot{x}=A}} = P_2. \quad (13)$$

Es importante notar que la aceleración $A(Q_1, Q_2, P_2)$ depende solamente de tres coordenadas canónicas debido a que $L = L(x, \dot{x}, \ddot{x})$ sólo depende de tres coordenadas del espacio de configuraciones.

El Hamiltoniano de Ostrogradsky es obtenido mediante una transformación de Legendre, de la misma forma que en el caso estándar, con $\dot{x} = x^{(1)}$ y $\ddot{x} = x^{(2)}$:

$$\begin{aligned} H(Q_1, Q_2, P_1, P_2) &\equiv \sum_{i=1}^2 P_i x^{(i)} - L, \\ &= P_1 Q_2 + P_2 A(Q_1, Q_2, P_2) - L(Q_1, Q_2, A(Q_1, Q_2, P_2)). \end{aligned} \quad (14)$$

Por otra parte, las ecuaciones de evolución temporal están dadas por

$$\dot{Q}_i \equiv \frac{\partial H}{\partial P_i} \quad \text{y} \quad \dot{P}_i \equiv -\frac{\partial H}{\partial Q_i}. \quad (15)$$

Al igual que en el caso estándar, se verifica que se obtengan las ecuaciones de evolución temporal para las variables canónicas. Para Q_1 , la evolución temporal viene dada por

$$\dot{Q}_1 = \frac{\partial H}{\partial P_1} = Q_2, \quad (16)$$

la cual corresponde a la transformación de fase $\dot{x} = Q_2$. De forma similar, para Q_2 se obtiene que

$$\dot{Q}_2 = \frac{\partial H}{\partial P_2} = A + P_2 \frac{\partial A}{\partial P_2} - \frac{\partial L}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial P_2} = A. \quad (17)$$

La evolución de la coordenada canónica P_2 está dada por

$$\dot{P}_2 = -\frac{\partial H}{\partial Q_2} = -P_1 - P_2 \frac{\partial A}{\partial Q_2} + \frac{\partial L}{\partial Q_2} + \frac{\partial L}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial Q_2} = -P_1 + \frac{\partial L}{\partial Q_2},$$

la cual reproduce la transformación del espacio de fase para $P_1 = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \ddot{x}}$. Por último, la ecuación la evolución temporal de P_1 es

$$\dot{P}_1 = -\frac{\partial H}{\partial Q_1} = -P_2 \frac{\partial A}{\partial Q_1} + \frac{\partial L}{\partial Q_1} + \frac{\partial L}{\partial A} \frac{\partial A}{\partial Q_1} = \frac{\partial L}{\partial Q_1}, \quad (18)$$

la cual representa la ecuación de Euler-Lagrange (9) ²⁶⁴⁴.

La dependencia lineal con P_1 evidenciada en el Hamiltoniano (14) introduce una inestabilidad lineal. Es decir, el factor lineal en P_1 implica que no existe una barrera en el Hamiltoniano y, por lo tanto, no está acotado por debajo, sin importar la forma explícita del Lagrangiano. Este tipo de Hamiltonianos son asociados con la existencia de campos fantasmas de Ostrograsky (ver sec.1.2).

1.1.3. Tercer caso: Lagrangianos dependientes de las primeras N -ésimas derivadas temporales

En esta subsección, se generaliza el resultado anterior analizando un Lagrangiano dependiente de las primeras N derivadas temporales de $x(t)$. Como se observará, al tener derivadas sucesivas ⁴⁸ de la variable mecánica en el Lagrangiano, el problema que se tiene asociado con la inestabilidad en el Hamiltoniano aumenta. Para tal fin, se considera un Lagrangiano $L = L(x, \dot{x}, \dots, x^{(N)})$ dependiendo de las primeras N derivadas temporales de $x(t)$. Si el Lagrangiano es no degenerado en la N -ésima derivada, $x^{(N)}$, la ecuación de Euler-Lagrange es lineal en la $2N$ -derivada $x^{(2N)}$:

$$\sum_{i=0}^N \left(-\frac{d}{dt} \right)^i \frac{\partial L}{\partial x^{(i)}} = 0. \quad (19)$$

La ecuación (19) implica que el espacio de fase posee $2N$ coordenadas canónicas. La escogencia sugerida por Ostrogradsky es

$$Q_i \equiv x^{(i-1)} \quad \text{y} \quad P_i \equiv \sum_{j=i}^N \left(-\frac{d}{dt} \right)^{j-i} \frac{\partial L}{\partial x^{(j)}}. \quad (20)$$

⁴⁸ Son derivadas de una función superiores a la segunda derivada

Utilizando la no degeneración, es posible resolver $x^{(N)}$ en términos de P_N y Q_i . Aquí, se define una función $\mathcal{A}(Q_1, \dots, Q_N, P_N)$ tal que

$$\left. \frac{\partial L}{\partial q^{(N)}} \right|_{\substack{x^{(i-1)}=Q_i \\ x^{(N)}=\mathcal{A}}} = P_N. \quad (21)$$

Por otra parte, el Hamiltoniano de Ostrogradsky toma la forma

$$\begin{aligned} H &\equiv \sum_{i=1}^N P_i x^{(i)} - L, \\ &= P_1 Q_2 + P_2 Q_3 + \dots + P_{N-1} Q_N + P_N \mathcal{A} - L(Q_1, \dots, Q_N, \mathcal{A}). \end{aligned} \quad (22)$$

A su vez, la evolución de las variables canónicas viene dada por

$$\dot{Q}_i \equiv \frac{\partial H}{\partial P_i}, \quad \dot{P}_i \equiv -\frac{\partial H}{\partial Q_i}. \quad (23)$$

Es fácil revisar que la evolución de las variables canónicas reproduce las relaciones canónicas (20) y la ecuación de Euler-Lagrange (19). Por ejemplo, para Q_N se tiene que

$$\dot{Q}_N = \mathcal{A} + P_N \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial P_N} - \frac{\partial L}{\partial \mathcal{A}} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial P_N} = \mathcal{A}. \quad (24)$$

Las últimas $(N - 1)$ ecuaciones de evolución para P_i reproducen la definición de P_{i-1} ,

$$i = 2, \dots, N \quad \implies \quad \dot{P}_i = -P_{i-1} - P_N \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial X_i} + \frac{\partial L}{\partial Q_N} + \frac{\partial L}{\partial \mathcal{A}} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial Q_i}, \quad (25)$$

$$= -P_{i-1} + \frac{\partial L}{\partial Q_N}. \quad (26)$$

Por último, la evolución de P_1 reproduce la ecuación de Euler Lagrange (19)

$$\dot{P}_1 = -P_N \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial Q_1} + \frac{\partial L}{\partial Q_1} + \frac{\partial L}{\partial \mathcal{A}} \frac{\partial \mathcal{A}}{\partial Q_1} = \frac{\partial L}{\partial Q_1}. \quad (27)$$

En este caso general, el Hamiltoniano (22) depende linealmente de $N - 1$ momentos conjugados. Por lo tanto, existen $N - 1$ direcciones inestables ya que, como se vio anteriormente, una dependencia lineal implica que el Hamiltoniano no está acotado por debajo. Así, se concluye que derivadas superiores o iguales a dos introducen inestabilidades que aumentan con el orden de la derivada. Este resultado es independiente de la forma particular de la teoría; la única suposición tenida en cuenta es la de no degeneración del Lagrangiano L .

1.2. CAMPOS FANTASMAS

En la anterior sección se observó cómo surgen las inestabilidades lineales en el Hamiltoniano para el caso de Lagrangianos con dependencia de derivadas superiores del campo. En esta sección, se introduce el concepto de campo fantasma en el marco de teoría clásica de campos. Como será claro más adelante, la existencia de un campo fantasma y la inestabilidad lineal en el Hamiltoniano están estrechamente ligadas. Considérese por simplicidad el caso de un campo escalar libre en espacio tiempo de Minkowski ⁴⁴, descrito por la densidad Lagrangiana

$$\mathcal{L} = -\frac{\epsilon}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\varepsilon}{2}m^2\phi^2, \quad (28)$$

donde $\epsilon = \pm 1$ y $\varepsilon = \pm 1$. Se usa aquí la convención $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, +1, +1, +1)$. El momento conjugado para esta densidad Lagrangiana es

$$\pi_\phi = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\phi}} = \epsilon\dot{\phi}. \quad (29)$$

Realizando una transformación de Legendre con respecto a $\dot{\phi}$, se obtiene la densidad Hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \epsilon\left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}\left[\vec{\nabla}\phi\right]^2\right) + \frac{\varepsilon}{2}m^2\phi^2. \quad (30)$$

El Hamiltoniano es definido como

$$H = \int_{R^3} d^3x \mathcal{H}[\phi, \dot{\phi}]. \quad (31)$$

Si $\epsilon = \varepsilon = 1$, el Hamiltoniano es semi-definido positivo ⁴⁹, entonces está acotado por debajo. Para el caso $\epsilon = \varepsilon = -1$, el Hamiltoniano es semi-definido negativo ⁵⁰, entonces está acotado por arriba; en este caso el campo ϕ es llamado campo fantasma. Si $\epsilon = -\varepsilon$, el Hamiltoniano es indefinido, así que no está acotado por arriba ni por debajo. Es claro entonces que la existencia de un campo fantasma implica tener un Hamiltoniano que no está acotado por debajo, i.e., un sistema inestable. El Lagrangiano dado en por la ecuación (28) genera teorías equivalentes para las condiciones, $\epsilon = \varepsilon = 1$ y $\epsilon = \varepsilon = -1$, en ambos casos la ecuación de campo que los rige viene dada por

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (32)$$

la cual es conocida como la ecuación de Klein-Gordon, donde $\square$ es el D'Alembertiano. Utilizando una descomposición de Fourier como

$$\phi(\vec{x}, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{d^3p}{(2\pi)^3} \phi_{\vec{p}}(t) e^{i\vec{p} \cdot \vec{x}}, \quad (33)$$

es posible desacoplar cualquier modo de la siguiente forma

$$\ddot{\phi}_{\vec{p}} = -(m^2 + p^2)\phi_{\vec{p}}, \quad (34)$$

donde la frecuencia asociada es $\omega(\vec{p}) = \sqrt{(m^2 + p^2)}$. Debido a que la solución de la ecuación (34) tiene comportamiento oscilatorio, se puede garantizar que teniendo

⁴⁹ Los autovalores λ asociados al Hamiltoniano, cumplen la condición $\lambda \geq 0$.

⁵⁰ Los autovalores λ asociados al Hamiltoniano, cumplen la condición $\lambda \leq 0$.

pequeñas perturbaciones permanecerán pequeñas todo el tiempo. De esta forma, la configuración trivial $\phi_{\vec{p}} = 0$ permanece estable para los casos $\epsilon = \varepsilon = 1$ y $\epsilon = \varepsilon = -1$. Por lo tanto, para un campo "fantasma"⁵¹ libre, el sistema permanece estable sin importar el signo en común de ϵ y ε ⁵².

Como se ha observado, hay estabilidad cuando se tiene un campo "fantasma" libre. Sin embargo, el sistema posee un problema cuando dicho campo fantasma interactúa con otro campo. Para mostrar tal inconveniente se utiliza el siguiente ejemplo de una teoría interactuante

$$\mathcal{L} = -\frac{\epsilon}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\epsilon}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{2}\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta - \frac{1}{2}m^2\theta^2 - V_{int}(\phi, \theta), \quad (35)$$

donde ϕ y θ son dos campos escalares y la interacción entre estos campos no posee dependencias en sus derivadas. Realizando la transformación de Legendre con respecto a $\dot{\phi}$ y $\dot{\theta}$, se obtiene la siguiente densidad hamiltoniana

$$\mathcal{H} = \epsilon \left(\frac{1}{2}\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} \left[\vec{\nabla}\phi \right]^2 \right) + \frac{\epsilon}{2}m^2\phi^2 + \frac{1}{2}\dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left[\vec{\nabla}\theta \right]^2 + \frac{1}{2}m^2\theta^2 + V_{int}(\phi, \theta). \quad (36)$$

Para determinar las implicaciones físicas de la ecuación (36), se han de abordar algunos casos.

- * Caso con $V_{int}(\phi, \theta) = 0$. Reescribiendo el Lagrangiano descrito en 35, tomando como cero el potencial de interacción, se tiene

$$\mathcal{L} = -\frac{\epsilon}{2}\partial_\mu\phi\partial^\mu\phi - \frac{\epsilon}{2}m^2\phi^2 - \frac{1}{2}\partial_\mu\theta\partial^\mu\theta - \frac{1}{2}m^2\theta^2. \quad (37)$$

⁵¹ Las comillas se utilizan porque en este caso, a pesar de la definición dada para campo fantasma, se tendría una teoría saludable, debido a que no existe ninguna interacción con otro campo.

⁵² Cabe notar que ϵ y ε deben ser iguales; si no, el Hamiltoniano puede ser indefinido.

Las ecuaciones de evolución para cada campo son

$$(\square + m^2)\phi = 0, \quad (38)$$

$$(\square + m^2)\theta = 0. \quad (39)$$

Como se observa, el signo de ϵ no conlleva a ningún problema en la dinámica de ϕ ni θ debido a que las ecuaciones de movimiento encontradas para los dos campos son similares. Es decir, se tienen dos ecuaciones de Klein-Gordon las cuales se pueden solucionar de manera independiente. La densidad Hamiltoniana para cada campo se escribe como

$$H_\phi = \epsilon \left(\frac{1}{2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} [\vec{\nabla} \phi]^2 \right) + \frac{\epsilon}{2} m^2 \phi^2, \quad (40)$$

$$H_\theta = \frac{1}{2} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} [\vec{\nabla} \theta]^2 + \frac{1}{2} m^2 \theta^2, \quad (41)$$

Se ve claramente que las dos expresiones anteriores son muy similares, la única diferencia entre ellas es el factor ϵ . Además, de (39) se nota que la evolución de ambos campos está dada por la misma expresión. Así, se concluye que el signo de ϵ es irrelevante cuando $V_{int} = 0$. Se puede entonces ignorar la presencia de ϵ y se tienen dos sistemas estables separados. Como las teorías para $\epsilon = +1$ y $\epsilon = -1$ son equivalentes, se infiere que (37) es estable.

* Caso $V_{int}(\phi, \theta) \neq 0$. Para este caso las ecuaciones de movimiento son

$$\epsilon(\square + m^2)\phi = V_\phi, \quad (42)$$

$$(\square + m^2)\theta = V_\theta, \quad (43)$$

donde $V_\alpha = \frac{\partial V}{\partial \alpha}$. De este par de ecuaciones se hace evidente una comunicación entre los dos campos. Tomando la analogía de partículas, se entiende

esta comunicación como la posibilidad de tener una interacción entre entes con energía positiva y negativa. El problema con este tipo de interacciones tiene que ver con el espacio de fase disponible para el sistema. Debido a que este último es divergente (espacio de fase infinito), se observan problemas con la entropía de un sistema de muchas partículas. Sin embargo, para apreciar mejor el problema con las teorías interactuantes, es necesario hacer un análisis desde un punto de vista cuántico.

Es en el régimen cuántico donde se comprende mejor el impacto de los campos fantasmas en teorías físicas²⁷⁴⁴. En el marco de campos cuánticos, la energía asociada a las partículas tipo fantasma son negativas para poder tener una interpretación probabilística de la teoría. Por el contrario, las partículas asociadas a campos usuales presentan valores positivos de energía. El hecho de tener partículas con energía positiva y negativa en una teoría permite la existencia de procesos inusuales y contraintuitivos. Por ejemplo, se pueden tener situaciones en las cuales se generen pares de partículas con energías opuestas. En principio, este proceso no está prohibido y se pueden generar a partir del estado de vacío. La tasa de producción de par de partículas es calculable y su valor determina el tiempo de vida de lo que se conoce como el *estado de vacío*. Si la tasa de producción es divergente, se tiene un vacío que decae instantáneamente. Por lo tanto, la imagen que se tiene es la de una generación catastrófica de pares de partículas. Debido a que esta situación no es observada ni esperada de un sistema físico bien comportado, se busca siempre evitar predicciones de este estilo. Cuando este tipo de situaciones está presente en una teoría, se dice que hay una inestabilidad. Es importante notar también el origen de la inestabilidad. Para poder apreciar este hecho, se toma el caso de una teoría con un campo fantasma ϕ y un campo estándar ψ (que anteriormente se había

llamado θ). La acción para este teoría se puede escribir como

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_\phi(\phi, \partial\phi) + \mathcal{L}_\psi(\psi, \partial\psi) + \mathcal{L}_{int}(\phi, \partial\phi, \psi, \partial\psi), \quad (44)$$

donde $\mathcal{L}_{int}$ es el Lagrangiano de interacción entre los dos campos. La primera cantidad que nos interesa es la razón de decaimiento del estado de vacío en una colección de partículas con momentum p_i (o estado final $\mathcal{F}$):

$$\Gamma_{vac \rightarrow \mathcal{F}} = \int \left(\prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \right) |\mathcal{M}(vac \rightarrow \{p_i\}_i)|^2 (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^n p_i \right). \quad (45)$$

donde $\{p_i\}$ son los cuádrimomento de las partículas emitidas, y E_i es la energía de estas partículas con masa m_i y 3-momentum $\vec{p}_i$. Además, el primer factor en (45) es llamado espacio de fase invariante relativista de n-cuerpos. Esta cantidad contiene la información cinemática del proceso $vac \rightarrow \mathcal{F}$:

$$\int \left(\prod_{i=1}^n \frac{d^3 p_i}{(2\pi)^3} \frac{1}{2E_i} \right) (2\pi)^4 \delta^{(4)} \left(\sum_{i=1}^n p_i \right). \quad (46)$$

Por otra parte, $\mathcal{M}(vac \rightarrow \mathcal{F})$ es llamado el elemento matricial de transición, el cual depende de los detalles de la teoría (es decir, la forma del Lagrangiano (44)). Es claro entonces que la razón de decaimiento depende del espacio de fase disponible para los estados finales es el elemento matricial $\mathcal{M}$.

Para poder calcular de manera sencilla (46), se considera el caso de dos campos reales ϕ y ψ . Además, se toma el Lagrangiano de interacción $\mathcal{L}_{int} = \frac{\lambda}{4} \phi^2 \psi^2$. Este tipo de interacción permite la existencia de cuatro partículas en el estado final. Llamando p_1, p_2 los 3-momentum de las partículas tipo fantasma y k_1, k_2 los 3-momentum de las partículas ordinarias, el espacio de fase para 4-partículas se escribe como

$$\mathcal{I}_{\phi\phi\psi\psi} = \int \frac{d^3 p_1}{(2\pi)^3 2E_1} \frac{d^3 p_2}{(2\pi)^3 2E_2} \frac{d^3 k_1}{(2\pi)^3 2\omega_1} \frac{d^3 k_2}{(2\pi)^3 2\omega_2} \frac{(2\pi)^4}{2!2!} \delta^{(4)}(p_1 + p_2 + k_1 + k_2), \quad (47)$$

donde $p_i^0 = -\sqrt{m_\phi^2 + \vec{p}_i^2}$, $\omega_i^0 = -\sqrt{m_\psi^2 + \vec{k}_i^2}$, y los factores $2!$ vienen del hecho de tener dos partículas idénticas, tanto para ϕ como para ψ . La presencia del delta de Dirac en (46) hace que $\mathcal{I}_{\phi\phi\psi\psi}$ sea divergente. Es decir, de el espacio de fase surgen integrales divergentes que muestran el infinito número de posibilidades que se pueden tener en el estado final $\mathcal{F}$. Ahora, la razón de decaimiento total del vacío será la suma de todos los posibles procesos en (45). Así, se tiene que $\Gamma_{vac} = \sum_{\mathcal{F}} \Gamma_{vac \rightarrow \mathcal{F}}$. Debido a que $\Gamma_{vac \rightarrow \phi\phi\psi\psi}$ es divergente, Γ_{vac} también lo será. Por lo tanto el tiempo de vida medio del vacío ($\tau \sim \frac{1}{\Gamma}$) es cero. Este resultado nos muestra que el vacío decae instantáneamente, siendo catastróficamente inestable. Es importante tener en cuenta que esta conclusión es válida sólo si $\mathcal{M}$ es diferente de cero.

1.3. FANSTASMAS Y TEORÍAS DE ORDEN SUPERIOR

En esta sección se muestra la relación estrecha que existe entre una teoría de orden superior (i.e., aquéllas que conllevan a ecuaciones de evolución con derivadas superiores o iguales a dos) y los campos fantasmas. Para hacer el análisis más sencillo, se toma un problema de mecánica clásica. Para tal fin, se considera el siguiente Lagrangiano que involucra la segunda derivada temporal de la variable dinámica

$$L = \frac{a}{2} \ddot{\phi}^2 - V(\phi), \quad (48)$$

donde $a \neq 0$ y $V(\phi)$ es un potencial general. La ecuación de Euler-Lagrange obtenida de (48) es

$$a\phi^{(4)} - \frac{dV}{d\phi} = 0. \quad (49)$$

Esta ecuación de evolución, al ser de cuarto orden, requiere el conocimiento de cuatro valores iniciales para ser resuelta. Así, siguiendo los lineamientos de las anteriores subsecciones, existen cuatro coordenadas canónicas (Q_1, P_1, Q_2, P_2). Esto implica a su vez que existen dos variables dinámicas en el espacio de fase. Para

poder observar cómo surgen estas variables, se define $\psi = \ddot{\phi}$. De esta manera, el Lagrangiano (48) toma la forma

$$\begin{aligned} L &= a\psi\ddot{\phi} - \frac{a}{2}\psi^2 - V(\phi), \\ &= -a\dot{\phi}\dot{\psi} - \frac{a}{2}\psi^2 - V(\phi) + a\frac{d}{dt}(\psi\dot{\phi}). \end{aligned} \quad (50)$$

El último término de la segunda línea, al ser una derivada total, no contribuye a las ecuaciones de Euler-Lagrange. Ahora, se definen dos nuevas variables $q = (\phi + \psi)/\sqrt{2}$ y $Q = (\phi - \psi)/\sqrt{2}$, con las cuales el Lagrangiano (50) se convierte en

$$L = -\frac{a}{2}\dot{q}^2 + \frac{a}{2}\dot{Q}^2 - U(q, Q). \quad (51)$$

El Lagrangiano (51) muestra claramente que existen dos grados de libertad dinámicos. Sin embargo, como se pudo observar en la ecuación (30) el signo contrario en el término cinético corresponde a un campo fantasma, independientemente del signo de la constante a . Por otra parte, del teorema de Ostrogradsky, se mostró que una teoría no degenerada con $L = L(\phi, \dot{\phi}, \ddot{\phi})$ presenta inestabilidades lineales en el Hamiltoniano. Por lo tanto, se puede concluir que una teoría de orden superior introduce variables de tipo fantasma.

1.4. EVITANDO EL TEOREMA DE OSTROGRADSKY: ANALIZANDO UN MODELO DE JUGUETE

Como se explicó anteriormente, la existencia de derivadas superiores a dos en una teoría no degenerada produce inestabilidades lineales en el Hamiltoniano. Así, si se quiere incluir derivadas superiores o iguales a dos del campo en el Lagrangiano, se debe trabajar con teorías degeneradas. Las teorías degeneradas, en el marco de los modelos ET, ampliarían el espacio de teorías modificadas de la gravedad estables,

y por lo tanto, serían físicamente interesantes. A continuación, se ilustra con un modelo de juguete cómo una teoría degenerada con presencia de una segunda derivada puede conducir a ecuaciones de evolución de segundo orden después de tener en cuenta la degeneración.

Se parte de un Lagrangiano degenerado para dos variables ϕ y q

$$L = \frac{a}{2}\ddot{\phi}^2 + b\ddot{\phi}\dot{q} + \frac{c}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}\dot{\phi}^2 - \frac{1}{2}\phi^2 - \frac{1}{2}q^2, \quad (52)$$

donde a, b, c son constantes del sistema. Para el Lagrangiano (52), las ecuaciones de Euler-Lagrange son de orden superior a dos:

$$a\ddot{\ddot{\phi}} + b\ddot{\ddot{q}} - \ddot{\phi} - \phi = 0, \quad (53)$$

$$b\ddot{\ddot{\phi}} + c\ddot{\ddot{q}} + q = 0. \quad (54)$$

Una formulación equivalente del Lagrangiano dado en (52) viene dada la inclusión una nueva variable Q , la cual es equivalente a $\dot{\phi}$. De esta forma, el Lagrangiano quedará escrito como

$$L = \frac{a}{2}\dot{Q}^2 + b\dot{Q}\dot{q} + \frac{c}{2}\dot{q}^2 + \frac{1}{2}Q^2 - V(Q, q) - \lambda(Q - \dot{\phi}), \quad (55)$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange y $V(\phi, q) = \frac{1}{2}\phi^2 + \frac{1}{2}q^2$. De esta forma es más sencillo escribir el Hamiltoniano asociado al sistema:

$$H = P\dot{Q} + p\dot{q} + \pi_\phi Q - L. \quad (56)$$

Sustituyendo el Lagrangiano dado por (52) en (56) se obtiene

$$H = (P \ p) \mathcal{M}^{-1} \begin{pmatrix} P \\ q \end{pmatrix} + \pi_\phi Q - \frac{1}{2}Q^2 + V(\phi, q), \quad (57)$$

donde M es la matriz cinética, (P, p, π_ϕ) son los respectivos momentos conjugados de (Q, q, ϕ) , y $\pi_\phi = \lambda$. Este Hamiltoniano depende de seis variables, por lo tanto, tiene tres grados de libertad. El grado de libertad extra es debido a la dependencia lineal del Hamiltoniano con π_ϕ , el cual es un grado de libertad fantasma. Para poder eliminar el grado de libertad extra es necesario que la teoría sea degenerada, es decir el determinante de la matriz cinética sea igual a cero. En este caso, no es posible escribir (57). Es decir, no se pueden encontrar las derivadas temporales de las variables dinámicas en términos de los momentos conjugados. Para el Lagrangiano (55), la matriz cinética contiene los coeficientes de los términos cuadráticos en las derivadas más altas. Así, se obtiene

$$\mathcal{M} = \left(\frac{\partial^2 L}{\partial v^a \partial v^b} \right) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}, \quad (58)$$

donde $v^j = (\dot{Q}^2, \dot{q}^2)$. La propiedad de degeneración, $\det \mathcal{M} = 0$, implica que $ac - b^2 = 0$. Es decir, se obtiene una ligadura extra que conecta las ecuaciones de campo. Combinando las ecuaciones (53) y (54) con la ligadura obtenida, se reduce el orden de las derivadas. De esta manera, se obtiene el nuevo sistema

$$\ddot{\phi} + \frac{b}{c}\dot{q} + \phi = 0, \quad (59)$$

$$\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)\ddot{q} - \frac{b}{c}\dot{\phi} + \frac{1}{c}q = 0. \quad (60)$$

Se observa de este modo que la condición de degeneración reduce las ecuaciones de campo de orden superior (a dos) a un sistema de ecuaciones de movimiento de segundo orden. El paso a seguir es poder determinar si, al incluir la ligadura dada por la condición de degeneración, el sistema propaga la cantidad correcta de grados de libertad. El primer paso consiste en definir un vector v tal que $\mathcal{M}v = 0$.

Dicho vector se puede escribir como

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ \frac{b}{c} \end{pmatrix}. \quad (61)$$

Es directo ver que $\mathcal{M}v = 0$. Ahora, se toma la ecuación que relaciona las derivadas temporales con los momentos conjugados

$$\begin{pmatrix} P \\ p \end{pmatrix} = \mathcal{M} \begin{pmatrix} \dot{Q} \\ \dot{q} \end{pmatrix}. \quad (62)$$

Si se multiplica (62) por el vector (61), se encuentra una expresión que relaciona p y P

$$\frac{b}{c}p - P \approx 0. \quad (63)$$

La parte derecha de la relación anterior se nombrará Ψ y la expresión total denomina ligadura primaria. La notación ≈ 0 indica que una expresión es cero cuando la restricción es impuesta; por ejemplo, si se tiene un movimiento de una partícula confinada a la superficie de una esfera, la ligadura primaria fijaría el radio de la esfera. La ligadura (63) se incluye en el Hamiltoniano dado en (56)

$$H_c = H_p + \alpha\Psi \quad (64)$$

donde $H_p = \frac{p^2}{2c} + \pi_\phi Q - \frac{1}{2}Q^2 + V(\phi, q)$ y α es un multiplicador de Lagrange. Para proseguir, se debe determinar si existen ligaduras que perminten mantener $\Psi = 0$ a cualquier tiempo. Se debe, por lo tanto, obtener la derivada temporal de Ψ (mediante el corchete de Poisson)

$$\dot{\Psi} = \{\Psi, H_c\} = -Q + \pi_\phi - \frac{b}{c}q, \quad (65)$$

e igualar el resultado a cero: $\dot{\Psi} \approx 0$. Así, se impone una ligadura adicional de la siguiente forma:

$$\Delta = \dot{\Psi} = \{\Psi, H_c\} = -Q + \pi_\phi - \frac{b}{c}q \approx 0. \quad (66)$$

La condición $\Delta \approx 0$ es llamada ligadura secundaria. Si se quiere que las ligaduras primaria y secundaria sean válidas a cualquier tiempo, se deben seguir imponiendo condiciones sobre las derivadas temporales hasta que no sea posible encontrar ligaduras adicionales independientes. Por ejemplo, es posible imponer que la derivada temporal de Δ sea cero. Con la ligadura secundaria, se obtiene que

$$\dot{\Delta} = \{\Delta, H_c\} = \alpha\{\Delta, \Psi\} = \alpha\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right). \quad (67)$$

Es claro que el resultado anterior no se puede hacer cero porque esto implicaría eliminar el primer término de la ecuación (60). Es decir, hacer $\left(1 - \frac{b^2}{c^2}\right)$ igual a cero implicaría remover el término cinético de la variable q en el sistema reducido. Por lo tanto, no es necesario imponer $\dot{\Delta} \approx 0$. Así, el proceso de deducción de ligaduras termina aquí. De esta forma se tiene que el Hamiltoniano depende de seis coordenadas canónicas menos las dos ligaduras dadas en (63) y (66). Por consiguiente, al realizar nuevamente el conteo de los grados de libertad, se encuentra que se ha eliminado un grado extra, es decir, el grado de libertad fantasma. Se concluye entonces que es fundamental que Lagrangianos con dependencia de una segunda derivada sean degenerados para que contengan la cantidad correcta de grados de libertad.

El procedimiento descrito en el modelo de juguete puede ser aplicado al caso de las teorías ET degeneradas. Éstas son de particular interés porque generalizan las teorías de Galileones y, por ende, representan nuevos candidatos en la búsqueda de las teorías modificadas de la gravedad. De esta manera, se contaría con un conjunto más grande de teorías, de las cuales se puede obtener una rica fenomenología.

2. TEORÍAS ESCALAR TENSOR

La teoría estándar de la gravitación es la teoría general de la relatividad de Einstein. Esta es una teoría geométrica del espaciotiempo y es construida a partir del tensor métrico. Debido a esto, se le puede denominar una teoría tensorial. Sin embargo, debido a que la relatividad general de Einstein (RG) es una teoría efectiva, y debe de ser modificada a altas energías, es muy interesante el estudio de extensiones de RG²⁴⁵³⁵⁴. Un conjunto de estas extensiones son las llamadas teorías escalar tensor. Se denomina teoría escalar tensor a aquella en la que existe un acoplamiento no mínimo entre un campo escalar y el tensor métrico. El gráfico (1) contiene las teorías escalar tensor no degeneradas (tradicionales y Horndeski) y no degeneradas (más allá de Horndeski y teorías DHOST). Este trabajo se centra en este último conjunto (véase el cap. 3).

En este capítulo se realiza una recopilación de las teorías escalar tensor más conocidas: teorías tradicionales escalar tensor, color celeste en la figura (1) (teoría de Brans-Dicke), teoría de Horndeski o teoría del Galileón escalar generalizado y covariantizado, color gris en la figura (1) y teorías más allá de Horndeski, color naranja en la figura(1). Estas últimas son un preámbulo de las denominadas teorías DHOST cuadráticas, color verde en la figura(1) , siendo estas últimas el tema central de esta tesis.

⁵³ Austin JOYCE y col. “*Beyond the cosmological standard model*”. En: *Physics Reports* 568 (2015), pág. 1. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.12.002.

⁵⁴ Emanuele BERTI y col. “*Testing general relativity with present and future astrophysical observations*”. En: *Classical and Quantum Gravity* 32 (2015), pág. 243001. DOI: 10.1088/0264-9381/32/24/243001.

Figura 1. Teorías de gravedad modificada.



2.1. TEORÍAS TRADICIONALES ESCALAR TENSOR

Las teorías tradicionales escalar tensor son aquéllas en que el Lagrangiano depende, a lo sumo, de la primera derivada del campo, además de contener, en general, acoplamientos no mínimos a la gravedad. Fueron inicialmente introducidas por Jordan, mediante la incrustación de una variedad curva de cuatro dimensiones en un espaciotiempo de cinco dimensiones ⁵⁵, en el contexto de la teoría de Kaluza-Klein ²⁰²¹. El Lagrangiano introducido es

$$\mathcal{L}_J = \sqrt{-g} \left[\phi_J^\gamma \left(R - \omega_J \frac{1}{\phi_J^2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi_J \partial_\nu \phi_J \right) + L_{materia}(\Psi, \phi_J) \right], \quad (68)$$

donde ϕ_J es el escalar de Jordan, R es el escalar de Ricci, mientras que, γ , ω_J son constantes. El término $\phi_J^\gamma R$ es el denominado acoplamiento no mínimo que suele caracterizar a las teorías escalar tensor. Sin embargo, el término asociado con la materia viola el principio de equivalencia débil debido al acoplamiento entre el

⁵⁵ Pascual JORDAN. *Schwerkraft und weltall*. Vol. 107. Vieweg, 1955.

Lagrangiano de materia y ϕ ⁵⁶. Por tal motivo, fue propuesto el siguiente Lagrangiano

$$\mathcal{L}_{BD} = \sqrt{-g} \left[\phi R - \omega \frac{1}{\phi} g^{\mu\nu} \partial_\mu \phi \partial_\nu \phi + L_{materia}(\Psi) \right], \quad (69)$$

el cual es conocido como *modelo prototipo Brans Dicke (BD)* ^{57 22}. Es posible llevar el Lagrangiano descrito en (69) a su forma canónica mediante la redefinición del campo escalar ϕ ⁵⁸:

$$\mathcal{L}_{BD} = \sqrt{-g} \left[\frac{\xi}{2} \varphi^2 R - \frac{\epsilon}{2} g^{\mu\nu} \partial_\mu \varphi \partial_\nu \varphi + L_{materia} \right], \quad (70)$$

donde $\phi = \frac{\xi}{2} \varphi^2$, ξ es una constante adimensional arbitraria y $\epsilon \xi^{-1} = 4\omega$, siendo $\epsilon = \pm 1 = \text{sgn}(\omega)$. Cuando $\epsilon = 1$ se tiene una teoría libre de fantasmas. Para un desarrollo completo de esta teoría, véase la referencia ⁵⁸.

2.2. TEORÍA DE HORNESKI (O DEL GALILEÓN)

En la sección anterior, se trabajó con un Lagrangiano dependiente de la primera derivada del campo. Generalmente este tipo de teorías no presentan ninguna inestabilidad puesto que se obtienen ecuaciones de campo a lo sumo de segundo orden. Sin embargo, al extender la derivada del campo a segundo orden, según el teorema de Ostrogradsky se produce una inestabilidad lineal en el Hamiltoniano. Este problema fue abordado en la década de los setenta por Horndeski quién determinó la acción más general escalar-tensor con ecuaciones de campo, a lo sumo, de

⁵⁶ M. FIERZ. "On the physical interpretation of P.Jordan's extended theory of gravitation". En: *Helv. Phys. Acta* 29 (1956), pág. 128.

⁵⁷ El nombre prototipo se refiere la versión original del modelo BD.

⁵⁸ Yasunori FUJII y MAEDA Kei-ichi. *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003. DOI: 10 . 1017 / CB09780511535093.

segundo orden en cuatro dimensiones ³⁴. La formulación dada por Horndeski es la siguiente:

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & \delta_{\mu\nu\sigma}^{\alpha\beta\gamma} \left[\kappa_1 \phi_\alpha^\mu R_{\beta\gamma}{}^{\nu\sigma} + \frac{2}{3} \kappa_{1X} \phi_\alpha^\mu \phi_\beta^\nu \phi_\gamma^\sigma + \kappa_3 \phi_\alpha \phi^\mu R_{\beta\gamma}{}^{\nu\sigma} + 2\kappa_{3X} \phi_\alpha \phi^\mu \phi_\beta^\nu \phi_\gamma^\sigma \right] \\ & + \delta_{\mu\nu}^{\alpha\beta} [(F + 2W) R_{\alpha\beta}^{\mu\nu} + 2F_X \phi_\alpha^\mu \phi_\beta^\nu] - 6(F_\phi + 2W_\phi - X\kappa_8) \square \phi \kappa_9, \end{aligned} \quad (71)$$

donde $\delta_{\alpha_1\alpha_2\alpha_3\cdots\alpha_n}^{\beta_1\beta_2\beta_3\cdots\beta_n} = n! \delta_{\alpha_1}^{[\beta_1} \delta_{\alpha_2}^{\beta_2} \cdots \delta_{\alpha_n}^{\beta_n]}$ es la generalización del delta de Kronecker y las κ_i son funciones arbitrarias de ϕ y X . La función F debe satisfacer $F_X = 2(\kappa_3 + 2X\kappa_{3X} - \kappa_{1\phi})$ y la función W debe depender de ϕ , $W = W(\phi)$. Aunque a esta teoría no se le prestó la suficiente atención durante décadas, ganó una amplia popularidad en la comunidad de la física teórica alrededor del año 2010 cuando se demostró que la recién formulada teoría de Galileones escalares ³⁰ (motivada como un límite de teorías de gravedad masiva) era equivalente a la teoría de Horndeski ³⁵. A continuación se muestra la teoría de Galileones en un espaciotiempo plano (Minkowski) y la generalización de esta teoría a un espaciotiempo curvo.

2.2.1. Teoría de Galileones (Espacio tiempo plano) Para el caso particular de un espaciotiempo de Minkowski, la teoría para un campo escalar libre de inestabilidades que reproduce ecuaciones de evolución con polinomios de la derivada de segundo orden se conoce como *teoría de Galileones* ³⁰. Este tipo de teorías es invariante ante la transformación

$$\phi \rightarrow \phi + b_\mu x^\mu + c, \quad (72)$$

cuya forma es análoga a las transformaciones de Galileo en mecánica clásica (de allí su nombre). El Lagrangiano invariante más general en cuatro dimensiones con

ecuaciones de evolución de segundo orden se puede escribir como

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & c_1\phi + c_2X - c_3X\Box\phi \\
& + \frac{c_4}{2} \left(X \left[(\Box\phi)^2 - \partial_\mu\partial_\nu\partial^\mu\partial^\nu\phi \right] + \Box\phi\partial^\mu\phi\partial^\nu\phi\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi - \partial_\mu X\partial^\mu X \right) \\
& + \frac{c_5}{15} \left(-2X \left[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi\partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\mu\partial^\nu\phi + 2\partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\nu\partial^\lambda\phi\partial_\lambda\partial^\mu\phi \right] \right. \\
& \left. + 3\partial^\mu\phi\partial_\mu X \left[(\Box\phi)^2 - \partial_\mu\partial_\nu\partial^\mu\partial^\nu\phi \right] + 6\Box\phi\partial_\mu X\phi\partial^\mu X - 6\partial_\mu X\phi\partial_\nu X \right), \quad (73)
\end{aligned}$$

donde $X := -\eta^{\mu\nu}\partial_\mu\phi\partial_\nu\phi/2$ y $c_1, \dots, c_5$ son constantes de acoplamiento. A pesar de que el Lagrangiano posea derivadas de orden superior a uno, las ecuaciones de campo son estrictamente de segundo orden ²⁶. Es posible escribir el Lagrangiano descrito en la ecuación (73) de una manera más compacta utilizando integración por partes. De esta manera, se obtiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & c_1\phi + c_2X - c_3X\Box\phi + c_4X \left[(\Box\phi)^2 - \partial_\mu\partial_\nu\partial^\mu\partial^\nu\phi \right] \\
& + -\frac{c_5}{3}X \left[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi\partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\mu\partial^\nu\phi + 2\partial_\mu\partial_\nu\phi\partial^\nu\partial^\lambda\phi\partial_\lambda\partial^\mu\phi \right]. \quad (74)
\end{aligned}$$

2.2.2. Generalización de la teoría de Galileones (Espaciotiempo curvo) El Lagrangiano descrito en (74) puede ser extendido al caso de un espaciotiempo curvo ³². Para esto, se hacen las sustituciones $\eta_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu}$ y $\partial_\mu \rightarrow \nabla_\mu$. Sin embargo, es importante tener en cuenta la no conmutatividad de las derivadas covariantes. La no conmutatividad genera ecuaciones de campo de orden superior. Para solucionar este inconveniente, se deben agregar unos contratérminos únicos que conllevan a ecuaciones de campo de segundo orden. Teniendo en cuenta estos términos extra, el Lagrangiano covariante que extiende la teoría de Galileones es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} = & c_1\phi + c_2X - c_3X\Box\phi + \frac{c_4}{2}X^2R + c_4X \left[(\Box\phi)^2 - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} \right] \\
& + c_5X^2G^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} - \frac{c_5}{3}X \left[(\Box\phi)^3 - 3\Box\phi\phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} + 2\phi_{\mu\nu}\phi^{\nu\lambda}\phi_{\lambda}^{\mu} \right], \quad (75)
\end{aligned}$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci, $G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu}$ es el tensor de Einstein, $\phi_{,\mu} := \nabla_{\mu}\phi$, $\phi_{,\mu\nu} := \nabla_{\mu}\nabla_{\nu}\phi$. Los términos asociados al escalar de Ricci y el tensor de Einstein son los denominados contratérminos ²⁶³².

La extensión del Lagrangiano (75) a un caso más general también se ha desarrollado ³¹³³. En este contexto, la generalización se traduce en elevar las constantes c_i en (75) a funciones arbitrarias $G_i(\phi, X)$ con el fin de permitir derivadas primeras del campo y el campo mismo en las ecuaciones de campo. Así, el Lagrangiano generalizado y covariantizado se escribe como

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = & G_2(\phi, X) - G_3(\phi, X)\square\phi + G_4(\phi, X)R + G_{4X} [(\square\phi)^2 - \phi^{\mu\nu}\phi_{,\mu\nu}] \\ & + G_5(\phi, X)G^{\mu\nu}\phi_{,\mu\nu} - \frac{G_{5X}}{6} [(\square\phi)^3 - 3\square\phi\phi^{\mu\nu}\phi_{,\mu\nu} + 2\phi_{,\mu\nu}\phi^{\nu\lambda}\phi_{,\lambda}^{\mu}], \end{aligned} \quad (76)$$

donde G_2, G_3, G_4 y G_5 son funciones arbitrarias de ϕ y X , y el subíndice en G_{iX} indica una derivada con respecto a X . Es posible realizar un mapeo de la teoría de el del Galileón escalar generalizado y covariantizado a la teoría de Horndeski mediante la identificación de las G_i , además de realizar integración por partes, es decir ²⁶

$$G_2 = \kappa_9 + 4X \int^X dX' (\kappa_{8\phi} - 2\kappa_{3\phi\phi}), \quad (77)$$

$$G_3 = 6F_{\phi} - 2X\kappa_8 - 8X\kappa_{3\phi} + 2 \int^X dX' (\kappa_8 - 2\kappa_{3\phi}), \quad (78)$$

$$G_4 = 2F - 4X\kappa_3, \quad (79)$$

$$G_5 = -4\kappa_1. \quad (80)$$

Por un tiempo se creyó que esta teoría era la más general para un espaciotiempo de cuatro dimensiones y libre de patologías. Sin embargo, como se muestra en la siguiente sección, es posible generalizar aún más esta teoría mediante la introducción de una ligadura extra proveniente de la condición de degeneración.

2.3. TEORÍAS MÁS ALLÁ DE HORNDESKI

La sección anterior se centró en el estudio de la teoría de Horndeski (teoría del Galileón escalar generalizado). Sin embargo, recientemente se ha determinado que la acción que rige esta teoría no es la más general debido a que es posible incluir en la teoría del Galileón generalizado dada en (76) un par de funciones F_4 y F_5 , los cuales contienen la información de los términos interactuantes y autointeractuantes del campo, que generalizan la teoría de Horndeski. Estas teorías en general poseen *explícitamente* ecuaciones de campo de orden superior⁵⁹ que son *implícitamente* a lo sumo de segundo orden⁶⁰. A este tipo de teorías se les conoce como teorías saludables más allá de Horndeski^{61,62}. La acción para esta teoría está dada por

$$S[g_{\mu\nu}, \phi] = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\sum_{i=2}^5 \frac{1}{8\pi G_N} \mathcal{L}_i(g_{\mu\nu}, \phi) + \mathcal{L}_m(g_{\mu\nu}, \Psi_M) \right], \quad (81)$$

donde $\mathcal{L}_m$ es un Lagrangiano genérico en el cual se encuentran cualquier tipo de acoplamiento del campo de materia con la métrica. Los cuatro Lagrangianos en la

⁵⁹ Superiores a segundo orden.

⁶⁰ Dina TRAYKOVA, BELLINI Emilio y FERREIRA Pedro G. “*The phenomenology of beyond Horndeski gravity*”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 08 (2019), pág. 035. DOI: 10.1088/1475-7516/2019/08/035. arXiv: 1902.10687 [astro-ph.CO].

⁶¹ Jérôme GLEYZES y col. “*New class of consistent scalar-tensor theories*”. En: *Phys. Rev. Lett.* 114 (2015), pág. 211101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.211101. arXiv: 1404.6495 [hep-th].

⁶² Miguel ZUMALACÁRREGUI y GARCÍA-BELLIDO Juan. “*Transforming gravity: from derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the Horndeski Lagrangian*”. En: *Phys. Rev. D* 89 (2014), pág. 064046. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.064046. arXiv: 1308.4685 [gr-qc].

suma son

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_2 &= G_2(\phi, X), \\
\mathcal{L}_3 &= -G_3(\phi, X)\square\phi, \\
\mathcal{L}_4 &= G_4(\phi, X)R + G_{4X} [(\square\phi)^2 - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}] + F_4(\phi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho}{}_{\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}\phi_{\mu}\phi_{\alpha}\phi_{\nu\beta}\phi_{\rho\gamma}, \\
\mathcal{L}_5 &= G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} - \frac{1}{6}G_{5X} [(\square\phi)^3 + 2\phi_{\mu}^{\nu}\phi_{\nu}^{\alpha}\phi_{\alpha}^{\mu} - 3\phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}\square\phi], \\
&\quad + F_5(\phi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\theta}\phi_{\mu}\phi_{\alpha}\phi_{\nu\beta}\phi_{\rho\gamma}\phi_{\sigma\theta},
\end{aligned} \tag{82}$$

donde $G_i(\phi, X)$ y $F_i(\phi, X)$ son funciones arbitrarias, G_{iX} es la derivada de G_i con respecto a X , y $\epsilon^{\alpha\beta\gamma\theta}$ es el tensor de Levi-Civita. Esta acción generalmente propaga un grado de libertad extra, para evitarlo se impone la condición^{63 60}

$$2XG_{5X}F_4 = -3F_5[G_4 + 4XG_{4X} + XG_{5\phi}]. \tag{83}$$

Estas teorías dan comienzo al estudio de teorías saludables que son extensiones de la teoría de Horndeski, en las cuales es necesario relajar una hipótesis del teorema de Ostrogradsky: la no degeneración⁴². Las teorías más allá de Horndeski corresponde al primer intento en la construcción de teorías degeneradas con dependencia de la segunda derivada en el Lagrangiano que generan ecuaciones de evolución a lo sumo de segundo orden en un espaciotiempo cuatridimensional. En los siguientes capítulos se hace un desarrollo de un tipo de teorías degeneradas cuadráticas de orden superior (DHOST cuadráticas), realizando una extensión de la metodología utilizada en el modelo de juguete (ver sección 1.4), lo que ocasiona encontrar una serie de ligaduras que sugieren la disminución del orden en las ecuaciones de campo.

⁶³ Generalmente se aplica esta condición cuando se consideran términos no lineales más allá de Horndeski.

3. LAGRANGIANO GENERAL EN LA TEORÍA DHOST CUADRÁTICA

Las teoría de Horndeski y más allá de Horndeski han tenido un gran impacto en la cosmología⁶⁴⁶⁵⁶⁶⁶⁷⁶⁸. Esta última, como se vió en el capítulo anterior, da las bases para encontrar una teoría degenerada con un Lagrangiano que contenga derivadas de orden superior a uno y que conduzca a ecuaciones de campo a lo sumo de segundo orden, de tal manera poder evitar el teorema de Ostrogradsky. Por lo tanto, al tener una teoría más general que las anteriormente mencionadas, se tiene una fenomenología más rica y puede ser candidata a solucionar problemas aún abiertos en la cosmología.

Este capítulo se centra en el estudio de un Lagrangiano con dependencia cuadrática en las segundas derivadas del campo encontrando su forma explícita. Para tal fin, se propone el Lagrangiano más general que gobierna la dinámica de esta clase de

⁶⁴ Eugeny BABICHEV y ESPOSITO-FARÈSE Gilles. “Cosmological self-tuning and local solutions in generalized Horndeski theories”. En: *Phys. Rev. D* 95 (2 2017), pág. 024020. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.024020.

⁶⁵ Shun ARAI y NISHIZAWA Atsushi. “Generalized framework for testing gravity with gravitational-wave propagation. II. Constraints on Horndeski theory”. En: *Phys. Rev. D* 97 (10 2018), pág. 104038. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.104038.

⁶⁶ S. MIRONOV, V. RUBAKOV y V. VOLKOVA. “Genesis with general relativity asymptotics in beyond Horndeski theory”. En: *Phys. Rev. D* 100 (8 2019), pág. 083521. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.083521.

⁶⁷ Simone PEIRONE y col. “Cosmological constraints and phenomenology of a beyond-Horndeski model”. En: *Phys. Rev. D* 100 (6 2019), pág. 063509. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.063509.

⁶⁸ S. MIRONOV, RUBAKOV V. y VOLKOVA V. “Subluminal cosmological bounce beyond Horndeski”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2005 (2020), pág. 024. DOI: 10.1088/1475-7516/2020/05/024.

teorías, el cual viene dado por ³⁸

$$\mathcal{L}_\phi = f^{(4)} R + C^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla_\rho \nabla_\sigma \phi, \quad (84)$$

donde f es una función arbitraria que depende de ϕ y X y el tensor $C^{\mu\nu\rho\sigma}$ está escrito en función de ϕ y ϕ_μ . El Lagrangiano descrito en la ecuación (84), no posee una dependencia de términos lineales de ϕ_μ y $\phi_{\mu\nu}$, debido a que éstos no contribuyen a la matriz Hessiana (matriz cinética).

3.1. APLICACIÓN DEL TEOREMA DE OSTROGRADSKY

3.1.1. En el Lagrangiano Cuando se tiene un Lagrangiano no degenerado con dependencia de la segunda derivada o derivadas sucesivas del campo ϕ , se obtienen ecuaciones de campo de orden superior a dos y el teorema de Ostrogradsky predice una inestabilidad lineal asociada al Hamiltoniano (ver sec.1.1). Es decir, se tiene un Hamiltoniano que no es acotado por debajo, generando una teoría patológica. De acuerdo con este razonamiento, el Lagrangiano dado en (84) posee este tipo de patología. Para evitar inestabilidades es necesario degenerar el sistema (de esta manera se evita el teorema de Ostrogradsky).

3.1.2. En las ecuaciones de campo Las ecuaciones de evolución para el campo ϕ , vienen dadas por

$$f_\phi R + \frac{\partial C^{\mu\nu\rho\sigma}}{\partial \phi} \nabla_\mu \nabla_\nu \phi \nabla_\rho \nabla_\sigma \phi - 2 \nabla^\mu (\nabla_\mu \phi f_X R) - \nabla_\mu \left(\frac{\partial C^{\mu\nu\rho\sigma}}{\partial (\nabla_\mu \phi)} \nabla_\nu \phi \nabla_\rho \nabla_\sigma \phi \right) + 2 \nabla_\nu \nabla_\mu (C^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\rho \nabla_\sigma \phi) = 0. \quad (85)$$

Estas ecuaciones son de orden superior a dos. Por lo tanto, según el teorema de Ostrogradsky, el sistema físico asociado posee un grado de libertad extra. Como se

mostró en la sección 1.3, este grado de libertad es un grado de libertad fantasma. Sin embargo, si se realiza un procedimiento similar al desarrollado con el modelo juguete (ver sec. 1.4) es posible solucionar este problema.

3.2. CONSTRUCCIÓN DEL TENSOR $C^{\mu\nu\rho\sigma}$

Como se observó en la ecuación (84), existe un tensor $C^{\mu\nu\rho\sigma}$. Este tensor se puede descomponer en su parte simétrica y antisimétrica. Sin embargo, al realizar la contracción con las segundas derivadas covariantes del campo (las cuales representan un tensor simétrico), sólo sobrevivirá la parte simétrica del tensor. Por tal motivo, es razonable proponer las siguientes simetrías para el tensor $C^{\mu\nu\rho\sigma}$:

$$C^{\mu\nu\rho\sigma} = C^{\mu\nu\sigma\rho} = C^{\nu\mu\rho\sigma} = C^{\rho\sigma\mu\nu}. \quad (86)$$

Este es un tensor de cuarto orden, por lo tanto, es posible escribirlo en términos de un tensor de cuarto orden $Y^{\mu\nu\rho\sigma}$, el producto de dos tensores de segundo orden $X^{\mu\nu}X^{\rho\sigma}$, el producto de dos tensores de primer orden y un tensor de segundo orden $X^{\mu\nu}Z^\rho Z^\sigma$, y el producto de cuatro tensores de primer orden $Z^\mu Z^\nu Z^\rho Z^\sigma$ ⁶⁹. Para el desarrollo de este trabajo el tensor de cuarto orden $Y^{\mu\nu\rho\sigma}$ será el tensor de Levi-Civita, el tensor de segundo orden $X^{\rho\sigma}$ será el tensor métrico y el tensor de primer orden Z^μ será la primera derivada covariante del campo ϕ . Sin embargo, al introducir las simetrías dadas por (86) la contribución del tensor de Levi-Civita se hace idénticamente cero. Por lo tanto, el tensor general $C^{\mu\nu\rho\sigma}$, solamente se escribirá en términos del tensor métrico y de la primera derivada covariante del campo ϕ .

Imponiendo las simetrías dadas en (86) en los diferentes productos expuestos anteriormente, el tensor $C^{\mu\nu\rho\sigma}$ queda escrito de la siguiente manera:

⁶⁹ M. ITSKOV. *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers: With Applications to Continuum Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 2009.

$$\begin{aligned}
C^{\nu\mu\sigma\rho} = & \frac{1}{2}\alpha_1 (g^{\mu\sigma}g^{\rho\nu} + g^{\mu\rho}g^{\nu\sigma}) + \alpha_2 g^{\mu\nu}g^{\rho\sigma} + \frac{1}{2}\alpha_3 (g^{\mu\nu}\phi^\rho\phi^\sigma + g^{\rho\sigma}\phi^\mu\phi^\nu) \\
& + \frac{1}{4}\alpha_4 (g^{\mu\sigma}\phi^\rho\phi^\nu + g^{\rho\nu}\phi^\mu\phi^\sigma + g^{\mu\rho}\phi^\nu\phi^\sigma + g^{\nu\sigma}\phi^\mu\phi^\rho) + \alpha_5\phi^\mu\phi^\nu\phi^\rho\phi^\sigma, \quad (87)
\end{aligned}$$

donde, $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5$ dependen del campo ϕ y el término cinético X .

Después de obtener la forma explícita del tensor $C^{\mu\nu\rho\sigma}$, se revisan dos casos particulares para el Lagrangiano (84). Estos son:

- Para $f = G_4$, $\alpha_1 = -\alpha_2 = 2G_{4X}$ y $\alpha_3 = \alpha_4 = \alpha_5 = 0$, se obtiene

$$L_4^H = G_4(\phi, X)^{(4)}R - 2G_{4X}(\phi, X)(\Box\phi^2 - \phi^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu}), \quad (88)$$

el cual representa el término cuártico de Horndeski o el término cuártico dado por la teoría de Galileones Generalizados, ec.(76).

- Para $\alpha_1 = -\alpha_2 = XF_4$, $\alpha_3 = -\alpha_4 = 2F_4$ y $\alpha_5 = 0$

$$L_4^{bH} = F_4(\phi, X)\epsilon_\sigma^{\mu\nu\rho}\epsilon^{\alpha\beta\gamma\sigma}\phi_\mu\phi_\alpha\phi_{\nu\beta}\phi_{\rho\gamma}, \quad (89)$$

es asociado al término cuártico más allá de Horndeski (ver sec 2.3).

La teoría DHOST cuadrática dada por (84), al ser de orden superior, exhibe el problema de inestabilidad lineal del Hamiltoniano (ver sec. 3.1). Para poder eliminar esa patología, se debe evadir el teorema de Ostrogradsky. En la siguiente sección se ejemplificará una metodología a seguir utilizando un modelo de juguete. Esta metodología se puede extender a casos más generales como el que nos compete en el desarrollo del proyecto.

3.3. MODELO DE JUGUETE

En esta sección se estudia es otro modelo de juguete, más general que el dado en (1.4). La idea es desarrollar una metodología a seguir cuando se tiene un Lagrangiano con dependencia de a lo sumo segundas derivadas del campo y se desea eliminar la patología descrita por el teorema de Ostrogradsky. Para tal fin, se parte del siguiente Lagrangiano ³⁸:

$$L = \frac{1}{2}a\ddot{\phi}^2 + \frac{1}{2}k_o\dot{\phi}^2 + \frac{1}{2}k_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + b_i\ddot{\phi}\dot{q}^i + c_i\dot{\phi}\dot{q}^i - V(\phi, q), \quad (90)$$

donde q tiene n grados de libertad (es decir, se puede entender como un arreglo vectorial de n componentes), a, k_o, b_i, c_i son constantes, y k_{ij} es una matriz invertible. Como se vió en la sección 1.3, cuando se tienen Lagrangianos no degenerados con dependencia de segundas derivadas del campo, existe un grado de libertad extra tipo fantasma. Las ecuaciones de Euler Lagrange para el sistema (90) son

$$a\dddot{\phi} - k_o\ddot{\phi} + b_i\ddot{q}^i - c_i\dot{q}^i - V_\phi = 0 \quad (91)$$

$$k_{ij}\ddot{q}^j + b_i\ddot{\phi} + c_i\dot{\phi} + V_i = 0 \quad (92)$$

donde $V_i = \frac{\partial V(\phi, q)}{\partial q^i}$ y $V_\phi = \frac{\partial V(\phi, q)}{\partial \phi}$. Estas ecuaciones tienen derivadas de tercer y cuarto orden producto de la derivada de segundo orden en el Lagrangiano (90). Debido a que son ecuaciones de orden superior, el Hamiltoniano no está acotado por abajo. Por lo tanto, se tiene una teoría no saludable.

Para encontrar las ecuaciones de movimiento de una forma más sencilla es necesario hacer una reducción en el orden de las derivadas del Lagrangiano (90). Para tal fin, se introduce una nueva variable Y que es equivalente a $\dot{\phi}$. De esta forma, el

nuevo Lagrangiano queda escrito como sigue

$$L_Y = \frac{1}{2}a\dot{Y}^2 + \frac{1}{2}k_o Y^2 + \frac{1}{2}k_{ij}\dot{q}^i\dot{q}^j + b_i\dot{Y}\dot{q}^i + c_i Y\dot{q}^i - V(\phi, q) - \lambda(Y - \dot{\phi}), \quad (93)$$

$$= \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \dot{Y} & \dot{q}^i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b_j \\ b_i & k_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \dot{Y} \\ \dot{q}^j \end{pmatrix} + \frac{1}{2}k_o Y^2 + c_i Y\dot{q}^i - V(\phi, q) - \lambda(Y - \dot{\phi}), \quad (94)$$

donde λ es un multiplicador de Lagrange. Así, las ecuaciones de movimiento vienen dadas por

$$a\ddot{Y} + b_i\ddot{q}^i = c_i\dot{q}^i + k_o Y - \lambda, \quad (95)$$

$$b_i\ddot{Y} + k_{ij}\ddot{q}^j = -V_i - c_i\dot{Y}, \quad (96)$$

$$\dot{\phi} = Y, \quad \dot{\lambda} = -V_\phi. \quad (97)$$

Para obtener el sistema de ecuaciones (91) y (92), solamente se deriva (95) con respecto al tiempo y se introduce (97) en (96) y (95). Como se pudo determinar en la sección 1.4, es necesario relajar una de las hipótesis del teorema de Ostrogradsky: la no degeneración. Por tal motivo es fundamental encontrar la matriz cinética M del Lagrangiano (93). Ésta viene dada por

$$M = \frac{\partial L_Y}{\partial \nu \partial \mu^i} = \begin{pmatrix} a & b \\ b_i & k_{ij} \end{pmatrix}, \quad (98)$$

donde $\nu = \dot{Y}$ y $\mu^i = \dot{q}^i$. Como se desea tener una teoría degenerada, se impone que $\det M = 0$. Así, se obtiene

$$\det M = \det(k)(a - b_i b_j (k^{-1})^{ij}) = 0. \quad (99)$$

Es claro que M puede ser degenerada de varias formas. El caso más sencillo es hacer $a = 0$ y $b_i = 0$. Éste sería el caso trivial el cuál dejaría al sistema de ecuaciones (95)-(97) con derivadas a lo sumo de segundo orden pero que no genera ningún interés. En este trabajo se tendrá en cuenta el caso $a \neq 0$ y $b_i \neq 0$. De esta forma se puede demostrar que, con la ayuda de la degeneración, las ecuaciones de evolución son a lo sumo de segundo orden. Otra manera de determinar si M es degenerada es encontrar un vector propio diferente de cero asociado a un valor propio igual a cero, es decir

$$M\vec{a} = 0. \quad (100)$$

El $\vec{a}$ que cumple con la condición de la ecuación (100), viene dado por:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} v_o \\ v^i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ b_i(k^{-1})^{ij} \end{pmatrix}. \quad (101)$$

Sustituyendo las condiciones de degeneración dadas por (99) en (95) y (96), se obtiene

$$c_i(\dot{q}^i + v^i \dot{Y}) + k_o Y + v^i V_i = \lambda. \quad (102)$$

Ahora, se define la variable $y^i = \dot{q}^i + v^i \dot{Y}$; sustituyéndola en la ecuación (96) se obtiene el siguiente sistema de ecuaciones

$$c_i \dot{y}^i + k_o Y + v^i V_i = \lambda, \quad (103)$$

$$k_{ij} y^j + c_i \dot{Y} + V_i = 0. \quad (104)$$

Derivando la primera ecuación, y reemplazando la ecuación (97) en (103) y (104),

se llega al siguiente sistema

$$(k_o - v^i v^j V_{ij}) \ddot{\phi} + c_i \ddot{y}_i = -(v^i V_{ij}) \dot{y}^j - (v^i V_{i\phi}) \dot{\phi} - V_\phi, \quad (105)$$

$$c_i \ddot{\phi} + k_{ij} \ddot{y}^j = -V_i. \quad (106)$$

La consecuencia directa de implementar la respectiva ligadura dada en (99) sobre (96) y (95) es obtener un sistema de ecuaciones de movimiento con derivadas a lo sumo de segundo orden. Por consiguiente, es posible evitar el teorema de Ostrogradsky para el caso de Lagrangianos con dependencia cuadrática de las segunda derivada. En el siguiente capítulo se extiende esta metodología para el caso de la teoría DHOST cuadrática determinando las respectivas ligaduras.

4. CONDICIONES DE DEGENERACIÓN

Como se pudo determinar en las secciones 1.1 y 1.3, cuando se tienen Lagrangianos con dependencia de segundas derivadas o derivadas sucesivas del campo, existen inestabilidades lineales en el Hamiltoniano. Además, se propaga un número equivocado de grados de libertad. Para evitar esta patología, se utiliza un procedimiento análogo al utilizado en el modelo juguete (sec. 3.3) y además en el artículo de Langlois ³⁸. Como se determinó, fue fundamental conocer la matriz cinética y la condición de degeneración.

En la primera parte de este capítulo se determina un Lagrangiano equivalente a (84). Esto se hace con el fin de poder reducir el orden de las derivadas del campo, de la misma forma como se hizo con el modelo juguete en la sección 3.3. Posteriormente se utiliza la descomposición en el formalismo covariante 3+1 (ver apéndice 1) para encontrar la parte cinética del Lagrangino dado en (84). Para finalizar se muestran las condiciones de degeneración, las cuales conducen a las diversas clases de la teoría DHOST cuadráticas.

La acción dada en (84) tiene dependencia con la segunda derivada covariante en el campo ϕ , por lo tanto, es adecuado realizar una reducción en el orden de estas derivadas. De la misma forma como se hizo en la sección 3.3, dicha reducción se realiza para encontrar las ecuaciones de campo de una manera más sencilla. Para tal fin, todas las primeras derivadas covariantes del campo $\nabla_\mu \phi$, se cambian por un 1-forma A_μ , imponiendo la relación $A_\mu = \nabla_\mu \phi$, por medio de una ligadura en la acción. Así, la acción dada en (84) se escribe como:

$$S[g, \phi; A_\mu, \lambda^\mu] = \int \sqrt{|g|} \left(f^{(4)} R + C^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma + \lambda^\mu (\nabla_\mu \phi - A_\mu) \right), \quad (107)$$

donde el tensor $C^{\mu\nu\rho\sigma}$ es expresado ahora en términos del campo escalar ϕ y el

1-forma A_μ , y λ^μ es un multiplicador de Lagrange.

Las ecuaciones de evolución asociadas a los campos ϕ y A_μ son

$$\frac{\delta C^{\mu\nu\rho\sigma}}{\delta\phi} \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma - \nabla_\mu \lambda^\mu = 0 \quad (108)$$

$$\frac{\delta C^{\mu\nu\rho\sigma}}{\delta A_\alpha} \nabla_\mu A_\nu \nabla_\rho A_\sigma - 2\nabla_\beta (C^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\mu A_\nu) = \lambda^\alpha \quad (109)$$

$$A_\mu = \nabla_\mu \phi \quad (110)$$

Si se desea recuperar las ecuaciones de evolución asociadas al campo ϕ dadas en (85), simplemente se debe calcular la divergencia en (109) y reemplazar junto con la ecuación (110) en (108). En la siguiente sección se hará la descomposición en el formalismo covariante 3+1 de la derivada covariante de un vector, para posteriormente encontrar la matriz cinética de la teoría.

4.1. DESCOMPOSICIÓN SOBRE LA HIPERSUPERFICIE

El formalismo covariante 3+1 realiza una separación entre las derivadas temporales y las derivadas espaciales sin tener un sistema coordenado privilegiado. A continuación, se implementa este formalismo para descomponer la derivada covariante de un vector. Para tal fin, se tiene un vector B que pertenece al espacio tangente a la variedad $\mathcal{T}_M$. La evolución temporal de la proyección normal y paralela a la hipersuperficie se define como ⁷⁰

$$\dot{B}_* = t^a \nabla_a B_* \quad \dot{\hat{B}}_b = \gamma_b^a \mathcal{L}_t \hat{B}_a = \gamma_b^a (t^c \nabla_c \hat{B}_a + \hat{B}_c \nabla_b t^c), \quad (111)$$

⁷⁰ É. GOURGOULHON. *3+1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity*. Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2012.

donde $B_* = n_a * B^a$ es proyección normal a la hipersuperficie, $\hat{B}^a = \gamma_b^a B^b$ es la proyección paralela a la hipersuperficie, γ_a^b es el operador proyección, $\mathcal{L}_t$ es la derivada de Lie a lo largo de t y t^α es el vector base asociado a la coordenada temporal. Un tensor de segundo orden $L_{ab} \in \mathcal{T}_M$, en el formalismo 3+1, se escribe como

$$L_{ab} = \hat{L}_{ab} - n_b \hat{M}_a - n_a \hat{Q}_b + n_a n_b Y, \quad (112)$$

donde $\hat{M}, \hat{Q}, \hat{L}_{ab}$ pertenecen al espacio tangente de la hipersuperficie y Y es una función escalar que pertenece a la variedad M . De esta manera se tienen tres tipos de proyecciones diferentes: proyección total sobre la hipersuperficie dada por $\hat{L}_{ab}$, proyección total sobre el vector normal a la hipersuperficie Y y proyecciones mixtas $\hat{M}, \hat{Q}$.

4.1.1. Proyección total sobre la hipersuperficie Para encontrar la proyección total sobre la hipersuperficie, se aplica dos veces el operador proyector $\vec{\gamma}$ sobre (112). En nuestro caso, el tensor de segundo orden es $L_{ab} = \nabla_a A_b = \nabla_b A_a$. De esta manera, se tiene que

$$\begin{aligned} \gamma_a^c \gamma_b^d \nabla_c A_d &= \gamma_a^c \gamma_b^d \hat{L}_{cd} - \gamma_a^c \gamma_b^d n_d \hat{M}_c - \gamma_a^c \gamma_b^d n_c \hat{Q}_d + \gamma_a^c \gamma_b^d n_c n_d Y \\ \gamma_a^c \gamma_b^d \nabla_c \hat{A}_d - \gamma_a^c \gamma_b^d \nabla_c A_* n_d &= \hat{L}_{ab} \\ D_a \hat{A}_b + A_* K_{ab} &= \hat{L}_{ab}. \end{aligned} \quad (113)$$

De la primera a la segunda línea, en el miembro derecho, se utilizan las propiedades $\gamma_a^c n_c = 0$, y $\gamma_a^c \gamma_b^d \hat{L}_{cd} = \hat{L}_{ab}$. En el miembro izquierdo: $\hat{A}_a = A_a + n_a A_*$. De la segunda a la tercera línea se utiliza $\gamma_a^c \gamma_b^d \nabla_c n_d = -K_{ab}$, donde K_{ab} es el tensor de curvatura extrínseco, y $\gamma_a^c \gamma_b^d \nabla_c \hat{A}_d = D_a \hat{A}_b$, donde D es la derivada covariante en la hipersuperficie.

4.1.2. Proyección total sobre el vector normal a la hipersuperficie De una forma similar a la realizada anteriormente, se proyecta la ecuación (112) en dirección del vector normal de la hipersuperficie, quedando

$$\begin{aligned}
n^a n^b \nabla_a A_b &= n^a n^b \hat{L}_{ab} - n^a n^b n_b \hat{M}_a - n^a n^b n_a \hat{Q}_b + n^a n^b n_a n_b Y \\
n^a n^b \nabla_a A_b &= Y \\
n^a \nabla_a A_* - n^a A_b \nabla_a n^b &= Y \\
\left(\frac{t^a - \beta^a}{N} \right) \nabla_a A_* - A_b a^b &= Y \\
\frac{\dot{A}_*}{N} - \frac{\beta^a D_a}{N} A_* - \hat{A}_b a^b &= Y.
\end{aligned} \tag{114}$$

De la primera a la segunda línea se utiliza el hecho de que el producto interno entre cualquier vector que pertenezca al espacio tangente de la hipersuperficie y el vector normal a ésta es cero, es decir, $\hat{M}_a n^a = 0$. De la segunda línea a la tercera se utiliza la definición de A_* . De la tercera a la cuarta línea se utiliza la definición del vector de corrimiento⁷¹. Además, se introduce la aceleración para un observador euleriano⁷¹, es decir, $a^b = n^a \nabla_a n^b$. En la última línea se utiliza la evolución temporal asociada a A_* , junto con $\beta^a D_a = \beta^a \nabla_a$ y $A_b a^b = \hat{A}_b a^b$.

4.1.3. Proyecciones mixtas Por último se debe proyectar sobre la ecuación (112) una vez en dirección normal y otra vez sobre la hipersuperficie. Este caso se divide en dos tipos de proyecciones:

⁷¹ Es un observador para el cual la cuadrivelocidad corresponde al vector normal a la hipersuperficie.

■ Proyección $\gamma_c^a n^b$

$$\begin{aligned}
\gamma_c^a n^b \nabla_a A_b &= \gamma_c^a n^b \hat{L}_{ab} - \gamma_c^a n^b n_b \hat{M}_a - \gamma_c^a n^b n_a \hat{Q}_b + \gamma_c^a n^b n_a n_b Y \\
\gamma_c^a \nabla_a A_* - \gamma_c^a A_b \nabla_a n^b &= \hat{M}_c \\
D_c A_* - \gamma_c^a \hat{A}^b \nabla_a n_b &= \hat{M}_c \\
D_c A_* + \gamma_c^a \hat{A}^b K_{ab} &= \hat{M}_c \\
D_c A_* + \hat{A}^b K_{cb} &= \hat{M}_c
\end{aligned} \tag{115}$$

De la primera a la segunda línea, en el miembro derecho, se utiliza $n^b \hat{L}_{ab} = 0$, $\gamma_c^a n^a = 0$ y en el miembro izquierdo la definición de A_* . De la segunda a la tercera línea $\gamma_c^a \nabla_a = D_c$ y $n_b \nabla_a n_b = 0$. La antepenúltima línea es construída a partir de la propiedad $\gamma_c^a n^a = 0$. En la última línea se utiliza el hecho de que el tensor de curvatura extrínseco pertenece a la hipersuperficie, por lo tanto, se tiene $\gamma_c^a K_{ab} = K_{cb}$.

■ Proyección $\gamma_d^b n^a$

$$\begin{aligned}
\gamma_d^b n^a \nabla_a A_b &= \gamma_d^b n^a \hat{L}_{ab} - \gamma_d^b n^a n_b \hat{M}_a - \gamma_d^b n^a n_a \hat{Q}_b + \gamma_d^b n^a n_a n_b Y \\
\gamma_d^b \nabla_b A_* - \gamma_d^b A_a \nabla_b n^a &= \hat{Q}_d \\
D_d A_* - \gamma_d^b \hat{A}^a \nabla_b n_a &= \hat{Q}_d \\
D_d A_* + \gamma_d^b \hat{A}^a K_{ba} &= \hat{Q}_d \\
D_d A_* + \hat{A}^a K_{da} &= \hat{Q}_d
\end{aligned} \tag{116}$$

Análogamente al subcaso anterior, cada línea tiene un desarrollo similiar a (115), solamente se añade la propiedad $\nabla_a A_b = \nabla_b A_a$ para encontrar la segunda línea.

4.2. LAGRANGIANO CINÉTICO

La parte cinética del Lagrangiano de la teoría DHOST cuadrática posee información acerca de la evolución temporal del campo ϕ y de la métrica inducida γ_{ab} . Sin embargo, no todos los elementos de la derivada covariante en el formalismo covariante 3+1 dado en (112) contribuyen a la evolución temporal. Reescribiendo la derivada covariante como:

$$\begin{aligned} \nabla_a A_b = & D_a \hat{A}_b + A_* K_{ab} - n_b \left(D_a A_* + \hat{A}^c K_{ac} \right) \\ & - n_a \left(D_b A_* + \hat{A}^c K_{cb} \right) + n_a n_b \left(\frac{\dot{A}_*}{N} - \frac{\beta^a D_a}{N} A_* - \hat{A}_b a^b \right). \end{aligned} \quad (117)$$

De la expresión anterior, se ve que los términos relevantes son aquéllos que dependen de $\dot{A}_*$, y el tensor de curvatura extrínseco K_{ab} ⁷² (el cual da información de la evolución temporal de la métrica inducida). No aparece la evolución temporal del vector sobre la hipersuperficie porque se puede eliminar utilizando la relación $\hat{A}_b = D_b(A_* t^c)$. Por tal motivo, los términos relevantes en (117) se agrupan como

$$(\nabla_a A_b)_{cin} = A_* K_{ab} - n_b \hat{A}^c K_{ac} - n_a \hat{A}^c K_{cb} + \frac{n_a n_b}{N} \dot{A}_*. \quad (118)$$

Debido a que el tensor de curvatura extrínseco es simétrico, la ecuación (118) se puede escribir en una forma equivalente como sigue:

$$(\nabla_a A_b)_{cin} = \lambda_{ab} \dot{A}_* + \Lambda_{ab}^{cd} K_{cd}, \quad (119)$$

donde

$$\lambda_{ab} = \frac{n_a n_b}{N} \quad \Lambda_{ab}^{cd} = A_* \gamma_{(a}^c \gamma_{b)}^d - 2n_{(a} \gamma_{b)}^{(c} \hat{A}^{d)}. \quad (120)$$

⁷² Una forma de escribir el tensor de curvatura extrínseco es $K_{ab} = \frac{1}{2N} (\dot{\gamma}_{ab} - D_a \beta_b - D_b \beta_a)$.

Por lo tanto, la parte cinética que surge del lagrangiano general (84), es

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{cin}^{(\phi)} &= C^{abcd} \nabla_a A_b \nabla_c A_d \\
&= C^{abcd} \left(\lambda_{ab} \dot{A}_* + \Lambda_{ab}^{ef} K_{ef} \right) \left(\lambda_{cd} \dot{A}_* + \Lambda_{cd}^{hi} K_{hi} \right) \\
&= C^{abcd} \dot{A}_*^2 \lambda_{ab} \lambda_{cd} + 2C^{abcd} \lambda_{ab} \Lambda_{cd}^{hi} K_{hi} \dot{A}_* + C^{abcd} \Lambda_{ab}^{ef} \Lambda_{cd}^{hi} K_{ef} K_{hi}. \quad (121)
\end{aligned}$$

Una forma alternativa de escribir la anterior expresión se encuentra introduciendo una función escalar $\mathcal{A}$, un tensor de segundo orden $\mathcal{B}^{hi}$, y un tensor de cuarto orden $\mathcal{K}^{efhi}$. Así el Lagrangiano cinético está dado por

$$\mathcal{L}_{cin}^{(\phi)} = \mathcal{A} \dot{A}_*^2 + 2\mathcal{B}^{hi} K_{hi} \dot{A}_* + \mathcal{K}^{efhi} K_{ef} K_{hi}. \quad (122)$$

El primer coeficiente del Lagrangiano cinético se escribe como

$$\begin{aligned}
\mathcal{A} &= C^{abcd} \lambda_{ab} \lambda_{cd} \quad (123) \\
&= \left(\frac{1}{2} \alpha_1 (g^{ad} g^{bc} + g^{ac} g^{bd}) + \alpha_2 g^{ab} g^{cd} + \frac{1}{2} \alpha_3 (g^{ab} \phi^c \phi^d + g^{cd} \phi^a \phi^b) \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \alpha_4 (g^{ad} \phi^c \phi^b + g^{bc} \phi^a \phi^d + g^{ac} \phi^b \phi^d + g^{bd} \phi^a \phi^c) + \alpha_5 \phi^a \phi^b \phi^c \phi^d \right) \frac{n_a n_b n_c n_d}{N} \\
&= \frac{1}{N^2} (\alpha_1 + \alpha_2 - [\alpha_3 + \alpha_4] A_*^2 + \alpha_5 A_*^4), \quad (124)
\end{aligned}$$

Entre tanto, el coeficiente asociado con el producto mixto entre $\dot{A}_*$ y el tensor de curvatura extrínseco K_{ab} se escribe como

$$\begin{aligned}
\mathcal{B}^{hi} &= C^{abcd} \lambda_{ab} \Lambda_{cd}^{hi} \quad (125) \\
&= \left(\frac{1}{2} \alpha_1 (g^{ad} g^{bc} + g^{ac} g^{bd}) + \alpha_2 g^{ab} g^{cd} + \frac{1}{2} \alpha_3 (g^{ab} \phi^c \phi^d + g^{cd} \phi^a \phi^b) + \alpha_5 \phi^a \phi^b \phi^c \phi^d \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{4} \alpha_4 (g^{ad} \phi^c \phi^b + g^{bc} \phi^a \phi^d + g^{ac} \phi^b \phi^d + g^{bd} \phi^a \phi^c) \right) \frac{n_a n_b}{N} \left(A_* \gamma_{(c}^h \gamma_{d)}^i - 2n_{(c} \gamma_{d)}^{(h} \hat{A}^{i)} \right) \\
&= \frac{A_*}{2N} (2\alpha_2 - \alpha_3 A_*^2) \gamma^{hi} - \frac{A_*}{2N} (\alpha_3 + 2\alpha_4 - \alpha_5 A_*^2) \hat{A}^h \hat{A}^i, \quad (126)
\end{aligned}$$

el cual se puede reescribir introduciendo dos funciones escalares λ_1 y λ_2 de la siguiente manera:

$$\mathcal{B}^{hi} = \lambda_1 \gamma^{hi} + \lambda_2 \hat{A}^h \hat{A}^i, \quad (127)$$

donde

$$\lambda_1 = \frac{A_*}{2N} (2\alpha_2 - \alpha_3 A_*^2), \quad \lambda_2 = -\frac{A_*}{2N} (\alpha_3 + 2\alpha_4 - \alpha_5 A_*^2).$$

Por último, el coeficiente cinético asociado a la segunda potencia del tensor de curvatura es

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{efhi} &= C^{abcd} \Lambda_{ab}^{ef} \Lambda_{cd}^{hi} \\ &= \left(\frac{1}{2} \alpha_1 (g^{ad} g^{bc} + g^{ac} g^{bd}) + \alpha_2 g^{ab} g^{cd} + \frac{1}{2} \alpha_3 (g^{ab} \phi^c \phi^d + g^{cd} \phi^a \phi^b) \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} \alpha_4 (g^{ad} \phi^c \phi^b + g^{bc} \phi^a \phi^d + g^{ac} \phi^b \phi^d + g^{bd} \phi^a \phi^c + \alpha_5 \phi^a \phi^b \phi^c \phi^d) \right) * \\ &\quad * \left(A_* \gamma_{(a}^e \gamma_{b)}^f - 2n_{(a} \gamma_{b)}^{(e} \hat{A}^f) \right) \left(A_* \gamma_{(c}^h \gamma_{d)}^i - 2n_{(c} \gamma_{d)}^{(h} \hat{A}^i) \right) \\ &= \alpha_1 A_*^2 \gamma^{f(h} \gamma^{i)e} - \alpha_1 \left(\gamma^{e(h} \hat{A}^i) \hat{A}^f + \gamma^{f(h} \hat{A}^i) \hat{A}^e \right) + \alpha_2 A_*^2 \gamma^{ef} \gamma^{hi} \hat{A}^e \\ &\quad - \frac{\alpha_3}{2} A_*^2 \left(\hat{A}^i \hat{A}^h \gamma^{ef} + \hat{A}^e \hat{A}^f \gamma^{hi} \right) - \alpha_4 \hat{A}^e \hat{A}^f \hat{A}^h \hat{A}^i + \alpha_5 A_*^2 \hat{A}^e \hat{A}^f \hat{A}^h \hat{A}^i. \end{aligned} \quad (128)$$

Si se definen las siguientes funciones

$$\kappa_1 = \alpha_1 A_*^2, \quad \kappa_2 = \alpha_2 A_*^2, \quad \kappa_3 = -\alpha_3 A_*^2, \quad \kappa_4 = -2\alpha_1, \quad \kappa_5 = \alpha_5 A_*^2 - \alpha_4, \quad (129)$$

se obtiene

$$\begin{aligned} \mathcal{K}^{efhi} &= \kappa_1 \gamma^{e(h} \gamma^{i)f} + \kappa_2 \gamma^{ef} \gamma^{hi} + \frac{1}{2} \kappa_3 \left(\hat{A}^i \hat{A}^h \gamma^{ef} + \hat{A}^e \hat{A}^f \gamma^{hi} \right) \\ &\quad + \frac{1}{2} \kappa_4 \left(\gamma^{e(h} \hat{A}^i) \hat{A}^f + \gamma^{f(h} \hat{A}^i) \hat{A}^e \right) + \kappa_5 \hat{A}^e \hat{A}^f \hat{A}^h \hat{A}^i. \end{aligned} \quad (130)$$

Hasta el momento, no se ha determinado la contribución del término de Einstein-Hilbert a la parte cinética del lagrangiano. Para poder establecer esta contribución

es necesario que el escalar de Ricci sea proyectado usando el formalismo covariante 3+1. Esta descomposición del escalar de Ricci se conoce como la *relación escalar de Gauss* ⁷⁰ y se escribe como

$${}^{(4)}R = R + K^2 + K_{ab}K^{ab} - \frac{2}{N}\mathcal{L}_m K - \frac{2}{N}D_i D^i N, \quad (131)$$

donde ${}^{(4)}R$ es el escalar de Ricci en cuatro dimensiones, R es el escalar de Ricci asociado a la hipersuperficie, K es el escalar de curvatura extrínseco, K_{ab} es el tensor de curvatura extrínseco, N es la función lapso, D_i es la derivada covariante en la hipersuperficie, y $\mathcal{L}_m K$ representa la evolución temporal del escalar de curvatura extrínseco. Utilizando la relación escalar de Gauss en (84), la parte gravitacional quedará de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} f [R - K^2 + K_{ab}K^{ab}] + 2\nabla_c f (Kn^c + a^c) = & fR + [f\gamma^{c(a}\gamma^{b)d} - f\gamma^{ab}\gamma^{cd}] K_{cd}K_{ab} \\ & + 2 \left[2f_X K \hat{A}^a \nabla_a A_* - \frac{2f_X K A_* \dot{A}_*}{N} \right. \\ & + \frac{2f_X K A_* \beta^c \nabla_c A_*}{N} \\ & + f_X (\hat{A}^c \hat{A}^d \gamma^{ab} + \hat{A}^a \hat{A}^b \gamma^{cd}) K_{ab}K_{cd} \\ & \left. + 2f_X A^a A_{bc}a^b + f_\phi A^c (Kn^c + a^c) \right] \end{aligned} \quad (132)$$

donde $f_X = \frac{\partial f}{\partial X}$ y $f_\phi = \frac{\partial f}{\partial \phi}$. Para determinar la parte cinética, sólo se toman aquellos términos que estén acompañados del producto entre $\dot{A}_*$, y K , además de la segunda potencia del tensor de curvatura extrínseco ($K_{cd}K_{ab}$). De esta manera, la contribución gravitacional al Lagrangiano cinético viene dada por

$$\begin{aligned} [f [R - K^2 + K_{ab}K^{ab}] + 2\nabla_c f (Kn^c + a^c)]_{cin} = & -\frac{4f_X K A_* \dot{A}_*}{N} + \left[2f_X (\hat{A}^c \hat{A}^d \gamma^{ab} + \hat{A}^a \hat{A}^b \gamma^{cd}) \right. \\ & \left. + [f\gamma^{c(a}\gamma^{b)d} - f\gamma^{ab}\gamma^{cd}] K_{ab}K_{cd} \right] \end{aligned} \quad (133)$$

Introduciendo los tensores $\mathcal{B}_{grav}^{ab}$ y $\mathcal{K}_{grav}^{abcd}$, la contribución gravitacional a la parte cinética es

$$\left[f \left[R - K^2 + K_{ab}K^{ab} \right] + 2\nabla_c f \left(K n^c + a^c \right) \right]_{cin} = -2\mathcal{B}_{grav}^{ab} A_* \gamma^{ab} + \mathcal{K}_{grav}^{abcd} K_{ab} K_{cd}, \quad (134)$$

donde

$$\mathcal{B}_{grav}^{ab} = \frac{2f_X \gamma^{ab} A_*}{N}, \quad (135)$$

y

$$\mathcal{K}_{grav}^{abcd} = \xi_1 \gamma^{c(a} \gamma^{b)d} + \xi_2 \gamma^{ab} \gamma^{cd} + \frac{1}{2} \xi_3 \left(\hat{A}^c \hat{A}^d \gamma^{ab} + \hat{A}^a \hat{A}^b \gamma^{cd} \right), \quad (136)$$

con

$$\xi_1 = f, \quad \xi_2 = -f, \quad \xi_3 = 4f_X. \quad (137)$$

Los coeficientes totales asociados a la parte cinética del Lagrangiano (84) son

$$\tilde{\mathcal{B}}^{ab} = \mathcal{B}^{ab} + \mathcal{B}_{grav}^{ab}, \quad \tilde{\mathcal{K}}^{abcd} = \mathcal{K}^{abcd} + \mathcal{K}_{grav}^{abcd}. \quad (138)$$

Estos tensores se pueden descomponer como en (127) y (128). Así, se obtienen nuevos coeficientes

$$\tilde{\lambda}_1 = \frac{2f_X A_*}{N} + \frac{A_*}{2N} (2\alpha_2 - \alpha_3 A_*^2), \quad (139)$$

$$\tilde{\lambda}_2 = \lambda_2 = -\frac{A_*}{2N} (\alpha_3 + 2\alpha_4 - \alpha_5 A_*^2), \quad (140)$$

$$\tilde{\kappa}_1 = f + \alpha_1 A_*^2, \quad (141)$$

$$\tilde{\kappa}_2 = -f + \alpha_2 A_*^2, \quad (142)$$

$$\tilde{\kappa}_3 = -\alpha_3 A_*^2 + 4f_X, \quad (143)$$

$$\tilde{\kappa}_4 = \kappa_4 = -2\alpha_1, \quad (144)$$

$$\tilde{\kappa}_5 = \kappa_5 = \alpha_5 A_*^2 - \alpha_4. \quad (145)$$

4.3. CONDICIÓN DE DEGENERACIÓN

Como se mencionó en el modelo de juguete en la sección (3.3), para encontrar las ligaduras necesarias para la reducción del orden en las ecuaciones de campo, es crucial encontrar el determinante de la matriz cinética e igualarlo a cero. En esta sección, se muestra una forma de encontrar la matriz cinética asociada a la teoría DHOST cuadrática.

4.3.1. Matriz cinética y condiciones de degeneración Como se hizo en (93), es posible escribir la parte cinética del lagrangiano como

$$\mathcal{L}_{cin} = \left(\dot{A}_* K_{ab} \right) \mathcal{M} \begin{pmatrix} \dot{A}_* \\ K_{cd} \end{pmatrix} \quad (146)$$

con

$$\mathcal{M} = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & \tilde{\mathcal{B}}^{cd} \\ \tilde{\mathcal{B}}^{ab} & \tilde{\mathcal{K}}^{abcd} \end{pmatrix}. \quad (147)$$

La matriz $\mathcal{M}$ es denominada matriz Hessiana o cinética. Si se toma el caso particular de tener una métrica no dinámica, el tensor de curvatura extrínseco se haría idénticamente cero (porque éste da información de la evolución temporal del tensor métrico). Entonces, la parte cinética del lagrangiano se verá reducida a

$$\mathcal{L}_{cin} = \mathcal{A} \dot{A}_*^2. \quad (148)$$

Como se busca una teoría degenerada, la parte cinética debe de ser cero. Esto solamente se cumple si $\mathcal{A} = 0$. Por lo tanto, se puede concluir que

$$\alpha_1 + \alpha_2 = 0, \quad \alpha_3 + \alpha_4 = 0, \quad \alpha_5 = 0. \quad (149)$$

Como se observó en la sección 3.2, estas condiciones las cumplen tanto el Lagrangiano cuártico de Hondeski como el Lagrangiano cuártico más allá de Horndeski.

Se pasa ahora al caso general de una métrica dinámica. En este caso, se tiene que la matriz $\mathcal{M}$ dada en (147) debe ser degenerada. Es decir, debe existir un valor propio igual a cero que tiene asociado un vector propio Y diferente de cero, tal que

$$\mathcal{M}Y = 0. \quad (150)$$

Para nuestro caso, el vector Y se define como

$$Y = (v_0, V_{cd}). \quad (151)$$

Entonces la ecuación de valores propios dada en 150 es reescrita como

$$\begin{pmatrix} \mathcal{A} & \tilde{\mathcal{B}}^{cd} \\ \tilde{\mathcal{B}}^{ab} & \tilde{\mathcal{K}}^{abcd} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ V_{cd} \end{pmatrix} = 0, \quad (152)$$

es decir,

$$\mathcal{A}v_0 + \tilde{\mathcal{B}}^{cd}V_{cd} = 0 \quad \tilde{\mathcal{B}}^{ab}v_0 + \tilde{\mathcal{K}}^{abcd}V_{cd} = 0. \quad (153)$$

La primera ecuación es una ecuación escalar y la segunda es tensorial de segundo orden. Debido a que V_{cd} es un tensor espacialmente simétrico, se puede escribir de la siguiente manera

$$V_{cd} = v_1 \gamma_{cd} + v_2 \hat{A}_c \hat{A}_d. \quad (154)$$

Usando esta descomposición de V_{cd} en la primera ecuación de (153), se tiene que

$$\mathcal{A}v_0 + \left(3\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 \hat{A}^2\right) v_1 + \left(\tilde{\lambda}_1 \hat{A}^2 + \tilde{\lambda}_2 (\hat{A}^2)^2\right) v_2 = 0 \quad (155)$$

con $\hat{A}^2 = X + A_*^2$. Para la segunda ecuación de (153) se obtiene

$$\left[\tilde{\kappa}_1 v_1 + 3\tilde{\kappa}_2 v_1 + \tilde{\lambda}_1 v_0 + \frac{1}{2}\tilde{\kappa}_3 v_1 \hat{A}^2 + \tilde{\kappa}_2 v_2 \hat{A}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\kappa}_3 v_2 (\hat{A}^2)^2 \right] \gamma^{cd} + \left[\frac{3}{2}\tilde{\kappa}_3 v_1 + \kappa_4 v_1 + \kappa_5 v_1 \hat{A}^2 + \tilde{\lambda}_2 v_0 + \frac{1}{2}\tilde{\kappa}_1 v_2 + \frac{1}{2}\tilde{\kappa}_3 \hat{A}^2 + \kappa_4 v_2 \hat{A}^2 + \kappa_5 (\hat{A}^2)^2 \right] \hat{A}^c \hat{A}^d = 0 \quad (156)$$

Debido a que el tensor métrico γ^{cd} y $\hat{A}_c \hat{A}_d$ forman parte de la base de tensores simétricos (sobre la hipersuperficie) de dimensión dos, cada uno de los coeficientes que los acompañan deben ser cero. Por tal razón, se puede escribir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\tilde{\lambda}_1 v_0 + \left(\tilde{\kappa}_1 + 3\tilde{\kappa}_2 + \frac{1}{2}\kappa_3 \hat{A}^2 \right) v_1 + \left(\tilde{\kappa}_2 \hat{A}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\kappa}_3 (\hat{A}^2)^2 \right) v_2 = 0 \quad (157)$$

$$\tilde{\lambda}_2 v_0 + \left(\frac{3}{2}\tilde{\kappa}_3 + \kappa_4 + \kappa_5 \hat{A}^2 \right) v_1 + \left(\frac{1}{2}\tilde{\kappa}_1 + \frac{1}{2}\tilde{\kappa}_3 \hat{A}^2 + \kappa_4 \hat{A}^2 + \kappa_5 (\hat{A}^2)^2 \right) v_2 = 0. \quad (158)$$

Así, la forma matricial del sistema de ecuaciones descrito por (155), (157) y (158) queda de la forma

$$\mathcal{M}V = \begin{pmatrix} \mathcal{A} & 3\tilde{\lambda}_1 + \tilde{\lambda}_2 \hat{A}^2 & \tilde{\lambda}_1 \hat{A}^2 + \tilde{\lambda}_2 (\hat{A}^2)^2 \\ \tilde{\lambda}_1 & \tilde{\kappa}_1 + 3\tilde{\kappa}_2 + \frac{1}{2}\kappa_3 \hat{A}^2 & \tilde{\kappa}_2 \hat{A}^2 + \frac{1}{2}\tilde{\kappa}_3 (\hat{A}^2)^2 \\ \tilde{\lambda}_2 & \frac{3}{2}\tilde{\kappa}_3 + \kappa_4 + \kappa_5 \hat{A}^2 & \frac{1}{2}\tilde{\kappa}_1 + \frac{1}{2}\tilde{\kappa}_3 \hat{A}^2 + \kappa_4 \hat{A}^2 + \kappa_5 (\hat{A}^2)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = 0. \quad (159)$$

Imponiendo la condición de degeneración (i.e. $\det \mathcal{M} = 0$), se tiene

$$\det \mathcal{M} = D_0(X) + D_1(X)A_*^2 + D_2 A_*^4 = 0 \quad (160)$$

donde

$$D_0(X) = -4(\alpha_1 + \alpha_2)(-2f^2 - 8f_X^2 X^2 + fX(4f_X + 2\alpha_1 + X\alpha_4)) \quad (161)$$

$$\begin{aligned} D_1(X) = & 8f^2(\alpha_3 + \alpha_4) - 4X(16f_X^2 \alpha_2 - 4f_X \alpha_1(\alpha_1 + 5\alpha_2 + X\alpha_3) \\ & + \alpha_1(\alpha_1 + 3\alpha_2)(2\alpha_1 + X\alpha_4)) + f(-48f_X^2 + 4\alpha_1^2 + 16\alpha_1\alpha_2 + 16X\alpha_2\alpha_4 \\ & + f_X(2\alpha_1 - 4\alpha_2 - X\alpha_3) - 4X\alpha_1(3\alpha_3 + X\alpha_5) + X^2(\alpha_3^2 - 4\alpha_2\alpha_5)) \end{aligned} \quad (162)$$

$$\begin{aligned} D_2(X) = & -4\alpha_1^3 - 16f_X^2(\alpha_1 + 2\alpha_2) + 8f_X(2\alpha_1^2 + 4\alpha_1\alpha_2 + 2f\alpha_3 - X\alpha_1\alpha_3) \\ & + 4\alpha_1^2(-2\alpha_2 + X(\alpha_3 + X\alpha_5)) + 4f(-2f\alpha_5 + X(\alpha_3^2 - 4\alpha_2\alpha_5)) \\ & + \alpha_1(-8f\alpha_3 - 3X^2(\alpha_3^2 - 4\alpha_2\alpha_5)). \end{aligned} \quad (163)$$

Debido a que la ecuación (160) se debe cumplir para cualquier potencia de A_* , todos los coeficientes deben ser iguales a cero:

$$D_0(X) = 0, \quad D_1(X) = 0, \quad D_2(X) = 0. \quad (164)$$

Se concluye entonces que, para tener una teoría degenerada, siempre se deben cumplir simultáneamente las tres restricciones anteriormente presentadas. En la siguiente sección se utilizará la primera condición para obtener dos conjuntos distintos de teorías degeneradas.

4.4. CLASIFICACIÓN DE LA TEORÍA DHOST CUADRÁTICA

Debido a que la condición $D_0(X) = 0$ es la restricción más sencilla, ésta permite distinguir dos clases: clase I: $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$, clase II: $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$. De acuerdo con (149), el caso de una métrica no dinámica pertenece a la Clase I. A continuación se realiza un desarrollo detallado de cada una de las clases.

4.4.1. Clase I Como se puede observar en la ecuación (161), el criterio dado por esta clase hace que se satisfaga $D_0(X) = 0$. Imponiendo las condiciones dadas en (164) para $D_1(x)$ y $D_2(x)$, junto con la ligadura dada en esta clase, es posible encontrar algunas relaciones importante entre las funciones escalares α_i y f . Así, de $D_1(x) = 0$, se despeja α_4 de la siguiente manera:

$$\alpha_4 = \frac{1}{(8(f - X\alpha_2)^2)} \left[-8f^2\alpha_3 + 16X\alpha_2(4f_X^2 + 4f_X\alpha_2 + \alpha_2^2 + f_XX\alpha_3) + f(48f_X^2 + 12\alpha_2^2 - 12X\alpha_2\alpha_3 - X^2\alpha_3^2 + 8f_X(6\alpha_2 + X\alpha_3)) \right], \quad (165)$$

en tanto que, de la condición $D_2(x) = 0$, se despeja α_5 como se muestra a continuación:

$$\alpha_5 = \frac{1}{8(f + X\alpha_2)^2} \left((4f_X + 2\alpha_2 + X\alpha_3)(-4f_X\alpha_2 - 2\alpha_2^2 + 4f\alpha_3 + 3X\alpha_2\alpha_3) \right). \quad (166)$$

En ambas ecuaciones se observa que hay una dependencia con respecto a las funciones α_2 , α_3 , f . Por lo tanto, es posible concluir que para el Lagrangiano degenerado (84) existen sólo tres funciones arbitrarias.

4.4.2. Clase II En este caso, al igual que el anterior, se debe de garantizar que se satisfaga $D_0(X) = 0$. Por lo tanto, se debe cumplir que:

$$-2f^2 - 8f_X^2X^2 + fX(4f_X + 2\alpha_1 + X\alpha_4) = 0. \quad (167)$$

De esta condición se despeja α_4 , obteniéndose:

$$\alpha_4 = 2 \frac{f^2 - f\alpha_1X - 2ff_XX + 4f_X^2X^2}{fX^2}. \quad (168)$$

De otra parte, utilizando la restricción dada por $D_2(X) = 0$, se despeja α_5 como se muestra a continuación:

$$\alpha_5 = \frac{1}{8f^2 + 16f\alpha_2 X - 4\alpha_1(\alpha_1 + 3\alpha_2)X^2} \begin{bmatrix} -4\alpha_1^3 - 32\alpha_2 f_X^2 + 4f\alpha_3(4f_X + \alpha_3 X) \\ +\alpha_1^2(-8\alpha_2 + 16f_X + 4\alpha_3 X) \\ -\alpha_1(8f\alpha_3 - 32\alpha_2 f_X + 16f_X^2 \\ +8\alpha_3 f_X X + 3\alpha_3^2 X^2) \end{bmatrix}. \quad (169)$$

Posteriormente, se sustituyen dichos valores en $D_1(X) = 0$, generando la siguiente expresión:

$$(f - X\alpha_1)^2 (4f^2 - 4f_X X^2(\alpha_1 + 3\alpha_2) + fX(-4f_X + 2\alpha_1 + 8\alpha_2 + X\alpha_3)^2) = 0, \quad (170)$$

de donde es posible distinguir dos subclases. Estas subclases se explorarán a continuación.

Primera subclase Esta subclase se da para $f - X\alpha_1 = 0$. En este caso, α_1 toma el valor

$$\alpha_1 = \frac{f}{X}. \quad (171)$$

Haciendo uso de esta expresión, se encuentra

$$\alpha_4 = \frac{4(-ff_X X + 2f_X^2 X^2)}{fX^2}, \quad (172)$$

$$\alpha_5 = \frac{\begin{bmatrix} -4f^3 - 32f_X^2 X^3 \alpha_2 - 4f^2 X(-4f_X + 2\alpha_2 + X\alpha_3) \\ +fX^2(-16f_X^2 + X^2 \alpha_3^2 + 8f_X(4\alpha_2 + X\alpha_3)) \end{bmatrix}}{(4fX^3(f + X\alpha_2))}. \quad (173)$$

Estas dos últimas ecuaciones muestran que α_4 y α_5 son funciones escalares que se pueden obtener a partir de algunas relaciones algebraicas dadas entre f , α_2 y α_3 .

Segunda subclase La última subclase se obtiene cuando $4f^2 - 4f_X X^2(\alpha_1 + 3\alpha_2) + fX(-4f_X + 2\alpha_1 + 8\alpha_2 + X\alpha_3) = 0$. De una forma similar a la anterior, se despejan los valores de α_1, α_4 y α_5 :

$$\alpha_1 = -\frac{-4f^2 + 4ff_X X - 8fX\alpha_2 + 12f_X X^2\alpha_2 - fX^2\alpha_3}{2X(-f + 2f_X X)}, \quad (174)$$

$$\alpha_4 = \frac{6f^3 - 16f_X^3 X^3 + 4ff_X X^2(4f_X - 3\alpha_2) + f^2 X(-12f_X + 8\alpha_2 + X\alpha_3)}{fX^2(f - 2f_X X)}, \quad (175)$$

$$\alpha_5 = \frac{\left[4f^3 + f^2 X(4f_X - 8\alpha_2 - 3X\alpha_3) + 4ff_X X^2(2f_X + 5\alpha_2 + 2X\alpha_3) - 2f_X^2 X^3(4f_X + 6\alpha_2 + 3X\alpha_3) \right]}{fX^3(f - 2f_X X)}. \quad (176)$$

Como se puede observar, estas subclases dependen de tres funciones arbitrarias f , α_2 y α_3 . Estos resultados nos permiten concluir que la teoría propuesta en esta tesis de maestría sólo dependerá de tres funciones arbitrarias (independientemente del tipo de solución que se tome, ya sea la clase I o II). Siguiendo el razonamiento del modelo de juguete, es de esperarse que las ligaduras encontradas reduzcan el orden de las ecuaciones de evolución de la DHOST. Por consiguiente, cualquier grado de libertad extra tipo fantasma debe haber sido eliminado por la degeneración. Debido a que los grados de libertad fantasma están estrechamente ligados con la inestabilidad lineal en el Hamiltoniano, se puede concluir que nuestro procedimiento hace que (84) sea estable.

5. CONCLUSIONES

En esta tesis de Maestría se exploró la construcción de una teoría que corresponde a una extensión de la Relatividad General. Debido a la gran cantidad de propuestas de gravedad modificada que pueden existir, en este trabajo se utilizó un principio guía para tal construcción. Esta base se fundamenta en el teorema de Ostrogradsky y la necesidad de generar teorías autoconsistentes. Teniendo en cuenta los enunciados de dicho teorema (como se puede ver en la sección 1), se decidió omitir algunas de las hipótesis para evadir las implicaciones del mismo. En particular, se trabajó con la degeneración y se introdujo un campo escalar en la acción con un término que contiene derivadas de segundo orden. Los resultados de esta tesis y estudios anteriores sobre teorías escalar-tensor muestran que el uso de principios físicos y de autoconsistencia permiten encontrar un conjunto limitado de modificaciones a la gravedad de Einstein. A los resultados obtenidos en la construcción de este tipo de teorías se les puede hacer estudios adicionales para acotar aún más el espacio disponible de modificaciones. Además de las aplicaciones a problemas específicos, se pueden realizar tests de consistencia. Asumiendo estas extensiones como teorías efectivas, se pueden analizar las propiedades de Unitariedad (como se hace en ⁷³). Si se considera la modificación como una teoría fundamental, se pueden analizar propiedades de renormalizabilidad. Esta tesis, sin embargo, se enfoca en la construcción de la teoría. Las aplicaciones en Cosmología y el análisis de restricciones adicionales se dejan para futuros proyectos. En el presente texto se siguió una metodología similar a la descrita tanto en el modelo de juguete dado en

⁷³ Scott MELVILLE y NOLLER Johannes. “*Positivity in the Sky: Constraining dark energy and modified gravity from the UV*”. En: *Phys. Rev. D* 101.2 (2020), pág. 021502. DOI: 10.1103/Phys.Rev.D101.021502. arXiv: 1904.05874 [astro-ph.CO].

la sección 3.3 como en la mostrada en la referencia ³⁸. El modelo de juguete nos mostró que la condición de degeneración produce ligaduras que reducen el orden de las ecuaciones de evolución, evitando así la presencia de grados de libertad extra tipo fantasma.

Como se mencionó anteriormente, se determinaron las condiciones necesarias para que una teoría degenerada esté libre de inestabilidades de Ostrogradsky. Para llevar esto a cabo, se hizo inicialmente un estudio detallado del teorema de Ostrogradsky en el capítulo 1. Allí, se corroboró la estrecha relación que existe entre Lagrangianos no degenerados con dependencias de la segunda derivada o derivadas superiores y la existencia de Hamiltonianos inestables. Para evitar este tipo de inestabilidades fue necesario eliminar una de las hipótesis del teorema, la no degeneración, lo cual garantizó (como se vio en el modelo de juguete en la sección 3.3) tener una teoría saludable.

Por otra parte, la acción más general candidata a representar una teoría DHOST cuadrática en las segunda derivada covariante del campo escalar fue determinada en el capítulo 3. Para encontrarla, se tomó el Lagrangiano descrito en (84) donde se determinó la expresión para el tensor $C^{\mu\nu\rho\sigma}$ de forma explícita. Esta acción hallada representa un conjunto de Lagrangianos que contiene como casos particulares los términos cuárticos de Horndeski y más allá de Horndeski.

Otro aspecto importante obtenido en el desarrollo de esta tesis fue haber encontrado de forma explícita las condiciones de degeneración. Estas condiciones fueron determinadas en el capítulo 4 utilizando una metodología similar a la expuesta para el modelo de juguete (ver. sec 3.3). Para tal fin, se usó la descomposición $3 + 1$ de la derivada covariante del campo A_μ en dirección normal y tangente a la hipersuperficie (ver sec. 4.1). De esta forma, se encontró la matriz cinética $\mathcal{M}$, la cuál brinda información sobre la parte cinética del Lagrangiano total. La condición de degeneración (matemáticamente escrita como $\det(\mathcal{M}) = 0$) impuesta condujo a diferentes

clases de teorías. Si bien estos conjuntos obtenidos hacen parte de una extensión degenerada de la teoría de Einstein, los subconjuntos no se comunican entre sí y se consideran como candidatos independientes de gravedad modificada.

Se realizó un análisis minucioso y clasificación de las diferentes clases de teorías DHOST que se pueden obtener a partir de la condición $D_0 = 0$. En particular, se encontraron dos conjuntos distintos de teorías degeneradas (Clase I: $\alpha_1 + \alpha_2 = 0$ y Clase II: $\alpha_1 + \alpha_2 \neq 0$). El desarrollo de estas clases se hizo en la sección 4.4, en donde se observó que en una teoría DHOST cuadrática existe solamente una dependencia con respecto a tres funciones arbitrarias de ϕ y $X = \nabla_\mu \phi \nabla^\mu \phi$.

Para un trabajo posterior, se motiva seguir explorando el marco de las teorías escalar-tensor no degeneradas a través del análisis Hamiltoniano ³⁶. Como se observó en caso del modelo de juguete de la sección 1.4, el análisis Hamiltoniano permitió realizar el conteo de grados de libertad y, de esta manera, establecer si una teoría es saludable.

BIBLIOGRAFÍA

ABBOTT, B. P. y col. “*Observation of Gravitational Waves from a Binary Black Hole Merger*”. En: *Physical Review Letters* 116 (2016), pág. 061102. DOI: 10.1103/PhysRevLett.116.061102. arXiv: 1602.03837 [gr-qc] (vid. pág. 13).

ARAI, Shun y NISHIZAWA Atsushi. “*Generalized framework for testing gravity with gravitational-wave propagation. II. Constraints on Horndeski theory*”. En: *Phys. Rev. D* 97 (10 2018), pág. 104038. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.104038 (vid. pág. 47).

BABICHEV, Eugeny y ESPOSITO-FARÈSE Gilles. “*Cosmological self-tuning and local solutions in generalized Horndeski theories*”. En: *Phys. Rev. D* 95 (2 2017), pág. 024020. DOI: 10.1103/PhysRevD.95.024020 (vid. pág. 47).

BEN ACHOUR, Jibril, LANGLOIS David y NOUI Karim. “*Degenerate higher order scalar-tensor theories beyond Horndeski and disformal transformations*”. En: *Physical Review D* 93 (2016), pág. 124005. DOI: 10.1103/PhysRevD.93.124005. arXiv: 1602.08398 [gr-qc] (vid. pág. 18).

BERTI, Emanuele y col. “*Testing general relativity with present and future astrophysical observations*”. En: *Classical and Quantum Gravity* 32 (2015), pág. 243001. DOI: 10.1088/0264-9381/32/24/243001 (vid. pág. 39).

BERTONE, Gianfranco y HOOPER Dan. “*History of dark matter*”. En: *Rev. Mod. Phys.* 90 (4 2018), pág. 045002. DOI: 10.1103/RevModPhys.90.045002 (vid. pág. 14).

BRANS, C. y R. H. DICKE. “*Mach's Principle and a Relativistic Theory of Gravitation*”. En: *Phys. Rev.* 124 (3 1961), pág. 925. DOI: 10.1103/PhysRev.124.925 (vid. págs. 15, 41).

CARROLL, S.M. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019 (vid. págs. 84, 87).

CHAUVINEAU, Bertrand, RODRIGUES Davi C. y FABRIS Júlio C. “*Scalar-tensor theories with an external scalar*”. En: *General Relativity and Gravitation* 48 (2016), pág. 80. DOI: 10.1007/s10714-016-2075-9 (vid. pág. 15).

CLEMENCE, G. M. “*Relativity Effect in Planetary Motions*”. En: *Reviews of Modern Physics* 19 (1947), pág. 361. DOI: 10.1103/RevModPhys.19.361 (vid. pág. 13).

CLIFTON, Timothy y col. “*Modified Gravity and Cosmology*”. En: *Physics Reports* 513 (2012), pág. 1. DOI: 10.1016/j.physrep.2012.01.001. arXiv: 1106.2476 [astro-ph.CO] (vid. pág. 14).

CRISOSTOMI, Marco y all. “*Horndeski: beyond, or not beyond?*” En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 1603 (2016), pág. 038. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/03/038 (vid. pág. 18).

CRISOSTOMI, Marco, Kazuya KOYAMA y Gianmassimo TASINATO. “*Extended scalar-tensor theories of gravity*”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 1604 (2016), pág. 044. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/04/044 (vid. págs. 15, 18, 39).

CRISOSTOMI, Marco, KLEIN Remko y ROEST Diederik. “*Higher Derivative Field Theories: Degeneracy Conditions and Classes*”. En: *Journal of High Energy Physics* 1706 (2017), pág. 124. DOI: 10.1007/JHEP06(2017)124. arXiv: 1703.01623 [hep-th] (vid. pág. 18).

DE URRIES, F.J. y J. JUELVE. “*Ostrogradski formalism for higher derivative scalar field theories*”. En: *J. Phys. A* 31 (1998), pág. 6949. DOI: 10.1088/0305-4470/31/33/006. arXiv: hep-th/9802115 (vid. pág. 20).

DEFFAYET, C., S. DESER y G. ESPOSITO-FARÈSE. “*Generalized Galileons: All scalar models whose curved background extensions maintain second-order field equations and stress tensors*”. En: *Physical Review D* 80 (6 2009), pág. 064015. DOI: 10.1103/PhysRevD.80.064015 (vid. págs. 16, 44).

DEFFAYET, C., G. ESPOSITO-FARÈSE y A. VIKMAN. “*Covariant Galileon*”. En: *Physical Review D* 79 (2009), pág. 084003. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.084003. arXiv: 0901.1314 [hep-th] (vid. págs. 16, 43, 44).

DEFFAYET, C. y col. “*From k -essence to generalized Galileons*”. En: *Physical Review D* 84 (6 2011), pág. 064039. DOI: 10.1103/PhysRevD.84.064039 (vid. págs. 16, 44).

DREES, Manuel. “*Dark Matter Theory*”. En: *PoS ICHEP2018* (2019), pág. 730. DOI: 10.22323/1.340.0730. arXiv: 1811.06406 [hep-ph] (vid. pág. 14).

EINSTEIN, A. “*Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie*”. En: *Annalen der Physik* 354 (1916), pág. 769. DOI: 10.1002/andp.19163540702 (vid. pág. 13).

FIERZ, M. “*On the physical interpretation of P.Jordan’s extended theory of gravitation*”. En: *Helv. Phys. Acta* 29 (1956), pág. 128 (vid. pág. 41).

FUJII, Yasunori y MAEDA Kei-ichi. *The Scalar-Tensor Theory of Gravitation*. Cambridge Monographs on Mathematical Physics. Cambridge University Press, 2003. DOI: 10.1017/CB09780511535093 (vid. pág. 41).

GLEYZES, Jérôme y col. “*New class of consistent scalar-tensor theories*”. En: *Phys. Rev. Lett.* 114 (2015), pág. 211101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.114.211101. arXiv: 1404.6495 [hep-th] (vid. pág. 45).

GOURGOULHON, É. *3+1 Formalism in General Relativity: Bases of Numerical Relativity*. Lecture Notes in Physics. Springer Berlin Heidelberg, 2012 (vid. págs. 56, 63, 84).

GUTH, Alan H. “*Inflationary universe: A possible solution to the horizon and flatness problems*”. En: *Physical Review D* 23 (2 1981), pág. 347. DOI: 10.1103/PhysRevD.23.347 (vid. pág. 14).

HORNDESKI, Gregory Walter. “*Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space*”. En: *International Journal of Theoretical Physics* 10 (1974), pág. 363. DOI: 10.1007/BF01807638 (vid. págs. 17, 42).

HUTERER, Dragan y SHAFER Daniel L. “*Dark energy two decades after: Observables, probes, consistency tests*”. En: *Reports on Progress in Physics* 81.1 (2018), pág. 016901. DOI: 10.1088/1361-6633/aa997e. arXiv: 1709.01091 [astro-ph.CO] (vid. pág. 14).

ITSKOV, M. *Tensor Algebra and Tensor Analysis for Engineers: With Applications to Continuum Mechanics*. Springer Berlin Heidelberg, 2009 (vid. pág. 49).

JORDAN, Pascual. *Schwerkraft und weltall*. Vol. 107. Vieweg, 1955 (vid. pág. 40).

JOYCE, Austin y col. “*Beyond the cosmological standard model*”. En: *Physics Reports* 568 (2015), pág. 1. DOI: 10.1016/j.physrep.2014.12.002 (vid. pág. 39).

KALUZA, T. “Zum Unitätsproblem der Physik”. En: *Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.)* 1921 (1921), pág. 966. DOI: 10.1142/S0218271818700017. arXiv: 1803.08616 [physics.hist-ph] (vid. págs. 15, 40).

KASE, Ryotaro y Shinji TSUJIKAWA. “Dark energy in scalar-vector-tensor theories”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 1811 (2018), pág. 024. DOI: 10.1088/1475-7516/2018/11/024 (vid. pág. 14).

KLEIN, Oskar. “Quantentheorie und fünfdimensionale Relativitätstheorie”. En: *Zeitschrift für Physik A* 37 (1926), pág. 895. DOI: 10.1007/BF01397481 (vid. págs. 15, 40).

KOBAYASHI, Tsutomu. “Horndeski theory and beyond: a review”. En: *Reports on Progress in Physics* 82 (2019), pág. 086901. DOI: 10.1088/1361-6633/ab2429 (vid. págs. 15, 17, 25, 43, 44).

KOBAYASHI, Tsutomu, YAMAGUCHI Masahide e YOKOYAMA Juníchi. “Generalized G-inflation: Inflation with the most general second-order field equations”. En: *Prog. Theor. Phys.* 126 (2011), pág. 511. DOI: 10.1143/PTP.126.511. arXiv: 1105.5723 [hep-th] (vid. págs. 17, 42).

LANGLOIS, D. y NOUI Karim. “Hamiltonian analysis of higher derivative scalar-tensor theories”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 1607 (2016), pág. 016. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/07/016 (vid. págs. 18, 74).

LANGLOIS, David. “Dark energy and modified gravity in degenerate higher-order scalar-tensor (DHOST) theories: A review”. En: *International Journal of Modern Physics D* 28 (2019), pág. 1942006. DOI: 10.1142/s0218271819420069 (vid. págs. 18, 46).

LANGLOIS, David y NOUI Karim. “*Degenerate higher derivative theories beyond Horndeski: evading the Ostrogradski instability*”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 1602 (2016), pág. 034. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/02/034 (vid. págs. 18, 48, 51, 55, 73).

LANGLOIS, David y col. “*Scalar-tensor theories and modified gravity in the wake of GW170817*”. En: *Physical Review D* 97 (2018), pág. 061501. DOI: 10.1103/PhysRevD.97.061501. arXiv: 1711.07403 [gr-qc] (vid. pág. 18).

LI, Miao y col. “*Dark Energy*”. En: *Communications in Theoretical Physics* 56 (2011), pág. 525. DOI: 10.1088/0253-6102/56/3/24 (vid. pág. 14).

LOVELOCK, D. “*The four-dimensionality of space and the Einstein tensor*”. En: *Journal of Mathematical Physics* 13 (1972), pág. 874. DOI: 10.1063/1.1666069 (vid. pág. 14).

LYTH, D.H. y A.R. LIDDLE. *The Primordial Density Perturbation: Cosmology, Inflation and the Origin of Structure*. Cambridge University Press, 2009 (vid. pág. 14).

MARTIN, Jerome. “*The Theory of Inflation*”. En: *Proc. Int. Sch. Phys. Fermi* 200 (2020). Ed. por E. Coccia, J. Silk y N. Vittorio, pág. 155. DOI: 10.3254/ENFI200008. arXiv: 1807.11075 [astro-ph.CO] (vid. pág. 14).

MELVILLE, Scott y NOLLER Johannes. “*Positivity in the Sky: Constraining dark energy and modified gravity from the UV*”. En: *Phys. Rev. D* 101.2 (2020), pág. 021502. DOI: 10.1103/Phys.Rev.D101.021502. arXiv: 1904.05874 [astro-ph.CO] (vid. pág. 72).

MIRONOV, S., V. RUBAKOV y V. VOLKOVA. “*Genesis with general relativity asymptotics in beyond Horndeski theory*”. En: *Phys. Rev. D* 100 (8 2019), pág. 083521. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.083521 (vid. pág. 47).

MIRONOV, S., RUBAKOV V. y VOLKOVA V. “*Subluminal cosmological bounce beyond Horndeski*”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 2005 (2020), pág. 024. DOI: 10.1088/1475-7516/2020/05/024 (vid. pág. 47).

MOTOHASHI, Hayato y SUYAMA Teruaki. “Quantum Ostrogradsky theorem”. En: *JHEP* 09 (2020), pág. 032. DOI: 10.1007/JHEP09(2020)032. arXiv: 2001.02483 [hep-th] (vid. pág. 20).

MOTOHASHI, Hayato y col. “*Healthy degenerate theories with higher derivatives*”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 07 (2016), pág. 033. DOI: 10.1088/1475-7516/2016/07/033. arXiv: 1603.09355 [hep-th] (vid. pág. 20).

NARUKO, Atsushi, YOSHIDA Daisuke y MUKOHYAMA Shinji. “*Gravitational scalar-tensor theory*”. En: *Classical and Quantum Gravity* 33 (2016), 09LT01. DOI: 10.1088/0264-9381/33/9/09lt01 (vid. pág. 15).

NICOLIS, Alberto, RATAZZI Riccardo y TRINCHERINI Enrico. “*The Galileon as a local modification of gravity*”. En: *Physical Review D* 79 (2009), pág. 064036. DOI: 10.1103/PhysRevD.79.064036. arXiv: 0811.2197 [hep-th] (vid. págs. 16, 42).

OSTROGRADSKY, M. “*Mémoires sur les équations différentielles, relatives au problème des isopérimètres*”. En: *Mémoires de l'Académie Impériale des Sciences de St. Pétersbourg* 6 (1850), pág. 385 (vid. págs. 16, 20, 23).

PEIRONE, Simone y col. “*Cosmological constraints and phenomenology of a beyond-Horndeski model*”. En: *Phys. Rev. D* 100 (6 2019), pág. 063509. DOI: 10.1103/PhysRevD.100.063509 (vid. pág. 47).

PIREAUX, SOPHIE M. V. y J. P. ROZELOT. “*Solar quadrupole moment and purely relativistic gravitation contributions to Mercury’s perihelion advance*”. En: *Astrophysics and Space Science* 284 (2003), pág. 1159 (vid. pág. 13).

POUND, R. V. y G. A. REBKA. “*Gravitational Red-Shift in Nuclear Resonance*”. En: *Physical Review Letters* 3 (9 1959), pág. 439. DOI: 10.1103/PhysRevLett.3.439 (vid. pág. 13).

RIESS, A. G. y col. “*Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant*”. En: *The Astronomical Journal* 116 (1998), pág. 1009. DOI: 10.1086/300499 (vid. pág. 14).

SBISÀ, Fulvio. “*Classical and quantum ghosts*”. En: *European Journal of Physics* 36 (2014), pág. 015009. DOI: 10.1088/0143-0807/36/1/015009 (vid. págs. 20, 25, 27, 31).

SHAPIRO, S. S. y col. “*Measurement of the Solar Gravitational Deflection of Radio Waves using Geodetic Very-Long-Baseline Interferometry Data, 1979–1999*”. En: *Physical Review Letters* 92 (12 2004), pág. 121101. DOI: 10.1103/PhysRevLett.92.121101 (vid. pág. 13).

TRAYKOVA, Dina, BELLINI Emilio y FERREIRA Pedro G. “*The phenomenology of beyond Horndeski gravity*”. En: *Journal of Cosmology and Astroparticle Physics* 08 (2019), pág. 035. DOI: 10.1088/1475-7516/2019/08/035. arXiv: 1902.10687 [astro-ph.CO] (vid. págs. 45, 46).

WILL, Clifford M. “*Confrontation between General Relativity and Experiment*”. En: *Living Reviews in Relativity* 9 (2006), pág. 3. DOI: 10.12942/lrr-2006-3. arXiv: gr-qc/0510072 [gr-qc] (vid. pág. 13).

WILL, Clifford M. *Theory and Experiment in Gravitational Physics*. 2.^a ed. Cambridge University Press, 2018. DOI: 10.1017/9781316338612 (vid. pág. 13).

WOODARD, R. P. “*Ostrogradsky’s theorem on Hamiltonian instability*”. En: *Scholarpedia* 10 (2015), pág. 32243. DOI: 10.4249/scholarpedia.32243 (vid. págs. 16, 20).

WOODARD, Richard P. “*Avoiding dark energy with $1/r$ modifications of gravity*”. En: *Lecture Notes in Physics* 720 (2007), pág. 403. DOI: 10.1007/978-3-540-71013-4_14. arXiv: astro-ph/0601672 [astro-ph] (vid. págs. 16, 31).

ZUMALACÁRREGUI, Miguel y GARCÍA-BELLIDO Juan. “*Transforming gravity: from derivative couplings to matter to second-order scalar-tensor theories beyond the Horndeski Lagrangian*”. En: *Phys. Rev. D* 89 (2014), pág. 064046. DOI: 10.1103/PhysRevD.89.064046. arXiv: 1308.4685 [gr-qc] (vid. pág. 45).

ANEXOS

Anexo A. FORMALISMO 3+1

El formalismo 3+1 describe el espacio tiempo cuadridimensional $(\mathcal{M}, g_{ab})$ en términos de una familia de hipersuperficies tipo espacio ⁷⁰ las cuales evolucionan temporalmente mediante la derivada de Lie a lo largo del vector evolución. Este formalismo puede ser utilizado como una herramienta para separar las componentes espaciales de la temporal en las ecuaciones de campo de Einstein. En este apéndice, se examinan las propiedades asociadas a una sola hipersuperficie y posteriormente se considera una familia de hipersuperficies que definen una foliación.

HIPERSUPERFICIE

Una hipersuperficie de $\mathcal{M}$ es la imagen Σ de una variedad tridimensional $\hat{\Sigma}$ que es embebida mediante un homeomorfismo (ver Fig. ??)⁷⁴ Φ , es decir

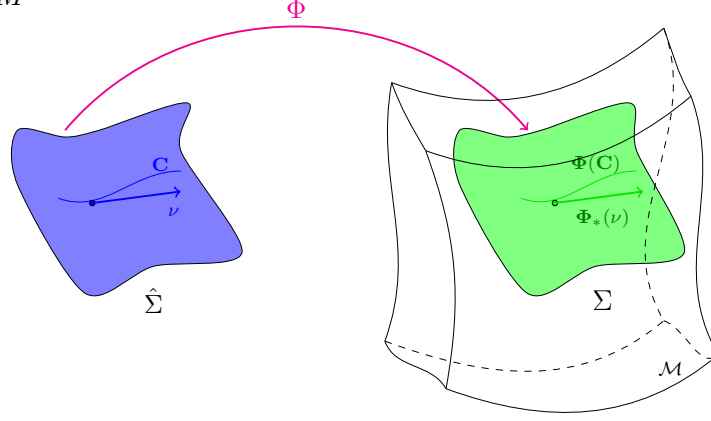
$$\Sigma = \Phi(\hat{\Sigma}), \quad (177)$$

donde Σ es una subvariedad⁷⁵ de $\mathcal{M}$. Debido a que el homeomorfismo Φ arrastra las curvas de $\hat{\Sigma}$ a $\mathcal{M}$, se define un mapeo entre $T_p(\hat{\Sigma})$ y $T_p(\mathcal{M})$. En la figura (??) se muestra un ejemplo de una curva que pertenece a una variedad $\hat{\Sigma}$ y es arrastrada hacia la variedad $\mathcal{M}$, mediante el homeomorfismo. Este mapeo es denotado por Φ_*

⁷⁴ Es una función uno a uno, con Φ y Φ^{-1} continuas.

⁷⁵ Es un subconjunto de la variedad $\mathcal{M}$ con menor dimensionalidad que también cumple con las propiedades de variedad (S.M. CARROLL. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019).

Figura 2. Representación de la incrustación de la variedad $\hat{\Sigma}$ en $\mathcal{M}$ mediante el homeomorfismo $\Phi(\Sigma = \Phi(\hat{\Sigma}))$. Mediante un push-forward, Φ_* , un vector es arrastrado desde $T_p(\hat{\Sigma})$ a $T_p\mathcal{M}$



y se denomina push-forward. Tomando un sistema adaptado $(x^\alpha) = (t, x, y, z)$, esta función se puede escribir como

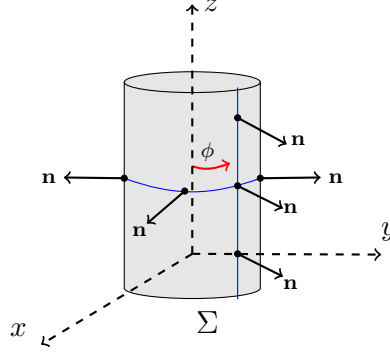
$$\begin{aligned}\Phi_* : T_p(\hat{\Sigma}) &\longrightarrow T_p(\mathcal{M}) \\ v = (v^x, v^y, v^z) &\longrightarrow \Phi_* v = (0, v^x, v^y, v^z)\end{aligned}\quad (178)$$

El homeomorfismo Φ induce un mapeo entre los espacios cotangentes de $\hat{\Sigma}$ y $\mathcal{M}$. Este mapeo Φ^* se conoce como el pull-back, y se define como

$$\begin{aligned}\Phi^* : T_p^*(\mathcal{M}) &\longrightarrow T_p^*(\hat{\Sigma}) \\ \omega &\longrightarrow \Phi^*\omega : T_p(\hat{\Sigma}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longrightarrow \langle \omega, \Phi_* v \rangle,\end{aligned}\quad (179)$$

donde $\langle, \rangle$ representa un producto interno. Este último mapeo se puede extender a una forma multilineal sobre $T_p^*(\mathcal{M})$. Sea T una forma multilineal que pertenece a $T_p^*(\mathcal{M})$, Φ^*T es el pull-back de esta forma multilineal y se escribe de la siguiente

Figura 3. Representación de un cilindro incrustado en R^3 . Los vectores $\mathbf{n}$ son aquéllos normales a la superficie. Esta superficie tiene siempre curvatura extrínseca pero su curvatura intrínseca es cero.



manera

$$\forall (v_1, v_2, \dots, v_n) \in T_p(\Sigma)^n, \Phi^*T(v_1, v_2, \dots, v_n) = T(\Phi_*v_1, \Phi_*v_2, \dots, \Phi_*v_n). \quad (180)$$

La operación de pull-back aplicada a la forma bilineal g , es decir, el tensor métrico del espacio tiempo, induce una métrica en la hipersuperficie Σ :

$$\vec{\gamma} = \Phi^*\vec{g}, \quad (181)$$

en donde γ es conocida como la *primera forma fundamental* sobre la hipersuperficie.

Dependiendo de la signatura de γ , la hipersuperficie puede ser: tipo espacio si y sólo si γ es Riemanniana⁷⁶, tipo tiempo si y sólo si γ es Lorentziana⁷⁷, o nula si y sólo si γ es degenerada⁷⁸. En este trabajo nos enfocaremos en una hipersuperficie tipo

⁷⁶ Posee signatura (+,+,+).

⁷⁷ Posee signatura (-,+,+).

⁷⁸ Posee signatura (0,+,+).

espacio. Ahora, además de conocer el tipo de hipersuperficie, es necesario definir el vector normal a ésta. Este vector puede ser normalizado para las hipersuperficies tipo espacio y tipo tiempo como

$$\mathbf{n} = \frac{\vec{\nabla}t}{\sqrt{\pm \vec{\nabla}t \cdot \vec{\nabla}t}}, \quad (182)$$

donde $\vec{\nabla}t$ es el vector normal a la hipersuperficie. Para nuestro caso, el vector $\mathbf{n}$ debe ser tipo tiempo (i.e., $\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = -1$).

Después de definir el vector normal a la hipersuperficie, se determina el tensor de curvatura extrínseco. Este tensor da información del cambio de la deflexión de la hipersuperficie en la variedad $(\mathcal{M}, g)$, evaluando el cambio de la dirección del vector $\mathbf{n}$ cuando se mueve sobre la hipersuperficie. Este tensor es conocido también como *la segunda forma fundamental* sobre la hipersuperficie. Una forma de definirlo es la siguiente:

$$\forall (u, v) \in T_p(\Sigma) \times T_p(\Sigma), \quad K(u, v) = -u \cdot \nabla_v \mathbf{n}. \quad (183)$$

Este tensor también nos da la información de la evolución temporal de la métrica inducida. Es importante notar que el hecho de tener un tensor de curvatura extrínseco diferente de cero no significa que estemos en un espacio curvo, siendo esta última propiedad determinada por el tensor de Riemann⁷⁹. Un ejemplo donde el tensor de curvatura extrínseco es diferente de cero mientras que la curvatura intrínseca es cero está dado en la figura (3). Allí se muestra un cilindro como una hipersuperficie Σ de $\mathbb{R}^3$.

Para realizar la descomposición de cualquier campo tensorial, es necesario utilizar el operador de proyección ortogonal a la hipersuperficie, el cual está asociado a la

⁷⁹ S.M. CARROLL. *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press, 2019.

siguiente descomposición del espacio tangente en un punto p de $\mathcal{M}$:

$$T_p(\mathcal{M}) = T_p(\Sigma) \oplus \text{span}(\mathbf{n}), \quad (184)$$

donde $\text{span}(\mathbf{n})$ es un espacio vectorial unidimensional generado por el vector $\mathbf{n}$. Así, es natural definir el operador proyector ortogonal como:

$$\begin{aligned} \vec{\gamma} &= T_p(\mathcal{M}) \rightarrow T_p(\Sigma) \\ v &\longmapsto v + (n \cdot v)n. \end{aligned} \quad (185)$$

Las componentes de este operador proyección, con respecto a una base (e_a) que pertenece a $T_p(\mathcal{M})$, vienen dadas por

$$\gamma_b^a = \delta_b^a + n^a n_b. \quad (186)$$

FOLIACIÓN

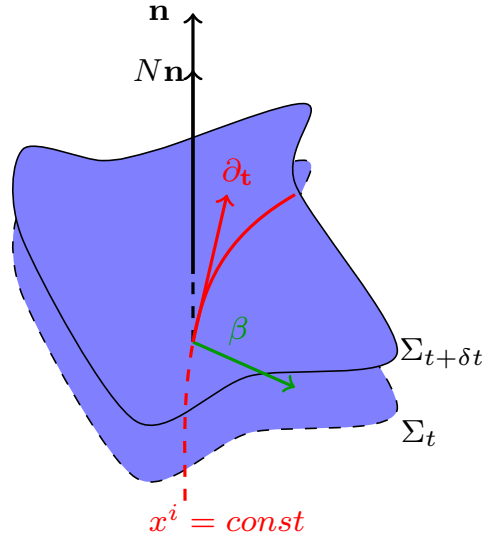
Un espacio tiempo $(\mathcal{M}, g_{ab})$ es globalmente hiperbólico si admite una superficie de Cauchy⁸⁰. Este tipo de espacio tiempos pueden ser foliados por una familia de hipersuperficies tipo espacio caracterizadas por un parámetro t $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Para nuestro trabajo se asumió lo siguiente:

- $\Sigma_t \cap \Sigma_{t'} = \emptyset$, para $t \neq t'$.
- La foliación cubre $\mathcal{M}$, es decir

$$\mathcal{M} = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \Sigma_t \quad (187)$$

⁸⁰ Una superficie Σ es de Cauchy si y sólo si cada curva causal se intersecta una sólo vez con la hipersuperficie Σ

Figura 4. Representación de la foliación definida entre dos hipersuperficies vecinas Σ_t y $\Sigma_{t+\delta t}$.



Para poder escribir las ecuaciones de Einstein como un problema de Cauchy, es necesario introducir unas coordenadas adaptadas a la foliación $(\Sigma_t)_{t \in \mathbb{R}}$. Este sistema coordenado debe ser bien comportado entre las diferentes hipersuperficies, es decir, debe variar suavemente entre hipersuperficies vecinas. Sea $(x^i) = (x^1, x^2, x^3)$ un sistema de coordenadas sobre la hipersuperficie Σ_t . Si éste varía suavemente entre hipersuperficies vecinas, entonces el sistema coordenado $(x^\alpha) = (t, x^1, x^2, x^3)$ es un sistema de coordenadas bien comportado sobre el espacio tiempo $\mathcal{M}$.

El vector asociado a la coordenado temporal (t^a) se define como el vector tangente a la curva $x^i = \text{constante}$. Generalmente, el vector t^a no coincide con el vector de evolución temporal $\mathbf{m}$ ($\mathbf{m} = N\mathbf{n}$ ⁸¹), como se muestra en la figura (4). A partir de

⁸¹ N es la función lapso, siendo su nombre debido a que relaciona el tiempo coordenado de la foliación con el tiempo propio del observador Euleriano.

dichos vectores, se define un vector corrimiento β como la diferencia entre $(\partial t)^a = t^a$ y m^a , es decir,

$$\beta^a = t^a - m^a, \quad (188)$$

el cual es un vector que pertenece al espacio tangente a la hipersuperficie Σ_t (ver Fig. 4). Para finalizar, debemos decir que es posible construir un sistema de coordenadas adaptado si conocemos la función lapso N y el vector de corrimiento β .