

**ANISOTROPÍA SÍSMICA INDUCIDA POR LA DENSIDAD
DE MICROFRACTURAS EN UN MEDIO ELÁSTICO**

JOAQUÍN PABLO AGUILERA BUSTOS

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA**

2008

**ANISOTROPÍA SÍSMICA INDUCIDA POR LA DENSIDAD
DE MICROFRACTURAS EN UN MEDIO ELÁSTICO**

JOAQUÍN PABLO AGUILERA BUSTOS

Trabajo de grado para optar por el título de Físico

Director

CARLOS CESAR PIEDRAHITA ESCOBAR

Ph.D. Matemática Aplicada

Codirectores:

ARTURO PLATA

Ph.D. Ciencias Para El Ingeniero

HERNANDO ALTAMAR

MSc. Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

2008

A Dios, el arquitecto de este proyecto
A mi mamá Olga Bustos, la columna que lo sostiene
A mi hermanita Lina Aguilera, la socia principal
A mi hermano Andrés Aguilera, el dueño de las escrituras.

AGRADECIMIENTOS

A Dios siempre gracias.

A mi familia, por su apoyo.

A Hernando Altamar, sin sus constantes asesorías profesionales no hubiera sido posible realizar este proyecto. Gracias también por su amistad y consejos.

Al profesor Arturo Plata, por creer en mi y brindarme su apoyo y dirección.

A Carlos Piedrahita, por su confianza, apoyo y seguimiento a lo largo de este proyecto. Gracias también por todos los seminarios brindados.

A Frank Gómez, gracias por la permanente disponibilidad y colaboración.

Al grupo de Petrosísmica, a William Agudelo, los funcionarios, profesionales y estudiantes de este grupo.

A la escuela de Física, por su formación.

A los diferentes laboratorios que me brindaron sus servicios: A Nestor Moreno e integrantes del laboratorio de Petrología de ECOPETROL-ICP; a Jenny Carvajal e integrantes del laboratorio de mecánica de rocas ECOPETROL-ICP; a Maria Elena Mogollón e integrantes del laboratorio de análisis petrofísicos básicos ECOPETROL-ICP; al laboratorio de análisis especiales ECOPETROL-ICP; a July Hernández y Javier Gómez del laboratorio de difracción de rayos X CIBIMOL UIS; al laboratorio de óptica y tratamiento de señales GOTS UIS; a David Miranda e integrantes del laboratorio de CIMBIOS UIS.

A mis amigos de carrera y de siempre, entre estos: Jairo Torres, Viviana Rosero, Lina

Guerrero y Jorge Castellanos, William Valencia, Francisco Gamboa, Cesar Celis, Juan Carlos Quijano...

A todos los que no menciono sus nombres pero que han estado presentes en este proceso, muchas gracias.

TÍTULO : ANISOTROPÍA SÍSMICA INDUCIDA POR LA DENSIDAD DE MICROFRACTURAS EN UN MEDIO ELÁSTICO*.

AUTORES : AGUILERA BUSTOS, Joaquín Pablo †.

PALABRAS CLAVES : Anisotropía Sísmica, Inclusiones, Densidad de Fracturas, Velocidad de Onda, Parámetros de Thomsen.

DESCRIPCIÓN : Se estudió el modelo de Hudson para poder determinar los coeficientes elásticos de la matriz efectiva al construir muestras sintéticas con cierta cantidad de inclusiones que simulan fracturas en un medio. Las inclusiones eran planas, circulares, paralelas entre si, alineadas en una dirección preferencial y distribuidas aleatoriamente. Se tomaron dos tipos de inclusiones: secas (dry cracks) y sólidas.

De esta manera, una vez definida la matriz efectiva, se determinó la relación teórica entre la velocidad de propagación de las ondas elásticas tipo P y S y el grado de anisotropía con la densidad de microfracturas del medio. El grado de anisotropía se pudo estimar a partir de los parámetros anisótropos de Thomsen.

También, se muestra la metodología experimental basada en la medición de los tiempos de propagación de las ondas elásticas en las muestras sintéticas realizadas y en muestras de rocas naturales tomadas del Piedemonte Colombiano, estas mediciones permiten obtener los resultados para confrontar el modelo teórico escogido.

*Trabajo de Grado

†Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Carlos Piedrahita, Arturo Plata y Hernando Altamar (Directores)

TITLE : INDUCED SEISMIC ANISOTROPY DUE TO CRACK DENSITY
IN AN ELASTIC MEDIUM*.

AUTHOR : AGUILERA BUSTOS, Joaquín Pablo †.

KEY WORDS : Seismic Anisotropy, inclusions, crack density, wave velocity, Thomsen's parameters.

DESCRIPTION : In this work we applied Hudson's model, which allowed us to characterize the effective elastic-matrix constants of synthetic samples constructed with different percentages of inclusions that simulate cracks in an isotropic medium. The inclusions were flat, circular, and parallel to each other, aligned in a preferential direction and randomly distributed. In addition, these inclusions were of two types: dry cracks and cracks filled with material.

In this way, using the effective matrix, the theoretical relations between P and S wave velocities and the degree of anisotropy with the crack density were obtained. The degree of anisotropy could be evaluated using Thomsen's parameters.

Also, we show the experimental methodology based on the measurement of traveltimes the elastic waves in synthetic samples and natural rocks from different wells located at the Colombian foothills, which allowed us to obtain results to confront the theoretical model.

*Work of Degree

†Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Carlos Piedrahita, Arturo Plata y Hernando Altamar (Directors)

OBJETIVOS

■ OBJETIVO GENERAL

Estudiar la influencia del microfracturamiento sobre la velocidad de propagación de ondas elásticas y el grado de anisotropía del medio, en muestras de rocas naturales y sintéticas.

■ OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Estudiar y aplicar el modelo teórico de Hudson de medios con fracturamiento, con el fin de hallar la matriz efectiva de constantes elásticas del medio escogido.
- Establecer, con base en la teoría, las condiciones para la realización de las mediciones experimentales.
- Hallar las velocidades de las ondas P y S, y los parámetros de anisotropía en función de la densidad de fracturas
- Determinar experimentalmente las velocidades de onda y los parámetros anisótropos de Thomsen a partir de las mediciones de tiempos de propagación de las ondas en el medio.
- Confrontar el modelo de Hudson con los resultados experimentales.

JUSTIFICACIÓN

Los resultados que se obtuvieron en este trabajo sirven para dar soporte experimental al modelo de Hudson, específicamente, para medios con microfracturas secas (dry cracks) y sólidas. También son de gran utilidad para generar un modelo anisótropo del subsuelo que permitirá una mayor probabilidad de acierto en el modelamiento y la exploración de yacimientos con litología compleja.

La importancia de obtener datos que ayuden a modelar medios que presenten microfracturamiento radica en que en estos medios se establecen trenes de permeabilidad, zonas de acumulación de fluidos y volúmenes porosos, que son características propias de un yacimiento de hidrocarburos o un acuífero. De esta manera, a partir de estos datos se ayuda a representar las condiciones originales de las rocas en un yacimiento y se disminuye la incertidumbre en la exploración. Además, se permite reducir costos y evitar pérdidas a la hora de proceder a la explotación de los yacimientos.

ÍNDICE GENERAL

INTRODUCCIÓN	1
1. ECUACIÓN DE CHRISTOFFEL	3
1.1. ECUACIÓN DE CAUCHY	3
1.2. LEY DE HOOKE	6
1.3. ECUACIÓN DE ONDA	6
1.4. FORMA EXPLÍCITA DE LA ECUACIÓN DE CHRISTOFFEL	7
1.5. PROBLEMA DE VALORES Y VECTORES PROPIOS	8
2. MODELO DE HUDSON	10
2.1. ECUACIÓN DIFERENCIAL PARA EL CAMPO MEDIO	10
2.2. ECUACIÓN DIFERENCIAL-INTTEGRAL DEL CAMPO MEDIO PARA UNA DISTRIBUCIÓN DE FRACTURAS	14

2.3. MATRIZ EFECTIVA DEL MEDIO	16
2.4. CONDICIONES ESPECÍFICAS PARA LAS FRACTURAS	21
2.4.1. Fracturas Secas	21
2.4.2. Fracturas Sólidas	22
2.5. COMPONENTES DEL MEDIO EFECTIVO	22
2.5.1. Coeficientes Elásticos Para Un Medio Con Fracturas Secas	24
2.5.2. Coeficientes Elásticos Para Un Medio Con Fracturas Sólidas	25
2.6. COEFICIENTES DE LA MATRIZ DE CHRISTOFFEL PARA UN MEDIO TRANSVERSALMENTE ISÓTROPO	25
2.7. DENSIDAD EFECTIVA DEL MEDIO	26
3. VELOCIDADES DE PROPAGACIÓN	27
3.1. VELOCIDADES DE PROPAGACIÓN EN UNA DIRECCIÓN ARBI- TRARIA	27
3.2. POLARIZACIONES DE LAS ONDAS	29
3.3. PROPAGACIÓN EN EL PLANO DE ISOTROPÍA	31
3.4. PROPAGACIÓN A LO LARGO DEL EJE DE SIMETRÍA	32
3.5. PROPAGACIÓN A UN ÁNGULO CON RESPECTO AL EJE DE SIMETRÍA	33

4. PARÁMETROS DE THOMSEN	36
4.1. ANISOTROPÍA DÉBIL	38
5. METODOLOGÍA EXPERIMENTAL	42
5.1. MONTAJE	42
5.2. CRISTALES PIEZOELECTRICOS	44
5.3. MUESTRAS SINTÉTICAS	45
5.4. MUESTRAS NATURALES	46
5.5. CONFIGURACIÓN DE LOS CRISTALES PIEZOELÉCTRICOS	48
5.5.1. Configuración En Muestras Sintéticas	49
5.5.2. Configuración En Muestras Naturales	50
6. RESULTADOS	52
6.1. RESULTADOS EXPERIMENTALES	52
6.2. CONFRONTACIÓN DEL MODELO DE HUDSON	57
6.2.1. Confrontación Del Modelo Para Medios con Fracturas Secas	59
6.2.2. Confrontación Del Modelo Para Medios con Fracturas Sólidas	65
6.3. RESULTADOS EN MUESTRAS NATURALES	71

CONCLUSIONES	76
RECOMENDACIONES	78
APENDICE	79
REFERENCIAS	84

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Medio Transversalmente Isótropo. Tomado de [2] Armstrong, Phil., et al., 1994.	24
5.1. Montaje Experimental.	43
5.2. Registro de una señal recibida.	43
5.3. Inclusiones de aluminio en las muestras sintéticas.	45
5.4. Sección delgada que muestra la presencia de microfracturas en las muestras naturales.	48
5.5. Muestra preparada para mediciones.	49
5.6. Configuración de cristales piezoeléctricos en muestras sintéticas.	50
5.7. Configuración de cristales piezoeléctricos en muestras naturales.	51
6.1. Velocidades v_{P1} y v_{SH} vs ξ para el medio con inclusiones secas. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.	62

6.2. Velocidades v_{P3} y v_{SV} vs ξ para el medio con inclusiones secas. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.	63
6.3. ε vs ξ para el medio con inclusiones secas. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.	64
6.4. γ vs ξ para el medio con inclusiones secas. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.	65
6.5. δ vs ξ para el medio con inclusiones secas. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.	66
6.6. Velocidades v_{P1} y v_{SH} vs ξ para el medio con inclusiones sólidas de aluminio. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales. . .	67
6.7. Velocidades v_{P3} y v_{SV} vs ξ para el medio con inclusiones sólidas de aluminio. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales. . .	69
6.8. ε vs ξ para el medio con inclusiones sólidas de aluminio. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.	70
6.9. γ vs ξ para el medio con inclusiones sólidas de aluminio. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.	71
6.10. δ vs ξ para el medio con inclusiones sólidas de aluminio. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.	72
6.11. Velocidades de onda vs ξ para secciones delgadas horizontales	73
6.12. Velocidades de onda vs ξ para secciones delgadas verticales.	73

6.13. Parámetros de Thomsen vs ξ para secciones delgadas horizontales. . . .	74
6.14. Parámetros de Thomsen vs ξ para secciones delgadas verticales.	75
15. Propagación de la onda P	81
16. Propagación de la onda S	81

ÍNDICE DE TABLAS

5.1. Datos de muestras sintéticas con inclusiones sólidas de aluminio.	46
5.2. Datos de muestras sintéticas con inclusiones secas.	46
5.3. Datos de muestra naturales extraídas de formaciones de interés para Ecopetrol-ICP.	47
6.1. Tiempos de propagación medidos en muestras de roca.	53
6.2. Velocidades de propagación para muestras sintéticas con inclusiones secas.	54
6.3. Velocidades de propagación para muestras sintéticas con inclusiones sólidas de aluminio.	54
6.4. Velocidades de propagación para muestras naturales.	55
6.5. Coeficientes elásticos obtenidos de las muestras sintéticas con inclusiones secas.	57
6.6. Coeficientes elásticos obtenidos de las muestras sintéticas con inclusiones sólidas de aluminio.	57

6.7. Coeficientes elásticos obtenidos de las muestras de roca naturales. . . .	58
6.8. Parámetros de Thomsen obtenidos de las muestras sintéticas con inclu- siones secas.	58
6.9. Parámetros de Thomsen obtenidos de las muestras sintéticas con inclu- siones sólidas de aluminio.	59
6.10. Parámetros de Thomsen obtenidos de las muestras de roca naturales . .	59

INTRODUCCIÓN

En la industria petrolera, uno de los propósitos principales es encontrar y aplicar nuevos métodos que proporcionen mayor eficiencia en la exploración y explotación del petróleo para satisfacer la demanda de este hidrocarburo. Por esta razón, es una necesidad de esta industria, invertir en investigación con el fin de caracterizar las propiedades geofísicas y geológicas del subsuelo. Esta necesidad llevó a Ecopetrol-ICP junto con la Universidad Industrial de Santander a crear un convenio de cooperación tecnológica, cuyo objetivo es obtener modelos geofísicos del subsuelo para diferentes zonas de interés.

Un método comúnmente utilizado para el análisis de rocas del subsuelo se basa en el estudio de la propagación de ondas elásticas, con el fin de encontrar la relación entre anisotropía, polarización y modelos de fracturas; esto debido a que estas ondas se ven afectadas por la presencia de fracturas, las cuales si son pequeñas con respecto a la longitud de onda, permiten percibir un medio efectivo homogéneo e isótropo, pero para el caso en el que estas fracturas se encuentran ordenadas espacialmente con cierta simetría, el medio exhibirá anisotropía en sus coeficientes elásticos. En este trabajo, se demuestra cómo la presencia de microfracturas en muestras de rocas del subsuelo es una de las principales causas de anisotropía [1].

Para el estudio del microfracturamiento, se tomó como referencia el modelo teórico planteado por Hudson[6, 7], donde este autor explica el fenómeno de la propagación de

ondas elásticas en medios que presentan inclusiones que simulan fracturas de diferentes tipos, distribuidas aleatoriamente y orientadas en diferentes direcciones en el medio. El interés en este trabajo es estudiar este fenómeno escogiendo un tipo de fracturamiento y comparar las predicciones teóricas de este modelo con resultados experimentales.

Para tratar el tema de anisotropía se tuvo en cuenta el estudio realizado por Thomsen, que define el grado de anisotropía (fuerte o débil) que puede presentar un medio elástico, a través de los conocidos parámetros anisótropos [14]. Estos parámetros se relacionaron con la densidad de microfracturas de las muestras.

ECUACIÓN DE CHRISTOFFEL

A continuación se muestra la deducción de la ecuación de Christoffel, la cual permite calcular las velocidades de propagación de las ondas elásticas con sus respectivas polarizaciones. Para obtener esta ecuación, se debe tener en cuenta la definición de esfuerzo, la conservación de la masa y del momento lineal. Además, se propone una solución para la ecuación de onda.

1.1 ECUACIÓN DE CAUCHY

Para obtener estas ecuaciones, se parte de considerar la fuerza total que actúa sobre un continuo, dada por [13]:

$$\mathbf{F}_T = \mathbf{F} + \mathbf{f} \tag{1.1}$$

Donde \mathbf{F} hace referencia a las fuerzas superficiales o de contacto, las cuales actúan en superficies imaginarias que separan porciones dadas del continuo, y, \mathbf{f} son las fuerzas

de cuerpo que actúan a distancia, por ejemplo, la fuerza gravitacional. Por otro lado, el principio de esfuerzo de Cauchy, que plantea la fuerza media ejercida dentro de un cuerpo continuo a través de una superficie imaginaria como reacción a fuerzas externas aplicadas, se expresa de la forma:

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{F}}{dS} \quad (1.2)$$

Donde \mathbf{T} es el vector tracción que describe la fuerza de contacto de elementos infinitesimales dS de una superficie dentro del continuo. De acuerdo a este principio e invocando la segunda ley de Newton y el principio de conservación del momento lineal, la fuerza total es:

$$\int_V \rho \frac{d^2 \mathbf{u}}{dt} dV = \int_S \mathbf{T} dS + \int_V \mathbf{f} dV \quad (1.3)$$

Siendo S la superficie del continuo que encierra un volumen V , ρ la densidad del medio y \mathbf{u} el vector desplazamiento.

Para una superficie dada, cuya normal es \mathbf{n} , la tracción se relaciona con el tensor de esfuerzo σ_{ji} a través de la siguiente expresión:

$$T_i^{\mathbf{n}} = \sigma_{ji} n_j \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.4)$$

De modo que:

$$\int_V \rho \frac{d^2 u_i}{dt} dV = \int_S \sigma_{ji} n_j dS + \int_V f_i dV \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.5)$$

Usando el teorema de divergencia para la integral de superficie, se obtiene:

$$\int_V \rho \frac{d^2 u_i}{dt} dV = \int_V \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} dV + \int_V f_i dV \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.6)$$

Usando la linealidad del operador integral, se puede escribir la anterior ecuación como:

$$\int_V \left(\frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i - \rho \frac{d^2 u_i}{dt} \right) dV = 0 \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.7)$$

Esta expresión establece el balance del momento lineal, donde la porción del continuo contenida en el volumen V sigue siendo la misma. De esta manera, para un volumen arbitrario que contiene la misma porción del continuo, el integrando de la anterior ecuación puede ser cero, por lo tanto:

$$\rho \frac{d^2 u_i}{dt} = \frac{\partial \sigma_{ji}}{\partial x_j} + f_i \quad i \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.8)$$

Donde la derivada total temporal del desplazamiento es equivalente a la derivada parcial de acuerdo a la teoría de la linealidad [13]. Este sistema de ecuaciones es conocido como las ecuaciones de Cauchy del movimiento [13]. Es necesario resaltar que las fuerzas volumétricas f_i no se tendrán en cuenta en los siguientes desarrollos, ya que esta es una fuerza que actúa a distancia, y en sismica sólo se consideran fuerzas de contacto y pequeños desplazamientos dentro del continuo [13].

1.2 LEY DE HOOKE

Para un punto dado del continuo, la ley de Hooke establece que cada componente del tensor de esfuerzo σ_{ij} es una combinación lineal de todas las componentes del tensor de deformación ϵ_{kl} , y está dada por [13]:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkl}\epsilon_{kl} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.9)$$

Donde C_{ijkl} es el tensor de elasticidad, el cual es simétrico para el caso de interés que se expondrá más adelante. La deformación en el medio hace referencia al cambio de posición de los puntos dentro de un continuo debido a la aplicación de esfuerzo. Este cambio de posición es descrito por el vector desplazamiento \mathbf{u} . Por lo tanto, el tensor de deformación está relacionado con el vector desplazamiento a través de la siguiente expresión:

$$\epsilon_{kl} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u_k}{\partial x_l} + \frac{\partial u_l}{\partial x_k} \right) \quad k, l \in \{1, 2, 3\}. \quad (1.10)$$

1.3 ECUACIÓN DE ONDA

Al reemplazar la ecuación (1.10) en la ecuación (1.9) y a su vez este resultado en la ecuación (1.8), se obtiene:

$$\rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}_i}{\partial t^2} = C_{ijkl} \frac{\partial^2 \mathbf{u}_k}{\partial x_j \partial x_l} \quad (1.11)$$

Esta es conocida como la ecuación de onda para medios elásticos [13].

1.4 FORMA EXPLÍCITA DE LA ECUACIÓN DE CHRISTOFFEL

Como solución de la ecuación de onda se propone una onda plana de la forma [13]:

$$\mathbf{u}_{\mathbf{k}} = A \exp[iw(P_r x_r - t)] \hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}} \quad (1.12)$$

Donde $\mathbf{P}_r = \frac{1}{v} \hat{\mathbf{n}}_r$ es el vector lentitud y $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}$ es la dirección de la polarización. Al reemplazar esta solución en la ecuación de onda, se obtiene:

$$[C_{ijkl} n_j n_l - \rho v^2 \delta_{ik}] a_k = 0 \quad (1.13)$$

Siendo esta ecuación la forma explícita de la ecuación de Christoffel. De esta manera se puede definir la matriz de Christoffel, de la forma:

$$\Gamma_{ik} = C_{ijkl} n_j n_l \quad (1.14)$$

En forma matricial se representa:

$$\mathbf{\Gamma} = \begin{bmatrix} c_{1j1l} n_j n_l & c_{1j2l} n_j n_l & c_{1j3l} n_j n_l \\ c_{2j1l} n_j n_l & c_{2j2l} n_j n_l & c_{2j3l} n_j n_l \\ c_{3j1l} n_j n_l & c_{3j2l} n_j n_l & c_{3j3l} n_j n_l \end{bmatrix} \quad (1.15)$$

Usando la notación de Voigt* [Ver Apendice], los coeficientes de la matriz de Christoffel Γ_{ik} en términos de los coeficientes del tensor de elasticidad C_{ijkl} , están dados de la forma:

$$\Gamma_{11} = C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 + C_{55}n_3^2 + 2(C_{16}n_1n_2 + C_{56}n_2n_3 + C_{15}n_1n_3) \quad (1.16a)$$

$$\Gamma_{22} = C_{66}n_1^2 + C_{22}n_2^2 + C_{44}n_3^2 + 2(C_{26}n_1n_2 + C_{24}n_2n_3 + C_{46}n_1n_3) \quad (1.16b)$$

$$\Gamma_{33} = C_{55}n_1^2 + C_{44}n_2^2 + C_{33}n_3^2 + 2(C_{45}n_1n_2 + C_{34}n_2n_3 + C_{35}n_1n_3) \quad (1.16c)$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = C_{16}n_1^2 + C_{26}n_2^2 + C_{45}n_3^2 + An_1n_2 + Bn_2n_3 + Dn_1n_3 \quad (1.16d)$$

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = C_{15}n_1^2 + C_{46}n_2^2 + C_{35}n_3^2 + Dn_1n_2 + En_2n_3 + Fn_1n_3 \quad (1.16e)$$

$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = C_{56}n_1^2 + C_{24}n_2^2 + C_{34}n_3^2 + Bn_1n_2 + Gn_2n_3 + En_1n_3 \quad (1.16f)$$

Donde $A = (C_{12} + C_{66})$, $B = (C_{25} + C_{46})$, $D = (C_{14} + C_{56})$, $E = (C_{36} + C_{45})$, $F = (C_{13} + C_{55})$ y $G = (C_{23} + C_{44})$. La matriz de Christoffel también es simétrica gracias a la simetría de la matriz C_{ijkl} .

1.5 PROBLEMA DE VALORES Y VECTORES PROPIOS

En vista de que la ecuación de Christoffel (1.13) constituye un sistema lineal de ecuaciones, cumple con los siguientes teoremas del algebra lineal:

- Puesto que Γ_{ik} es simétrica, sus correspondientes valores propios son reales.

*El alemán Woldemar Voigt introduce esta notación junto con el concepto de tensor en 1899.

- Puesto que Γ_{ik} es simétrica, sus correspondientes vectores propios son ortogonales entre sí.

Una condición suficiente y necesaria para que un sistema de n -ecuaciones homogéneas con n -variables, tenga solución no trivial es que el determinante de la matriz de coeficientes sea igual a cero, de esta manera:

$$\det \begin{bmatrix} \Gamma_{11} - \rho v^2 & \Gamma_{12} & \Gamma_{13} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} - \rho v^2 & \Gamma_{23} \\ \Gamma_{31} & \Gamma_{32} & \Gamma_{33} - \rho v^2 \end{bmatrix} = 0 \quad (1.17)$$

Donde el problema para hallar los valores propios del sistema consiste básicamente en resolver el anterior determinante. Para resolver este problema de valor característico, es necesario conocer la matriz de coeficientes elásticos del medio C_{ijkl} , su densidad ρ y establecer la dirección de propagación de la onda $\hat{\mathbf{n}}$. De esta manera, se pueden hallar los vectores propios que son los vectores polarización $\hat{\mathbf{a}}_{\mathbf{k}}$ y los valores propios que equivalen a las magnitudes de las velocidades de las ondas elásticas.

MODELO DE HUDSON

El modelo de Hudson [6] permite caracterizar la matriz de coeficientes elásticos para el medio efectivo; está basado en un análisis de la teoría de dispersión del campo de onda medio en un sólido elástico con inclusiones que simulan fracturas. A continuación se abarca de manera general la explicación de este modelo.

2.1 ECUACIÓN DIFERENCIAL PARA EL CAMPO MEDIO

Definiendo L como el operador diferencial elastodinámico para una solución de onda plana armónico-temporal en una región D de un material sólido, sin dispersores, de la forma:

$$L_i(\mathbf{u}; x) \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} c_{ijkl}^0 \frac{\partial u_k(x)}{\partial x_l} + \rho \omega^2 u_i(x), \quad x \in D \quad (2.1)$$

Donde c_{ijkl}^0 es el tensor de coeficientes elásticos para un medio isótropo, ρ es la densidad

efectiva del medio y ω es la frecuencia de la onda incidente. Para una onda incidente no perturbada u^0 :

$$L(\mathbf{u}^0; x) = 0, \quad x \in D \quad (2.2)$$

Ahora, considerando la presencia de dispersores en un dominio D :

$$L(\mathbf{u}; x) = 0, \quad x \in D' \quad (2.3)$$

Siendo D' la parte del dominio D por fuera de los dispersores y \mathbf{u} la solución del problema de dispersión. Asociando un operador de dispersión de la forma ϵS^n a un n -ésimo dispersor, de modo que $\epsilon S^n(u^n; x)$ es la onda dispersada cuando una onda u^n incide sobre el n -ésimo dispersor; donde ϵ es un escalar pequeño que indica que el campo dispersado es de igual manera, pequeño. El campo total es entonces:

$$u(x) = u^n(x) + \epsilon S^n(u^n; x) \quad (2.4)$$

De la misma manera, si se consideran N -dispersores:

$$u(x) = u^0(x) + \epsilon \sum_{n=1}^N S^n(u^n; x) \quad x \in D' \quad (2.5)$$

Despejando u^n de la ecuación (2.4) y reemplazando $u(x)$ dado por la ecuación (2.5), se obtiene la expresión para la onda que incide sobre el n -ésimo dispersor:

$$u^n = u^0 + \epsilon \sum_{m \neq n} S^m u^m, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad x \in D'_n \quad (2.6)$$

Donde D'_n es la región que excluye todos los dispersores menos el enésimo. Ahora, haciendo una expansión de la serie anterior en potencias de ϵ de la siguiente forma:

$$u^1 = u^0 \quad (2.7a)$$

$$u^2 = u^0 + \epsilon S^1 u^1 \quad (2.7b)$$

$$u^2 = u^0 + \epsilon S^1 u^0 \quad (2.7c)$$

$$u^3 = u^0 + \epsilon S^1 u^1 + \epsilon S^2 u^2 \quad (2.7d)$$

$$u^3 = u^0 + \epsilon S^1 u^0 + \epsilon S^2 (u^0 + \epsilon S^1 u^0) \quad (2.7e)$$

$$= u^0 + \epsilon S^1 u^0 + \epsilon S^2 u^0 + \epsilon^2 S^2 S^1 u^0 \quad (2.7f)$$

$$u^4 = u^0 + \epsilon S^1 u^1 + \epsilon S^2 u^2 + \epsilon^2 S^3 u^3 \quad (2.7g)$$

$$= u^0 + \epsilon (S^1 u^0 + S^2 u^0 + S^3 u^0) + \epsilon^2 (S^2 S^1 u^0 + S^3 S^1 u^0 + S^3 S^2 u^0) + \dots \quad (2.7h)$$

$$\vdots \quad (2.7i)$$

$$u^n = u^0 + \epsilon \sum_{m \neq n} S^m u^0 + \epsilon^2 \sum_{m \neq n} \sum_{p \neq m} S^m S^p u^0 + \dots, \quad x \in D'_n. \quad (2.7j)$$

Sumando a esta serie obtenida, la onda dispersada por el enésimo dispersor, se obtiene para el campo total:

$$u = u^0 + \epsilon \sum_{n=1}^N S^n u^0 + \epsilon^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m \neq n} S^n S^m u^0 + \dots, \quad x \in D'. \quad (2.8)$$

Encontrando de esta manera \mathbf{u} en términos de u^0 . Este resultado se puede extender a todos los puntos de D . En el caso de fracturas planas consiste en asignar valores de

\mathbf{u} a los puntos de la superficie de la fractura. Para inclusiones, implica usar el campo interior de cada una.

Ahora, considerando la distribución de dispersores como un conjunto estadístico y de esta manera, tomando el valor esperado del campo total $\langle \mathbf{u} \rangle$, se obtiene:

$$\langle u \rangle = u^0 + \epsilon \sum_{n=1}^N \langle S^n \rangle u^0 + \epsilon^2 \sum_{n=1}^N \sum_{m \neq n} \langle S^n S^m \rangle u^0 + O(\epsilon^3). \quad (2.9)$$

Asumiendo que la distribución estadística de las propiedades de cada fractura es la misma, se puede escribir:

$$\langle S^n \rangle = \langle S \rangle, \quad n = 1, 2, \dots, N. \quad (2.10)$$

Esta similaridad estadística también implica que $\langle S^n S^m \rangle$ es independiente de m y n , de modo que:

$$\langle S^n S^m \rangle = \langle S^1 S^2 \rangle, \quad m \neq n. \quad (2.11)$$

De esta manera, la ecuación 2.9 se convierte en:

$$\langle u \rangle = u^0 + \epsilon N \langle S \rangle u^0 + \epsilon^2 N(N-1) \langle S^1 S^2 \rangle u^0 + O(\epsilon^3), \quad (2.12)$$

Despejando u^0 de la ecuación 2.12, se obtiene:

$$u^0 = \{1 - \epsilon N \langle S \rangle + \epsilon^2 [N^2 \langle S \rangle^2 - N(N-1) \langle S^1 S^2 \rangle] + O(\epsilon^3)\} \langle u \rangle, \quad (2.13)$$

Aplicando el operador diferencial L a u^0 y teniendo en cuenta la condición dada por la ecuación (2.2):

$$\{L - \epsilon NL\langle S \rangle + \epsilon^2[N^2 L\langle S \rangle^2 - N(N-1)L\langle S^1 S^2 \rangle] + O(\epsilon^3)\} \langle u \rangle = 0, \quad (2.14)$$

Este resultado permite determinar las propiedades del campo de desplazamiento medio al tomar la forma de una onda plana propagándose a través del medio.

2.2 ECUACIÓN DIFERENCIAL–INTEGRAL DEL CAMPO MEDIO PARA UNA DISTRIBUCIÓN DE FRACTURAS

Para obtener la ecuación diferencial–integral del campo medio se toma explícito el hecho de que los dispersores son fracturas y se asume que todas las fracturas están alineadas en una dirección dada por un vector normal $\hat{\mathbf{n}}$ y que tienen las mismas condiciones internas. También, se promedia sobre la forma de cada fractura y se asume que $\bar{S}(x^n)$ es el operador correspondiente a una fractura plana, circular, con radio medio a y con centro en x^n ; de esta manera se puede determinar $\langle S \rangle$ en términos de $\bar{S}(x^n)$, de la forma:

$$\langle S \rangle = \int_D \bar{S}(\zeta) p(\zeta) dV_\zeta. \quad (2.15)$$

Similarmente,

$$\langle S^1 S^2 \rangle = \int \int_D \bar{S}(\zeta^1) \bar{S}(\zeta^2) p(\zeta^2 | \zeta^1) p(\zeta^1) dV_{\zeta^1} dV_{\zeta^2}. \quad (2.16)$$

Ahora, asumiendo que la distribución estadística de cada dispersor es homogénea:

$$p(\zeta) = \frac{1}{V}, \quad (2.17)$$

Donde V es el volumen de la región D . El número de densidad de fractura es entonces:

$$v = \frac{N}{V}. \quad (2.18)$$

Por lo tanto:

$$N \langle S \rangle = v \int_D \bar{S}(\zeta) dV_{\zeta}, \quad (2.19)$$

$$N(N-1) \langle S^1 S^2 \rangle = v \int \int_D \bar{S}(\zeta^1) \bar{S}(\zeta^2) n(\zeta^2 | \zeta^1) dV_{\zeta^1} dV_{\zeta^2}, \quad (2.20)$$

Donde $n(\zeta^2 | \zeta^1)$ es el número de densidad de fractura en ζ^2 tomando una fractura centrada en ζ^1 :

$$n(\zeta^2 | \zeta^1) = N(N-1) p(\zeta^2 | \zeta^1). \quad (2.21)$$

Reemplazando las ecuaciones (2.19) y (2.20) en la ecuación (2.14) se obtiene:

$$L\langle u \rangle - \epsilon v \int_D L\bar{S}(\zeta)dV_\zeta + \epsilon^2 v \int \int_D \bar{S}(\zeta^1)\bar{S}(\zeta^2)n(\zeta^2|\zeta^1)dV_{\zeta^1}dV_{\zeta^2} = 0. \quad (2.22)$$

Se han despreciado términos de orden ϵ^3 y más altos, considerándose sólo interacciones entre los dispersores hasta de segundo orden. El siguiente paso es obtener la solución para los tres términos que conforman la ecuación (2.22), para esto es necesario sustituir $\langle u \rangle$, teniendo en cuenta que desde el comienzo de este modelo se ha asumido que las propiedades medias del material fracturado sean las mismas que las de un sólido homogéneo. Por lo tanto, se puede considerar la propagación de una onda plana a través del medio, de modo que:

$$\langle u \rangle = \mathbf{A}e^{i\mathbf{k}\cdot\mathbf{x}}, \quad (2.23)$$

Donde \mathbf{A} y \mathbf{k} son constantes. De esta manera se asume que $\langle u \rangle$ es una buena aproximación a la onda que se propaga a través del medio que contiene una distribución de fracturas aproximada a la distribución estadística que se ha descrito.

2.3 MATRIZ EFECTIVA DEL MEDIO

Retomando la ecuación (2.22), Hudson [6] obtuvo expresiones para cada uno de los tres términos que conforman esta ecuación. A continuación se mostrarán estos resultados:

– Para el primer término:

$$L\langle u \rangle = (C_{ijkl}^0 n_j n_l - \rho v^2) a_k, \quad (2.24)$$

Donde C_{ijkl}^0 es el tensor de un medio isotrópico, cuya forma matricial usando la notación de Voigt [Ver Apéndice], está dada por:

$$C_{MN}^0 = \begin{bmatrix} \lambda + 2\mu & \lambda & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda + 2\mu & \lambda & 0 & 0 & 0 \\ \lambda & \lambda & \lambda + 2\mu & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \mu & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \mu & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \mu \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

λ y μ son conocidas como las constantes de Lamé. μ hace referencia a la rigidez del medio y λ está relacionada con la rigidez y la compresibilidad del medio.

– Para el segundo término de la ecuación (2.22), el modelo de Hudson [6] plantea las siguientes consideraciones:

- El radio medio a de las fracturas debe ser pequeño comparado con la longitud de onda.
- La normal $\hat{\mathbf{n}}$ de las fracturas es paralela al eje coordenado x_3 , de esta manera las fracturas están contenidas en el plano x_1x_2 .

De acuerdo a lo anterior, la expresión para el segundo término de la ecuación (2.22) es [6]:

$$\epsilon v \int_D L\bar{S}(\zeta) dV_\zeta = C_{ijkl}^1 a_k n_j n_l, \quad (2.26)$$

Donde C_{ijkl}^1 está dado por:

$$C_{ijkl}^1 = -\frac{\xi}{\mu} C_{m3ij}^0 C_{n3kl}^0 \bar{U}_{mn}(0), \quad (2.27)$$

Donde ξ es la densidad de fractura, dada por:

$$\xi = \frac{N}{V} a^3 \quad (2.28)$$

Siendo N el número de fracturas en el medio y V el volumen total del medio.

Dado C_{ijkl}^1 en forma matricial aplicando la notación de Voigt [Ver Apéndice], se obtiene:

$$C_{MN}^1 = -\frac{\xi}{\mu} \begin{bmatrix} \lambda^2 \bar{U}_3 & \lambda^2 \bar{U}_3 & \lambda(\lambda + 2\mu) \bar{U}_3 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda^2 \bar{U}_3 & \lambda^2 \bar{U}_3 & \lambda(\lambda + 2\mu) \bar{U}_3 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda(\lambda + 2\mu) \bar{U}_3 & \lambda(\lambda + 2\mu) \bar{U}_3 & \lambda(\lambda + 2\mu) \bar{U}_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu^2 \bar{U}_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu^2 \bar{U}_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

$\bar{U}_{mn}(0)$ es una matriz adimensional que depende de las condiciones internas de las fracturas, y debido a la simetría del problema se convierte en una matriz diagonal cuyas componentes \bar{U}_{11} y \bar{U}_{22} son iguales [6]. Esta matriz está dada por [7]:

$$\bar{U}_{kl}(0) = \frac{1}{a^2} \int_{\Sigma} U_{kl}(1; X) dS_X \quad (2.30)$$

– Para la deducción del tercer término de la ecuación 2.22, el modelo de Hudson [6] también considera:

La separación (d) de las fracturas debe ser mucho menor que la longitud de onda.

De esta manera obtiene:

$$\epsilon^2 \nu \int \int_D \bar{S}(\xi^1) \bar{S}(\xi^2) n(\xi^2 | \xi^1) dV_{\xi^1} dV_{\xi^2} = C_{ijkl}^2 a_k n_j n_l \quad (2.31)$$

Donde C_{ijkl}^2 está dado por [6]:

$$C_{ijkl}^2 = \frac{1}{\mu} C_{rskl}^1 C_{ijnv}^1 \chi_{nvr s} \quad (2.32a)$$

$$= \frac{(\nu a^3)^2}{\mu^2} C_{p3rs}^0 C_{q3kl}^0 C_{u3ij}^0 C_{m3ij}^0 \bar{U}_{pq}(0) \bar{U}_{mu}(0) \chi_{nvr s}, \quad (2.32b)$$

Donde $\chi_{nvr s}$ es una matriz adimensional, dada por la siguiente expresión:

$$\chi_{nvr s} = \frac{1}{15} \left\{ \delta_{nr} \delta_{vs} \left(4 + \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) - (\delta_{rv} \delta_{ns} + \delta_{nv} \delta_{rs}) \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \right\} \quad (2.33)$$

Donde $\alpha^2 = (\lambda + 2\mu)/\rho$ y $\beta^2 = \mu/\rho$ equivalen respectivamente a las velocidades de las ondas P y S en un medio isótropo. De esta manera, se puede escribir C_{ijkl}^2 en forma matricial, aplicando la notación de Voigt [Ver Apéndice], obteniéndose:

$$C_{MN}^2 = \frac{\xi^2}{15} \begin{bmatrix} \frac{\lambda^2 q}{\lambda+2\mu} (\bar{U}_3)^2 & \frac{\lambda^2 q}{\lambda+2\mu} (\bar{U}_3)^2 & \lambda q (\bar{U}_3)^2 & 0 & 0 & 0 \\ \frac{\lambda^2 q}{\lambda+2\mu} (\bar{U}_3)^2 & \frac{\lambda^2 q}{\lambda+2\mu} (\bar{U}_3)^2 & \lambda q (\bar{U}_3)^2 & 0 & 0 & 0 \\ \lambda q (\bar{U}_3)^2 & \lambda q (\bar{U}_3)^2 & (\lambda + 2\mu) q (\bar{U}_3)^2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{4\mu(3\lambda+8\mu)}{\lambda+2\mu} (\bar{U}_1)^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4\mu(3\lambda+8\mu)}{\lambda+2\mu} (\bar{U}_1)^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (2.34)$$

Donde:

$$q = 15 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right)^2 + 28 \left(\frac{\lambda}{\mu} \right) + 28 \quad (2.35)$$

Con los resultados obtenidos, la ecuación (2.22) se convierte en:

$$[C_{ijkl}^0 n_j n_l + C_{ijkl}^1 n_j n_l + C_{ijkl}^2 n_j n_l - \rho v^2 \delta_{ik}] a_k = 0 \quad (2.36)$$

Esta expresión es equivalente a la ecuación de Christoffel (1.13) escribiendo:

$$C_{ijkl} = C_{ijkl}^0 + C_{ijkl}^1 + C_{ijkl}^2 \quad (2.37)$$

De esta manera, el modelo de Hudson plantea que el medio efectivo fracturado C_{ijkl} es equivalente a la suma del tensor para un medio isótropo C_{ijkl}^0 y las perturbaciones dadas por los tensores C_{ijkl}^1 y C_{ijkl}^2 , que corresponden a las correcciones de primer y segundo orden, respectivamente. La corrección de primer orden hace referencia a la interacción de una fractura con sus vecinos más cercanos en cada lado y es negativa, reduciendo el

valor de las componentes del tensor del medio efectivo. La corrección de segundo orden hace referencia a la interacción de pares de fracturas, es decir, un fractura con sus dos vecinos más cercanos en cada lado, y es positiva, disminuyendo el efecto de la corrección de primer orden.

2.4 CONDICIONES ESPECÍFICAS PARA LAS FRACTURAS

Recordando que las condiciones de las fracturas están dadas por la matriz $\bar{U}_{mn}(0)$, a continuación se enunciarán los resultados para dos tipos de fracturas de interés.

2.4.1. Fracturas Secas

El modelo usualmente usado para fracturas secas es aquel en el que todas las componentes de la tracción sobre la cara de las fracturas desaparecen. La discontinuidad del desplazamiento dada a una tracción impuesta de cizalla, permanece igual que para una fractura con fluido. Para este caso de fracturas secas (dry cracks) las componentes de la matriz $\bar{U}_{mn}(0)$ están dadas por [7]:

$$\bar{U}_1(0) = \frac{16}{3} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 4\mu} \right) \quad (2.38a)$$

$$\bar{U}_3(0) = \frac{4}{3} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) \quad (2.38b)$$

2.4.2. Fracturas Sólidas

Considerando que las fracturas que contiene el medio tienen módulo de Bulk k' y de rigidez μ' , se pueden obtener las expresiones para $\bar{U}_1(0)$ y $\bar{U}_3(0)$, dadas por [7]:

$$\bar{U}_1(0) = \frac{16}{3} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 4\mu} \right) (1 + M)^{-1} \quad (2.39a)$$

$$\bar{U}_3(0) = \frac{4}{3} \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) (1 + K)^{-1} \quad (2.39b)$$

Donde,

$$M = \frac{4}{\pi} \left(\frac{\mu'}{\mu} \right) \left(\frac{\lambda + 2\mu}{3\lambda + 4\mu} \right) \quad (2.40a)$$

$$K = \left(\frac{k' + \frac{4}{3}\mu'}{\pi\mu} \right) \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right) \quad (2.40b)$$

2.5 COMPONENTES DEL MEDIO EFECTIVO

Al sumar el tensor de orden cero con las correcciones obtenidas de primer y segundo orden, se encuentra que el tensor del medio efectivo es equivalente al tensor de un medio transversalmente isótropo con el eje de simetría paralelo al eje x_3 [Ver Figura 2.1], donde usando la notación de Voigt [Ver Apéndice], matricialmente está dado por:

$$C_{MN} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & C_{66} \end{bmatrix} \quad (2.41)$$

Donde $C_{12} = C_{11} - 2C_{66}$. Por lo tanto, este medio sólo depende de cinco coeficientes elásticos. Este es un medio que presenta simetría hexagonal ya que se caracteriza por tener un eje de simetría y un plano de isotropía perpendicular a este eje. Este es un medio anisótropo, debido a que sus propiedades físicas varían de acuerdo a la dirección en las que se midan.

Para el cálculo de cada una de las componentes del medio se realiza la suma dada por la ecuación (2.37) usando los tensores descritos en las ecuaciones (2.25), (2.29) y (2.34). Para determinar estas componentes es necesario tener en cuenta las condiciones internas de las fracturas. A continuación se muestran las componentes del tensor efectivo para el fracturamiento de interés en función de la densidad de fracturas ξ .

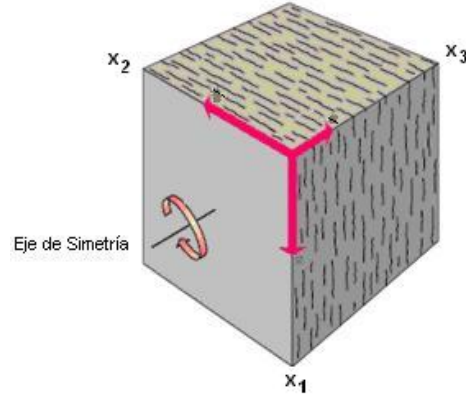


Figura 2.1: Medio Transversalmente Isótropo. Tomado de [2] Armstrong, Phil., et al., 1994.

2.5.1. Coeficientes Elásticos Para Un Medio Con Fracturas Secas

Estos coeficientes se obtienen reemplazando en las correcciones de primer y segundo orden, las expresiones para $\bar{U}_{mn}(0)$ dadas por las ecuaciones (2.38), obteniéndose:

$$C_{11} = \lambda + 2\mu - \frac{4}{3}\xi \frac{\lambda^2(\lambda + 2\mu)}{\mu(\lambda + \mu)} + \frac{16}{135}\xi^2 \frac{\lambda^2 q(\lambda + 2\mu)}{(\lambda + \mu)^2} \quad (2.42a)$$

$$C_{13} = \lambda - \frac{4}{3}\xi \frac{\lambda(\lambda + 2\mu)^2}{\mu(\lambda + \mu)} + \frac{16}{135}\xi^2 \lambda q \left(\frac{\lambda + 2\mu}{\lambda + \mu} \right)^2 \quad (2.42b)$$

$$C_{33} = \lambda + 2\mu - \frac{4}{3}\xi \frac{(\lambda + 2\mu)^3}{\mu(\lambda + \mu)} + \frac{16}{135}\xi^2 \frac{q(\lambda + 2\mu)^3}{(\lambda + \mu)^2} \quad (2.42c)$$

$$C_{44} = \mu - \frac{16}{3}\xi \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{\mu(3\lambda + 4\mu)} + \frac{256}{135}\xi^2 \frac{4\mu(3\lambda + 8\mu)(\lambda + 2\mu)}{(3\lambda + 4\mu)^2} \quad (2.42d)$$

$$C_{66} = \mu \quad (2.42e)$$

2.5.2. Coeficientes Elásticos Para Un Medio Con Fracturas Sólidas

Estos coeficientes se obtienen reemplazando las expresiones para $\bar{U}_{mn}(0)$ dadas por las ecuaciones (2.39) en las correcciones de primer y segundo orden, obteniéndose:

$$C_{11} = \lambda + 2\mu - \frac{4}{3}\xi \frac{\lambda^2(\lambda + 2\mu)}{\mu(\lambda + \mu)(1 + K)} + \frac{16}{135}\xi^2 \frac{\lambda^2 q(\lambda + 2\mu)}{[(\lambda + \mu)(1 + K)]^2} \quad (2.43a)$$

$$C_{13} = \lambda - \frac{4}{3}\xi \frac{\lambda(\lambda + 2\mu)^2}{\mu(\lambda + \mu)(1 + K)} + \frac{16}{135}\xi^2 \lambda q \left(\frac{\lambda + 2\mu}{(\lambda + \mu)(1 + K)} \right)^2 \quad (2.43b)$$

$$C_{33} = \lambda + 2\mu - \frac{4}{3}\xi \frac{(\lambda + 2\mu)^3}{\mu(\lambda + \mu)(1 + K)} + \frac{16}{135}\xi^2 \frac{q(\lambda + 2\mu)^3}{[(\lambda + \mu)(1 + K)]^2} \quad (2.43c)$$

$$C_{44} = \mu - \frac{16}{3}\xi \frac{\mu(\lambda + 2\mu)}{\mu(3\lambda + 4\mu)(1 + M)} + \frac{256}{135}\xi^2 \frac{4\mu(3\lambda + 8\mu)(\lambda + 2\mu)}{[(3\lambda + 4\mu)(1 + M)]^2} \quad (2.43d)$$

$$C_{66} = \mu \quad (2.43e)$$

2.6 COEFICIENTES DE LA MATRIZ DE CHRISTOFFEL PARA UN MEDIO TRANSVERSALMENTE ISÓTROPO

Como se ha observado, el modelo de Hudson permite caracterizar la matriz de coeficientes elásticos para el medio de interés, la cual como ya se mencionaba, equivale a la matriz de un medio transversalmente isótropo. Por lo tanto, de las ecuaciones (1.16), se pueden reducir las expresiones de los coeficientes de la matriz de Christoffel debido a la nulidad en algunos coeficientes de la matriz del medio transversalmente isótropo, dando las siguientes expresiones:

$$\Gamma_{11} = C_{11}n_1^2 + C_{66}n_2^2 + C_{44}n_3^2 \quad (2.44a)$$

$$\Gamma_{22} = C_{66}n_1^2 + C_{11}n_2^2 + C_{44}n_3^2 \quad (2.44b)$$

$$\Gamma_{33} = C_{44}(n_1^2 + n_2^2) + C_{33}n_3^2 \quad (2.44c)$$

$$\Gamma_{23} = \Gamma_{32} = (C_{13} + C_{44})n_2n_3 \quad (2.44d)$$

$$\Gamma_{13} = \Gamma_{31} = (C_{13} + C_{44})n_1n_3 \quad (2.44e)$$

$$\Gamma_{12} = \Gamma_{21} = (C_{11} - C_{66})n_1n_2 \quad (2.44f)$$

Determinados estos coeficientes sólo es necesario determinar la dirección de propagación $\hat{\mathbf{n}}$ de la onda elástica en el medio para hallar las diferentes velocidades.

2.7 DENSIDAD EFECTIVA DEL MEDIO

Al variar la cantidad de fracturas en el medio, la densidad efectiva ρ varía en función de la densidad de fracturas. Para el caso de fracturas secas, esta variación está dada por:

$$\rho = \rho_0(1 - \xi) \quad (2.45)$$

Donde ρ_0 es la densidad efectiva del medio sin fracturas. Para el caso de fracturas sólidas, considerando que estas son de aluminio, la densidad efectiva está dada por:

$$\rho = \rho_0 + (\rho_{al} - \rho_0)\xi \quad (2.46)$$

Donde ρ_{al} es la densidad efectiva del aluminio.

VELOCIDADES DE PROPAGACIÓN

A continuación se derivan expresiones para las velocidades de propagación de las ondas en un medio transversalmente isótropo, en términos de las propiedades del medio; esto es, su densidad efectiva ρ y los coeficientes elásticos C_{MN} . Para esto es necesario resolver el problema de valores y vectores propios planteado por la ecuación de Christoffel (1.13) mencionada anteriormente.

3.1 VELOCIDADES DE PROPAGACIÓN EN UNA DIRECCIÓN ARBITRARIA

Considerando una dirección de propagación arbitraria $\hat{\mathbf{n}} = (n_1, n_2, n_3)$ de las ondas en un medio transversalmente isótropo y resolviendo el determinante de la ecuación (1.17) para dicho medio, se obtiene:

$$\begin{aligned}
\det[\Gamma - \rho v^2 \mathbf{I}] &= [C_{66}(n_1 + n_2) + C_{44}n_3^2 - \rho v^2] \\
&\quad \{-C_{13}^2(n_1^2 + n_2^2)n_3^2 - 2C_{13}C_{44}(n_1^2 + n_2^2)n_3^2 \\
&\quad + C_{33}C_{44}n_3^4 - C_{44}(n_1^2 + n_2^2)^2\rho v^2 - C_{33}n_3^2\rho v^2 - C_{44}n_3^2\rho v^2 \\
&\quad + C_{11}(n_1^2 + n_2^2)[C_{44}(n_1^2 + n_2^2) + C_{33}n_3^2 - \rho v^2] + \rho^2 v^4\}
\end{aligned} \tag{3.1}$$

Ahora, de acuerdo a las propiedades del medio, se puede expresar el determinante anterior en función de n_3 , que hace referencia a la dirección de propagación $\hat{\mathbf{n}}$ con respecto al eje de simetría del medio x_3 :

$$\begin{aligned}
\det[\Gamma - \rho v^2 \mathbf{I}] &= [C_{66}(1 - n_3^2) + C_{44}n_3^2 - \rho v^2] \\
&\quad \{[C_{33}C_{44}n_3^4 - [2C_{13}C_{44} - C_{11}C_{33} + C_{13}^2]n_3^2(1 - n_3^2) \\
&\quad + C_{11}C_{44}(1 - n_3^2)^2] \\
&\quad + [(C_{11} - C_{33})n_3^2 - (C_{11} + C_{44})]\rho v^2 + \rho^2 v^4\}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

La ausencia de n_1 y n_2 ilustra el hecho de que para estudiar las propiedades de un medio transversalmente isótropo, se puede considerar la propagación en un plano arbitrario que contenga el eje de simetría. Solucionando la ecuación cuadrática del determinante, se obtiene:

$$\rho v_{SH}^2 = [C_{66}(1 - n_3^2) + C_{44}n_3^2] \tag{3.3}$$

Para la solución bicuadrática del determinante, se obtiene:

$$\rho v_{qP}^2 = \frac{1}{2}[(C_{33} - C_{11})n_3^2 + C_{11} + C_{44} + D], \tag{3.4}$$

$$\rho v_{qSV}^2 = \frac{1}{2}[(C_{33} - C_{11})n_3^2 + C_{11} + C_{44} - D], \quad (3.5)$$

Donde D está dado por:

$$D = \{[(C_{11} - C_{33})n_3^2 - C_{11} - C_{44}]^2 - 4[C_{33}C_{44}n_3^4 - (2C_{13}C_{44} - C_{11}C_{33} + C_{13}^2)n_3^2(1 - n_3^2) + C_{11}C_{44}(1 - n_3^2)^2]\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.6)$$

El uso de los subíndices SH, qP y qSV se explicará más adelante.

3.2 POLARIZACIONES DE LAS ONDAS

Para conocer las polarizaciones de las ondas que se propagan en el medio transversalmente isótropo, es necesario resolver el sistema dado por la ecuación de Christoffel (1.13), donde para mayor simplificación en los cálculos se hace uso de la simetría del medio alrededor del eje x_3 y se toma el plano x_1x_3 que contiene el eje de simetría; de esta manera $n_2 = 0$, obteniéndose el siguiente sistema a resolver:

$$\begin{bmatrix} n_1^2 C_{11} + n_3 C_{44} - (\rho v^2)_i & 0 & n_1 n_3 (C_{13} + C_{44}) \\ 0 & n_1^2 C_{66} + n_3 C_{44} - (\rho v^2)_i & 0 \\ n_1 n_3 (C_{13} + C_{44}) & 0 & n_1^2 C_{44} + n_3^2 C_{33} - (\rho v^2)_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Donde $(\rho v^2)_i$ hace referencia a las soluciones obtenidas anteriormente para el determinante, dadas por las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5). Desacoplando el sistema anterior:

$$[n_1^2 C_{66} + n_3^2 C_{44} - (\rho v^2)_i] a_2 = 0 \quad (3.8)$$

y

$$\begin{bmatrix} n_1^2 C_{11} + n_3 C_{44} - (\rho v^2)_i & n_1 n_3 (C_{13} + C_{44}) \\ n_1 n_3 (C_{13} + C_{44}) & n_1^2 C_{44} + n_3^2 C_{33} - (\rho v^2)_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Este desacoplamiento muestra que existe una velocidad cuya polarización es paralela al eje x_2 dada por la ecuación (3.8) y la cual es perpendicular a los otros dos vectores de polarización contenidos en el plano $x_1 x_3$ dados por el sistema (3.9). Para la solución no trivial de la ecuación (3.8), se obtiene:

$$\hat{a} = (0, a_2, 0) \quad (3.10)$$

Este resultado está relacionado con la solución dada por la ecuación (3.3), la cual es denotada de esta forma (SH) debido a que es una onda S contenida en el plano de isotropía y cuya polarización es paralela al eje x_2 . Esto muestra que para cualquier propagación dada en un plano arbitrario que contenga el eje de simetría, el medio transversalmente isótropo presenta una velocidad v_{SH} cuya polarización es perpendicular a este plano.

Para el sistema (3.9) que corresponde a las polarizaciones de las soluciones (3.4) y (3.5), la solución no trivial está dada de la forma:

$$\hat{a} = (a_1, 0, a_3) \quad (3.11)$$

La cual es equivalente a un vector contenido en el plano x_1x_3 , lo que muestra que la polarización de estas ondas no es paralela ni ortogonal a la dirección de propagación. Por esta razón, se denota para las soluciones dadas por las ecuaciones (3.4) y (3.5) como cuasi-P (qP) o cuasi-S-vertical (qSV), respectivamente. De esta manera, del sistema (3.9) se puede encontrar el ángulo ϕ que forma el vector de polarización con el eje de simetría x_3 , dado por:

$$\begin{aligned}\phi &= \arctan \frac{a_1}{a_3} \\ &= \arctan \frac{(\rho v^2)_i - n_1^2 C_{44} - n_3^2 C_{33}}{n_1 n_3 (C_{13} + C_{44})}\end{aligned}\tag{3.12}$$

Donde $(\rho v^2)_i$ hace referencia a reemplazar las soluciones qP y qSV. Estos resultados obtenidos nos permiten obtener las velocidades con sus respectivas polarizaciones para direcciones de propagación específicas.

3.3 PROPAGACIÓN EN EL PLANO DE ISOTROPÍA

Considerando la dirección de propagación a lo largo del eje x_1 , que está contenido dentro del plano de isotropía del medio transversalmente isótropo:

$$\hat{\mathbf{n}} = (1, 0, 0)\tag{3.13}$$

De modo que $n_3 = 0$, el cual reemplazando para las velocidades obtenidas en las ecua-

ciones (3.3), (3.4) y (3.5), se obtiene:

$$(\rho v^2)_1 = C_{66} \quad (3.14a)$$

$$(\rho v^2)_2 = C_{11} \quad (3.14b)$$

$$(\rho v^2)_3 = C_{44} \quad (3.14c)$$

Resolviendo el sistema (3.7), se encuentra para las polarizaciones con sus respectivas velocidades, las siguientes expresiones:

$$\hat{a} = (0, 1, 0) \rightarrow v_{SH} = \sqrt{\frac{C_{66}}{\rho}} \quad (3.15a)$$

$$\hat{a} = (1, 0, 0) \rightarrow v_{P1} = \sqrt{\frac{C_{11}}{\rho}} \quad (3.15b)$$

$$\hat{a} = (0, 0, 1) \rightarrow v_{SV} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (3.15c)$$

Donde v_{P1} es la velocidad de la onda P que se propaga en el plano x_1x_2 .

3.4 PROPAGACIÓN A LO LARGO DEL EJE DE SIMETRÍA

Considerando la dirección de propagación a lo largo del eje de simetría x_3 :

$$\hat{\mathbf{n}} = (0, 0, 1) \quad (3.16)$$

De modo que $n_3 = 1$, el cual reemplazando para las velocidades obtenidas en las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5), se obtienen las dos siguientes soluciones:

$$(\rho v^2)_1 = C_{44} \quad (3.17a)$$

$$(\rho v^2)_2 = C_{33} \quad (3.17b)$$

Donde la solución de las ecuaciones (3.3) y (3.5) coinciden. Resolviendo el sistema (3.7), se encuentra para las polarizaciones con sus respectivas velocidades, las siguientes expresiones:

$$\hat{a} = (1, 0, 0) \rightarrow v_{SV} = \sqrt{\frac{C_{44}}{\rho}} \quad (3.18a)$$

$$\hat{a} = (0, 0, 1) \rightarrow v_{P3} = \sqrt{\frac{C_{33}}{\rho}} \quad (3.18b)$$

Donde v_{P3} es la velocidad de la onda P que se propaga a lo largo del eje de simetría x_3 .

3.5 PROPAGACIÓN A UN ÁNGULO CON RESPECTO AL EJE DE SIMETRÍA

Considerando la dirección de propagación de las ondas contenida en el plano x_1x_3 a un ángulo θ con respecto al eje de simetría:

$$\hat{\mathbf{n}} = (\sin \theta, 0, \cos \theta) \quad (3.19)$$

De modo que $n_3 = \cos \theta$. Las expresiones dadas por las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5) pueden ser reescritas como:

$$\rho v_{SH}^2(\theta) = C_{66} \sin^2 \theta + C_{44} \cos^2 \theta \quad (3.20a)$$

$$\rho v_{qP}^2(\theta) = \frac{1}{2}[C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \sin^2 \theta + D(\theta)] \quad (3.20b)$$

$$\rho v_{qSV}^2(\theta) = \frac{1}{2}[C_{33} + C_{44} + (C_{11} - C_{33}) \sin^2 \theta - D(\theta)], \quad (3.20c)$$

Donde D en función del ángulo θ se convierte en:

$$\begin{aligned} D(\theta) = & \{(C_{33} - C_{44})^2 \\ & + 2[2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})] \sin^2 \theta \\ & + [(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})^2 - 4(C_{13} + C_{44})^2] \sin^4 \theta\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.21)$$

Para obtener la polarización de las ondas qP y qSV, se puede reescribir la ecuación (3.12) en función del ángulo θ :

$$\phi = \arctan \frac{(\rho v^2)_i - C_{44} \sin^2 \theta - C_{33} \cos^2 \theta}{(C_{13} + C_{44}) \sin \theta \cos \theta} \quad (3.22)$$

Recordando que la polarización de la onda SH siempre es perpendicular al plano que contiene el eje de simetría.

Si se considera una propagación a 45° del eje de simetría:

$$\hat{\mathbf{n}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \quad (3.23)$$

Se obtiene para la velocidad y polarización de la onda SH:

$$\hat{a} = (0, 1, 0) \rightarrow v_{SH} = \sqrt{\frac{C_{66} + C_{44}}{2\rho}} \quad (3.24)$$

Para el caso de las velocidades v_{qP} y v_{qSV} , se obtiene:

$$v_{qP}^2 = \frac{1}{4\rho} [(C_{11} + 2C_{44} + C_{33}) + \sqrt{(C_{11} - C_{33})^2 + 4(C_{13} + C_{44})^2}] \quad (3.25)$$

$$v_{qSV}^2 = \frac{1}{4\rho} [(C_{11} + 2C_{44} + C_{33}) - \sqrt{(C_{11} - C_{33})^2 + 4(C_{13} + C_{44})^2}] \quad (3.26)$$

Cuyos respectivos ángulos de polarización ϕ , de acuerdo a la ecuación (3.22), están dados por:

$$\phi = \arctan \frac{(C_{11} - C_{33}) + \sqrt{(C_{11} - C_{33})^2 + 4(C_{13} + C_{44})^2}}{2(C_{13} + C_{44})} \quad (3.27)$$

$$\phi = \arctan \frac{(C_{11} - C_{33}) - \sqrt{(C_{11} - C_{33})^2 + 4(C_{13} + C_{44})^2}}{2(C_{13} + C_{44})} \quad (3.28)$$

PARÁMETROS DE THOMSEN

Los cinco coeficientes elásticos que conforman la matriz del medio transversalmente isótropo no ofrecen la información necesaria para el estudio de la anisotropía. Es por esto necesario la definición de nuevos parámetros que permitan determinar el grado de anisotropía que presentan las muestras a estudiarse. Fue Thomsen [14] quien con el fin de simplificar las expresiones dadas anteriormente para las velocidades en las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5), introdujo una notación basada en las ya conocidas velocidades de onda P y S para un medio isótropo y en tres parámetros adimensionales de anisotropía los cuales tuvieran las siguientes características:

- Sean combinaciones de coeficientes elásticos de la matriz de un medio transversalmente isótropo.
- Sean adimensionales de modo que se pueda hablar de un porcentaje de anisotropía.
- Sean cero para el caso degenerado de isotropía, de tal manera que medios con valores pequeños ($\ll 1$) de anisotropía presenten anisotropía débil.

Teniendo en cuenta estas características, las combinaciones sugeridas por Thomsen para los tres parámetros son las siguientes:

$$\varepsilon \equiv \frac{C_{11} - C_{33}}{2C_{33}}; \quad (4.1a)$$

$$\gamma \equiv \frac{C_{66} - C_{44}}{2C_{44}}; \quad (4.1b)$$

$$\delta^* \equiv \frac{1}{2C_{33}^2} [2(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})(C_{11} + C_{33} - 2C_{44})]. \quad (4.1c)$$

Donde ε hace referencia a la anisotropía de la onda P, γ hace referencia a la anisotropía de la onda S. En el caso del parámetro δ^* no se puede evidenciar su significado físico, pero muestra una relación entre las velocidades de onda P y S. Estos tres parámetros son del mismo orden de magnitud. De esta manera, las expresiones para las velocidades dadas por las ecuaciones (3.3), (3.4) y (3.5) quedan reducidas a las siguientes expresiones:

$$v_{SH}^2(\theta) = \beta^2 [1 + 2\gamma \sin^2 \theta]; \quad (4.2a)$$

$$v_{qP}^2(\theta) = \alpha^2 [1 + \varepsilon \sin^2 \theta + D^*(\theta)]; \quad (4.2b)$$

$$v_{qSV}^2(\theta) = \beta^2 \left[1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \varepsilon \sin^2 \theta - \frac{\alpha^2}{\beta^2} D^*(\theta) \right] \quad (4.2c)$$

Con,

$$D^*(\theta) \equiv \frac{1}{2} \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} \right) \left\{ \left[1 + \frac{4\delta^*}{(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2})^2} \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \frac{4(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2} + \varepsilon)\varepsilon}{(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2})^2} \sin^4 \theta \right]^{\frac{1}{2}} - 1 \right\} \quad (4.3)$$

4.1 ANISOTROPÍA DÉBIL

Pese a las simplificaciones hechas por los parámetros definidos anteriormente, la complejidad algebraica de las ecuaciones para las velocidades v_{qP} , v_{qSV} y v_{SH} , dificulta el claro entendimiento físico del fenómeno de la anisotropía. Por antecedentes experimentales [1, 11, 14] se ha encontrado que la mayoría de rocas son débilmente anisótropas ($\varepsilon, \gamma y \delta < 0,2$). Teniendo en cuenta lo anterior, se pueden obtener nuevas expresiones para las velocidades, enfocando el estudio de la anisotropía débil. Esto se logra haciendo uso de la serie Taylor [Ver Apéndice] con el fin de obtener una aproximación en términos lineales de las velocidades de onda en función de los parámetros de anisotropía, para un θ fijo.

Tomando la expresión para la velocidad v_{SH} dada por la ecuación (4.2a) y construyendo una serie de Taylor en términos γ [Ver Apéndice], con θ fijo y tomando sólo términos lineales, se obtiene:

$$v_{SH} \approx \beta[1 + \gamma \sin^2 \theta] \quad (4.4)$$

Para obtener las aproximaciones para las velocidades v_{qP} y v_{qSV} , primero se toma la aproximación del término cuadrático D^* dado por la ecuación (4.3), aplicando la serie de Taylor de dos variables [Ver Apéndice]. En este caso las variables son δ^* y γ , con θ fijo, obteniéndose:

$$D^* \approx \frac{\delta^* \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2})} + \varepsilon \sin^4 \theta \quad (4.5)$$

Esta expresión se sustituye en las expresiones para las velocidades v_{qP} y v_{qSV} , sobre

las cuales se aplica la serie de Taylor de dos variables para obtener las respectivas aproximaciones de estas velocidades en términos lineales. Para la velocidad v_{qP} dada por la ecuación (4.2b), se obtiene:

$$v_{qP} \approx \alpha + \frac{\alpha}{2}\varepsilon \sin^4 \theta + \frac{\alpha}{2}\varepsilon \sin^2 \theta + \frac{\alpha \delta^* \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{2 \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)} \quad (4.6)$$

Para obtener una mayor simplificación de esta expresión, se suma y se resta el término $\frac{\alpha}{2}\varepsilon \sin^4 \theta$, de modo que:

$$v_{qP} \approx \alpha + \alpha\varepsilon \sin^4 \theta + \frac{\alpha}{2} \left(\varepsilon + \frac{\delta^*}{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \quad (4.7)$$

De esta expresión se puede definir un nuevo parámetro δ para el caso de anisotropía débil, el cual sustituye al parámetro δ^* y está dado por:

$$\delta = \left(\varepsilon + \frac{\delta^*}{1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}} \right) \quad (4.8)$$

Con esta definición, se obtiene finalmente una mayor simplificación para la velocidad v_{qP} :

$$v_{qP}(\theta) = \alpha(1 + \delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta + \varepsilon \sin^4 \theta) \quad (4.9)$$

De igual manera, para la expansión en términos lineales de la velocidad v_{qSV} dada por la ecuación (4.2c), se obtiene:

$$\begin{aligned}
v_{qSV} &\approx \beta + \frac{\beta \alpha^2}{2 \beta^2} \varepsilon (\sin^2 \theta - \sin^4 \theta) - \frac{\beta \alpha^2 \delta^* \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{2 \beta^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)} \\
&\approx \beta + \frac{\beta \alpha^2}{2 \beta^2} \varepsilon \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \frac{\beta \alpha^2 \delta^* \sin^2 \theta \cos^2 \theta}{2 \beta^2 \left(1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}\right)}
\end{aligned} \tag{4.10}$$

Para obtener una mayor simplificación de esta expresión, se suma y se resta el término $\frac{\beta \alpha^2}{2 \beta^2} \varepsilon \sin^2 \theta \cos^2 \theta$, donde agrupando los términos, se obtiene:

$$v_{qSV} \approx \beta \left[1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} \varepsilon (\sin^2 \theta \cos^2 \theta) - \frac{\alpha^2}{\beta^2} \frac{1}{2} \left(\varepsilon + \frac{\delta^*}{1 - \frac{\alpha^2}{\beta^2}} \right) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] \tag{4.11}$$

Donde al reemplazar el nuevo parámetro δ , se obtiene:

$$v_{qSV}(\theta) = \beta \left[1 + \frac{\alpha^2}{\beta^2} (\varepsilon - \delta) \sin^2 \theta \cos^2 \theta \right] \tag{4.12}$$

Sustituyendo δ^* y ε , dados por las ecuaciones (4.1a) y (4.1c) en δ , se obtiene este nuevo parámetro en función de los coeficientes elásticos, dado por:

$$\delta = \frac{(C_{13} + C_{44})^2 - (C_{33} - C_{44})^2}{2C_{33}(C_{33} - C_{44})} \tag{4.13}$$

Para un mayor entendimiento de este parámetro δ , observando la ecuación (4.9), se encuentra que para ángulos pequeños el término $\varepsilon \sin^4 \theta$ tiende a ser más pequeño que el término $\delta \sin^2 \theta \cos^2 \theta$. Esto muestra que el parámetro δ domina mayormente los efectos para la propagación cercana al eje de simetría, donde el parámetro ε es despreciable. Esto también se puede evidenciar en la ecuación (4.13) debido a que el parámetro δ no contiene el coeficiente elástico C_{11} , es decir, la velocidad de la onda P horizontal. De

la ecuación (4.9) también se puede observar que α y β son las velocidades de las ondas P Y S a lo largo del eje de simetría. En el caso de la propagación cercana al plano de isotropía, los parámetros ε y γ son los que dominan la anisotropía.

METODOLOGÍA EXPERIMENTAL

La metodología experimental que se muestra a continuación permite obtener los datos de los tiempos de propagación de las ondas elásticas en muestras de rocas, los cuales fueron analizados para poder obtener las conclusiones de este trabajo.

5.1 MONTAJE

El montaje realizado se muestra en la figura 5.1, el cual estaba conformado por un pulsador que emite la señal acústica con una frecuencia establecida. Este pulsador es de marca SOFRANEL modelo 5055 PR, su ancho de pulso es de $10\mu s$ y el período de la señal es de 7ms.

La señal eléctrica emitida del pulsador se convierte en una perturbación mecánica gracias al piezoeléctrico emisor pegado a la muestra. Una vez la onda se propagaba sobre la muestra, era recibida por un cristal piezoeléctrico receptor, que transforma la onda nuevamente en una señal eléctrica. Esta señal llegaba a un osciloscopio que permitía visualizarla, para determinar el tiempo de propagación de la onda a través de la muestra.

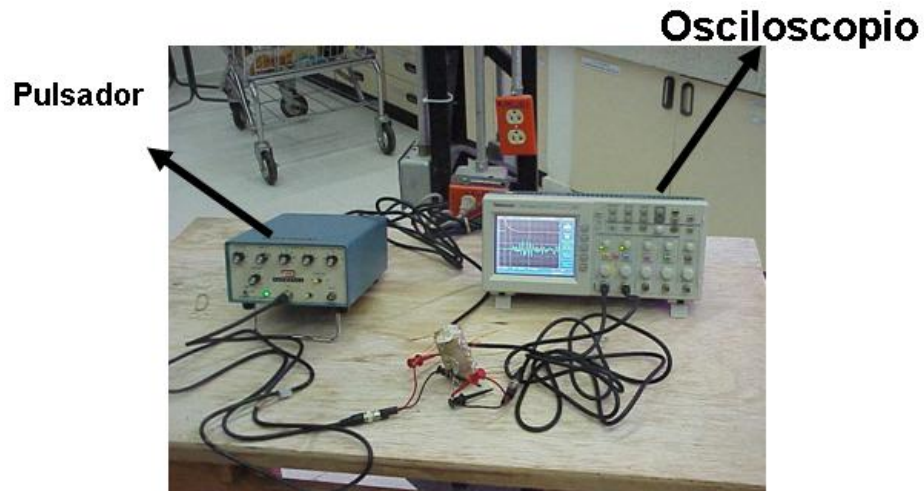


Figura 5.1: Montaje Experimental.

El digitalizador de la señal u osciloscopio sirve para mostrar las señales del transmisor y del receptor simultáneamente, con controles individuales y registrar los tiempos de propagación de los pulsos al propagarse en las muestras por medio de unos cursores. El osciloscopio utilizado es de marca TEKTRONIX TDS 2024 de cuatro canales. En la figura 5.2 se muestra el registro de una señal recibida.

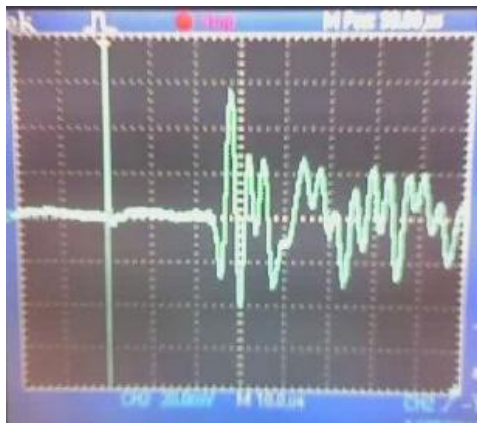


Figura 5.2: Registro de una señal recibida.

5.2 CRISTALES PIEZOELECTRICOS

El fenómeno de la piezoelectricidad fue observado por primera vez por Pierre y Jacques Curie en 1881, quienes al estudiar la compresión del cuarzo encontraron una analogía electromecánica en este cristal, la cual también es característica de otros cristales. Este fenómeno consiste en someter un cristal piezoeléctrico a deformaciones mecánicas, apareciendo en este una polarización que da origen a un campo eléctrico. Análogamente, la aplicación de un campo eléctrico es acompañada de vibraciones elásticas del material, consecuencia del denominado efecto piezoeléctrico inverso. De este modo, al excitar uno de estos cristales con un campo eléctrico alterno, el cristal oscila con la misma frecuencia de excitación que el campo, y su amplitud toma valores extremos para ciertas frecuencias, denominadas de resonancia [12].

Se usaron dos tipos de cristales piezoeléctricos [10]: tipo P, para la emisión y recepción de ondas P, y tipo S, para la emisión y recepción de ondas S; cuya frecuencia de resonancia era de 0.6 Mhz. Los cristales se cortaron antes de realizar el montaje sobre las muestras, ya que estos se adquirieron en el mercado con dimensiones más grandes que las requeridas. La forma de los cristales es inicialmente cuadrada con un área de $6,25\text{cm}^2$. Después de realizar el corte, el área de cada cristal es de aproximadamente 25mm^2 , obteniendo entonces 25 cristales a partir del cristal inicial. Al realizar este corte se modificó la frecuencia de los cristales, siendo la nueva frecuencia de resonancia de 3Mhz, por lo que es 5 veces mayor que la frecuencia de resonancia antes del corte. Esto se debe a que la frecuencia está relacionada con el área, de modo que al reducir el área de los cristales, la frecuencia de estos aumenta.

5.3 MUESTRAS SINTÉTICAS

Estas muestras fueron fabricadas en el laboratorio de Análisis Especiales de Ecopetrol-ICP. Consistían en una mezcla de arena mesh (cuarzo) con resina epóxica. Estas muestras eran de forma cilíndrica y a cada una se le agregaron cierta cantidad de inclusiones que simulaban fracturas. Estas inclusiones eran de Aluminio y circulares, con un diámetro de 6mm y un espesor de 0.07mm [Ver figura 5.3]. En la tabla 5.1 se relacionan estas muestras.

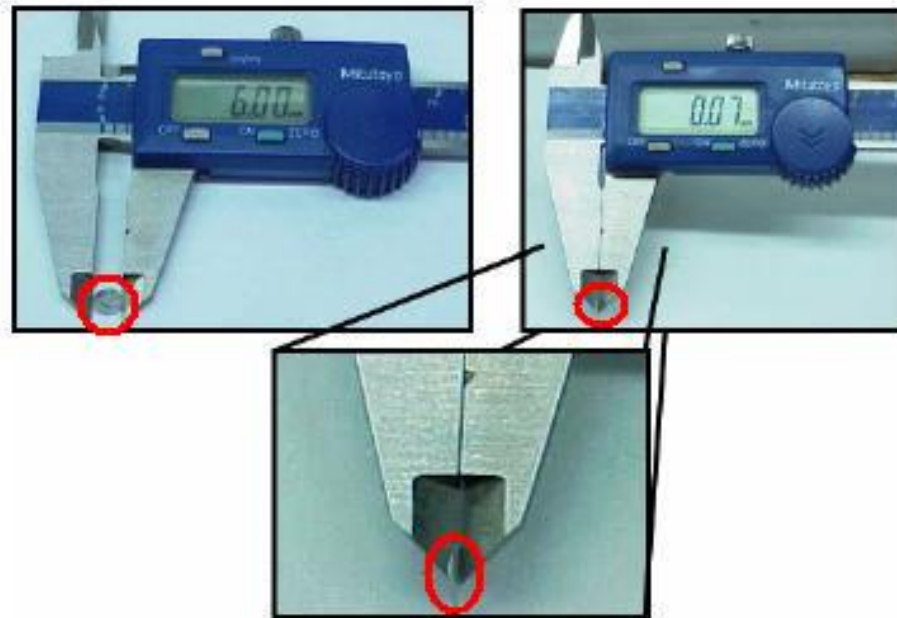


Figura 5.3: Inclusiones de aluminio en las muestras sintéticas.

También se diseñaron muestras cilíndricas sintéticas con inclusiones secas. Esto se logró disolviendo las láminas de aluminio, haciendo uso de ácido clorhídrico, el cual al interactuar con el aluminio, disolvía este último. En la tabla 5.2 se relacionan estas muestras.

Muestra N°	ξ	Longitud $\pm 0,05 * 10^{-2}m$	Diámetro $\pm 0,05 * 10^{-2}m$	Masa $\pm 0,01 * 10^{-3}Kg$	Densidad $\pm 101kg/m^3$
0	0.000	6.95	3.69	137.84	1856
1	0.020	7.18	3.70	143.47	1861
2	0.040	6.78	3.71	132.37	1809
3	0.060	7.22	3.73	142.20	1803
4	0.080	7.31	3.74	144.78	1802
5	0.120	6.17	3.70	120.33	1814

Tabla 5.1: Datos de muestras sintéticas con inclusiones sólidas de aluminio.

Muestra N°	ξ	Longitud $\pm 0,05 * 10^{-2}m$	Diámetro $\pm 0,05 * 10^{-2}m$	Masa $\pm 0,01 * 10^{-3}Kg$	Densidad $\pm 101kg/m^3$
6	0.035	6.94	3.70	137.82	1843
7	0.047	6.85	3.74	136.43	1791
8	0.058	7.05	3.71	140.87	1847
9	0.076	7.00	3.71	139.68	1844
10	0.107	6.38	3.76	127.41	1803

Tabla 5.2: Datos de muestras sintéticas con inclusiones secas.

5.4 MUESTRAS NATURALES

Para la adquisición de estas muestras cilíndricas se hizo un estudio de la intensidad de fracturamiento del pozo del cual se extrajeron, donde se encontró que a ciertas profundidades que presentaban mayor cantidad de microfracturas también se presentaba la mayor intensidad de fracturamiento. Con base en lo anterior, se seleccionaron algunas profundidades donde se presentaba mayor intensidad de fracturamiento con el fin de

tener una mayor probabilidad de encontrar microfrazas en las muestras a adquirirse.

En total, fueron 7 plugs los tomados para este estudio*. Se tomaron las secciones delgadas para cada plug para poder hacer el cálculo de la densidad de microfrazas†. En la tabla 5.3 se relacionan estas muestras. Se tomaron dos secciones delgadas en cada muestra: una sobre el plano horizontal de la muestra cilíndrica y otra verticalmente. En la figura 5.4 se puede apreciar una de las secciones delgadas tomadas, en la cual se puede observar la presencia de microfrazas.

Muestra Nº	ξ Hor.	ξ Vert.	Longitud $\pm 0,05 * 10^{-2}m$	Diámetro $\pm 0,05 * 10^{-2}m$	Masa $\pm 0,01 * 10^{-3}Kg$	Densidad $\pm 197kg/m^3$
11	0.184	0.010	3.70	3.82	106.97	2515.90
12	0.000	0.000	3.82	3.83	109.32	2488.85
13	0.000	0.000	4.21	3.83	122.77	2537.49
14	0.001	0.035	4.20	3.86	124.82	2538.01
15	0.029	0.023	4.13	3.37	120.13	3263.79
16	0.492	0.305	3.88	3.86	116.01	2548.40
17	0.018	0.047	4.20	3.83	121.57	2512.57

Tabla 5.3: Datos de muestra naturales extraídas de formaciones de interés para Ecopetrol-ICP.

*Estos plugs fueron tomados de corazones de la litoteca de ECOPETROL-ICP

†Estas secciones fueron realizadas en el laboratorio de Petrología de ECOPETROL-ICP

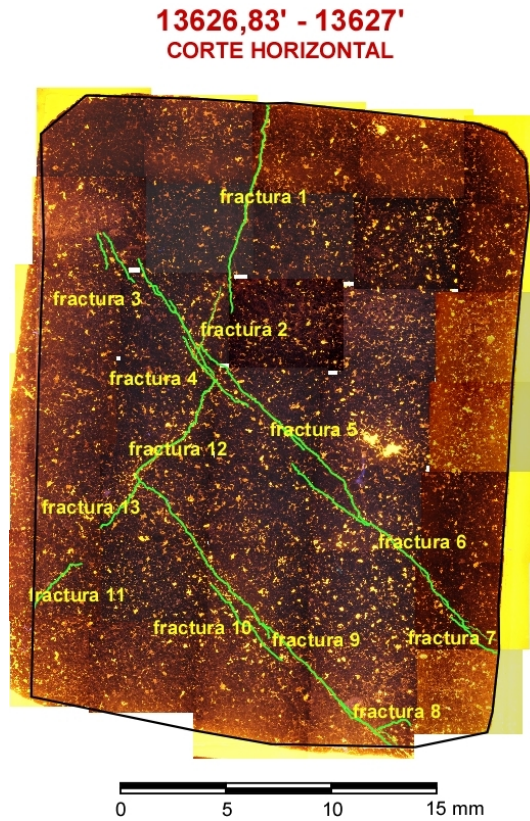


Figura 5.4: Sección delgada que muestra la presencia de microfisuras en las muestras naturales.

5.5 CONFIGURACIÓN DE LOS CRISTALES PIEZOELÉCTRICOS

Debido a la simetría con la que fueron diseñadas las muestras sintéticas y a la simetría que presentan las muestras naturales, era necesario establecer una configuración para pegar los cristales piezoeléctricos sobre las muestras con el fin de tomar los tiempos de propagación adecuados que permitieran obtener resultados de las propiedades elásticas de cada muestra. En la figura 5.5 se puede observar el montaje de los cristales

piezoeléctricos sobre las muestras.

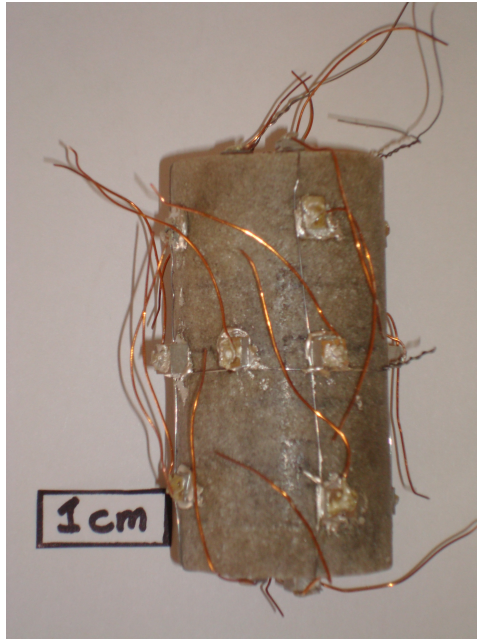


Figura 5.5: Muestra preparada para mediciones.

5.5.1. Configuración En Muestras Sintéticas

Sobre las muestras sintéticas se establecieron los ejes coordenados de tal forma que el eje de simetría x_3 fuera perpendicular al plano de las inclusiones, de modo que las inclusiones se encontraran dentro del plano x_1x_2 . Los cristales piezoeléctricos se pegaron sobre las muestras, estableciéndose una configuración hexagonal como se muestra en la figura 5.6. En la figura 5.6A se muestra la configuración de los cristales para una propagación de las ondas a lo largo del eje x_2 , el cual se tomó en la dirección vertical de la muestra debido a la forma como se tomaron las inclusiones dentro de la muestra. El cristal P se distingue por llevar un punto en el centro y los cristales S se distinguen por la flecha enmarcada sobre estos. De esta manera, esta configuración permitió medir

los tiempos t_{21} , t_{22} y t_{23} . En la figura 5.6B se muestra la configuración de los cristales para una propagación de las ondas a lo largo del eje x_1 con el fin de medir los tiempos t_{11} , t_{12} y t_{13} . En esta figura también se muestra la configuración de los cristales tipo P a 45° del eje de simetría x_3 . Esto con el fin de medir el tiempo de propagación t_{55} de la onda P que permitiera el cálculo del coeficiente elástico c_{13} . Por último, en la figura 5.6C se muestra la configuración de los cristales para una propagación de las ondas a lo largo del eje x_3 , con el fin de medir los tiempo t_{31} , t_{32} y t_{33} .

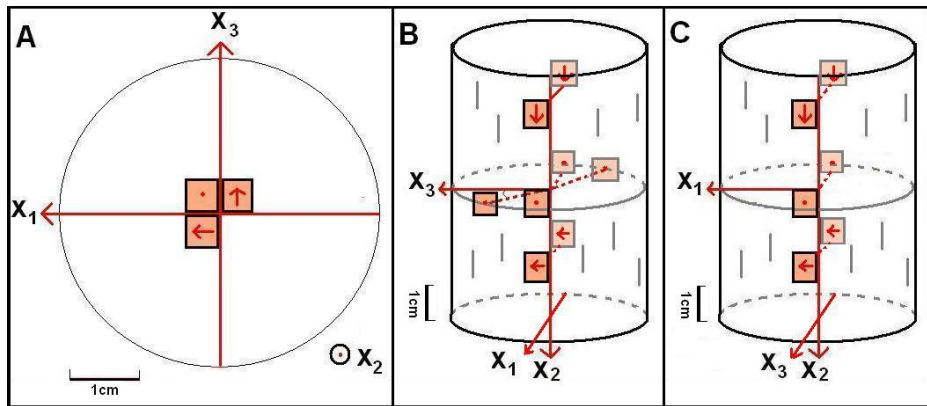


Figura 5.6: Configuración de cristales piezoeléctricos en muestras sintéticas.

5.5.2. Configuración En Muestras Naturales

Sobre las muestras naturales se establecieron los ejes coordenados de tal forma que el eje de simetría x_3 se tomara de manera vertical. Esto se asumió considerando que en el subsuelo esta es la dirección de máximo esfuerzo. Los cristales piezoeléctricos se pegaron sobre las muestras, estableciéndose una configuración hexagonal como se muestra en la figura 5.7. En la figura 5.7A se muestra la configuración de los cristales para una propagación de las ondas a lo largo del eje x_3 . De esta manera, esta configuración permitió medir los tiempos t_{31} , t_{32} y t_{33} . En la figura 5.7B se muestra la configuración

de los cristales para una propagación de las ondas a lo largo del eje x_1 con el fin de medir los tiempos t_{11} , t_{12} y t_{13} . En esta figura también se muestra la configuración de los cristales tipo P a 45° del eje de simetría x_3 . Esto con el fin de medir el tiempo de propagación t_{55} de la onda P que permitiera el cálculo del coeficiente elástico c_{13} , el cual se explica más adelante. Por último, en la figura 5.7C se muestra la configuración de los cristales para una propagación de las ondas a lo largo del eje x_2 con el fin de medir los tiempo t_{21} , t_{22} y t_{23} .

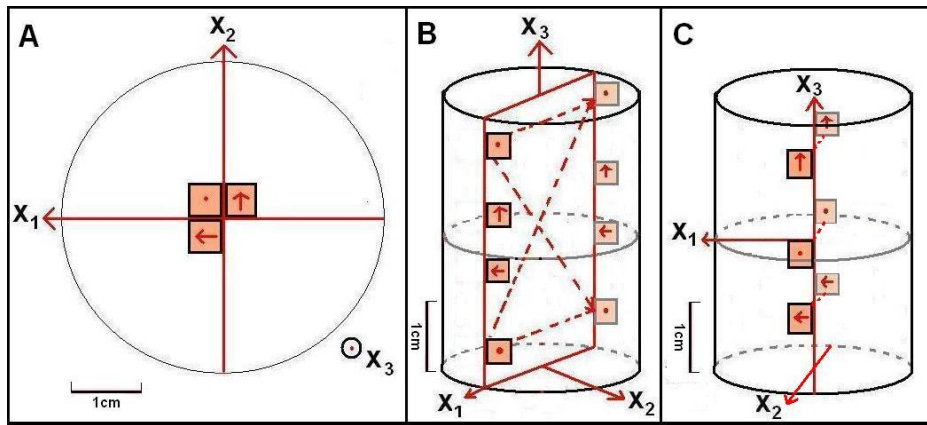


Figura 5.7: Configuración de cristales piezoeléctricos en muestras naturales.

RESULTADOS

En el análisis de los datos experimentales, se realizó el proceso inverso al realizado matemáticamente. Es decir, a través de mediciones directas de las dimensiones de las muestras, de su densidad y de los tiempos de propagación, se calcula las velocidades de propagación de las ondas, con las cuales se obtuvieron los coeficientes elásticos y con estos últimos, los parámetros de Thomsen.

6.1 RESULTADOS EXPERIMENTALES

En la tabla 6.1 se muestran los tiempos de propagación medidos para las diferentes muestras.

En las tablas 6.2, 6.3 y 6.4 se muestran los resultados para las velocidades de onda en las muestras sintéticas con inclusiones secas, en las muestras sintéticas con inclusiones sólidas de aluminio y en las muestras naturales, respectivamente; donde v_{P1} es la velocidad de la onda P a lo largo del plano de isotropía, v_{P3} es la velocidad de la onda P a lo largo del eje de simetría, v_{SH} es la velocidad de la onda S polarizada horizontalmente

Muestra N°	t_{11} $\pm 0,1\mu s$	t_{12} μs	t_{13} μs	t_{21} μs	t_{22} μs	t_{23} μs	t_{31} μs	t_{32} μs	t_{33} μs	t_{55} μs
0	11.8	19.6	19.4	36.2	22	36.4	19.2	20.0	11.8	11.8
1	11.4	18.8	19.4	36.8	22	36.8	18.4	19.2	11.6	11.6
2	11.6	20.0	19	35.4	22	36.0	19.2	19.4	11.8	12.0
3	11.6	18.0	18.8	36.8	22.4	38.0	18.8	19.6	11.2	11.2
4	12.0	20.0	19.4	37.6	22.8	38.8	20.0	20.0	12.0	12.0
5	11.8	18.0	19	32.8	19.2	32.0	19.6	19.2	11.6	11.6
6	12.0	18.6	19.4	36.0	22.0	34.0	19.6	19.4	11.6	11.6
7	11.6	18.6	19.2	36.0	22.0	37.2	19.6	19.6	12	11.6
8	11.4	19.6	20.0	36.8	22.0	30.4	19.2	18.8	11.2	11.4
9	12.4	19.0	19.2	36.4	22.4	37.6	20.0	19.6	12.0	12.4
10	11.8	19.4	19.6	33.2	22.2	34.4	19.6	19.6	12.0	12.0
11	10.4	11.6	13.6	12.0	10.0	13.2	13.4	16.2	9.0	16.0
12	10.0	14.0	15.6	13.8	9.6	16.4	15.6	16.4	11.2	12.4
13	9.6	14.0	14.2	13.8	8.8	13.8	16.2	16.0	12.0	11.6
14	8.5	17.8	13.2	12.8	9.0	13.0	14.8	15.4	10.0	11.3
15	13	18.0	17.8	17.6	13.0	17.8	18.4	18.2	14.2	15.0
16	8.2	12.8	12.0	12.0	8.9	12.0	13.2	13.6	9.8	10.6
17	9.6	14	16.8	16.8	9.2	16.0	16.0	17.2	12.0	12.0

Tabla 6.1: Tiempos de propagación medidos en muestras de roca.

y v_{SV} es la velocidad de la onda S polarizada verticalmente. Los valores obtenidos para las velocidades muestran, como es conocido, que las ondas P son más rápidas que las ondas S [Ver Apéndice]. En las tablas 6.2 y 6.3 también se muestra el error porcentual entre los valores de velocidad obtenidos del modelo de Hudson y los valores obtenidos

experimentalmente. Este error porcentual es una confrontación del valor medido experimentalmente con respecto al valor obtenido a través del modelo de Hudson, el cálculo de este error y del margen de error dado en la parte superior de las tablas ($\pm\Delta x$) se explica en el apéndice. Los valores teóricos y experimentales se graficarán más adelante.

Muestra	v_{P1}	v_{P3}	v_{SH}	v_{SV}
N°	$\pm 50m/s$	$\pm 50m/s$	$\pm 30m/s$	$\pm 30m/s$
0	3130	3130	1880	1920
1	3090	3190	1990	1890
2	3220	3120	2010	1910
3	3250	3310	1890	1930
4	2990	3090	1950	1850
5	3180	3130	1940	1920
Error Porc.	2.6 %	14.1 %	2.6 %	4.1 %

Tabla 6.2: Velocidades de propagación para muestras sintéticas con inclusiones secas.

Muestra	v_{P1}	v_{P3}	v_{SH}	v_{SV}
N°	$\pm 50m/s$	$\pm 50m/s$	$\pm 20m/s$	$\pm 30m/s$
6	3240	3190	1970	2010
7	3200	3140	1850	1930
8	3220	3330	2070	1990
9	3120	3120	1870	1870
10	3140	3190	2060	1890
Error Porc.	2.7 %	4.7 %	4.8 %	5.5 %

Tabla 6.3: Velocidades de propagación para muestras sintéticas con inclusiones sólidas de aluminio.

Los valores experimentales de los coeficientes elásticos se obtuvieron usando las ex-

Muestra N°	v_{P1} $\pm 80m/s$	v_{P3} $\pm 70m/s$	v_{SH} $\pm 50m/s$	v_{SV} $\pm 40m/s$
11	3680	4110	3300	2760
12	3830	3410	2730	2450
13	3990	3510	2730	2600
14	4540	4200	2170	2840
15	2590	2910	1870	2250
16	4710	3960	3020	2940
17	3990	3500	2740	2630

Tabla 6.4: Velocidades de propagación para muestras naturales.

presiones de las velocidades en función de dichos coeficientes dadas por las ecuaciones (3.15) y (3.18), como se muestra a continuación:

- C_{11} se despejó de la ecuación (3.15b), obteniéndose:

$$C_{11} = \rho v_{P1}^2 \quad (6.1)$$

- C_{33} se despejó de la ecuación (3.18b), obteniéndose:

$$C_{33} = \rho v_{P3}^2 \quad (6.2)$$

- C_{44} se despejó de la ecuación (3.15c) ó (3.18a), obteniéndose:

$$C_{44} = \rho v_{SV}^2 \quad (6.3)$$

- C_{66} se despejó de la ecuación (3.15a), obteniéndose:

$$C_{66} = \rho v_{SH}^2 \quad (6.4)$$

- C_{13} se pudo calcular a partir de los resultados obtenidos para la propagación a 45° con respecto al eje de simetría, es decir, despejando este coeficiente de la ecuación 3.25 y reemplazando las expresiones obtenidas anteriormente para C_{11} , C_{33} y C_{44} , obteniéndose:

$$C_{13} = -\rho v_{SV}^2 + \rho \sqrt{4v_{qP}^4 + 2v_{qP}^2(v_{P1}^2 + v_{P3}^2 + 2v_{SV}^2) + v_{SV}^2(v_{P1}^2 + v_{P3}^2 + v_{SV}^2) + v_{P1}^2 v_{P3}^2} \quad (6.5)$$

Cabe resaltar que este último coeficiente puede ser calculado para cualquier ángulo dado con respecto al eje de simetría. En las tablas 6.5, 6.6 y 6.7 se muestran los resultados para los coeficientes elásticos de las muestras sintéticas con inclusiones secas, en las muestras sintéticas con inclusiones sólidas de aluminio y en las muestras naturales, respectivamente.

Obtenidos los valores de los coeficientes elásticos, se calcularon los valores de los parámetros de Thomsen. En las tablas 6.8, 6.9 y 6.10 se muestran los resultados para los parámetros de Thomsen de las muestras sintéticas con inclusiones secas, en las muestras sintéticas con inclusiones sólidas de aluminio y en las muestras naturales, respectivamente. En las tablas 6.8 y 6.9 también se muestra el error porcentual entre los valores de los parámetros de Thomsen obtenidos del modelo de Hudson y los valores obtenidos experimentalmente, los cuales más adelante se confrontarán gráficamente.

Muestra N°	C_{11} $\pm 1 * 10^9 N/m^2$	C_{13} $\pm 1 * 10^9 N/m^2$	C_{33} $\pm 1 * 10^9 N/m^2$	C_{44} $\pm 4 * 10^9 N/m^2$	C_{66} $\pm 5 * 10^9 N/m^2$
0	18	4	18	7	7
1	18	6	19	7	7
2	19	6	17	7	7
3	20	5	20	7	7
4	17	3	18	6	7
5	18	4	18	7	7

Tabla 6.5: Coeficientes elásticos obtenidos de las muestras sintéticas con inclusiones secas.

Muestra N°	C_{11} $\pm 1 * 10^9 N/m^2$	C_{13} $\pm 2 * 10^9 N/m^2$	C_{33} $\pm 3 * 10^9 N/m^2$	C_{44} $\pm 5 * 10^9 N/m^2$	C_{66} $\pm 5 * 10^9 N/m^2$
6	20	5	19	7	7
7	19	3	18	7	6
8	19	7	20	7	8
9	18	4	18	7	6
10	18	5	19	7	8

Tabla 6.6: Coeficientes elásticos obtenidos de las muestras sintéticas con inclusiones sólidas de aluminio.

6.2 CONFRONTACIÓN DEL MODELO DE HUDSON

A continuación se muestra gráficamente la confrontación del modelo de Hudson con los datos experimentales calculados en las tablas anteriores, para los medios con inclusiones secas y sólidas.

Muestra N°	C_{11} $\pm 4 * 10^9 N/m^2$	C_{13} $\pm 4 * 10^9 N/m^2$	C_{33} $\pm 3 * 10^9 N/m^2$	C_{44} $\pm 1 * 10^9 N/m^2$	C_{66} $\pm 2 * 10^9 N/m^2$
11	34	-3	43	19	27.34
12	36	6	29	15	19
13	40	17	31	17	19
14	52	8	45	21	12
15	22	1	28	17	11
16	57	15	40	22	23
17	40	4	31	17	19

Tabla 6.7: Coeficientes elásticos obtenidos de las muestras de roca naturales.

Muestra N°	ε $\pm 0,05$	γ $\pm 0,05$	δ $\pm 0,09$
0	0.00	0.00	0.00
1	-0.05	0.06	0.00
2	0.05	0.06	0.11
3	0.00	0.00	-0.00
4	-0.05	0.05	-0.09
5	0.00	0.00	-0.00
Error Porc.	104.9 %	59.8 %	91.0 %

Tabla 6.8: Parámetros de Thomsen obtenidos de las muestras sintéticas con inclusiones secas.

Muestra N°	ε $\pm 0,05$	γ $\pm 0,05$	δ $\pm 0,1$
6	0.00	0.00	-0.02
7	0.00	0.05	-0.08
8	-0.05	0.05	0.03
9	0.00	-0.95	-0.03
10	-0.09	0.06	0.02
Error Porc.	150.4 %	192.1 %	635.6 %

Tabla 6.9: Parámetros de Thomsen obtenidos de las muestras sintéticas con inclusiones sólidas de aluminio.

Muestra N°	ε $\pm 0,06$	γ $\pm 0,06$	δ $\pm 0,3$
11	-0.11	0.21	0.0
12	0.13	0.12	0.3
13	0.15	0.06	1.8
14	0.08	-0.21	0.1
15	-0.10	-0.15	0.3
16	0.21	0.00	0.8
17	0.15	0.00	0.3

Tabla 6.10: Parámetros de Thomsen obtenidos de las muestras de roca naturales

6.2.1. Confrontación Del Modelo Para Medios con Fracturas Secas

Para confrontar el modelo teórico con los datos experimentales obtenidos, fue necesario retomar las ecuaciones (2.42) y (2.43), en las que se muestra la relación entre las ve-

locidades de onda y los parámetros de anisotropía con la densidad de fracturas. Estas ecuaciones también están en términos de λ , μ , μ' y k' , los cuales pueden ser calculados usando las expresiones para las velocidades de onda P y S en un medio isótropo.

Los valores para λ y μ se obtuvieron usando la velocidad promedio de las ondas P y S en la muestra homogénea, tomadas de la tabla 6.2. Estas son: $v_P = (3130 \pm 50)m/s$ y $v_S = (1900 \pm 30)m/s$. También se tomó el valor de la densidad efectiva de esta muestra, dada por: $(1856 \pm 102)Kg/m^3$. De esta manera se obtuvo:

$$\mu = \rho v_S^2 = (6,7 \pm 0,4) * 10^9 N/m^2 \quad (6.6)$$

$$\lambda = \rho v_P^2 - 2\mu = (4,9 \pm 0,4) * 10^9 N/m^2 \quad (6.7)$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones (2.42), se obtuvieron los coeficientes elásticos para un medio con fracturas secas en función de la densidad de fracturas, dados por:

$$C_{11} = 1,8 * 10^{10} - 7,5 * 10^9 \xi + 2,2 * 10^{10} \xi^2 \quad [N/m^2] \quad (6.8a)$$

$$C_{13} = 4,9 * 10^9 - 2,8 * 10^{10} \xi + 8,1 * 10^{10} \xi^2 \quad [N/m^2] \quad (6.8b)$$

$$C_{33} = 1,8 * 10^{10} - 1,1 * 10^{11} \xi + 3,0 * 10^{11} \xi^2 \quad [N/m^2] \quad (6.8c)$$

$$C_{44} = 6,7 * 10^9 - 1,6 * 10^{10} \xi + 1,8 * 10^{10} \xi^2 \quad [N/m^2] \quad (6.8d)$$

$$C_{66} = 6,7 * 10^9 \quad [N/m^2] \quad (6.8e)$$

Reemplazando estos coeficientes en las ecuaciones (3.15) y (3.18), se obtuvieron las velocidades de las ondas v_{P1} , v_{P3} , v_{SV} y v_{SH} en función de la densidad de fractura,

dadas por:

$$v_{P1} = 0,023 \sqrt{\frac{1,8 * 10^{10} - 7,5 * 10^9 \xi + 2,2 * 10^{10} \xi^2}{1 - \xi}} \left[\frac{m}{s} \right] \quad (6.9)$$

$$v_{P3} = 0,023 \sqrt{\frac{1,8 * 10^{10} - 1,1 * 10^{11} \xi + 3,0 * 10^{11} \xi^2}{1 - \xi}} \left[\frac{m}{s} \right] \quad (6.10)$$

$$v_{SH} = 1896,9 \sqrt{\frac{1}{1 - \xi}} \left[\frac{m}{s} \right] \quad (6.11)$$

$$v_{SV} = 0,023 \sqrt{\frac{6,7 * 10^9 - 1,6 * 10^{10} \xi + 1,8 * 10^{10} \xi^2}{1 - \xi}} \left[\frac{m}{s} \right] \quad (6.12)$$

En las figuras 6.1 y 6.2 se confronta la relación teórica y los resultados experimentales de la variación de las velocidades de onda con la densidad de inclusiones secas, donde las relaciones teóricas se muestran con líneas continuas (las líneas negras son velocidades para las ondas P y las líneas verdes son las velocidades para las ondas S) y los datos experimentales, los cuales están contenidos en la tabla 6.2, se muestran con puntos cuyas barras son los respectivos errores de medición de cada valor obtenido (puntos rojos son los valores para las ondas P y puntos azules son los valores para las ondas S).

Analizando las figuras 6.1 y 6.2, para el medio con inclusiones secas se observa un comportamiento similar entre las velocidades de onda dadas por el modelo de Hudson y las velocidades obtenidas experimentalmente, excepto para la velocidad de onda v_{P3} , donde según el modelo de Hudson esta velocidad debe disminuir al aumentar la densidad de inclusiones, pero experimentalmente no se observa esto, al contrario se observa que esta velocidad no tiene ninguna tendencia en su comportamiento. El error porcentual

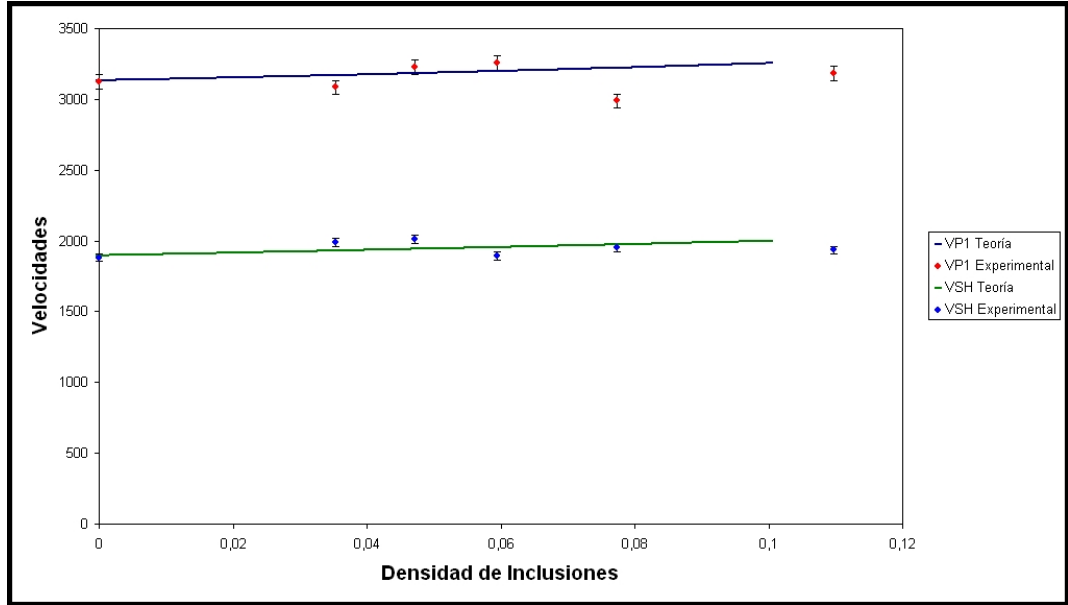


Figura 6.1: Velocidades v_{P1} y v_{SH} vs ξ para el medio con inclusiones secas. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.

dado en la tabla 6.2 cuantifica esta confrontación dada en las gráficas, donde el mayor error porcentual es el obtenido para el comportamiento de la velocidad v_{P3} .

De igual manera, reemplazando los coeficientes obtenidos en las ecuaciones 6.8 en las ecuaciones (4.1a), (4.1b), se obtuvieron los parámetros de anisotropía en función de la densidad de fracturas para el medio con fracturas secas, dados por:

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{9,7 * 10^{10}\xi - 2,8 * 10^{11}\xi^2}{1,8 * 10^{10} - 1,1 * 10^{11}\xi + 3,0 * 10^{11}\xi^2} \right) \quad (6.13)$$

$$\gamma = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1,6 * 10^{10}\xi - 1,8 * 10^{10}\xi^2}{6,7 * 10^9 - 1,6 * 10^{10}\xi + 1,8 * 10^{10}\xi^2} \right) \quad (6.14)$$

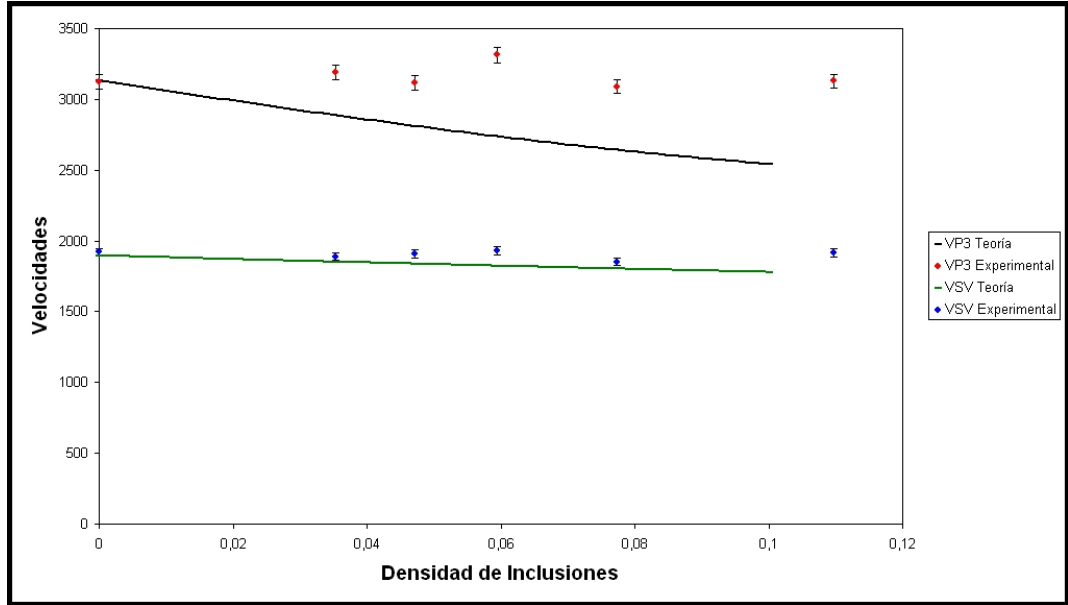


Figura 6.2: Velocidades v_{P3} y v_{SV} vs ξ para el medio con inclusiones secas. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.

$$\delta = \frac{(1,2 * 10^{10} - 4,4 * 10^{10}\xi + 10,0 * 10^{10}\xi^2)^2 - (1,2 * 10^{10} - 8,9 * 10^{10}\xi + 2,9 * 10^{11}\xi^2)^2}{2(1,8 * 10^{10} - 1,1 * 10^{11}\xi + 3,0 * 10^{11}\xi^2)(1,2 * 10^{10} - 8,9 * 10^{10}\xi + 2,9 * 10^{11}\xi^2)} \quad (6.15)$$

En las figuras 6.3, 6.4 y 6.5 se confronta la relación teórica y los resultados experimentales de la variación de los parámetros de Thomsen con la densidad de inclusiones secas, donde las relaciones teóricas se muestran con líneas continuas negras y los datos experimentales, los cuales están contenidos en la tabla 6.8, se muestran con puntos rojos cuyas barras son los respectivos errores de medición de cada valor obtenido.

Analizando las figuras 6.3, 6.4 y 6.5, para el medio con inclusiones secas no se observa un comportamiento similar entre los parámetros de Thomsen dados por el modelo de Hudson y los parámetros de Thomsen obtenidos experimentalmente, esto se evidencia

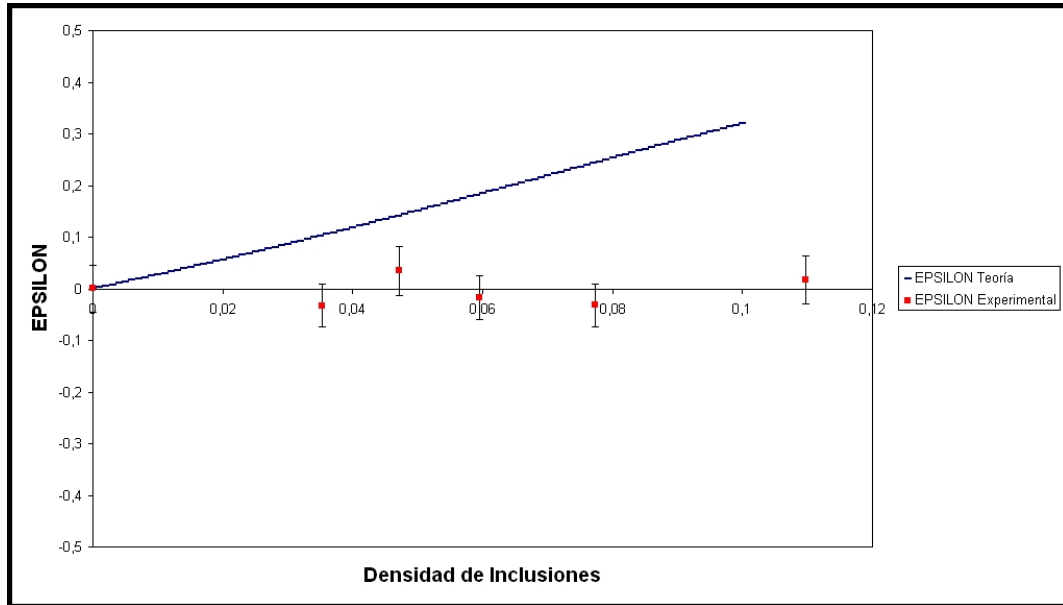


Figura 6.3: ε vs ξ para el medio con inclusiones secas. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.

en el error porcentual dado para cada parámetro en la tabla 6.8. Sin embargo, para el parámetro gamma este error porcentual es menor debido a que hay una mayor cercanía en los valores teóricos y experimentales, donde algunos valores teóricos para este parámetro están dentro del margen de error de los valores experimentales. Además dentro del límite formal del modelo de Hudson, el cual establece que este modelo se cumple hasta una densidad de microfracturas de 0.1, el parámetro gamma, que se refiere a la anisotropía de la onda S, está dentro del rango de anisotropía débil, es decir, entre -0.2 y 0.2. Experimentalmente se muestra que la anisotropía de la onda P dada por el parámetro epsilon (Ver figura 6.3), también es débil hasta una densidad de inclusiones de 0.1, pero según el modelo de Hudson esta anisotropía débil se presenta sólo hasta una densidad de inclusiones de 0.065 para estos medios con inclusiones secas, estando por debajo del límite formal de Hudson.

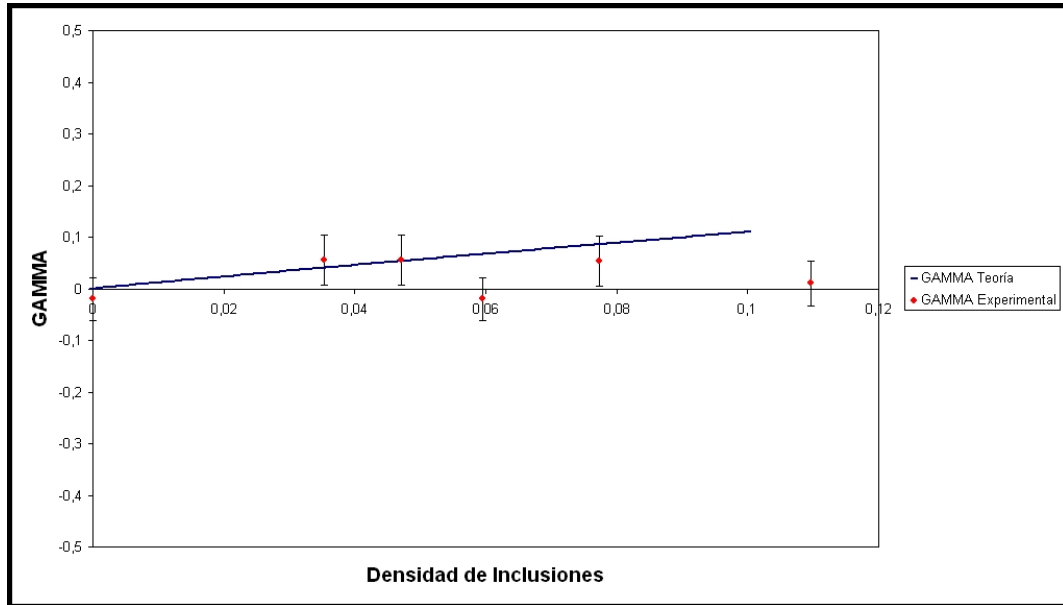


Figura 6.4: γ vs ξ para el medio con inclusiones secas. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.

6.2.2. Confrontación Del Modelo Para Medios con Fracturas Sólidas

Para el caso del medio con inclusiones sólidas, las cuales fueron realizadas de aluminio, fue necesario calcular los valores de λ' , μ' y k' del aluminio. Esto se hizo usando los valores conocidos para las velocidades de la onda P y S del Aluminio [11], dadas por: $v_{Pal} = 6420m/s$, $v_{Sal} = 3040m/s$, y la densidad del aluminio, dada por: $\rho_{al} = 2700kg/m^3$. Para obtener λ' y μ' se usaron las expresiones para las velocidades de onda P y S de un medio isótropo. De esta manera se obtuvo:

$$\mu' = \rho_{al}v_S^2 = 25,0 * 10^{10}N/m^2 \quad (6.16)$$

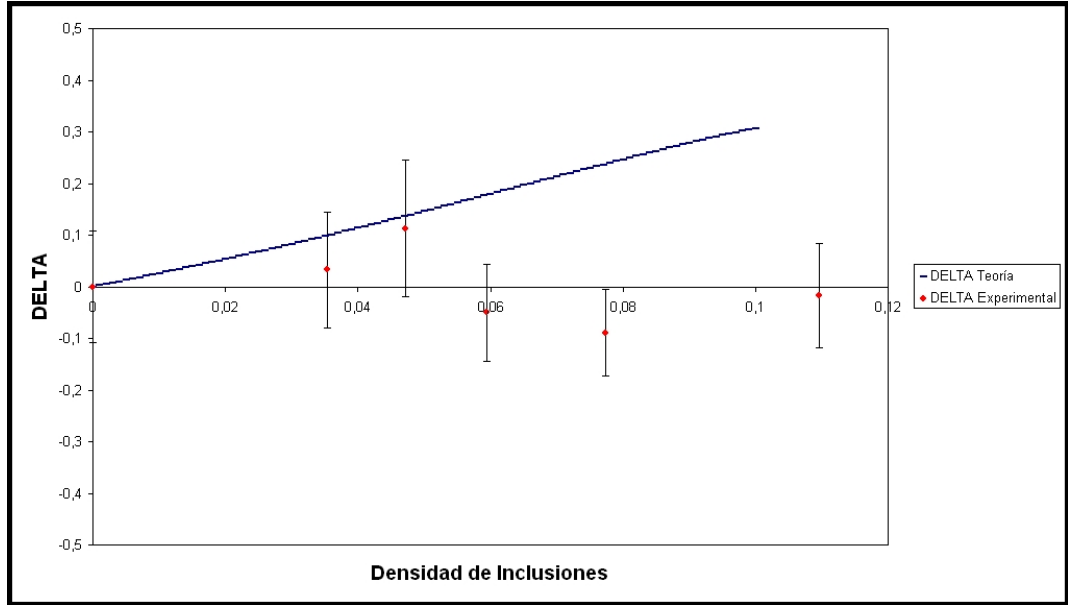


Figura 6.5: δ vs ξ para el medio con inclusiones secas. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.

$$\lambda' = \rho_{al} v_P^2 - 2\mu' = 61,4 * 10^{10} N/m^2 \quad (6.17)$$

El valor de k' se obtuvo a partir de los valores calculados, de λ' y μ' , obteniéndose:

$$k' = \lambda' + \frac{2}{3}\mu' = 78,0 * 10^{10} \quad (6.18)$$

Reemplazando estos valores en las ecuaciones (2.43), se obtuvieron los coeficientes elásticos para un medio con fracturas sólidas de aluminio en función de la densidad de fracturas, dados por:

$$C_{11} = 1,8 * 10^{10} - 8,0 * 10^8 \xi + 2,5 * 10^8 \xi^2 \quad [N/m^2] \quad (6.19a)$$

$$C_{13} = 4,9 * 10^9 - 3,0 * 10^9 \xi + 9,3 * 10^8 \xi^2 \quad [N/m^2] \quad (6.19b)$$

$$C_{33} = 1,8 * 10^{10} - 1,2 * 10^{10} \xi + 3,5 * 10^9 \xi^2 \quad [N/m^2] \quad (6.19c)$$

$$C_{44} = 6,7 * 10^9 - 5,1 * 10^9 \xi + 1,9 * 10^9 \xi^2 \quad [N/m^2] \quad (6.19d)$$

$$C_{66} = 6,7 * 10^9 \quad [N/m^2] \quad (6.19e)$$

Reemplazando estos coeficientes en las ecuaciones (3.15) y (3.18), se obtuvieron las velocidades de las ondas v_{P1} , v_{P3} , v_{SV} y v_{SH} en función de la densidad de fracturas de tipo sólidas de aluminio, dadas por:

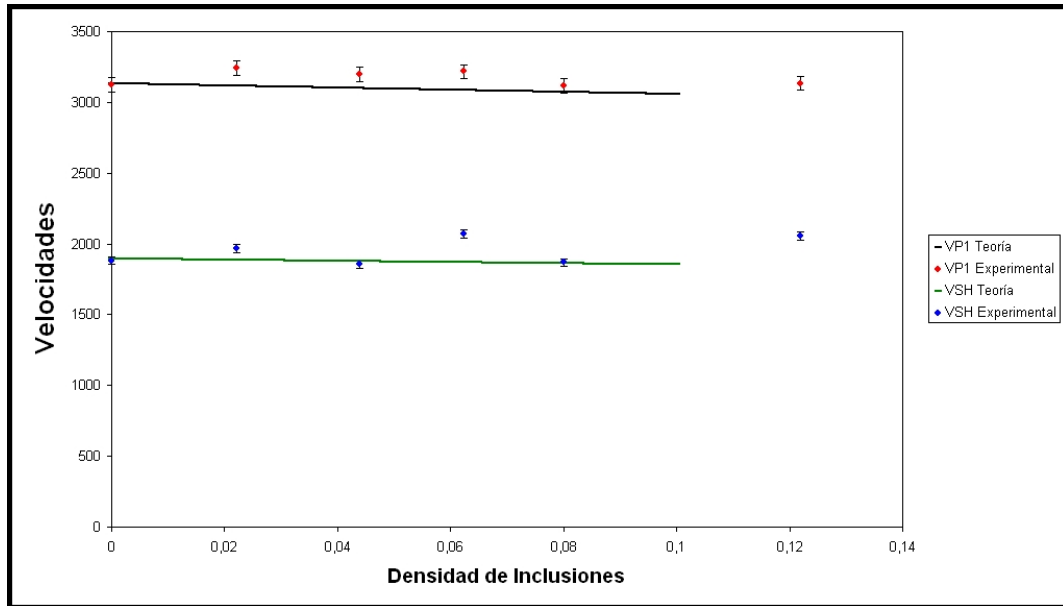


Figura 6.6: Velocidades v_{P1} y v_{SH} vs ξ para el medio con inclusiones sólidas de aluminio. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.

$$v_{P1} = \sqrt{\frac{1,8 * 10^{10} - 8,8 * 10^8 \xi + 3,0 * 10^8 \xi^2}{1856,4 + 843,6 \xi}} \left[\frac{m}{s} \right] \quad (6.20)$$

$$v_{P3} = \sqrt{\frac{1,8 * 10^{10} - 1,2 * 10^{10} \xi + 4,2 * 10^9 \xi^2}{1856,4 + 843,6 \xi}} \left[\frac{m}{s} \right] \quad (6.21)$$

$$v_{SH} = \sqrt{\frac{6,7 * 10^9}{1856,4 + 843,6 \xi}} \left[\frac{m}{s} \right] \quad (6.22)$$

$$v_{SV} = \sqrt{\frac{6,7 * 10^9 - 5,0 * 10^9 \xi + 1,9 * 10^9 \xi^2}{1856,4 + 843,6 \xi}} \left[\frac{m}{s} \right] \quad (6.23)$$

En las figuras 6.6 y 6.7 se confronta la relación teórica y los resultados experimentales de la variación de las velocidades de onda con la densidad de inclusiones sólidas, donde las relaciones teóricas se muestran con líneas continuas (las líneas negras son velocidades para las ondas P y las líneas verdes son las velocidades para las ondas S) y los datos experimentales, los cuales están contenidos en la tabla 6.3, se muestran con puntos cuyas barras son los respectivos errores de medición de cada valor obtenido (puntos rojos son los valores para las ondas P y puntos azules son los valores para las ondas S).

Analizando las figuras 6.6 y 6.7, para el medio con inclusiones sólidas se observa un comportamiento similar entre las velocidades de onda dadas por el modelo de Hudson y las velocidades obtenidas experimentalmente. Este comportamiento es más claro que el observado para el medio con inclusiones secas. El error porcentual dado en la tabla 6.3 cuantifica esta confrontación dada en las gráficas.

De igual manera, reemplazando los coeficientes obtenidos en las ecuaciones 6.8, en las ecuaciones (4.1a), (4.1b) y (4.13), se obtuvieron los parámetros de anisotropía en función

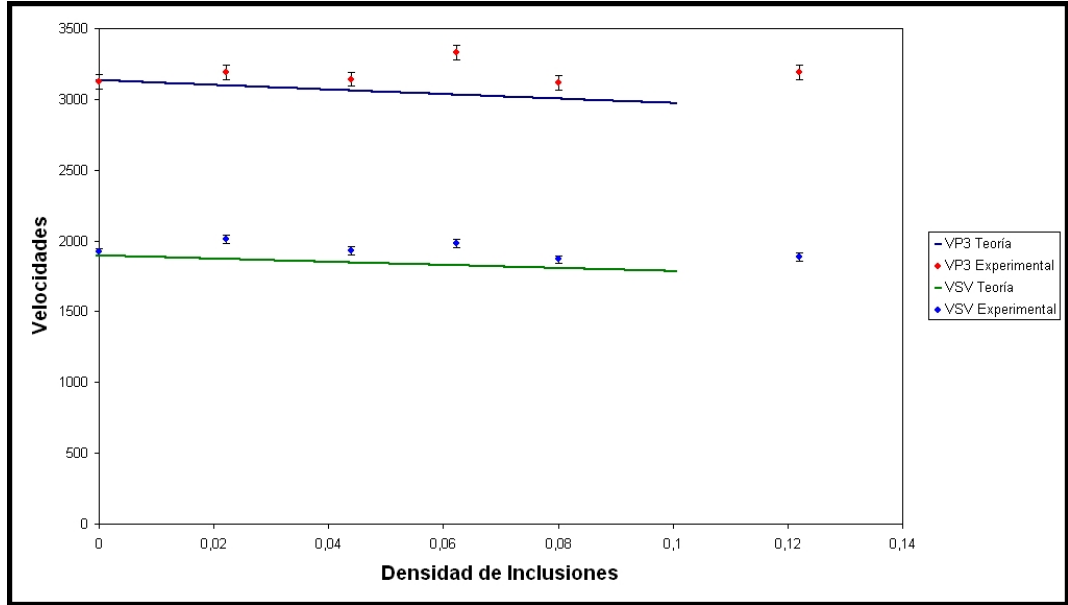


Figura 6.7: Velocidades v_{P3} y v_{SV} vs ξ para el medio con inclusiones sólidas de aluminio. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.

de la densidad de fracturas para el medio con fracturas sólidas de aluminio, dados por:

$$\varepsilon = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{1,1 * 10^{10}\xi - 3,9 * 10^9\xi^2}{1,8 * 10^{10} - 1,2 * 10^{10}\xi + 4,2 * 10^9\xi^2} \right) \quad (6.24)$$

$$\gamma = \left(\frac{1}{2}\right) \left(\frac{5,0 * 10^9\xi - 1,9 * 10^9\xi^2}{6,7 * 10^9 - 5,0 * 10^9\xi + 1,9 * 10^9\xi^2} \right) \quad (6.25)$$

$$\delta = \frac{(1,2 * 10^{10} - 8,3 * 10^9\xi + 3,0 * 10^9\xi^2)^2 - (1,2 * 10^{10} - 7,2 * 10^9\xi + 2,3 * 10^9\xi^2)^2}{2(1,8 * 10^{10} - 1,2 * 10^{10}\xi + 4,2 * 10^9\xi^2)(1,2 * 10^{10} - 7,22 * 10^9\xi + 2,3 * 10^9\xi^2)} \quad (6.26)$$

En las figuras 6.8, 6.9 y 6.10 se confronta la relación teórica y los resultados experimentales de la variación de los parámetros de Thomsen con la densidad de inclusiones

sólidas de aluminio, donde las relaciones teóricas se muestran con líneas negras continuas y los datos experimentales, los cuales están contenidos en la tabla 6.9, se muestran con puntos rojos cuyas barras son los respectivos errores de medición de cada valor obtenido.

Analizando las figuras 6.8, 6.9 y 6.10, para el medio con inclusiones sólidas se observa que los parámetros de Thomsen obtenidos por el modelo de Hudson y experimentalmente están dentro del rango de anisotropía débil y pese al considerable error porcentual entre los valores teóricos y experimentales de estos parámetros (Ver tabla 6.9), los valores dados por el modelo de Hudson están dentro del margen de error de cada uno de los valores experimentales.

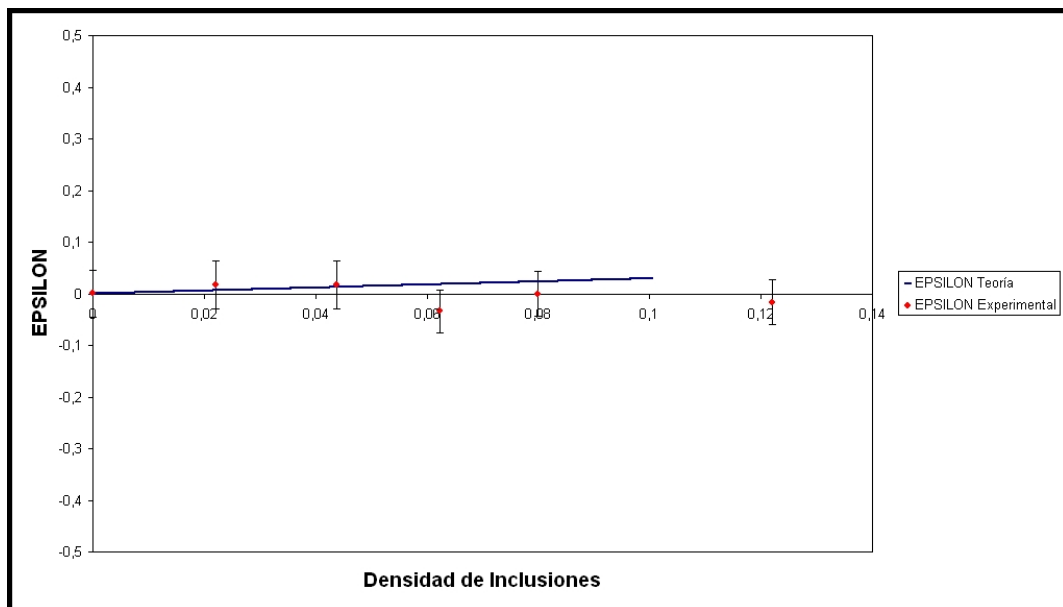


Figura 6.8: ε vs ξ para el medio con inclusiones sólidas de aluminio. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.

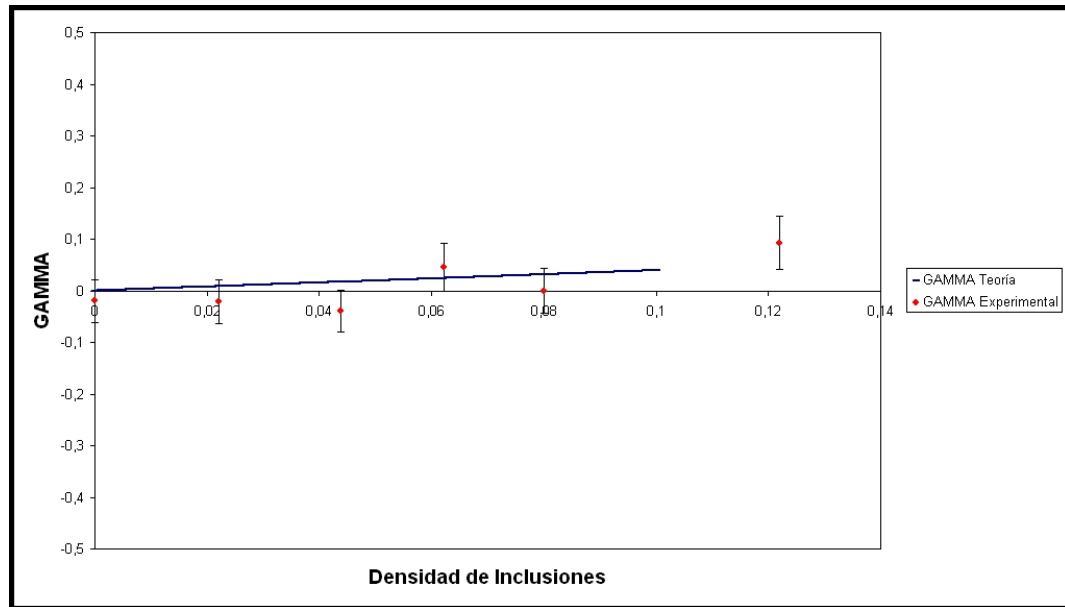


Figura 6.9: γ vs ξ para el medio con inclusiones sólidas de aluminio. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.

6.3 RESULTADOS EN MUESTRAS NATURALES

En las figuras 6.11 y 6.12 se muestra gráficamente el comportamiento de las velocidades de onda P y S con la densidad de microfracturas para las muestras naturales, donde los puntos rojos son las velocidades de la onda v_{P1} , los puntos azules son las velocidades de onda v_{P3} , los puntos verdes son las velocidades de onda v_{SH} y los puntos marrones son las velocidades de onda v_{SV} . Las barras sobre los puntos son el margen de error de cada medición. En la figura 6.11 se muestran los resultados de las velocidades para la densidad de microfracturas tomadas de las secciones delgadas horizontales y en la figura 6.12 se muestran los resultados de las velocidades para las densidades de microfracturas de las secciones delgadas verticales. Los valores graficados se muestran en la tabla 6.4.

Analizando las figuras 6.11 y 6.12, a pesar de que 3 de las muestras estudiadas presentan

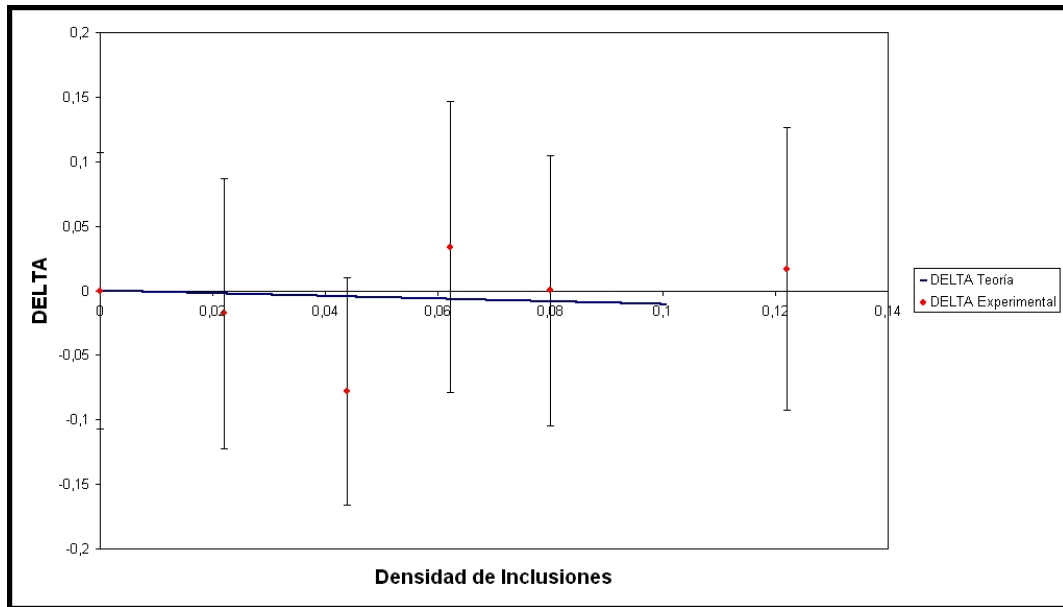


Figura 6.10: δ vs ξ para el medio con inclusiones sólidas de aluminio. Confrontación de los resultados teóricos y experimentales.

un valor de cero en la densidad de microfracturas, cada una mostraba un valor diferente para las velocidades de onda. Lo anterior puede deberse a la diferencia en la composición de las muestras que implica una diferencia en sus coeficientes elásticos; además, como se muestra en la tabla 5.3 todas las muestras también difieren en su densidad de masa. En estas gráficas también se observa una variación considerable de las velocidades de onda P y S con la densidad de inclusiones, pero sin ninguna tendencia específica. Por último, se observa que algunas muestras presentaron densidad de microfracturas por encima del límite formal de Hudson. De acuerdo a las anteriores observaciones, queda en evidencia que las muestras naturales que se tomaron no tienen las características del medio microfracturado planteado por Hudson.

En las figuras 6.13 y 6.14 se muestra gráficamente el comportamiento de los parámetros de Thomsen con la densidad de microfracturas para las muestras naturales, donde los

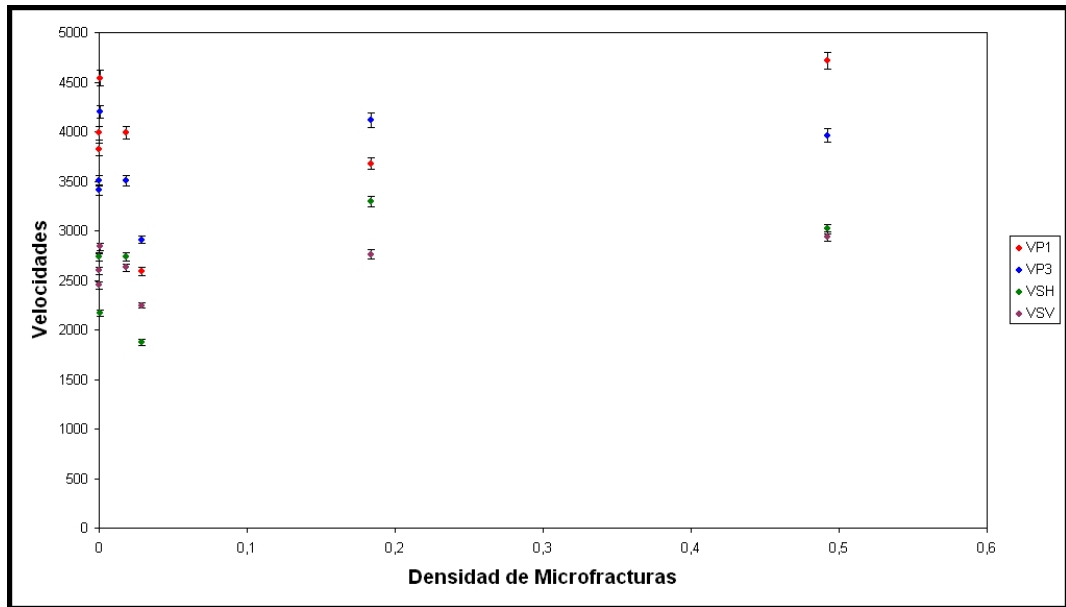


Figura 6.11: Velocidades de onda vs ξ para secciones delgadas horizontales

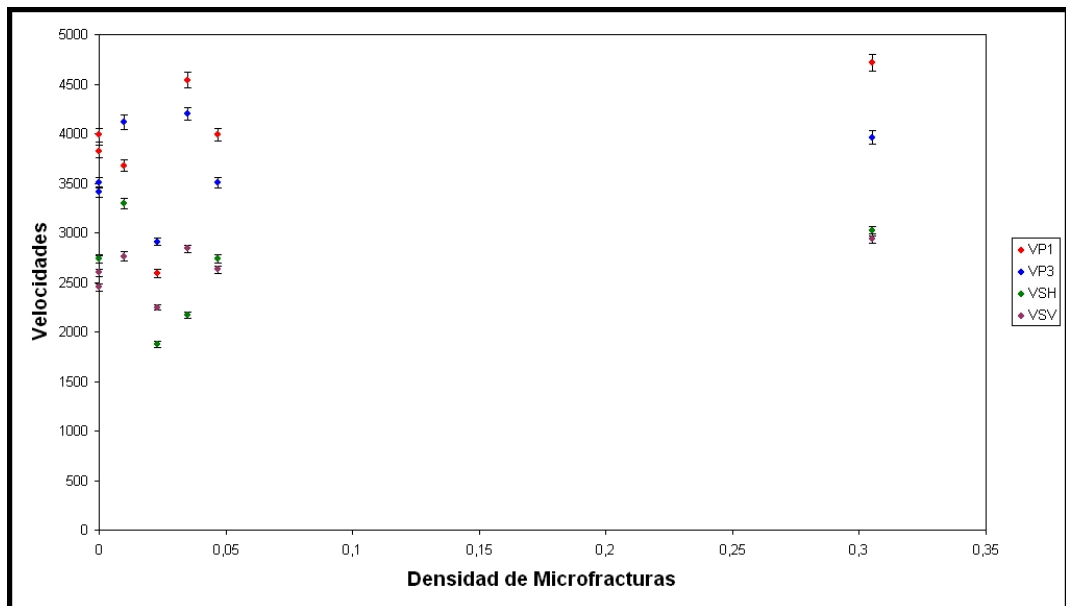


Figura 6.12: Velocidades de onda vs ξ para secciones delgadas verticales.

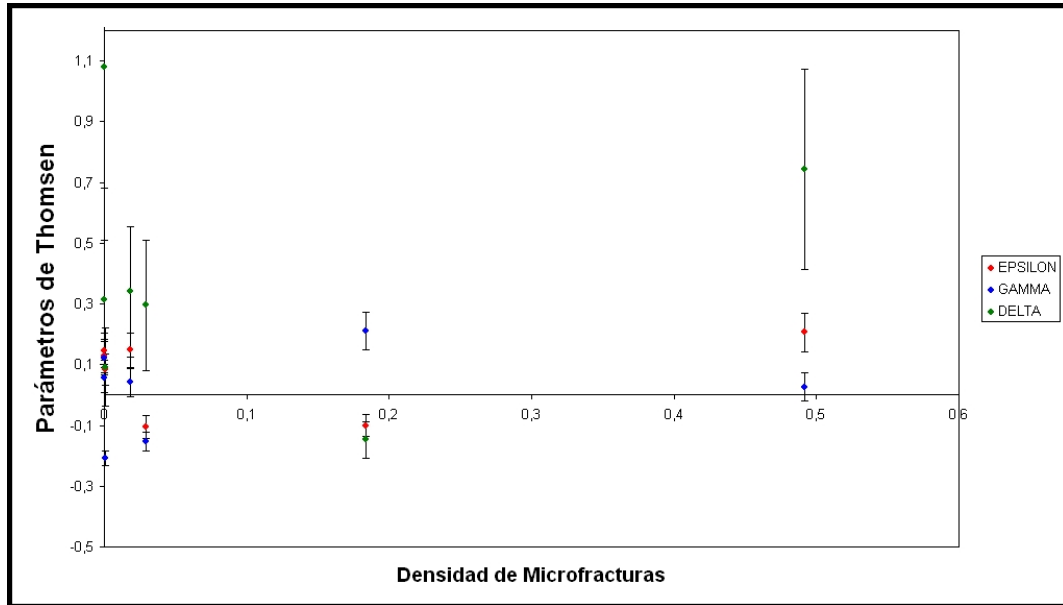


Figura 6.13: Parámetros de Thomsen vs ξ para secciones delgadas horizontales.

puntos rojos son los valores para ϵ , los puntos azules son los valores para γ y los puntos verdes son los valores para δ . Las barras sobre los puntos son el margen de error de cada medición. En la figura 6.13 se muestran los resultados de los parámetros para la densidad de microfracturas tomadas de las secciones delgadas horizontales y en la figura 6.14 se muestran los resultados de los parámetros para las densidades de microfracturas de las secciones delgadas verticales. Los valores graficados se muestran en la tabla 6.10.

Analizando las figuras 6.13 y 6.14, no hay una tendencia clara en la variación de los parámetros de Thomsen y en algunos casos, algunas muestras exceden del límite de anisotropía débil, lo que deja claro la variación que se presentaba en las velocidades de las ondas P y S mostradas en las figuras 6.11 y 6.12. Estas muestras naturales presentan anisotropía aún para valores de cero en la densidad de microfracturas, en estos casos, la anisotropía se debe a otras causas composicionales de las muestras.

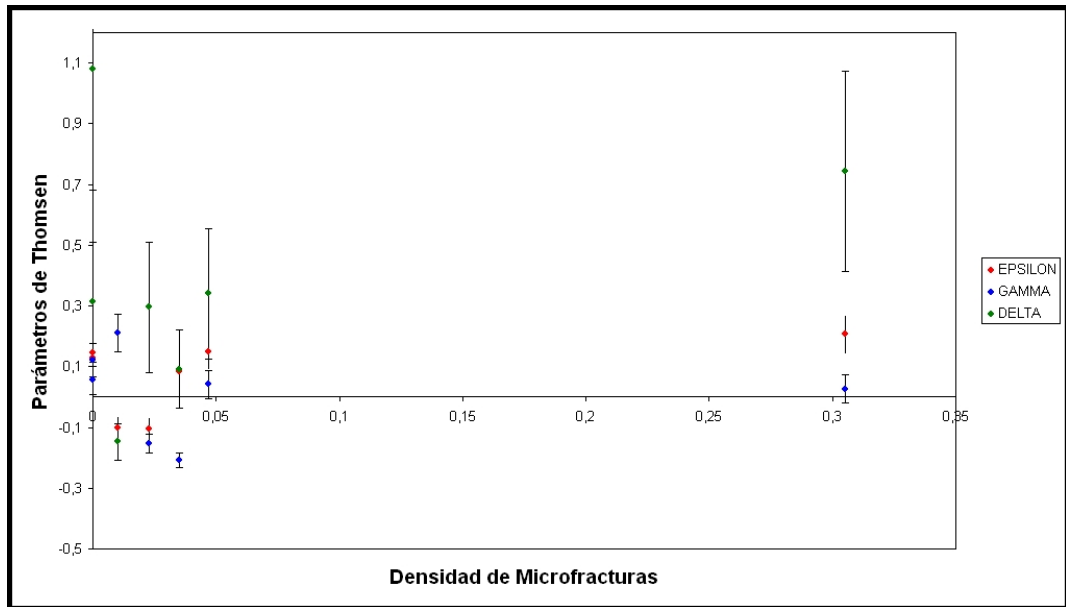


Figura 6.14: Parámetros de Thomsen vs ξ para secciones delgadas verticales.

CONCLUSIONES

- En el estudio del modelo de Hudson se encontró que para medios con inclusiones secas, la anisotropía de la onda P es débil dentro del límite formal de 0.1 para el valor de la densidad de microfracturas. En el caso de la anisotropía de la onda S, con este modelo se obtuvo una anisotropía débil hasta una densidad de microfracturas de 0.065, donde esto difería con las mediciones experimentales, que mostraban que la anisotropía de la onda S es débil dentro del límite formal de Hudson, es decir, hasta una densidad de microfracturas de 0.1. Esta discrepancia entre el modelo teórico y el experimento puede estar asociada a la alteración química a las que se sometieron las muestras sintéticas construídas con el fin de generar las inclusiones secas. Sin embargo, se debe tener en cuenta que el modelo de Hudson no es una verdad absoluta en el estudio de medios microfracturados.
- Dentro del límite formal de Hudson para la densidad de microfracturas, se encontró que los medios con inclusiones sólidas presentan anisotropía débil.
- La anisotropía débil en los medio estudiados se evidencia en la leve variación de las velocidades de las ondas P y S, donde para las muestras construídas, la velocidad de la onda P se encontraba dentro del rango de 2970 m/s a 3330m/s y la velocidad de la onda S estaba en el rango de 1850 m/s a 2070m/s.
- Las muestras naturales no presentaban las mismas características de los medios

fracturados planteadas por el modelo de Hudson, debido a que sus microfracturas no son planas, sino tridimensionales y están distribuidas en toda la muestra. Además, algunas muestras naturales presentaban una densidad de microfracturamiento por encima del límite establecido por Hudson.

- En las muestras naturales estudiadas se observa una fuerte influencia de la densidad de microfracturas en las velocidades de onda P y S pero sin ninguna tendencia en el comportamiento de estas velocidades. La mayoría de estas muestras presentaban anisotropía débil.
- Existen otras causas de anisotropía en las rocas diferentes al fracturamiento. Esto se evidenció en algunas muestras naturales que presentaban un valor de cero en la densidad de microfracturas, para el cual las velocidades de onda variaban y los parámetros de Thomsen calculados eran diferentes de cero, lo que evidenciaba la anisotropía en estas muestras.

RECOMENDACIONES

- Diseñar muestras con inclusiones fluidas.
- Inducir microfracturas en las rocas a través de esfuerzos.
- Diseñar un dispositivo de ahorro de cristales piezoeléctrico en el cual estos cristales presenten un buen contacto con la roca. Evitar el uso de sustancias para el contacto que saturan la muestra y alteren sus propiedades físicas.
- La geometría de las rocas estudiadas era cilíndrica. Se recomienda trabajar con muestras esféricas que permitan, una vez diseñado el dispositivo mencionado, hacer un buen barrido angular en las mediciones con el fin de encontrar los ejes principales en las rocas.
- Es necesario un laboratorio de Física de rocas en el ICP con la tecnología necesaria para el estudio de muestras de roca, en lo referente a la detección de fracturas y el estudio de la anisotropía, entre otras propiedades.
- Estudiar la dependencia de la anisotropía con la frecuencia de los pulsos.
- El modelo de Hudson no es el único modelo que trata de describir medios fracturados. Por esta razón, se recomienda estudiar otros modelos matemáticos y confrontarlos experimentalmente.

APENDICE

NOTACIÓN DE VOIGT

Debido a la simetría que presentan los tensores de esfuerzos y deformación y de acuerdo a la ecuación constitutiva dada por la ecuación 1.9, las componentes del tensor de coeficientes elásticos C_{ijkl} pueden ser escritas de la forma C_{MN} que serían los coeficientes de una matriz 6X6, que relaciona las seis componentes del tensor de esfuerzo con las seis componentes del tensor de deformación. Considerando cada par (i,j) donde $i, j \in \{1, 2, 3\}$, se toman los pares de la siguiente manera:

$$(1, 1), (2, 2), (3, 3), (2, 3), (1, 3), (1, 2). \quad (27)$$

Reemplazando cada par (i, j) por un número $m \in \{1, \dots, 6\}$ dado por:

$$\begin{cases} M = i & \text{si } i = j, \\ M = 9 - (i + j) & \text{si } i \neq j \end{cases} \quad i, j \in \{1, 2, 3\}$$

Y considerando la analogía para los pares (k, l) donde $k, l \in \{1, 2, 3\}$ se pueden hacer

las mismas sustituciones. De esta manera C_{ijkl} se convierte en C_{MN} .

ONDAS P Y S

Una onda elástica consiste en una deformación que viaja a través de un medio elástico, por ejemplo, la madera, un metal o una roca. La teoría de la elasticidad afirma que son posible dos tipos de ondas elásticas que viajan a través del subsuelo: Ondas P (De presión o primarias) u ondas S (De corte o secundarias), llamadas de esta manera debido a que una onda P es detectada primero que una onda S. Estas ondas también son conocidas como ondas sísmicas, ondas de cuerpo, ondas de volumen u ondas internas.

- **ONDAS P:** Ondas longitudinales o de compresión debido a que la dirección de desplazamiento de las partículas que las transportan (la polarización), es paralela a la dirección en la que se propagan. Esto quiere decir, que el medio en el que se propagan es comprimido y dilatado alternadamente en la dirección de propagación (Ver figura ??). Estas ondas son similares a las ondas de sonido y pueden viajar a través de sólidos y líquidos ya que estos medios admiten una cierta compresión de tipo elástico, es decir, recuperable. Como se mencionó anteriormente, las ondas P tienen una mayor velocidad que las ondas S. Velocidades típicas de las ondas P son de 330m/s en el aire, 1450m/s en el agua y cerca de 5000m/s en el granito.
- **ONDAS S:** También llamadas transversales, de corte o de cizalla debido a que el desplazamiento de las partículas que las transportan es perpendicular a la dirección en la que se propagan, por lo que el medio en el que se propagan sufre un cizallamiento (Ver figura ??). Estas ondas sólo pueden viajar a través de sólidos ya que los líquidos no pueden soportar esfuerzos de corte. Comparándolas con las ondas P, las ondas S tienen una amplitud mayor. Un ejemplo de esto es el caso de

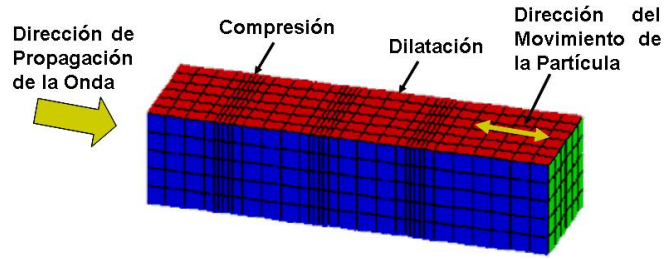


Figura 15: Propagación de la onda P

un sismo, donde las ondas S se sienten después que las ondas P pero con mayor fuerza. Durante el paso de una onda S, el desplazamiento de las partículas puede ser en cualquier dirección perpendicular a la propagación, como se mencionaba anteriormente, pero en algunos casos, pueden desplazarse en una sola dirección, en cuyo caso se dice que las ondas están polarizadas. La onda vertical de una onda S suele denotarse por SV y la componente horizontal por SH.

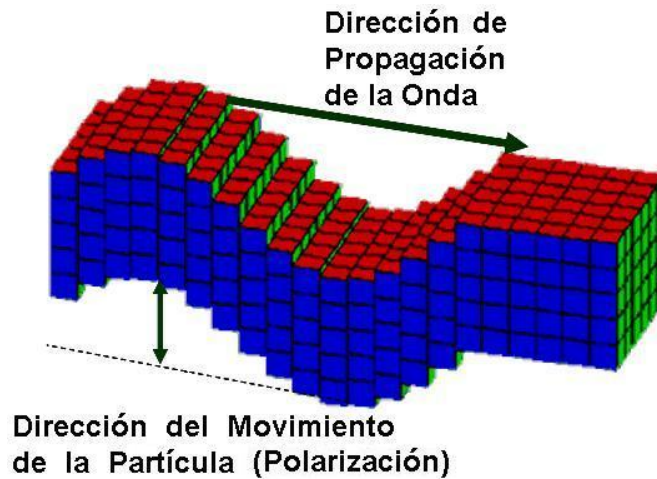


Figura 16: Propagación de la onda S

SERIE DE TAYLOR

La serie de Taylor para una función f de una variable infinitamente derivable en un intervalo $(a-r, a+r)$, se define como:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^n(a)(x-a)^n}{n!} \quad (28)$$

Donde $f^n(a)(x-a)$ es la derivada enésima de la función f .

Para el caso de una función f de dos variables, la serie de Taylor está dada de la forma:

$$f(x, y) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} \left[(x-h) \frac{\partial}{\partial x} + (y-k) \frac{\partial}{\partial y} \right]^n f(x, y)|_{h,k} \quad (29)$$

CÁLCULO DE ERRORES

Las medidas experimentales realizadas en este trabajo presentaban un error debido a las normales imperfecciones de los dispositivos de medida y limitaciones de la adquisición de los datos. El error estimado de la medida directa (tiempos de propagación de los pulsos y longitudes de las muestras) fue tomado de la sensibilidad de los dispositivos. Las medidas indirectas que se calcularon en este trabajo fueron el volumen, la densidad de masa, las velocidades de onda, los coeficientes elásticos y los parámetros de Thomsen. Mencionando el caso de la velocidad, esta es una función de la distancia y el tiempo, es decir, $v(x, t)$. El error de la magnitud de la velocidad fue calculado usando la siguiente expresión:

$$\Delta v = \sqrt{\left(\left\langle \frac{\partial v}{\partial x} \right\rangle \Delta x\right)^2 + \left(\left\langle \frac{\partial v}{\partial t} \right\rangle \Delta t\right)^2} \quad (30)$$

Estos errores son los consignados en la parte superior de las tablas escritos de la forma $\pm \Delta v$. De igual manera fue calculado el error para las otras mediciones indirectas.

El error porcentual entre los valores teóricos y experimentales fue calculado de la forma:

$$Er = \left| \frac{Vr.Teorico - Vr.Experimental}{Vr.Teorico} \right| * 100 \% \quad (31)$$

REFERENCIAS

- [1] Altamar, H., et al., 2006. Medida de velocidades de ondas en un sólido elástico con anisotropía ortorrómbica. *Rev. Col. Física*, **38-2**, 766-799.
- [2] Armstrong, Phil., et al., 1994. The promise of elastic anisotropy. *Oilfield Review*, 36-47.
- [3] Crampin, S., 1981. A review of wave motion in anisotropic and cracked elastic-media. *Wave Motion*, **3**, 343- 391.
- [4] Foldy, L., 1945. General theory of isotropic scattering by randomly distributed scatterers. *Physical Review*, **67**, 107–119.
- [5] Garbin, H. D. & Knopoff, L., 1973. The compressional modulus of a material permeated by a random distribution of circular cracks, *Q.appl.Math.*, **30**, 453–464.
- [6] Hudson, J.A., 1980. Overall properties of a cracked solid. *Mac. Proc. Camb. Phil. Soc*, **88**, 371-384.
- [7] Hudson, J.A., 1981. Wave speeds and attenuation of elastic waves in material containing cracks. *Geophysics. J. R. astr. Soc*, **64**, 133-150.

-
- [8] Mavko, G., 2003. The rock physics handbook. *Univ. of Cambridge*, **Capítulo 4**, 133-140.
- [9] Peacock, G. et al., 1994. Seismic velocities in fractures rocks: an experimental verification of Hudson theory. *Geophysical Prospecting*, **42**, 27-80.
- [10] Rodríguez, M. et al., 2000. Actuadores piezoeléctricos. *Ingenierías*, **3**, N° 6.
- [11] Rueda, Jenny. & Madero, Hernán. 2006. Tesis: Metodología para determinar la densidad de microfracturas en rocas cuya matriz presenta baja anisotropía. *Escuela de Geología – Universidad Industrial de Santander*.
- [12] Serway, Raymond. & Beichner, Robert., 2001. Física para ciencias e ingeniería. *McGraw-Hill*, 1026, 1057–1060, 1058.
- [13] Slawinski, M.A., 2003. Seismic waves and rays in elastic media. *Univ. of Newfoundland*.
- [14] Thomsen, L., 1986. Weak elastic anisotropy. *Geophysics*, **51**, 1954-1966.
- [15] Thomsen, L., 2002. Entendimiento de la anisotropía sísmica en exploración y explotación. *EAGE*.