TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE NEGOITA - RALESCU PARA CONJUNTOS DIFUSOS

ÓSCARY ÁVILA HERNÁNDEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2013

TEOREMA DE REPRESENTACIÓN DE NEGOITA - RALESCU PARA CONJUNTOS DIFUSOS

ÓSCARY ÁVILA HERNÁNDEZ

Monografía presentada como requisito para optar al
título de Licenciado en Matemáticas

Director
WILLIAM GONZÁLEZ CALDERÓN
Magister en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2013

A madre Maria Olinda.
A mis abuelos José Vistación e Irene.
Dios los tenga en su gloria.

Agradecimientos

Quiero expresar mis mas sinceros agradecimientos:
A mis padres, Marco Antonio y Maria Antonia
A mis hermanos, Carlos Alberto y Federico por toda su apoyo apoyo y paciencia.
A tías Marina, Elva Y Rosaura
A Mis maestros especialmente a: William Gonzalez, Sonia Sabogal
Y Edilberto Reyes.
A Mis amigos: Francisco Javier Gutiérrez, Jose Luis Puello García, Arturo Castro, Félix Antonio Páez, Iván Ortiz, Jaiver Rodríguez, Francisco Niño, Juan Carlos Sanmiguel y Oscar Reinaldo Madiedo, por todos los momentos de Academia Y LUCHA.

TITLE: Representation Theorem for fuzzy sets by Negoita - Ralescu *
AUTHOR: ÓSCARY ÁVILA HERNÁNDEZ **
KEY WORDS: Negoita-Ralescu's Representation Theorem, Fuzzy Sets, Lattices.

DESCRIPTION:
In this work we present the formal proof of the Negoita-Ralescu's Representation Theorem for fuzzy sets. This Theorem has many advantages at Fuzzy Multivalued Analysis because it allows to define and to show properties on measurability, continuity, integration and differentiation at the fuzzy context. Furthermore, allows to establish differential equations under uncertainty conditions.
This representation Theorem is referenced in many articles and books of Fuzzy Multivalued Analysis. However, it is not easy to find proof of this theorem in articles or internet. This situation was the motivation to seek and study the proof of Theorem of representation in the original version given in the book *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis* de CV Negoita and D. Ralescu published in 1975. The purpose of this paper is to reconstruct the process carried out in this book to prove the Representation Theorem for fuzzy sets.
One interesting something is discovered when we were studying literature. The original version of the representation Theorem given initially by Constantin Virgil and Dan A. Negoita Ralescu in 1975 differs from the current versions that can be found in the actual literature. Moreover, we found with surprise that current versions of Theorem correspond actually with the first Lema used by the authors in the book mentioned above, to prove his original version of the Theorem of representation. At some point in history an author assumes this Lema as the Theorem Negoita-Ralescu and thereafter it is established that way.
The contribution of this work is to explain the details of done process to prove the Theorem and develop alternative proofs of some results given in the book. For this, the paper is structured in three chapters: the first presents key aspects of the theory of *lattices* which is very important to study because the Theorem consist to show an isomorphism between lattices. The second chapter makes mention of main results of fuzzy set theory and presents a demonstration of a current version of the Representation Theorem. In a third part presents in detail the original version of Theorem Negoita-Ralescu.

---

*Monograph
**Faculty of Sciences, School of Mathematics. William William González Calderón, Magister in Mathematics

TÍTULO: Teorema de representación de Negoita - Ralescu para conjuntos difusos*
AUTOR: ÓSCARY ÁVILA HERNÁNDEZ**

PALABRAS CLAVES: Teorema de representación de Negoita-Ralescu, Conjuntos difusos, Lattices. DESCRIPCIÓN:

En este trabajo se presenta la demostración formal del Teorema de representación de Negoita-Ralescu para conjuntos difusos. Este Teorema tiene muchas ventajas en Análisis Multívoco Difuso porque permite definir y mostrar propiedades de medibilidad, continuidad, integración y diferenciación en Análisis Multívoco Difuso. Además, permite establecer ecuaciones diferenciales bajo incertidumbre y ambigüedad.
El Teorema de representación es un resultado referenciado en muchos artículos y libros de Análisis Multívoco Difuso. Sin embargo, no es fácil encontrar una prueba de tal Teorema en artículos o en internet. Este hecho fue la motivación para buscar y estudiar la prueba del Teorema de representación en la versión original dada en el libro *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis* de C.V. Negoita y D. Ralescu publicado en el año 1975. El alcance de este trabajo es reconstruir el proceso realizado en este libro para presentar y demostrar el Teorema de representación de conjuntos difusos.
A medida que se estudiaba la bibliografía, se descubre algo interesante: la versión original del Teorema de representación dada inicialmente por Constantin Virgil Negoita y Dan A. Ralescu en el año 1975 difiere de las versiones actuales que se pueden encontrar en la literatura. Las versiones actuales del Teorema corresponden realmente con el primer Lema utilizado por los autores en el libro mencionado arriba, para demostrar su versión original del Teorema de representación. En algún momento de la historia, algún autor asume este Lema como el Teorema de representación de conjuntos difusos y desde entonces, queda establecido de esa manera.
El aporte del trabajo consiste en exponer con claridad los detalles del proceso para la demostración del Teorema y en desarrollar algunas pruebas alternas a los resultados planteados en el libro en mención. Para ello, el trabajo se ha estructurado en tres capítulos: el primero presenta aspectos centrales de la teoría de *lattices*, la cual es importante estudiar porque en últimas el Teorema consiste en demostrar un isomorfismo entre estructuras de lattices.
El segundo capítulo hace mención de los principales resultados de la teoría de los conjuntos difusos y se presenta una demostración de una versión actual del Teorema de representación. En un tercer capítulo, se presenta en detalle la versión original del Teorema de Negoita-Ralescu.

---

*Monografía

**Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas.
William González Calderón, Magister en Matemáticas

Índice general

Introducción

Los conjuntos difusos son herramientas conceptuales que permiten modelar la ambigüedad presente en nuestro lenguaje cotidiano. Los conjuntos difusos "*proporcionan una forma natural de hacer frente a problemas en los que la fuente de imprecisión está dada por la ausencia de criterios claros que definen la pertenencia de un elemento a una clase*" [5] .Los conjuntos difusos se pueden interpretar como aquellos *conjuntos* que no tienen una *frontera bien definida*. Los conjuntos difusos se caracterizan porque la pertenencia de un elemento a un conjunto es ambigua, gradual, borrosa.

Los conjuntos difusos fueron introducidos inicialmente por Lofti Zadeh en 1965 [5]. Desde entonces se han desarrollado diversas teorías en diferentes áreas de las matemáticas basadas en los conjuntos difusos. En este trabajo se propone estudiar un teorema de gran importancia en la teoría de los conjuntos difusos: *el Teorema de representación de Negoita-Ralescu* (Ver Teorema 5). Este Teorema ha contribuido a unificar el Análisis Multívoco y la Lógica Difusa en lo que suele llamarse Análisis Multívoco Difuso.

El Teorema de representación de Negoita-Ralescu es un resultado referenciado en muchos artículos y libros de Análisis Multívoco Difuso. Esta situación despertó el interés por conocer *¿cómo es la demostración de este Teorema?* Lo curioso es que no es fácil encontrar una prueba de tal Teorema en artículos o en internet. Muchos autores utilizan el Teorema en sus artículos y siempre lo referencian al mismo libro [3], o lo referencian a artículos donde lo mencionan pero no lo demuestran. En la bibliografía del libro [2] se puede encontrar una lista de artículos y libros que tienen relación con este Teorema.

A medida que se estudiaba la bibliografía, se descubrió algo interesante: la versión original del Teorema de representación (Ver Teorema 5) dada inicialmente por Constantin Virgil Negoita y Dan A. Ralescu en el año 1975 [3] difiere de las versiones actuales (Ver Corolario 2) que se pueden encontrar en la literatura. Es más, se encontró que las versiones actuales del Teorema corresponden realmente con el primer lema (Ver Teorema 4) utilizado por los autores en [3] para demostrar su versión original del Teorema de representación. En algún momento de la historia algún autor asumió este lema como el Teorema de Negoita-Ralescu y desde entonces

quedó establecido de esa manera.
El alcance de esta monografía es reconstruir el proceso realizado en [3] para llegar a la demostración del Teorema de representación de conjuntos difusos. El aporte del trabajo consiste en explicar los detalles y realizar pruebas alternas a algunos de los resultados dados [3]. Para ello, el trabajo se ha estructurado en tres capítulos: el primero presenta aspectos centrales de la teoría de *lattices*. El segundo capítulo hace mención de los principales resultados de la teoría de los conjuntos difusos y se presenta una demostración de una versión actual del Teorema de representación. En un tercer capítulo, se presenta en detalle la versión original del Teorema de Negoita-Ralescu.

Capítulo 1

Nociones básicas sobre lattices

En este capítulo se presentan las nociones básicas de la teoría de lattices. La colección de los conjuntos difusos junto con dos operaciones $\vee$ (*supremo*) y $\wedge$ (*ínfimo*) dadas, forman una estructura de lattice. Esta teoría es importante estudiar porque precisamente el Teorema de representación de Negoita-Ralescu establece un isomorfimo entre lattices. Los preliminares son tomados de [1, 4].

Definición 1. *Un lattice es un conjunto parcialmente ordenado $(L, \leq)$ tal que, para cualquier par $x, y \in L$, existe el supremo $x \vee y \in L$ y existe el ínfimo $x \wedge y \in L$. En adelante, se abrevia $(L, \leq)$ por L.*

Proposición 1. *Sean $x, y \in L$, entonces*

$$x \wedge y \leq x \leq x \vee y \quad \text{y} \quad x \wedge y \leq y \leq x \vee y.$$

Además, sea $z \in L$, tal que

a) si $x, y \leq z$, entonces $x \vee y \leq z$,

b) si $z \leq x, y$, entonces $z \leq x \wedge y$.

La afirmación a) de la Proposición 1 significa que el supremo $x \vee y$ es el mínimo de las cotas superiores de x e y y la afirmación b) significa que el ínfimo $x \wedge y$ es el máximo de las cotas inferiores.

Teorema 1. *[4] Sea L un lattice y sean $x, y, z \in L$. Entonces,*

L1) $x \wedge x = x$ y $x \vee x = x$, *(idempontencia)*

L2) $x \wedge y = y \wedge x$ y $x \vee y = y \vee x$, *(commutativa)*

L3) $(x \wedge y) \wedge z = x \wedge (y \wedge z)$ y $(x \vee y) \vee z = x \vee (y \vee z)$, *(asociativa)*

L4) $(x \wedge y) \vee x = x$ y $(x \vee y) \wedge x = x$. *(absorción)*

Recíprocamente, un lattice también se puede caracterizar como un conjunto con dos operaciones $\vee$ y $\wedge$ definidas, las cuales cumplen las propiedades L1) a L4) del Teorema 1.

Teorema 2. *[4] Sea A un conjunto con dos operaciones $\vee$ y $\wedge$ dadas, las cuales cumplen las propiedades L1) a L4) del Teorema 1. Entonces, una relación de orden $\leq$ se puede definir en A de la siguiente manera*

$$x \leq y \Longleftrightarrow x \vee y = y, \quad x, y \in A,$$

y además, $(A, \leq)$ es un lattice.

Definición 2. *Se dice que L es un lattice distributivo, si*

$$x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z) \quad \text{y} \quad x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z),$$

para todo $x, y, z \in L$.

Definición 3. *Se dice que L es un lattice acotado, si existen $0 \in L$ y $1 \in L$ tal que $0 \leq x \leq 1$ para todo $x \in L$.*

Proposición 2. *Sea L es un lattice acotado. Entonces,*

I) *para cada $x \in L$, $x \vee 0 = x$ y $x \wedge 1 = x$,*

II) *para cada $x \in L$, $x \wedge 0 = 0$ y $x \vee 1 = 1$.*

Si existe un elemento 0 en un lattice L tal que, para todo $x \in L$: $x \vee 0 = x$, es equivalente a decir que $0 \leq x$, para todo $x \in L$. Es decir, 0 es el elemento mínimo de L. De igual forma, si existe un elemento 1 en L tal que, para todo $x \in L$: $x \wedge 1 = x$, es equivalente a decir que $x \leq 1$, para todo $x \in L$. Es decir, 1 es el elemento máximo de L.

Definición 4. *Sea L un lattice acotado. Se dice que L es complementado, si para cada $x \in L$, existe $x' \in L$ tal que $x \vee x' = 1$ y $x \wedge x' = 0$.*

Definición 5. *Sea L un lattice acotado. Una operación unaria biyectiva $' : L \to L$ se llama una dualidad de L, si ésta satisface las siguientes condiciones*

a) $(x')' = x$,

b) $x \leq y \Rightarrow y' \leq x'$.

Proposición 3. *Sea L un lattice acotado con una dualidad $'$. Entonces,*

1) $(x \vee y)' = x' \wedge y'$,

2) $(x \wedge y)' = x' \vee y'$.

Demostración. 1) Suponga el caso en que $x \vee y = z$, entonces $(x \vee y)' = z'$. Por otro lado, por la Definición 5 y por la Proposición 1, se tiene

$$x \leq z \text{ y } y \leq z \;\Rightarrow\; z' \leq x' \text{ y } z' \leq y' \;\Rightarrow\; z' \leq x' \wedge y'.$$

Entonces, $(x \vee y)' \leq x' \wedge y'$. Ahora, suponga que $x' \wedge y' = w$. Por la Definición 5 y Proposición 1, se tiene

$$w \leq x' \text{ y } w \leq y' \;\Rightarrow\; x \leq w' \text{ y } y \leq w' \;\Rightarrow\; x \vee y \leq w' \;\Rightarrow\; w \leq (x \vee y)'.$$

Luego, $x' \wedge y' \leq (x \vee y)'$. Por propiedades de orden, se cumple 1). De manera análoga se demuestra 2). ☑

Observación 1. *Es claro que un lattice L acotado por 0 y 1, satisface $0' = 1$ y $1' = 0$.*

Un lattice distributivo, acotado y complementado se conoce como álgebra booleana o lattice booleano. Las propiedades 1) y 2) de la Proposición 3 se conocen como *leyes de Morgan. Un lattice distributivo, acotado, no necesariamente complementado, pero con una dualidad $'$ la cual satisface las leyes de Morgan se conoce como álgebra de Morgan.* Claramente, una álgebra booleana es una álgebra de Morgan. A las álgebras de Morgan se le suelen llamar *álgebras suaves.*

Ejemplo 1. *Sea X conjunto cualquiera. La clase partes de X, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ (o $(\mathcal{P}(X), \bigcup, \bigcap)$) es un lattice booleano.*

Ejemplo 2. *El intervalo $([0,1], \leq)$ es un lattice. Las operaciones de supremo e ínfimo en $[0,1]$ se definen de manera usual como se encuentran definidos el supremo y el ínfimo en los números reales. También, se tiene que el intervalo $[0,1]$ es un lattice acotado, distributivo. Sin embargo, el intervalo $[0,1]$ no es un lattice complementado.*
Una propiedad interesante del intervalo $[0,1]$ es que se puede definir una dualidad $'$ de la siguiente manera: $x' = 1 - x$, para todo $x \in [0,1]$. Es claro que $'$ está bien definida y por lo tanto, satisface las leyes de Morgan. En consecuencia, el lattice $([0,1], \leq)$ es una álgebra de Morgan.

Definición 6. *Sea L un lattice y $M \subset L$. Se dice que M es un sublattice de L, si para todo $x, y \in M$, se tiene que $x \vee y \in M$ y $x \wedge y \in M$.*

Definición 7. *Se dice que L es un lattice sup-completo, si para cualquier subconjunto M de L tiene supremo en L. Se denota por $\bigvee M$ al supremo de M. De la misma manera, se dice que L es un lattice ínf-completo, si para cualquier subconjunto N de L tiene ínfimo en L. Se denota por $\bigwedge N$ al ínfimo de N.*

Definición 8. *Un lattice es completo si éste es sup-completo e ínf-completo.*

Ejemplo 3. *El intervalo $(0,1]$ es una lattice sup-completo, mientras que el intervalo $[0,1)$ es un lattice ínf-completo. Ninguno de los dos es completo.*

Ejemplo 4. *Sea X conjunto cualquiera. La clase partes de X, $(\mathcal{P}(X), \subseteq)$ es un lattice completo. El intervalo $([0,1], \leq)$ también lo es.*

Proposición 4. *Todo lattice acotado es completo.*

En un lattice completo, las propiedades distributivas se cumple de manera general.

Proposición 5. *Sea L lattice completo. Sea $\{x_i\}_{i\in I} \subset L$ y sea $x \in L$. Entonces, L satisface las leyes distributivas arbitrarias*

1) $x \wedge (\bigvee_{i\in I} x_i) = \bigvee_{i\in I}(x \wedge x_i)$,

2) $x \vee (\bigwedge_{i\in I} x_i) = \bigwedge_{i\in I}(x \vee x_i)$.

Ejemplo 5. *Sea X un conjunto cualquiera y L un lattice completo. Se denota la clase de funciones de X a L por*

$$\mathcal{F}_L(X) = \{f : X \to L \mid f \text{ es función}\}.$$

En $\mathcal{F}_L(X)$ se puede definir de manera natural una relación de orden parcial aprovechando justamente el orden parcial definido en L. Esto es, sean $f, g \in \mathcal{F}_L(X)$, entonces $f \leq g$ si, y sólo si $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Al definir un orden parcial en $\mathcal{F}_L(X)$, se pueden establecer las operaciones de $\vee$ y $\wedge$ de lattices en $\mathcal{F}_L(X)$, aprovechando que L es un lattice. En efecto, el Teorema 3 demuestra que $\mathcal{F}_L(X)$ es un lattice basándose en la estructura de lattice de L. Además, si L es un lattice completo, entonces $\mathcal{F}_L(X)$ también lo es (Ver Colorario 1).

El interés de desarrollar la demostración del Teorema 3 es mostrar como se estructuran algebraicamente las operaciones y propiedades en $\mathcal{F}_L(X)$ para formar un lattice a partir de las operaciones y propiedades de lattice definidas sobre L.

Teorema 3. *[4] Sea X un conjunto cualquiera y sea $(L, \wedge, \vee, \, ', 0, 1)$ una álgebra de Morgan. Entonces, para todo $f, g \in \mathcal{F}_L(X)$ y para todo $x \in L$ se pueden definir las siguientes operaciones*

a) $(f \vee g)(x) = f(x) \vee g(x)$,

b) $(f \wedge g)(x) = f(x) \wedge g(x)$,

c) $f'(x) = (f(x))'$,

d) $\tilde{0}(x) = 0$,

e) $\tilde{1}(x) = 1$.

de tal forma que $(\mathcal{F}_L(X), \wedge, \vee, \, ', \tilde{0}, \tilde{1})$ es una álgebra de Morgan.

Demostración. Se debe demostrar primero que $\mathcal{F}_L(X)$ es un lattice. Es claro que las operaciones de supremo e ínfimo dadas en a) y b) están bien definidas. En efecto, sean $f, g \in \mathcal{F}_L(X)$ tales que

$$\begin{aligned} f :& X \to L \\ & x \to f(x), \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g :& X \to L \\ & x \to g(x). \end{aligned}$$

Siendo L un lattice y $f(x), g(x)$ elementos de L, entonces existe tanto el supremo $f(x) \vee g(x)$ como el ínfimo $f(x) \wedge g(x)$ en L, para todo $x \in L$. De ese modo se pueden establecer las definiciones de supremo $f \vee g$ e ínfimo $f \wedge g$ en $\mathcal{F}_L(X)$. Las nuevas funciones $f \vee g$ y $f \wedge g$ están bien definidas por la unicidad del supremo y del ínfimo en L. Por lo tanto, $\mathcal{F}_L(X)$ es cerrada bajo las operaciones de $\vee$ y $\wedge$.
Se puede demostrar que $\mathcal{F}_L(X)$ satisface las propiedades de la Proposición 1. Las demostraciones son directas. Éstas se apoyan en el hecho que L satisface las cuatro propiedades de la Proposición 1. Por cuestiones prácticas se desarrolla sola la prueba para la propiedad (IV) la cual consiste en probar la igualdad de funciones.

(I) Idempotente: $f \vee f = f$ y $f \wedge f = f$.

(II) Conmutativa: $f \vee g = g \vee f$ y $f \wedge g = g \wedge f$.

(III) Asociativa: $(f \vee g) \vee h = f \vee (g \vee h)$ y $(f \wedge g) \wedge h = f \wedge (g \wedge h)$.

(IV) Identidades por absorción: $(f \wedge g) \vee f = f$ y $(f \vee g) \wedge f = f$.

$$((f \wedge g) \vee f)(x) = (f \wedge g)(x) \vee f(x) = (f(x) \wedge g(x)) \vee f(x) = f(x).$$

$$((f \vee g) \wedge f)(x) = (f \vee g)(x) \wedge f(x) = (f(x) \vee g(x)) \wedge f(x) = f(x).$$

Entonces, por el Teorema 2, se concluye que $\mathcal{F}_L(X)$ es un lattice.
Los elementos mínimo y máximo de $\mathcal{F}_L(X)$ son respectivamente las funciones constantes $\tilde{0}$ y $\tilde{1}$ definidas en d) y e). Se puede verificar fácilmente que $\tilde{0} \le f \le \tilde{1}$ para toda $f \in \mathcal{F}_L(X)$. Luego, $\mathcal{F}_L(X)$ es un lattice acotado.
Las propiedades distributivas de una operación con respecto a la otra se cumplen en $\mathcal{F}_L(X)$ porque justamente L es un lattice distributivo. Sólo se mencionan las propiedades debido a que las demostraciones consisten sencillamente en mostrar la igualdad entre funciones. Esto es,

$$f \wedge (g \vee h) = (f \wedge g) \vee (f \wedge h) \qquad \text{y} \qquad f \vee (g \wedge h) = (f \vee g) \wedge (f \vee h).$$

Una dualidad $'$ se puede definir en $\mathcal{F}_L(X)$ valiéndose de la dualidad $'$ definida en L. Esto es,

$$\begin{aligned} ' : \mathcal{F}_L(X) &\to \mathcal{F}_L(X) \\ f &\to f', \end{aligned}$$

donde f' se define de manera natural

$$\begin{aligned} f' :& X \to L \\ & x \to f'(x) = (f(x))'. \end{aligned}$$

Claramente, $'$ está bien definida en $\mathcal{F}_L(X)$. Ahora, se necesita probar que $'$ es una biyección y que cumple con las condiciones de la Definición 5.

(d1) (inyectividad) $f' = g' \Rightarrow f = g$. Suponga que existe un $x \in X$ tal que $f(x) \neq g(x)$. Como $f(x), g(x) \in L$ y siendo L una álgebra de Morgan, se le puede aplicar $'$ de L a estos elementos. Entonces se obtienen $(f(x))'$ y $(g(x))'$ distintos por la inyectividad de $'$ en L. Luego,

$$f'(x) = (f(x))' \neq (g(x))' = g'(x).$$

Por lo tanto, $f' \neq g'$.

(d2) (sobreyectividad) Sea $g \in \mathcal{F}_L(X)$. Se define la siguiente función,

$$\begin{aligned} f :& X \to L \\ & x \to f(x) = (g(x))'. \end{aligned}$$

Entonces,

$$f'(x) = (f(x))' = (g(x)')' = g(x), \quad \forall x \in X.$$

Por lo tanto, $f' = g$ porque $'$ es una dualidad en L.

(d3) $(f')' = f$. Es inmediata debido a que $'$ es una dualidad en L. Esto es,

$$(f')'(x) = (f'(x))' = (f(x))'' = f(x).$$

(d4) $f \leq g \Rightarrow g' \leq f'$. Es claro que, $f(x) \leq g(x)$ para todo $x \in X$. Entonces, $g'(x) \leq f'(x)$ porque $'$ es dualidad en L.

Además, por la Proposición 3, $\mathcal{F}_L(X)$ cumple las leyes de Morgan. Éstas son,

$$(f \wedge g)' = f' \vee g' \qquad \text{y} \qquad (f \vee g)' = f' \wedge g'.$$

Por consiguiente, $\mathcal{F}_L(X)$ es una álgebra de Morgan. ☑

Observación 2. *$\mathcal{F}_L(X)$ es de por si un lattice acotado por ser una álgebra de Morgan. Entonces, por la proposición 4, se tiene que $\mathcal{F}_L(X)$ es completo. La demostración del Corolario 1 permite observar como se definen el supremo y el ínfimo en $\mathcal{F}_L(X)$.*

Corolario 1. *Si L es álgebra de Morgan completa, entonces $\mathcal{F}_L(X)$ también lo es.*

Demostración. Sea $\mathcal{G} = \{f_i\}_{i\in I}$ una familia cualquiera de funciones de $\mathcal{F}_L(X)$. Entonces, el supremo de $\mathcal{G}$, $\check{f} = \bigvee_{i\in I} f_i$, se define de la siguiente manera

$$\check{f}(x) = \bigvee_{i\in I} f_i(x), \quad \text{para cada } x \in X.$$

Es claro que $\check{f}$ está bien definido. En efecto, para cada $x \in X$ se tiene que $f_i(x) \in L$. Siendo L es completo, entonces existe el supremo $\bigvee_{i\in I} f_i(x)$ en L. Por lo tanto, $\check{f} \in \mathcal{F}_L(X)$.
En este mismo sentido, es obvio que $\check{f} \geq f_i$ para toda $i \in I$, es decir, $\check{f}$ es cota superior de $\mathcal{G}$ porque

$$\check{f}(x) = \bigvee_{i\in I} f_i(x) \geq f_i(x), \quad \text{para cada } x \in X.$$

Suponga que existe $\check{g} \in \mathcal{F}_L(X)$ tal que $f_i \leq \check{g} < \check{f}$, para toda $i \in I$. Luego, para $x \in X$, se tiene que $f_i(x) \leq \check{g}(x) < \check{f}(x)$. Esto significa que existe una cota superior $\check{g}(x)$ de los $f_i(x)$'s en L, menor que el supremo $\bigvee_{i\in I} f_i(x)$, lo cual es una contradicción. Entonces, $\check{f}$ es la mínima cota superior de $\mathcal{G}$. Por lo tanto, $\mathcal{F}_L(X)$ es un lattice sup-completo. De manera análoga se demuestra que $\mathcal{F}_L(X)$ es un ínf-completo. ☑

Se introduce un concepto básico en álgebra: homomorfismos e isomorfismos de lattices. Dados dos conjuntos $(L, \leq)$ y $(M, \leq)$ conjuntos parcialmente ordenados, una pregunta natural es: ¿cuándo estos conjuntos parcialmente ordenados son *esencialmente el mismo*? Para que sean esencialmente el mismo, debería existir una función biyectiva de L a M que respete en algún sentido la relación de orden de los respectivos conjuntos.

Definición 9. *Sean $(L, \leq)$ y $(M, \leq)$ conjuntos parcialmente ordenados. Una función $g : L \to M$ tal que $g(x) \leq g(y)$ siempre que $x \leq y$, es llamada un homomorfismo o un homomorfimo de orden.*

Definición 10. *Sean $(L, \leq)$ y $(M, \leq)$ conjuntos parcialmente ordenados. Si existe una función biyectiva $f : L \to M$ tal que*

$$x \leq y \Leftrightarrow f(x) \leq f(y), \quad \textit{para } x, y \in L.$$

Entonces, f es llamada un isomorfismo de orden entre L y M. En este caso, se dice que L y M son isomorfos.

Ejemplo 6. *Es claro que no existe una diferencia esencial como conjuntos ordenados entre $([0, 1], \leq)$ y $([1, 2], \leq)$. La función $f(x) = x + 1$ es un isomorfismo entre $[0, 1]$ y $[1, 2]$.*

Suponga ahora que $(L, \vee, \wedge)$ y $(M, \vee, \wedge)$ son lattices. En lugar de considerar una relación de orden sobre L y M como se había establecido en la Definición 10, se asume los lattices con sus correspondientes operaciones $\vee$ y $\wedge$. En este sentido, un isomorfismo de lattices es una función biyectiva que preserva las operaciones $\vee$ y $\wedge$ entre los lattices L y M.

Proposición 6. *Sean $(L, \vee, \wedge)$ y $(M, \vee, \wedge)$ lattices. Si f es una función biyectiva tal que $f(x \vee y) = f(x) \vee f(y)$ y $f(x \wedge y) = f(x) \wedge f(y)$ para todo $x, y \in L$, entonces f es un isomorfismo de lattices. En este caso, se dice que L y M son isomorfos.*

Si la condición de inyectividad de f es omitida en la Definición 6, entonces f es un homomorfismo de lattices.

Definición 11. *Sean $(L, \vee, \wedge)$ y $(M, \vee, \wedge)$ lattices completos. Entonces, un isomorfismo de lattices $f : L \to M$ es un isomorfismo de lattices completos si, y sólo si,*

$$f(\bigvee S) = \bigvee f(S) \quad \text{y} \quad f(\bigwedge S) = \bigwedge f(S), \quad \text{para todo } S \subseteq L.$$

En este caso, se dice que L y M son isomorfos completamente o isomorfos como lattices completos.

Como en cualquier estructura algebraica, un isomorfismo de un lattice en sí mismo se llama *automorfismo* y la composición de isomorfismos es un isomorfismo.
De manera análoga se define la dualidad de las operaciones $\vee$ y $\wedge$ de lattices a través de los isomorfismos.

Definición 12. *Sean $(L, \vee, \wedge)$ y $(M, \vee, \wedge)$ lattices. Si f es una función biyectiva tal que $f(x \vee y) = f(x) \wedge f(y)$ y $f(x \wedge y) = f(x) \vee f(y)$ para todo $x, y \in L$, entonces f es un isomorfismo dual de lattices. En este caso, se dice que L y M son isomorfos dualmente como lattices.*

Definición 13. *Sean $(L, \vee, \wedge)$ y $(M, \vee, \wedge)$ lattices completos. Entonces, un isomorfismo de lattices $f : L \to M$ es un isomorfismo dual de lattices completos si, y sólo si,*

$$f(\bigvee S) = \bigwedge f(S) \quad \text{y} \quad f(\bigwedge S) = \bigvee f(S), \quad \text{para todo } S \subseteq L.$$

En este caso, se dice que L y M son isomorfos dualmente como lattices completos.

Proposición 7. *Sean $(L_1, \vee, \wedge)$, $(L_2, \vee, \wedge)$ y $(L_3, \vee, \wedge)$ lattices completos. Si L_1 y L_2 son isomorfos completamente y L_2 y L_3 son isomorfos dualmente como lattices completos. Entonces, L_1 y L_3 son isomorfos dualmente como lattices completos.*

Demostración. Sea $\{x_i\} \in L_1$. Sean $f : L_1 \to L_2$ un isomorfismo de lattices completos y $g : L_2 \to L_3$ un isomorfismo dual de lattices completos. Entonces, se define una función $h : L_1 \to L_3$ donde $h = g \circ f$. Claramente, h es biyectiva. Además, se tiene que

$$h(\bigvee_i x_i) = (g \circ f)(\bigvee_i x_i) = g(f(\bigvee_i x_i)) = g(\bigvee_i f(x_i)) = \bigwedge_i g(f(x_i)) = \bigwedge_i h(x_i),$$

y de manera similar se obtiene que

$$h(\bigwedge_i x_i) = (g \circ f)(\bigwedge_i x_i) = g(f(\bigwedge_i x_i)) = g(\bigwedge_i f(x_i)) = \bigvee_i g(f(x_i)) = \bigvee_i h(x_i).$$

☑

Capítulo 2

Una versión actual del Teorema de representación de Negoita-Ralescu

En este capítulo se presentan las nociones básicas de la teoría de los conjuntos difusos. Se introduce el concepto de nivel de un conjunto difuso el cual permite caracterizar este último de una manera distinta. Al final del capítulo se presenta una demostración de una versión actual del Teorema de representación de Negoita-Ralescu.

2.1. Conjuntos difusos

Definición 14. *Sea X un conjunto cualquiera. Un conjunto difuso u sobre X se puede representar por medio de una función $u : X \to [0, 1]$, llamada función de pertenencia, tal que a cada punto $x \in X$ le asigna un número real $u(x)$ en $[0, 1]$. El valor $u(x)$ significa el grado de pertenencia de x al conjunto difuso u, siendo $u(x) = 1$ el mayor grado de pertenencia de x a u y $u(x) = 0$ el menor grado de pertenencia de x a u.*

Obsérvese que la colección de todos los conjuntos difusos definidos sobre un conjunto X se puede escribir como la clase $\mathcal{F}_L(X)$ del Ejemplo 5 donde $L = [0, 1]$. Esta colección se denota por $\mathcal{F}(X)$. Entonces, por el Teorema 3 y el Corolario 1, se tiene que $\mathcal{F}(X)$ es una álgebra de Morgan completa. Es decir, $\mathcal{F}(X)$ es un lattice completo, acotado, distributivo y con una dualidad $'$ definida de $\mathcal{F}(X)$ en sí misma.

Observación 3. *En topología difusa se suele tomar L como un lattice cualquiera. Incluso, los autores en [3] asumen a L de manera general como un lattice con las propiedades de una álgebra de Morgan, con el fin de hacer la demostración del Teorema de representación de conjuntos difusos indistintamente para L. De* *esta forma, se pueden considerar otras formas de $\mathcal{F}_L(X)$ con álgebras de Morgan diferentes al intervalo $L = [0,1]$, como por ejemplo $L = \{0, 1/2, 1\}$. En este trabajo se asume a $L = [0,1]$ debido al interés de conocer aspectos específicos de $\mathcal{F}(X)$.*

Las operaciones de supremo e ínfimo entre conjuntos difusos se definen de manera usual.

Definición 15. *El supremo de dos conjuntos difusos u y v es un conjunto difuso $u \vee v$ definido como*

$$(u \vee v)(x) = \sup_{x \in X}\{u(x), v(x)\}.$$

Observación 4. *El supremo $u \vee v$ de dos conjuntos difusos u y v puede definirse como el conjunto difuso más pequeño que es mayor o igual que u y v.*

Definición 16. *El ínfimo de dos conjuntos difusos u y v es un conjunto difuso $u \wedge v$ definido como*

$$(u \wedge v)(x) = \inf_{x \in X}\{u(x), v(x)\}.$$

Observación 5. *De la misma forma, se puede definir el ínfimo $u \wedge v$ de dos conjuntos difusos u y v, como el conjunto difuso más grande que es menor o igual que u y v.*

Proposición 8. *Sean u, v, w conjuntos difusos sobre X. Las operaciones $\vee$ y $\wedge$ establecidas en la Definición 15 y en la Definición 16 satisfacen las propiedades*

I) $u \vee u = u$ y $v \wedge v = v$, *(idempotencia)*

II) $(u \vee v) \vee w = u \vee (v \vee w)$ y $(u \wedge v) \wedge w = u \wedge (v \wedge w)$, *(asociativa)*

III) $u \vee v = v \vee u$ y $u \wedge v = v \wedge u$, *(conmutativa)*

IV) $u \vee (v \wedge w) = (u \vee v) \wedge (v \vee w)$ y $u \wedge (v \vee w) = (u \wedge v) \vee (v \wedge w)$. *(absorción)*

Una relación de orden parcial está definida de manera natural en los conjuntos difusos. Sea X un conjunto cualquiera y sean u y v conjuntos difusos sobre X. Se dice que u es menor o igual que v si, y sólo si $u(x) \leq v(x)$ para todo $x \in X$. Análogamente, u es mayor o igual que v si, y sólo si, $u(x) \geq v(x)$. Claramente, $\leq$ es una relación de orden.

Definición 17. *Sea X un conjunto cualquiera. Sean u y v conjuntos difusos. Se dice que u y v son el mismo conjunto difuso si, y sólo si, $u(x) = v(x)$ para todo $x \in X$.*

El *conjunto difuso vacío* es aquel cuya función de pertenencia es la función constante de valor cero. Se denota como $\tilde{\emptyset}$.

Definición 18. *Sea X un conjunto cualquiera. Si $\tilde{\emptyset} : X \to [0,1]$ es un conjunto difuso tal que $\tilde{\emptyset}(x) = 0$ para todo $x \in X$, se dice que $\tilde{\emptyset}$ es el conjunto difuso vacío sobre X.*

De igual forma se define el *conjunto difuso universo.*

Definición 19. *Sea X un conjunto cualquiera. Si $\tilde{X} : X \to [0,1]$ es un conjunto difuso tal que $\tilde{X}(x) = 1$ para todo $x \in X$, se dice que $\tilde{X}$ es el conjunto difuso* universo.

Proposición 9. *La colección $\mathcal{F}(X)$ es un lattice acotado.*

Demostración. Es claro que $\tilde{\emptyset}$ y $\tilde{X}$ son los elementos, mínimo y máximo, respectivamente, de $\mathcal{F}(X)$ de acuerdo a la Definición 3 . ☑

Definición 20. *Sea X un conjunto cualquiera. Una dualidad $'$ de $\mathcal{F}(X)$ es definida como $u'(x) = 1 - u(x)$, para todo $u \in \mathcal{F}(X)$ y para todo $x \in X$.*

De acuerdo a la Definición 5 y la Proposición 3, la dualidad $'$ en $\mathcal{F}(X)$ satisface las leyes de Morgan. Esto es,

$$(u \vee v)' = u' \wedge v' \quad \text{y} \quad (u \wedge v)' = u' \vee v'.$$

También se tiene que $\tilde{\emptyset}' = \tilde{X}$ y $\tilde{X}' = \tilde{\emptyset}$.
Esta caracterización de la colección $\mathcal{F}(X)$ (*de todos los conjuntos difusos sobre* X) como una álgebra de Morgan, permitirá compararla con otra estructura similar de modo que se pueda establecer un Teorema de representación para $\mathcal{F}(X)$.

2.2. Niveles de un conjunto difuso

La noción de *pertenencia* en los conjuntos difusos no tiene el mismo sentido que en la teoría clásica de conjuntos. Como dice Zadeh en [5]: *"no es significativo hablar que un punto x* pertenezca *a un conjunto difuso A excepto en el sentido que $u_A(x)$ asume un valor positivo. Entonces, se puede introducir dos niveles α y β con $0 < \beta < \alpha < 1$ y decir que: (i.) ' x pertenece a A' si $u_A(x) \geq \alpha$; (ii.) ' x no pertenece a A' si $u_A(x) \leq \beta$; y (iii.) ' x tiene una pertenencia relativa a A' si $\beta < u_A(x) < \alpha$".* Una generalización de la incertidumbre o ambigüedad de la pertenencia de un elemento a un conjunto difuso es considerar todas las posibilidades dadas por el intervalo $[0,1]$. Dado un conjunto difuso u sobre X y un valor $\alpha \in [0,1]$, la expresión $u(x) \geq \alpha$ significa que el nivel de pertenencia de los elementos x al conjunto difuso u es a lo más $1 - \alpha$. De esta forma, con $\alpha = 1$ ó $\alpha = 0$ se tiene incertidumbre nula; y con $\alpha = 0{,}5$, incertidumbre total. *El conjunto de los elementos $x \in X$ tales que $u(x) \geq \alpha$ se le llama el nivel α del conjunto difuso u.*

Definición 21. *Sea $u : X \to [0,1]$ un conjunto difuso y $\alpha \in [0,1]$. Se define el α-nivel de u como $[u]^\alpha = \{x \in X \mid u(x) \geq \alpha\}$. Es claro que si $\alpha = 0$, el α-nivel cero de u es $[u]^0 = X$.*

Una de las propiedades más importantes de un conjunto difuso $u \in \mathcal{F}(X)$, es que se le puede asociar una familia de niveles (subconjuntos de X) indexada por el intervalo $[0,1]$, los cuales representan el nivel de ambigüedad de pertenencia de un elemento $x \in X$ al conjunto difuso u. Los miembros de esta familia se le llaman ***α-niveles*** de u. De alguna forma, se busca representar un conjunto difuso por medio de la familia de sus α-niveles.
Con base en la definición de α-nivel se obtiene otra forma de caracterizar la igualdad entre dos conjuntos difusos.

Proposición 10. *Sean u y v conjuntos difusos sobre un mismo conjunto universo X. Entonces, $u = v$ si, y sólo si $[u]^\alpha = [v]^\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$.*

Demostración. $\Rightarrow$) Es inmediata.
$\Leftarrow$)Suponga que existe $x \in X$ tal que $u(x) \neq v(x)$. Sin pérdida de generalidad, se puede suponer que $u(x) < v(x)$. Por propiedades de $\mathbb{R}$, podemos encontrar un $\beta \in [0,1]$ tal que $u(x) < \beta < v(x)$. Entonces $x \in [v]^\beta$, pero $x \notin [u]^\beta$. Luego, los α-niveles no son iguales. ☑

Ejemplo 7. *Los α-niveles del conjunto difuso vacío $\tilde{\emptyset}$ sobre X están dados por*

$$[\tilde{\emptyset}]^\alpha = \begin{cases} X, & \alpha = 0, \\ \emptyset, & \alpha > 0. \end{cases}$$

Análogamente, los α-niveles del conjunto difuso universo $\tilde{X}$ están dados por $[\tilde{X}]^\alpha = X$ para todo $\alpha \in [0,1]$.

La colección de los α-niveles de un conjunto difuso u satisface las siguientes propiedades.

Proposición 11. *Sea $\{[u]^\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ la familia de α-niveles de un conjunto difuso $u \in \mathcal{F}(X)$. Entonces,*

(a) $[u]^1 \subseteq [u]^\beta \subseteq [u]^\alpha \subseteq [u]^0$, para todo α, β con $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$.

(b) Si α_n es una sucesión no decreciente de $[0,1]$ que converge a α, entonces

$$[u]^\alpha = \bigcap_{n=1}^{\infty} [u]^{\alpha_n}.$$

Demostración.

(a) Sean $\alpha, \beta \in [0,1]$, con $\alpha \leq \beta$, y $x \in [u]^\beta$. Entonces, $u(x) \geq \beta \geq \alpha$.

(b) Para todo n, se tiene que $\alpha_n \leq \alpha$; por el item anterior (a), $[u]^\alpha \subseteq [u]^{\alpha_n}$, $\forall n$. Entonces, $[u]^\alpha \subseteq \bigcap [u]^{\alpha_n}$. Por otro lado, sea $x \in \bigcap [u]^{\alpha_n}$, entonces $x \in [u]^{\alpha_n}$, $\forall n$. Luego, $u(x) \geq \alpha_n$, $\forall n$. La sucesión no decreciente α_n, de elementos de $[0,1]$, está acotada superiormente por $u(x)$. Entonces, por propiedades de los números reales, el límite α de la sucesión α_n debe ser menor que $u(x)$, esto es, $u(x) \geq \alpha$. ☑

De este modo, a un conjunto difuso $u \in \mathcal{F}(X)$ se le puede asociar una colección de subconjuntos de X indexada por el intervalo $[0,1]$, que es justamente la familia de sus α-niveles, la cual cumple las condiciones de la Proposición 11. Una pregunta natural que surge en este contexto es: si se tiene una familia de subconjuntos de un conjunto X, indexada por el intervalo $[0,1]$, la cual satisface las condiciones de la Proposición 11: ¿existe un conjunto difuso cuyos α-niveles correspondan con ésta familia? La respuesta es cierta y tal resultado es conocido como el **Teorema de representación de Negoita-Ralescu** (Ver Corolario 2).
Para proceder a enunciar el Teorema de representación, primero se considera la familia de todas las familias de subconjuntos de X tales que satisfacen las condiciones (**??**) y (**??**) de la Proposición 11. Para esto, se requiere de la siguiente noción para definir esta familia de familias.

Definición 22. *Sean X, Y conjuntos no vacíos. Se denota por $\mathcal{P}(Y)$ la familia partes de Y. Entonces, una función $F : X \to \mathcal{P}(Y)$ tal que $F(x) \subset Y$, es llamada una multifunción. Esto es, una función que asocia a cada punto de un conjunto X, un único subconjunto de un conjunto Y.*

De este modo, una familia $\{A_\alpha : \alpha \in [0,1]\}$ de subconjuntos de X se puede representar por medio de una multifunción $\phi : [0,1] \to \mathcal{P}(X)$ tal que $\phi(\alpha) = A_\alpha$, donde $\mathcal{P}(X)$ es la colección partes de X.

Definición 23. *Sea $I \subseteq [0,1]$ y sea $f : [0,1] \to \mathcal{P}(X)$ una multifunción que satisface las siguientes propiedades:*

(f1) $f(0) = X$.

(f2) $f(\bigvee_{i\in I} \alpha_i) = \bigcap_{i\in I} f(\alpha_i)$, *para todo* $\{\alpha_i\}_i \subseteq [0,1]$.

Se denota por $\mathcal{L}'(X)$ la colección definida como

$$\mathcal{L}'(X) = \{f : [0,1] \to \mathcal{P}(X) : f \textit{ satisface (f1) y (f2)}\}.$$

Un orden parcial puede ser introducido en $\mathcal{L}'(X)$ de manera natural. En efecto, sean $f_1, f_2 \in \mathcal{L}'(X)$, entonces

$$f_1 \leq f_2 \Leftrightarrow f_1(\alpha) \subset f_2(\alpha),\ \forall \alpha \in [0,1].$$

Proposición 12. *Si $f \in \mathcal{L}'(X)$, entonces f es no-creciente.*

Demostración. Sean $\alpha, \beta \in [0,1]$ tales que $\alpha \leq \beta$. Entonces,

$$f(\beta) = f(\alpha \vee \beta) = f(\alpha) \cap f(\beta), \quad \text{luego} \quad f(\beta) \subseteq f(\alpha).$$ ☑

Observación 6. *Se asume la Proposición 12 como la propiedad (f3) de la Definición 23.*

Observación 7. *Nótese que la familia de todas las familias de subconjuntos de X las cuales satisfacen las condiciones de la Proposición 11 se puede representar a través de la colección $\mathcal{L}'(X)$, debido a que las propiedades (f3) y (f2) de la Definición 23 corresponden con las propiedades (a) y (b) de la Proposición 11. Además, la propiedad (f1) corresponde con el nivel cero de un conjunto difuso.*

En resumen, los conjuntos difusos de $\mathcal{F}(X)$ se pueden escribir en términos de la familia de sus α-niveles, donde a su vez, ésta última puede ser definida por medio de una multifunción no-creciente $f : [0,1] \to \mathcal{P}(X)$ la cual satisface las condiciones de la Definición 23. Todas estas multifunciones pueden comprenderse en una colección denotada por $\mathcal{L}'(X)$. El siguiente paso consiste en mostrar que $\mathcal{L}'(X)$ es una álgebra de Morgan completa y de esa manera, establecer un isomorfismo con $\mathcal{F}(X)$.

Proposición 13. $\mathcal{L}'(X)$ *es un lattice completo.*

Demostración. Se demuestra primero que $\mathcal{L}'(X)$ es un lattice. El ínfimo de $f, g \in \mathcal{L}'(X)$ se define naturalmente como

$$\begin{aligned} f \wedge g : [0,1] &\to \mathcal{P}(X) \\ \alpha &\to (f \wedge g)(\alpha) = f(\alpha) \cap g(\alpha), \ \forall \alpha \in [0,1]. \end{aligned} \tag{2.1}$$

El ínfimo en $\mathcal{L}'(X)$ está bien definido porque la intersección de conjuntos corresponde con el ínfimo en $\mathcal{P}(X)$. Además, es claro que $f \wedge g \in \mathcal{L}'(X)$. Esto es, sea $\{\alpha_j\}_{j \in J} \subseteq [0,1]$, entonces

(f1) $(f \wedge g)(0) = f(0) \cap g(0) = X \cap X = X$.

(f2) $(f \wedge g)(\bigvee \alpha_j) = f(\bigvee \alpha_j) \cap g(\bigvee \alpha_j) = \bigcap f(\alpha_j) \cap \bigcap g(\alpha_j) = \bigcap (f(\alpha_j) \cap g(\alpha_j)) = = \bigcap ((f \wedge g)(\alpha_j))$.

Es de notar que el ínfimo en $\mathcal{L}'(X)$ se cumple de manera arbitraria. Esto es, sea $\{f_i\}_{i \in I}$ una familia cualquiera de multifunciones de $\mathcal{L}'(X)$, entonces

$$(\bigwedge_{i \in I} f_i)(\alpha) = \bigcap_{i \in I} f_i(\alpha), \forall \alpha \in [0,1]. \tag{2.2}$$

De manera directa se prueba que $\bigwedge_{i \in I} f_i$ cumple con las condiciones $(f1)$ y $(f2)$ de la Definición 23. En efecto, por propiedades de intersecciones arbitrarias en $\mathcal{P}(X)$, se tiene que

$$(\bigwedge f_i)(\bigvee \alpha_j) = \bigcap_i f_i(\bigvee \alpha_j) = \bigcap_i \bigcap_j f_i(\alpha_j) = \bigcap_j \bigcap_i f_i(\alpha_j) = \bigcap_j \bigwedge f_i(\alpha_j).$$

Por otro lado, si se define que el supremo $f \vee g$ está dado por $(f \vee g)(\alpha) = f(\alpha) \cup g(\alpha)$ para $f, g \in \mathcal{L}'(X)$, entonces no se puede asegurar que $f \vee g \notin \mathcal{L}'(X)$. Luego, una manera de establecer una definición de supremo en $\mathcal{L}'(X)$ es aprovechar el ínfimo ya definido en $\mathcal{L}'(X)$ de manera arbitraria (Ver (2.1) y (2.2)). De este modo, se puede definir el supremo en $\mathcal{L}'(X)$, denotado por $\overline{\bigvee}$, de la siguiente forma

$$\overline{\bigvee}_{i\in I} f_i = \bigwedge\{f \mid f \geq f_i, \text{ donde } f, f_i \in \mathcal{L}'(X), \forall i\}. \tag{2.3}$$

Claramente, $\overline{\bigvee} f_i$ está bien definido por la unicidad del ínfimo en $\mathcal{L}'(X)$. Además, $\overline{\bigvee} f_i$ siempre existe porque la multifunción f_X del Ejemplo 8 definida como $f_X(\alpha) = X$ para todo $\alpha \in [0,1]$, pertenece a $\mathcal{L}'(X)$. Luego, tiene sentido considerar el conjunto $\{f \geq f_i \mid f, f_i \in \mathcal{L}'(X)\}$ de (2.3).
Entonces, se tiene que $\overline{\bigvee} f_i$ es cota superior de los f_i's. Esto es, sea $\alpha \in [0,1]$, luego

$$(\overline{\bigvee} f_i)(\alpha) = (\bigwedge_{f\geq f_i} f)(\alpha) = \bigcap_{f\geq f_i} f(\alpha) \supset f_i(\alpha), \forall i.$$

Suponga que existe $x \in f_j(\alpha)$ para algún j y $x \notin \bigcap_{f\geq f_i} f(\alpha)$. Entonces, existe $f_0 \geq f_j$, tal que $x \notin f_0(\alpha)$. Esto implica que $f_0(\alpha) \not\supseteq f_j(\alpha)$ lo cual es una contradicción. Ahora, suponga que existe $g \in \mathcal{L}'(X)$ tal que

$$\overline{\bigvee} f_i \geq g \geq f_i, \ \forall i.$$

Luego, por definición de $\overline{\bigvee}$,

$$g \geq \bigwedge_{f\geq f_i} f = \overline{\bigvee} f_i.$$

Por consiguiente, $(\mathcal{L}'(X), \wedge, \overline{\bigvee})$ es un lattice completo. ☑

Ejemplo 8. *La multifunción $f_X : [0,1] \to \mathcal{P}(X)$ definida como $f_X(\alpha) = X$ para todo $\alpha \in [0,1]$ pertenece a la colección $\mathcal{L}'(X)$. Análogamente, la multifunción $f_\emptyset$: $[0,1] \to \mathcal{P}(X)$ definida como*

$$f_\emptyset(\alpha) = \begin{cases} \emptyset, & \alpha \neq 0, \\ X, & \alpha = 0, \end{cases}$$

también pertenece a la colección $\mathcal{L}'(X)$.

Proposición 14. *$\mathcal{L}'(X)$ es un lattice acotado.*

Demostración. Las multifunciones del Ejemplo 8 corresponden a los elementos mínimo y máximo de $\mathcal{L}'(X)$. ☑

Observación 8. *Es de recordar que la colección $\mathcal{P}(X)$ es una álgebra boolena y por lo tanto, una álgebra de Morgan. Luego, se podría considerar la clase $\mathcal{F}_{\mathcal{P}(X)}([0,1])$ de todas las multifunciones $h : [0,1] \to \mathcal{P}(X)$. Por el Teorema 3, se tiene que la colección $\mathcal{F}_{\mathcal{P}(X)}([0,1])$ es una álgebra de Morgan y por consiguiente, es completa.*

Es de aclarar que la colección $\mathcal{L}'(X)$ es diferente de $\mathcal{F}_{\mathcal{P}(X)}([0,1])$. Por ejemplo, el elemento mínimo $h_\emptyset(\alpha) = \emptyset$, para todo $\alpha \in [0,1]$, de $\mathcal{F}_{\mathcal{P}(X)}([0,1])$ es diferente del elemento mínimo $f_\emptyset$ de $\mathcal{L}'(X)$ (Ver Ejemplo 8).
Para distinguir las dos colecciones, $\mathcal{L}'(X)$ y $\mathcal{F}_{\mathcal{P}(X)}([0,1])$, es la razón por la cual se desarrolla la demostración de la Proposición 13. Porque ya de por sí $\mathcal{L}'(X)$ es completo debido a la existencia del mínimo y el máximo.

Teorema 4. *Existe un isomorfismo de lattices completos $\Phi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{L}'(X)$.*

Demostración. Se define la función Φ como

$$\begin{aligned}\Phi : \mathcal{F}(X) &\to \mathcal{L}'(X)\\ u &\mapsto \Phi(u) \equiv f_u,\end{aligned}$$

donde a su vez, f_u se define como

$$\begin{aligned}f_u : [0,1] &\to \mathcal{P}(X)\\ \alpha &\mapsto f_u(\alpha) \equiv [u]^\alpha.\end{aligned}$$

Luego, Φ asocia a cada conjunto difuso u de X, la familia de sus α-niveles $[u]^\alpha$ a través de su respectiva multifunción $f_u \in \mathcal{L}'(X)$. En efecto, por las condiciones (a) y (b) de la Proposición 11, se tiene que $f_u(0) = [u]^0 = X$ y $f_u(\bigvee \alpha_i) = [u]^{\bigvee \alpha_i} = \bigcap [u]^{\alpha_i} = \bigcap f_u(\alpha_i)$ para todo $\alpha_i \subset [0,1]$. Por lo tanto, $\Phi(u) \in \mathcal{L}'(X)$.
Además, por la Proposición 10, se tiene que Φ está bien definida y es inyectiva. Esto es, sea $u, v \in \mathcal{F}(X)$ tal que si

$$u = v \Leftrightarrow [u]^\alpha = [v]^\alpha, \forall \alpha \Leftrightarrow f_u(\alpha) = f_v(\alpha), \forall \alpha \Leftrightarrow f_u = f_v \Leftrightarrow \Phi(u) = \Phi(v).$$

Se demuestra ahora que Φ es sobreyectiva. Sea $f \in \mathcal{L}'(X)$, debemos encontrar $u \in \mathcal{F}(X)$ tal que $\Phi(u) \equiv f_u = f$, esto es, para todo $\beta \in [0,1]$:

$$f_u(\beta) = [u]^\beta = f(\beta). \tag{2.4}$$

En ese sentido, se define el conjunto difuso u como

$$u(x) = \bigvee_{x \in f(\alpha)} \alpha, \quad \text{para } x \in X.$$

En orden a demostrar la igualdad (2.4), se considera $\beta \in [0,1]$ y $x \in [u]^\beta$. Entonces, $u(x) \geq \beta$. Por la Proposición 12, se tiene $f(u(x)) \subseteq f(\beta)$. Pero, $f(u(x)) = f(\bigvee_{x \in f(\alpha)} \alpha) = \bigcap_{x \in f(\alpha)} f(\alpha)$. Por lo tanto, $x \in f(\beta)$. Por otro lado, sea $x \in f(\beta)$. Entonces, $\beta \leq \bigvee_{x \in f(\alpha)} \alpha = u(x)$. Luego, $x \in [u]^\beta$.
Se procede a demostrar que Φ respeta las operaciones del supremo y el ínfimo de acuerdo como fueron definidas en (2.2) y (2.3). Sea $J \subseteq [0,1]$ y $\{u_i\}_{i \in J} \subseteq \mathcal{F}(X)$, entonces se debe demostrar que $\Phi(\bigwedge u_i) = \bigwedge \Phi(u_i)$ y $\Phi(\bigvee u_i) = \overline{\bigvee} \Phi(u_i)$. Sin embargo, para $\alpha \in [0,1]$, estas igualdades se traducen en

$$[\bigwedge_{i \in J} u_i]^\alpha = \bigcap_{i \in J} [u_i]^\alpha \qquad \text{y} \qquad [\bigvee_{i \in J} u_i]^\alpha = \bigcup_{i \in J} [u_i]^\alpha. \tag{2.5}$$

En orden a demostrar la primera igualdad de (2.5), se considera $x \in X$, entonces se tiene que

$$x \in [\bigwedge_{i \in J} u_i]^\alpha \Leftrightarrow (\bigwedge_{i \in J} u_i)(x) \geq \alpha \Leftrightarrow \bigwedge_{i \in J} u_i(x) \geq \alpha.$$

Esta última desigualdad significa que, para todo $i \in J$, $u_i(x) \geq \alpha$, es decir, $x \in [u_i]^\alpha$, $\forall i \in J$. Por lo tanto,

$$x \in \bigcap_{i \in J} [u_i]^\alpha.$$

Por otro lado, suponga que $x \in \bigcap_{i \in J} [u_i]^\alpha$. Esto es, para todo $i \in J$, $u_i(x) \geq \alpha$. Por propiedades del ínfimo, $u_i(x) \geq \bigwedge_{i \in J} u_i(x) \geq \alpha$.
En este orden, se demuestra la segunda desigualdad de (2.5). Sea $x \in \bigcup_{i \in J} [u_i]^\alpha$, lo que significa que existe un $k \in J$ tal que $u_k(x) \geq \alpha$. Por lo tanto, $\bigvee_{i \in J} u_i(x) \geq u_k(x) \geq \alpha$.
Por otro lado, suponga que $x \notin \bigcup_{i \in J} [u_i]^\alpha$, lo que quiere decir que

$$u_i(x) < \alpha, \quad \text{para todo } i \in J. \tag{2.6}$$

Por propiedades del supremo, tenemos $u_i(x) \leq \bigvee_{i \in J} u_i(x) < \alpha$. Observe que en la desigualdad anterior, la relación es estrictamente menor, porque si $\bigvee_{i \in J} u_i(x) = \alpha > u_i(x)$ para todo $i \in J$ por (2.6), por propiedades del supremo, significaría que existe un $k \in J$ tal que $u_i(x) \leq u_k(x) < \bigvee_{i \in J} u_i(x)$, para todo $i \in J$, lo que contradice la definición de supremo. Por lo tanto, $x \notin [\bigvee_{i \in J} u_i(x)]^\alpha$.
En consecuencia, $\mathcal{F}(X)$ y $\mathcal{L}'(X)$ son isomorfos como lattices completos. ☑

La demostración del Teorema 4 es diferente a su correspondiente en la versión original, por cuanto en ésta última los autores utilizan conceptos de topología.
Una forma como se encuentra actualmente una versión del Teorema de Representación de conjuntos difusos es la siguiente.

Corolario 2. *Sea $\{A_\alpha \mid 0 \leq \alpha \leq 1\}$ una familia de subconjuntos de X tal que $A_0 = X$ y A_α verifica las condiciones (a) y (b) de la Proposición 11. Entonces, existe un único conjunto difuso u en $\mathcal{F}(X)$ tal que $[u]^\alpha = A_\alpha$ para todo $\alpha \in [0,1]$. Además, el conjunto difuso u se define como $u(x) = \bigvee_{x \in A_\alpha} \alpha$.*

El Corolario 2 es conocido actualmente en la literatura como el Teorema de representación de conjuntos difusos. Este Teorema tiene muchas ventajas, como por ejemplo lo siguiente: algunas operaciones de los conjuntos difusos resultan difíciles de realizar en $\mathcal{F}(X)$, luego una forma de efectuarlas es representando tales conjuntos difusos como multifunciones $f : [0,1] \to \mathcal{P}(X)$ en $\mathcal{L}'(X)$ vía el Teorema de Negoita-Ralescu, donde en este lattice, resulta menos complicado efectuar las operaciones. Después de obtenido el resultado en $\mathcal{L}'(X)$ se retorna nuevamente, vía el Teorema, al espacio $\mathcal{F}(X)$. Mediante este proceso, por ejemplo, el Teorema permite articular la lógica difusa con el Análisis Multívoco, para dar origen al Análisis Multívoco Difuso.

Capítulo 3

Versión original del Teorema de representación de Negoita-Ralescu

En este capítulo se expone la versión original del Teorema de representación de conjuntos difusos dado por C.V. Negoita y D.A. Ralescu en el año 1975 en [3]. Como se habia mencionado antes, la versión original difiere de la versión actual. En realidad, la versión actual del Teorema (Corolario 2) corresponden con el primer lema establecido por los autores en [3] para demostrar su Teorema de representación.

3.1. Dualidad del lattice de familias de niveles de un conjunto difuso

Definición 24. *Sea* $J \subseteq [0,1]$ *y sea* $g : [0,1] \to \mathcal{P}(X)$ *una multifunción que satisface las siguientes propiedades:*

(g1) $g(0) = \emptyset$.

(g2) $g(\bigvee_{j\in J} \alpha_j) = \bigcup_{j\in J} g(\alpha_j)$, *para todo* $\{\alpha_j\}_j \subseteq [0,1]$.

Se denota por $\mathcal{L}(X)$ *la colección de multifunciones,*

$$\mathcal{L}(X) = \{g : [0,1] \to \mathcal{P}(X) : g \text{ satisface (g1) y (g2)}\}.$$

En este sentido, $\mathcal{L}'(X)$ es considerado el *dual* de $\mathcal{L}(X)$. De manera análoga se pueden demostrar propiedades similares para $\mathcal{L}(X)$.
Un orden parcial también puede ser introducido en $\mathcal{L}(X)$ de manera natural. En efecto, sean $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(X)$, entonces

$$g_1 \leq g_2 \Leftrightarrow g_1(\alpha) \subseteq g_2(\alpha),\ \forall \alpha \in [0,1].$$

Proposición 15. *Si $g \in \mathcal{L}(X)$, entonces g es no-decreciente.*

Demostración. Sea $\alpha \leq \beta$,

$$g(\beta) = g(\alpha) \vee g(\beta) = g(\alpha) \cup g(\beta),$$

entonces,

$$g(\alpha) \subseteq g(\beta).$$

☑

Observación 9. *Se asume la Proposición 15 como la propiedad (g3) de la Definición 24.*

Proposición 16. *$\mathcal{L}(X)$ es un lattice completo.*

Demostración. Se debe probar primero que $\mathcal{L}(X)$ es un lattice. El supremo en $\mathcal{L}(X)$ se define de acuerdo con la Definición 24. Sean $f, g \in \mathcal{L}(X)$, entonces

$$\begin{aligned} f \vee g : [0,1] &\to \mathcal{P}(X) \\ \alpha &\to (f \vee g)(\alpha) = f(\alpha) \cup g(\alpha), \ \forall \alpha \in [0,1]. \end{aligned} \tag{3.1}$$

El supremo en $\mathcal{L}(X)$ está bien definido porque la unión de conjuntos corresponde con el supremo en $\mathcal{P}(X)$. Además, es claro que $f \vee g \in \mathcal{L}(X)$. Esto es, sea $\{\alpha_j\}_{j \in J} \subseteq [0,1]$, entonces

(f1) $(f \vee g)(0) = f(0) \cup g(0) = \emptyset \cup \emptyset = \emptyset$.

(f2) $(f \vee g)(\bigvee \alpha_j) = f(\bigvee \alpha_j) \cup g(\bigvee \alpha_j) = \bigcup f(\alpha_j) \cup \bigcup g(\alpha_j) = \bigcup (f(\alpha_j) \cup g(\alpha_j)) = = \bigcup (f \vee g)(\alpha_j)$.

Es de notar que el supremo en $\mathcal{L}(X)$ se cumple de manera arbitraria. Esto es, sea $\{g_i\}_{i \in I}$ una familia cualquiera de multifunciones de $\mathcal{L}(X)$, entonces

$$(\bigvee_{i \in I} g_i)(\alpha) = \bigcup_{i \in I} g_i(\alpha), \forall \alpha \in [0,1]. \tag{3.2}$$

De manera directa se prueba que $\bigvee_{i \in I} g_i$ cumple con las condiciones $(g1)$ y $(g2)$ de la Definición 23. En efecto, por propiedades de uniones arbitrarias en $\mathcal{P}(X)$, se tiene que

$$(\bigvee g_i)(\vee \alpha_j) = \bigcup_i g_i(\vee \alpha_j) = \bigcup_i \bigcup_j g_i(\alpha_j) = \bigcup_j \bigcup_i g_i(\alpha_j) = \bigcup_j \bigvee g_i(\alpha_j).$$

Por otro lado, no se garantiza que $g_1 \wedge g_2 \notin \mathcal{L}(X)$, donde $g_1, g_2 \in \mathcal{L}(X)$, porque no siempre se tiene que $(g_1 \wedge g_2)(\alpha) = g_1(\alpha) \cap g_2(\alpha)$. De este modo, el ínfimo en $\mathcal{L}(X)$, denotado por $\underline{\bigwedge}$, es definido como

$$\underline{\bigwedge}_{i \in I} g_i = \bigvee \{g \mid g \leq g_i, \text{ donde } g, g_i \in \mathcal{L}'(X), \forall i\}. \tag{3.3}$$

Es claro que $\underline{\bigwedge} g_i$ está bien definido por la unicidad del supremo en $\mathcal{L}(X)$. Además, $\underline{\bigwedge} g_i$ siempre existe porque la multifunción $g_\emptyset$ del Ejemplo 9 definida como $g_\emptyset(\alpha) = \emptyset$ para todo $\alpha \in [0,1]$, pertenece a $\mathcal{L}(X)$. Luego, tiene sentido considerar el conjunto $\{g \leq g_i \mid g, g_i \in \mathcal{L}'(X)\}$ de (3.3).
Además, se tiene que $\underline{\bigwedge} g_i$ es cota inferior de los g_i's. Esto es, sea $\alpha \in [0,1]$, entonces

$$(\underline{\bigwedge} g_i)(\alpha) = (\bigvee_{g \leq g_i} g)(\alpha) = \bigcup_{g \leq g_i} g(\alpha) \subset g_i(\alpha), \forall i.$$

Suponga que existe $x \in \bigcup_{g \leq g_i} g(\alpha)$ y $x \notin g_j(\alpha)$ para algún j. Entonces, existe $g_0 \leq g_j$ tal que $x \in g_0(\alpha)$. Esto implica que $g_0(\alpha) \not\subseteq g_j(\alpha)$ lo cual es una contradicción.
Ahora, suponga que existe $h \in \mathcal{L}(X)$ tal que

$$\underline{\bigwedge} g_i \leq h \leq g_i, \ \forall i.$$

Luego,

$$h \leq \bigvee_{g \leq g_i} g = \underline{\bigwedge} g_i.$$

Por lo tanto, $(\mathcal{L}'(X), \wedge, \overline{\bigvee})$ es un lattice completo. ☑

Ejemplo 9. *La multifunción* $g_\emptyset : [0,1] \to \mathcal{P}(X)$ *definida como* $g_\emptyset(\alpha) = \emptyset$ *para todo* $\alpha \in [0,1]$ *pertenece a la colección* $\mathcal{L}(X)$. *Análogamente, la multifunción* $g_X : [0,1] \to \mathcal{P}(X)$ *definida como*

$$g_X(\alpha) = \begin{cases} \emptyset, & \alpha \neq 1, \\ X, & \alpha = 1, \end{cases}$$

también pertenece a la colección $\mathcal{L}(X)$.

Proposición 17. $\mathcal{L}(X)$ *es un lattice acotado.*

Demostración. Las multifunciones del Ejemplo 9 corresponden a los elementos mínimo y máximo de $\mathcal{L}(X)$. ☑

El siguiente Lema 1 corresponde al segundo lema utilizado en [3] para demostrar la versión original del Teorema de representación. Sin embargo, tiene una dificultad.

Lema 1. *[3] Sean* L *y* L' *lattices ínf-completo. Si una función* $\varphi : L \to L'$ *satisface las siguientes condiciones*

m1) φ *es biyectiva,*

m2) Si $\varphi(\bigwedge_{i\in J} x_i) = \bigwedge_{i \in J} \varphi(x_i)$ *, entonces,* $\varphi(\bigvee_{i\in J} x_i) = \bigvee_{i\in J} \varphi(x_i)$*, donde*

$$\bigvee_{i\in J} x_i = \bigwedge_{x \geq x_i} x, \quad x_i \in L, \forall i. \tag{3.4}$$

El Lema 1 es cierto para los lattices $\mathcal{L}(X)$ y $\mathcal{L}'(X)$ porque éstos son completos. Sin embargo, la dificultad del Lema 1 es que no se puede garantizar la existencia del supremo definido en (3.4) en lattices ínf-completos *cualesquiera* (Ver Ejemplo 3). Ésta situación significó realizar una prueba alterna en aras de lograr el objetivo propuesto. El Lema 2 corresponde con el tercer lema utilizado por los autores en [3], pero cuya demostración se desarrolla de manera distinta porque se prescinde el Lema 1.

Lema 2. *[3] $\mathcal{L}(X)$ y $\mathcal{L}'(X)$ son isomorfos dualmente como lattices completos.*

Demostración. Se define una función

$$\begin{aligned} \Psi : \mathcal{L}'(X) &\to \mathcal{L}(X) \\ f &\mapsto \Psi(f) \equiv g, \end{aligned}$$

donde a su vez, la multifunción g se define como

$$\begin{aligned} g : [0,1] &\to \mathcal{P}(X) \\ \alpha &\mapsto g(\alpha) = X - f(\alpha), \end{aligned}$$

donde $X - f(\alpha)$ es el complemento del conjunto $f(\alpha)$ en partes $\mathcal{P}(X)$. Es claro que $\Psi(f) \in \mathcal{L}(X)$. En efecto, $g(0) = X - f(0) = X - X = \emptyset$ y

$$g(\bigvee \alpha_j) = X - f(\bigvee \alpha_j) = X - \bigcap_j f(\alpha_j) = \bigcup_j (X - f(\alpha_j)) = \bigcup_j g(\alpha_j).$$

Además, Ψ está bien definida y es inyectiva. Sean $f_1, f_2 \in \mathcal{L}(X)$ tal que $\Psi(f_1) = g_1$ y $\Psi(f_2) = g_2$, entonces

$$\begin{aligned} f_1 = f_2 \Leftrightarrow f_1(\alpha) = f_2(\alpha), \forall\alpha \Leftrightarrow X - f_1(\alpha) = X - f_2(\alpha) \Leftrightarrow \cdots \\ \cdots\, g_1(\alpha) = g_2(\alpha), \forall\alpha \Leftrightarrow g_1 = g_2 \Leftrightarrow \Psi(f_1) = \Psi(f_2). \end{aligned} \tag{3.5}$$

Por otro lado, sea $g \in \mathcal{L}'(X)$. Se define $f : [0,1] \to \mathcal{P}(X)$ tal que $f(\alpha) = X - g(\alpha)$ para todo $\alpha \in [0,1]$. Entonces, se tiene que $f(0) = X - g(0) = X - \emptyset = X$, y

$$f(\bigvee \alpha_j) = X - g(\bigvee \alpha_j) = X - \bigcup g(\alpha_j) = \bigcap (X - g(\alpha_j)) = \bigcap f(\alpha_j),\ \alpha_j \in [0,1].$$

Por lo tanto, Ψ es sobreyectiva.
Queda demostrar que Ψ es un isomorfismo dual de lattices completos. Sea $f_i \in \mathcal{L}'(X)$ tal que $\Psi(f_i) = g_i$, entonces se debe probar que

$$\Psi(\bigwedge f_i) = \bigvee \Psi(f_i) \quad \text{y} \quad \Psi(\overline{\bigvee} f_i) = \underline{\bigwedge} \Psi(f_i). \tag{3.6}$$

La primera igualdad de (3.6) se prueba de manera directa. Esto es,

$$\begin{aligned} \Psi(\bigwedge f_i)(\alpha) = X - (\bigwedge f_i)(\alpha) = X - \bigcap f_i(\alpha) = \cdots \\ \cdots = \bigcup (X - f_i(\alpha)) = \bigcup g_i(\alpha) = (\bigvee g_i)(\alpha) = \bigvee \Psi(f_i)(\alpha). \end{aligned} \tag{3.7}$$

De manera análoga, se demuestra la segunda igualdad de (3.6). Esto es,

$$\Psi(\overline{\bigvee} f_i)(\alpha) = X - (\overline{\bigvee} f_i)(\alpha) = X - (\bigwedge_{f \geq f_i} f)(\alpha) = \cdots$$
$$\cdots = X - \bigcap_{f \geq f_i} f(\alpha) = \bigcup_{f \geq f_i} (X - f(\alpha)). \tag{3.8}$$

Adicionalmente, se tiene que

$$f(\alpha) \supseteq f_i(\alpha), \forall \alpha \Leftrightarrow X - f(\alpha) \subseteq X - f_i(\alpha) \Leftrightarrow g(\alpha) \leq g_i(\alpha) \Leftrightarrow g \leq g_i.$$

Luego, de (3.8) se tiene que

$$\bigcup_{f \geq f_i} (X - f(\alpha)) = \bigcup_{g \leq g_i} g(\alpha) = (\bigvee_{g \leq g_i} g)(\alpha) = (\underline{\bigwedge}_i g_i)(\alpha) = \underline{\bigwedge}_i \Psi(f_i)(\alpha).$$ ☑

El Teorema 5 es la versión original del Teorema de representación de Negoita-Ralescu dada en [3] en el año 1975.

Teorema 5. *[3] $\mathcal{F}(X)$ y $\mathcal{L}(X)$ son isomorfos dualmente como lattices completos.*

Demostración. El Teorema 4 asegura que existe un isomorfismo de lattices completos $\Phi : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{L}'(X)$. El Lema 2 asegura que existe un isomorfismo dual de lattices completo $\Psi : \mathcal{L}'(X) \to \mathcal{L}(X)$. Luego, se puede definir una función $H : \mathcal{F}(X) \to \mathcal{L}(X)$ tal que $H = \mathcal{F}(X) \circ \mathcal{L}'(X)$. Por la Proposición 7, se tiene que H es un isomorfismo dual de lattices completos entre $\mathcal{F}(X)$ y $\mathcal{L}'(X)$. ☑

La versión original del Teorema de representación difiere de las actuales en el hecho que el isomorfismo entre la familia de conjuntos difusos $\mathcal{F}_L(X)$ no se establece con la famiilia de sus α-niveles $\mathcal{L}'(X)$, sino con el dual de ésta última $\mathcal{L}(X)$.

3.2. Otro Teorema de representación de conjuntos difusos

En el lattice $\mathcal{F}(X)$ se puede definir de manera natural una multiplicación de un conjunto difuso u por un escalar $\alpha \in [0, 1]$. Esto debido al hecho que el intervalo $[0, 1]$ es un semigrupo conmutativo con identidad cerrado bajo el producto.

$$\begin{aligned} [0,1] \times \mathcal{F}(X) &\to \mathcal{F}(X) \\ (\alpha, u) &\to \alpha \cdot u, \qquad \text{donde} \qquad (\alpha \cdot u)(x) = \alpha \cdot u(x). \end{aligned} \tag{3.9}$$

Apoyados en la operación (3.9) se puede verificar que todo conjunto difuso se puede descomponer en términos de sus α-niveles.

Teorema 6. *Sea $u \in \mathcal{F}(X)$, se tiene que*

$$u = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \chi_{[u]^\alpha},$$

donde $\chi_{[u]^\alpha}$ es la función característica del α-nivel.

Demostración.

$$\Big(\bigvee_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot \chi_{[u]^\alpha}\Big)(x) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} (\alpha \cdot \chi_{[u]^\alpha})(x) = \bigvee_{\alpha \in [0,1]} \alpha \cdot (\chi_{[u]^\alpha}(x)) = \bigvee_{\alpha \leq u(x)} \alpha = u(x),$$

porque

$$\chi_{[u]^\alpha}(x) = \begin{cases} 1, & x \in [u]^\alpha, \\ 0, & x \notin [u]^\alpha \end{cases} = \begin{cases} 1, & u(x) \geq \alpha, \\ 0, & u(x) < \alpha. \end{cases}$$

Bibliografía

[1] Pinter C. *Set Theory*, Addison-Wesley, 1971.

[2] González-Calderón W. *Ecuaciones diferenciales difusas*, Tesis de Maestría, Universidad Industrial de Santander, (2010).

[3] Negoita, C.V. & Ralescu, D. *Applications of Fuzzy Sets to Systems Analysis*, Wiley, New York, (1975), 12-31.

[4] Nguyen H.T & Walker W.A. *A first course in fuzzy logic*, CRC Press, New México, (1997), 1-32.

[5] Zadeh L.A. *Fuzzy sets*, Information and Control, **8** (1965), 338-353.