

**ESTRUCTURAS CASI COMPLEJAS AFINES**

**OLGA ROCÍO VIÑA ALVAREZ**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA**

**2011**

**ESTRUCTURAS CASI COMPLEJAS AFINES**

**OLGA ROCÍO VIÑA ALVAREZ**

Trabajo presentado como requisito parcial para  
optar al título de magister en matemáticas

Directora

**DRA. SOFÍA PINZÓN DURÁN, Ph.D.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESCUELA DE MATEMÁTICAS**

**BUCARAMANGA**

**2011**

*A LOS SERES QUE MÁS AMO:  
ALBERTO, LEONOR, SERGIO Y SERGIO FABIÁN*

## AGRADECIMIENTOS

*A Dios, por ser mi principio y fundamento.*

*A mis padres Alberto y Leonor, por su ejemplo, cariño y apoyo. Soy afortunada por haber contado siempre con su amor.*

*A Sergio, por permitir compartir mi vida, mi amor y mis logros junto a él.*

*A Sergio Fabián, por ser mi fortaleza y el motivo más bello que tengo para crecer.*

*A los profesores de la maestría, por sus enseñanzas y en especial a Sofía por su alta calidad humana y profesional.*

*A mis compañeros Gladys, Arturo, Elisa, Alex y William, por su apoyo y amistad incondicional.*

*Al Padre Gerardo Arango S.J., por su generosidad al brindarme su apoyo para poder realizar esta maestría.*

*A Claudia, por su colaboración y atención con todos los estudiantes de la maestría.*

*Muchas gracias.*

## RESUMEN

**TÍTULO:** ESTRUCTURAS CASI COMPLEJAS AFINES\*

**AUTORA:** OLGA ROCÍO VIÑA ALVAREZ\*\*

**PALABRAS CLAVES:** Algebras de Lie, Variedad bandera, Grupos de Weyl, Alcobas, Ideales abelianos.

**DESCRIPCIÓN:**

Sea  $\mathbb{F} = G/C(S)$  una variedad bandera, donde  $G$  es un grupo de Lie complejo semi-simple y  $C(S)$  es el centralizador de un toro  $S$ . Cuando  $S$  es un toro maximal decimos que la variedad bandera es maximal, y la denotamos con  $\mathbb{F}$ . Equivalentemente  $\mathbb{F} = U/T$ , donde  $U$  es una forma real compacta de  $G$  y  $T$  es el centralizador de un toro. En este trabajo, estudiamos las estructuras casi Hermitianas  $U$ -invariantes en variedades bandera maximales, con el objetivo de encontrar condiciones geométricas para que estas estructuras sean  $(1, 2)$ -admisibles; para ello fue necesario considerar unos conjuntos denominados alcobas. Luiz A.B. San Martín y Caio J.C. Negreiros muestran en su artículo *Invariant almost Hermitian structures on flag manifolds*, estos resultados. En esta tesis se realiza un estudio y explicitación a profundidad de los mismos.

Para cada alcoba  $A$  asociamos una estructura casi compleja invariante  $J(A)$ , llamada afín y mostramos que esta admite una métrica Riemanniana invariante  $\Lambda$ , que hace que el par  $(J, \Lambda)$  sea  $(1, 2)$ -simplético. Recíprocamente, se demuestra que el par  $(J, \Lambda)$  es  $(1, 2)$ -simplético, entonces  $J$  es afín, para ello se presenta a  $J$  en forma de ideal abeliano. Se finaliza esta tesis presentando una fórmula que relaciona dos ideales abelianos diferentes representando la misma clase de equivalencia.

---

\*Dra. SOFÍA PINZÓN DURÁN, Directora del Trabajo de Grado.

\*\*Programa de Maestría en Matemáticas, Escuela de Matemáticas, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander.

## ABSTRACT

**TITLE:** AFFINE ALMOST COMPLEX STRUCTURES\*

**AUTHOR:** OLGA ROCÍO VIÑA ALVAREZ\*\*

**KEYWORDS:** Lie algebra, Flag manifolds, Weyl groups, alcove, Abelian ideals..

**DESCRIPTION:**

Let  $\mathbb{F} = G/C(S)$  a flag manifold, where  $G$  is a complex semi-simple Lie group and  $C(S)$  a is the centralizer of a torus  $S$ . When  $S$  is a maximal torus we say that the flag manifold is maximal and we denote it as  $\mathbb{F}$ . Equivalently  $\mathbb{F} = U/T$ , where  $U$  is a compact real form of  $G$  and  $T$  is the centralizer of a torus. In this work we study the  $U$ -invariant almost Hermitian structures in maximal flags, with the objective of obtaining geometric conditions so that the structures be  $(1, 2)$ -admissible; for this it was necessary to consider some sets called alcoves. Luiz A.B. San Martín y Caio J.C. Negreiros show in their article "Invariant almost Hermitian structures on flag manifolds" these results, and in this thesis a depth study and explanation of them is done.

For each alcove  $A$  we associate an almost complex invariant structure  $J(A)$ , called affine and show that this supports an invariant Riemannian metric  $\Lambda$  that makes the pair  $(J, \Lambda)$  be  $(1, 2)$ -symplectic. Conversely, it is shown that the pair  $(J, \Lambda)$  is  $(1, 2)$ -symplectic, then  $J$  is affine; for it a  $J$  as abelian ideal is presented. This thesis ends by showing a formula that relates two different abelian ideals representing the same equivalence class.

---

\*Dra. SOFÍA PINZÓN DURÁN, Graduate Dissertation Director.

\*\*Graduate Program of Master of Sciences in Mathematics, School of Mathematics, Faculty of Science, Universidad Industrial de Santander.

# Tabla de Contenido

<b>Introducción</b>	<b>10</b>
<b>1. Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1. Grupo de Lie . . . . .	12
1.2. Álgebra de Lie . . . . .	13
1.3. Clasificación de las Álgebras de Lie . . . . .	21
1.4. Variedades Bandera . . . . .	26
1.5. Métricas Invariantes . . . . .	28
1.6. Estructura Casi Compleja Invariante . . . . .	29
1.7. Forma de Kähler . . . . .	31
1.8. Variedad Bandera $(1, 2)$ -Simpléctica . . . . .	33
<b>2. Estructura casi compleja invariante afín</b>	<b>37</b>
2.1. Cámaras de Weyl . . . . .	37
2.2. Alcobas . . . . .	41
<b>3. Las estructuras <math>(1, 2)</math>-admisibles son afines</b>	<b>49</b>
<b>4. Equivalencia de <math>ECCI</math> <math>(1, 2)</math>-admisibles</b>	<b>59</b>
<b>A. Grupos Coxeter</b>	<b>67</b>
<b>Conclusiones</b>	<b>70</b>
<b>Bibliografía</b>	<b>71</b>

# Introducción

La teoría de Lie es de utilidad en áreas como la geometría diferencial, las ecuaciones diferenciales, los sistemas dinámicos y la mecánica cuántica, entre otras. En el año 1873, el matemático noruego Sopenhavn Lie dio origen a esta teoría que conocemos hoy como la de los grupos y álgebras de Lie, posteriormente Weyl, Cartan, Killing, Serre y otros realizaron aportes significativos. La correspondencia entre grupos de Lie y álgebras de Lie crea un importante vínculo entre el álgebra y la geometría que permite tratar algunos problemas desde distintas perspectivas.

Asociado a la teoría de Lie, aparecen las variedades bandera. Una variedad bandera es un espacio homogéneo reductivo  $\mathbb{F} = G/C(S)$ , donde  $G$  es un grupo de Lie complejo semisimple y  $C(S)$  es el centralizador de un toro  $S$ , cuando este es maximal decimos que la variedad bandera es maximal. En este trabajo se estudiarán las variedades bandera hermiticas maximales, es decir, una variedad bandera dotada de una estructura casi-compleja  $J$ . Sobre las variedades bandera asociadas a diferentes álgebras de Lie, se han realizado estudios orientados a encontrar una caracterización de las propiedades de este tipo de variedades por parte de: L.A.B. San Martín, C.J. Negreiros, S. Pinzón, M. Paredes, y cuyos resultados se pueden ver en los diferentes artículos dados como referente en este trabajo. Es por ello que se considera un problema interesante entender los resultados obtenidos en variedades bandera maximales.

El objetivo de este trabajo es estudiar el artículo [12], entender y explicitar resultados obtenidos allí. Para ello lo abordamos tomando la variedad bandera maximal asociada a las álgebras clásicas y excepcionales, estudiando en ellas estructuras casi complejas invariantes afines. Una estructura casi compleja invariante, a la que abreviadamente llamaremos *ecci*, es dada por un endomorfismo  $J$  definido en el espacio tangente y satisfaciendo que  $J^2 = -1$ , donde identificamos a  $J$  como  $\{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$  con  $\varepsilon_\alpha = -\varepsilon_{-\alpha}$ , y  $\Pi$  un sistema de raíces, además con una métrica invariante  $\lambda_\alpha > 0$  con  $\lambda_{-\alpha} = \lambda_\alpha$ ,  $\alpha \in \Pi$ . Ahora se dice que  $J$  es una *ecci* afín si existe una alcoba  $A$  tal que  $J(A) = J$ . Estudiamos este tipo de estruc-

turas llegando a caracterizar cuando son  $(1, 2)$ -admisibles, esto lo realizamos siguiendo los resultados obtenidos por San Martín y Negreiros en [12].

Los principales resultados que trabajamos en esta tesis son los Teoremas 2.10, 3.4 y la Proposición 4.10.

Este trabajo esta organizado de la siguiente forma:

En el *Capítulo 1* se presentan conceptos básicos de álgebras de Lie, su clasificación, se construye la variedad bandera que tiene una caracterización en términos de sistemas de raíces, y es la combinatoria que ofrecen estos sistemas lo que permite realizar un estudio de las estructuras casi complejas invariantes que se definen sobre la variedad. Estudiamos las *eccí* llegando a mostrar que son casi Kähler si y solamente si el conjunto  $P = \{\alpha, \varepsilon_\alpha = +1\}$  corresponde a una escogencia de raíces positivas en  $\Pi$ . Finalizamos el capítulo demostrando que toda estructura *eccí* sobre  $\mathbb{F}$  es casi Kähler si y solo si es Kähler.

En el *Capítulo 2* consideramos a los grupos de Weyl, las cámaras y las alcobas en  $\mathfrak{h}$ , que es la subálgebra de Cartan de un sistema de raíces, con la respectiva caracterización de sus coordenadas, llegando a encontrar una interpretación geométrica semejante a la casi Kähler para las *eccí*  $(1, 2)$ -admisibles. Para ello asociamos a una alcoba  $A$  una *eccí*  $J(A) = \{\varepsilon_\alpha(A)\}$  y se le llama *eccí* afín. El principal resultado lo encontramos cuando se demuestra que una *eccí* es afín entonces es  $(1, 2)$ -admisibile.

El *Capítulo 3* parte de la construcción de ideales abelianos. Se prueba que para cualquier *eccí*  $(1, 2)$ -admisibile existe una selección de raíces positivas  $\Pi^+$  tal que el conjunto  $\{\alpha > 0, \varepsilon_\alpha = +1\}$  es un ideal abeliano en  $\Pi^+$ . Uniendo resultados obtenidos en el capítulo anterior se demuestra que *eccí* es  $(1, 2)$ -admisibile si y solo si es afín.

Se termina este trabajo con el *Capítulo 4* donde relacionamos dos ideales abelianos que representan la misma clase de equivalencia de *eccí*. Aquí la *eccí* afín actúa solo como una descripción adicional de estructuras  $(1, 2)$ -simpléticas.

# Capítulo 1

## Preliminares

En este capítulo presentaremos algunos conceptos y resultados básicos sobre álgebras de Lie y variedades bandera, nociones que serán el soporte y la herramienta que necesitaremos para el estudio de las estructuras casi complejas afines.

### 1.1. Grupo de Lie

Un grupo de Lie es una variedad diferenciable  $G$  con estructura de grupo, en la cual se ha definido una estructura diferenciable, esto es, dado  $x, y \in G$  las aplicaciones:

1.  $G \times G \rightarrow G$ , tal que  $(x, y) \mapsto xy$ , y
2.  $G \rightarrow G$ , tal que  $x \mapsto x^{-1}$ ,

son de clase  $C^\infty$ .

**Ejemplo 1.1.**  $GL(n, \mathbb{R})$ , el grupo de las matrices  $n \times n$  invertibles. Si identificamos el espacio vectorial  $M_n$  de las matrices cuadradas de tamaño  $n \times n$  con  $\mathbb{R}^{n^2}$  entonces  $GL(n, \mathbb{R})$  es la imagen inversa de  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ , vía la aplicación determinante y por lo tanto un abierto en  $\mathbb{R}^{n^2}$  lo que nos permite afirmar que  $GL(n, \mathbb{R})$  es una variedad diferenciable. La aplicación producto en  $GL(n, \mathbb{R})$  es diferenciable ya que en  $\mathbb{R}^{n^2}$  el producto de matrices se reduce a una función polinomial. La aplicación inversa es una función racional por lo tanto es diferenciable.

Como todo grupo de Lie es una variedad se puede considerar el espacio tangente a la identidad  $T_e G$ .  $T_e G$  tiene estructura de álgebra de Lie y corresponde al álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ . Utilizaremos  $T_e G = \mathfrak{g}$ . A seguir una breve exposición sobre álgebras de Lie.

## 1.2. Álgebra de Lie

Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es un espacio vectorial sobre un cierto cuerpo escalar  $\mathbb{K}$ , junto con una operación binaria  $[\cdot, \cdot] : \mathfrak{g} \times \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$ , llamada corchete de Lie, que satisface las siguientes propiedades:

1. Bilinealidad:  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$  y  $[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$  para todo  $a, b$  en  $\mathbb{K}$  y todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ ,
2. antisimetría: esto es  $[X, X] = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$  ( lo que implica  $[X, Y] = -[Y, X]$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{g}$  y es equivalente si el cuerpo de escalares no es de característica dos), e
3. identidad de Jacobi:  $[[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] = [X, [Y, Z]]$  para todo  $X, Y, Z \in \mathfrak{g}$ .

La equivalencia dada en el item dos la podemos dar por el siguiente hecho:

Sea  $X, Y \in \mathfrak{g}$  donde  $0 = [X+Y, X+Y] = [X, X+Y] + [Y, X+Y] = [X, X] + [X, Y] + [Y, X] + [Y, Y]$ , como  $[X, X] = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}$  entonces  $0 = [X+Y, X+Y] = [X, Y] + [Y, X]$  de donde se llega a que  $[X, Y] = -[Y, X]$ . Recíprocamente  $0 = [X, X] - [X, X]$ , utilizando que  $[X, Y] = -[Y, X]$  tendríamos que  $0 = [X, X] + [X, X] = [2X, X]$ , como la característica del cuerpo de escalares no es dos entonces  $0 = 2[X, X]$  y por lo tanto  $[X, X] = 0$ .

Las álgebras de Lie pueden ser reales o complejas; en nuestro caso, serán complejas porque son fáciles de abordar y porque la teoría de espacios raíces que vamos a tratar aquí, está pensada sobre  $\mathbb{C}$ . A los grupos de Lie reales les corresponden álgebras de Lie reales y a grupos de Lie complejos le corresponden álgebras de Lie complejas. Los ejemplos más importantes son grupos y álgebras de Lie de matrices, uno de ellos es  $gl(n, \mathbb{K})$ , que es el espacio de todas las transformaciones lineales de un espacio vectorial de dimensión  $n$  sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ , que es lo mismo que el espacio de matrices  $n \times n$  con coeficientes en  $\mathbb{K}$ , en este caso el corchete de Lie es dado por:

$$[X, Y] = XY - YX$$

con  $X$  e  $Y$  matrices. Estas álgebras aparecen con frecuencia y muchas veces serán indicadas por  $\mathfrak{gl}(n)$ .

**Ejemplo 1.2.**  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  es una álgebra de Lie, veamos:

Para que  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  sea una álgebra de Lie debe cumplir las condiciones dadas, por lo tanto debemos demostrar que: el corchete en  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  es bilineal, antisimétrico y que satisface la identidad de Jacobi.

■ **Bilinealidad**

Sean  $a, b \in \mathbb{K}$  y  $X, Y, Z \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$  entonces debemos demostrar que:

1.  $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$ .

$$\begin{aligned} [aX + bY, Z] &= (aX + bY)Z - Z(aX + bY) \\ &= aXZ + bYZ - ZaX - ZbY \\ &= aXZ + bYZ - aZX - bZY \\ &= aXZ - aZX + bYZ - bZY \\ &= a(XZ - ZX) + b(YZ - ZY) \\ &= a[X, Z] + b[Y, Z]. \end{aligned}$$

2.  $[Z, aX + bY] = a[Z, X] + b[Z, Y]$ .

$$\begin{aligned} [Z, aX + bY] &= Z(aX + bY) - (aX + bY)Z \\ &= ZaX + ZbY - aXZ - bYZ \\ &= aZX + bZY - aXZ - bYZ \\ &= aZX - aXZ + bZY - bYZ \\ &= a(ZX - XZ) + b(ZY - YZ) \\ &= a[Z, X] + b[Z, Y]. \end{aligned}$$

De 1) y 2) obtenemos la bilinealidad del corchete en  $\mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ .

■ **Antisimetría del corchete.**

Sea  $X \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ , entonces  $[X, X] = X.X - X.X = X^2 - X^2 = 0$ .

■ **Identidad de Jacobi.**

Sean  $X, Y, Z \in \mathfrak{gl}(n, \mathbb{K})$ :

$$\begin{aligned} &[[X, Y], Z] + [Y, [X, Z]] \\ &= ([X, Y]Z - Z[X, Y]) + (Y[X, Z] - [X, Z]Y) \\ &= (XY - YX)Z - Z(XY - YX) + Y(XZ - ZX) \\ &\quad - (XZ - ZX)Y \\ &= XYZ - YXZ - ZXY + ZYX + YXZ - YZX \\ &\quad - XZY + ZXY \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= XYZ + ZYX - YZX - XZY \\
&= (XYZ - XZY) + (ZYX - YZX) \\
&= X(YZ - ZY) - (YZ - ZY)X \\
&= X[Y, Z] - [Y, Z]X \\
&= [X, [Y, Z]].
\end{aligned}$$

Continuando con definiciones de la teoría de Lie es conveniente introducir la noción de subálgebra de Lie.

**Definición 1.3.** Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie. Una subálgebra de  $\mathfrak{g}$  es un subespacio vectorial  $\mathfrak{h}$  de  $\mathfrak{g}$  que es cerrado por el corchete, esto es,  $[X, Y] \in \mathfrak{h}$  si  $X, Y \in \mathfrak{h}$ .

Evidentemente, una subálgebra de Lie es una álgebra de Lie con una estructura heredada por la estructura de  $\mathfrak{g}$ .

**Definición 1.4.** Sea  $\mathfrak{g}$  una álgebra de Lie,  $V$  un espacio vectorial y  $\mathfrak{gl}(V)$  el álgebra de Lie de transformaciones lineales de  $V$ . Una representación de  $\mathfrak{g}$  en  $V$  es un homomorfismo  $\rho : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{gl}(V)$  que satisface que  $\rho([X, Y]) = [\rho X, \rho Y]$ .

En la teoría de Lie es de gran importancia una representación en particular, **la representación adjunta**, simbolizada por  $ad$  y definida como:

$$\begin{aligned}
ad : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{gl}(\mathfrak{g}) \\
X &\mapsto ad(X),
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
ad(X) : \mathfrak{g} &\longrightarrow \mathfrak{g} \\
Y &\mapsto ad(X)(Y) = [X, Y].
\end{aligned}$$

Las álgebras de Lie trabajadas en esta tesis son de dimensión finita y el grupo de sus transformaciones lineales también, por lo tanto dada una representación  $\rho$ , se dirá que esta es de dimensión finita.

Existe una representación natural de un grupo de Lie  $G$  en su álgebra de Lie. Esa representación está construida de la siguiente manera: un elemento  $g \in G$  define el automorfismo interno  $C_g(x) = gxg^{-1}$ . Es claro que  $C_g(1) = 1$ , por tanto la derivada en la identidad,  $d(C_g)_1$ , es una aplicación de  $\mathfrak{g}$  en  $\mathfrak{g}$ , definida de la siguiente manera:

Una derivación de un álgebra de Lie es una aplicación lineal  $d : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  tal que  $\forall X, Y \in \mathfrak{g}$  satisface la siguiente igualdad

$$d[X, Y] = [dX, Y] + [X, dY].$$

Luego  $d$  es una transformación que satisface la regla de Leibniz:

$$d(XY) = d(X)Y + Xd(Y).$$

La representación anteriormente nombrada es la Adjunta

$$Ad : G \longrightarrow Gl(\mathfrak{g})$$

$$g \mapsto Ad(g),$$

y

$$Ad(g) : \mathfrak{g} \longrightarrow \mathfrak{g}$$

$$Y \mapsto d(gYg^{-1})_1 = d(C_g)_1.$$

Definimos en  $\mathfrak{g}$  la forma trazo  $\beta_\rho$  como la forma bilineal simétrica dada por

$$\beta_\rho(X, Y) = tr(\rho(X) \cdot \rho(Y)), \text{ para } X, Y \in \mathfrak{g}.$$

Esta forma desempeñará un papel fundamental. En el caso de que la representación  $\rho = ad$ ,  $\beta_{ad}(X, Y)$  es denominada forma *Cartan - Killing* de  $\mathfrak{g}$  y será denotada de manera más simple por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ .

**Definición 1.5.** Dada un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  definimos, por inducción, los siguientes subespacios de  $\mathfrak{g}$

$$\mathfrak{g}^{(0)} = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}' = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots, \mathfrak{g}^{(k)} = [\mathfrak{g}^{(k-1)}, \mathfrak{g}^{(k-1)}] \text{ y}$$

$$\mathfrak{g}^1 = \mathfrak{g}, \mathfrak{g}^2 = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}], \dots, \mathfrak{g}^k = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}^{k-1}].$$

Decimos que  $\mathfrak{g}^0, \mathfrak{g}', \dots, \mathfrak{g}^{(k)}, \dots$  es la serie derivada de  $\mathfrak{g}$  y que  $\mathfrak{g}^1, \mathfrak{g}^2, \dots, \mathfrak{g}^k, \dots$  es la serie central descendente de  $\mathfrak{g}$ .

**Definición 1.6.** Dada un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ , decimos que:

1.  $\mathfrak{g}$  es soluble si existe  $k_0 \geq 1$ , tal que  $\mathfrak{g}^{(k_0)} = \{0\}$  y
2.  $\mathfrak{g}$  es nilpotente si existe  $k_0 \geq 1$ , tal que  $\mathfrak{g}^{k_0} = \{0\}$ .

Otra definición importante que forma parte de la teoría básica de las álgebras de Lie es la de ideal, la cual será uno de los puntos de partida para la definición referente a los tipos de álgebras de Lie relacionadas en este trabajo.

**Definición 1.7.** Un subespacio  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$  es un ideal si

$$\forall Y \in \mathfrak{h}, X \in \mathfrak{g}, [X, Y] \in \mathfrak{h}$$

esto es

$$[\mathfrak{g}, \mathfrak{h}] = \{[X, Y] : X \in \mathfrak{g}, Y \in \mathfrak{h}\} \subset \mathfrak{h}.$$

**Definición 1.8.** Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es semi-simple si no contiene ideales solubles además del 0.

**Definición 1.9.** Un álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  es simple si:

1. Los únicos ideales de  $\mathfrak{g}$  son 0 y  $\mathfrak{g}$ .
2. La  $\dim \mathfrak{g} \neq 1$ .

Existe un tipo especial de subálgebra de Lie, la cual es base para poder encontrar las raíces de un álgebra de Lie semi-simple, su definición se encuentra a continuación.

**Definición 1.10.** Sean  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie y  $X \in \mathfrak{g}$ . Una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ , es una subálgebra  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ , que satisface:

1.  $\mathfrak{h}$  es nilpotente,
2. el normalizador de  $\mathfrak{h}$  en  $\mathfrak{g}$  coincide con  $\mathfrak{h}$ . Esta condición es equivalente a que si  $[X, \mathfrak{h}] \subset \mathfrak{h}$ , entonces  $X \in \mathfrak{h}$ .

Recordemos que el normalizador de una subálgebra  $\mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ , es definida como

$$\mathfrak{n}(\mathfrak{h}) = \{X \in \mathfrak{g} : ad(X)\mathfrak{h} \subset \mathfrak{h}\}.$$

Teniendo en cuenta las definiciones anteriores se tienen entonces los criterios de Cartan-Killing, cuyas demostraciones se encuentran en la sección 3.2 de [11]:

- Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie de dimensión finita. Entonces  $\mathfrak{g}$  es soluble si y solo si  $\langle X, Y \rangle = 0$  para todo  $X \in \mathfrak{g}'$  y  $Y \in \mathfrak{g}$ .
- La forma Cartan- Killing es no degenerada, esto es,  $\langle X, Y \rangle = 0$  para todo  $Y \in \mathfrak{g}$  implica que  $X = 0$ , si y solamente si,  $\mathfrak{g}$  es semi-simple.

Ahora definiremos lo que es un sistema simple de raíces, definición básica para la comprensión del Teorema 1.16, cuya demostración podemos encontrar en [11], y también para poder clasificar las distintas álgebras del Lie semi-simples de dimensión finita.

Sea  $\alpha$  un funcional lineal sobre el espacio vectorial complejo  $\mathfrak{h}$  (subálgebra de Cartan), y denotamos por  $\mathfrak{g}_\alpha$  el subespacio lineal de  $\mathfrak{g}$  dado por

$$\mathfrak{g}_\alpha = \{X \in \mathfrak{g} : [H, X] = \alpha(H)X, \text{ para todo } H \in \mathfrak{h}\}.$$

Observemos que para  $\alpha = 0$ ,  $\mathfrak{g}_\alpha = \mathfrak{h}$ . Si  $\alpha \neq 0$  y  $\mathfrak{g}_\alpha \neq \{0\}$ , el funcional lineal  $\alpha$  es llamado una raíz (de  $\mathfrak{g}$  con respecto a  $\mathfrak{h}$ ). En tal caso  $\mathfrak{g}_\alpha$  es llamado un *subespacio raíz*. Denotamos por  $\Pi$  el conjunto de raíces no nulas del par  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .

El conjunto  $\Pi$  de raíces con respecto a una subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  genera el dual  $\mathfrak{h}^*$ . Los elementos  $H_\alpha, \alpha \in \Pi$ , duales de las raíces en relación a la forma de Cartan-Killing, generan  $\mathfrak{h}$ . Como  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  es una forma bilinear, ella define una aplicación  $\mathfrak{h} \rightarrow \mathfrak{h}^*$  dada por

$$H \mapsto \alpha_H(\cdot) = \langle H, \cdot \rangle.$$

Como la restricción de la forma Cartan-Killing a  $\mathfrak{h}$  no es degenerada, esa aplicación es un isomorfismo entre  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}^*$ . Para  $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ , su imagen por la inversa de ese isomorfismo será denotada por  $H_\alpha$ , esto es,  $H_\alpha$  es definido por la igualdad

$$\langle H_\alpha, H \rangle = \alpha(H), \forall H \in \mathfrak{h}.$$

Seleccionaremos dentro del conjunto de las raíces, bases especiales de  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}^*$  (sistema simple de raíces). Estas bases serán escogidas de tal manera que, los elementos de  $\Pi$  serán escritos como coordenadas enteras. Por esta razón, es más conveniente trabajar sobre subespacios racionales de  $\mathfrak{h}$  y  $\mathfrak{h}^*$ , generados por las raíces de sus duales, en lugar de considerar todo  $\mathfrak{h}$ . Como el cuerpo de escalares  $\mathbb{K}$  es de característica cero, este contiene el cuerpo  $\mathbb{Q}$  de los racionales, decimos que es de característica cero debido a que no existe un entero positivo  $n$  en  $\mathbb{K}$  tal que  $n \cdot 1 = 0$ . Por esto,  $\mathfrak{h}$  puede ser considerado como un espacio vectorial sobre  $\mathbb{Q}$ . En lo que sigue, el subespacio racional generado por  $H_\alpha, \alpha \in \Pi$ , lo denotaremos por  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}$  :

$$\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}} = \{a_1 H_{\alpha_1} + a_2 H_{\alpha_2} + \cdots + a_k H_{\alpha_k} : a_k \in \mathbb{Q}, \alpha_k \in \Pi\},$$

donde  $1 \leq k \leq n$ , con  $n = \dim \mathfrak{h}$ .

Lo primero que se debe considerar para construir un sistema simple de raíces es el orden lexicográfico en los espacios vectoriales. Sea  $V$  un espacio vectorial sobre  $\mathbb{Q}$  y  $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$  una base ordenada de  $V$ , sea  $v, w \in V$  escritos en coordenadas como

$$v = a_1v_1 + \cdots + a_lv_l$$

$$w = b_1v_1 + \cdots + b_lv_l.$$

El orden lexicográfico en  $V$  en relación a esa base es definida por  $v \leq w$  si  $v = w$  o si  $a_i < b_i$ , donde  $i$  es el primer índice en que las coordenada de  $v$  y  $w$  son diferentes. Esa relación define de hecho un orden que es compatible con una estructura de espacio vectorial. Cuando  $V$  es asociado a un producto interno, el orden lexicográfico en  $V$  satisface el siguiente lema, que utilizaremos para construir sistemas simples de raíces y el cual está demostrado en [11].

**Lema 1.11.** *Tomando un orden lexicográfico dado por la base ordenada  $\{v_1, v_2, \dots, v_l\}$ , sea  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  un subconjunto de  $V$  que satisface*

1.  $w_i > 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$ ,

2.  $\langle w_i, w_j \rangle \leq 0$  para  $i \neq j$ .

*Entonces,  $\{w_1, w_2, \dots, w_m\}$  es un conjunto linealmente independiente.*

**Definición 1.12.** Una raíz  $\alpha \in \Pi$  es simple en relación al orden fijado si:

- i).  $\alpha > 0$

- ii). No existe  $\beta, \gamma \in \Pi$  tal que  $\beta$  y  $\gamma$  son positivas y  $\alpha = \beta + \gamma$ .

**Definición 1.13.** Un conjunto  $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  que satisface:

- i).  $\Sigma$  es una base de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{Q}}^*$  y

- ii). toda raíz  $\beta$  puede ser escrita como  $\beta = n_1\alpha_1 + \dots + n_l\alpha_l$ , con  $n_1, \dots, n_l$  coeficientes enteros del mismo signo,

es denominado un *sistema simple de raíces*.

Además decimos que una raíz es positiva si al escribirse como una combinación lineal, todos los coeficientes son enteros mayores o iguales a cero. La *altura* de  $\beta$  es el entero positivo  $n_1 + \dots + n_l$ . Por ejemplo las raíces positivas de altura 1 son exactamente las raíces simples. Las raíces positivas de altura 2 son las de la forma  $\alpha_i + \alpha_j$  con  $i \neq j$ , la fórmula de Killing para  $\alpha_i$  y  $\alpha_j$ , la cual definiremos a continuación por medio de un teorema el cual es demostrado en [11], permite encontrar cuales de las posibles combinaciones lineales son raíces.

**Teorema 1.14.** *Los elementos de  $\alpha$ -secuencia iniciada en  $\beta$  que son autovalores, forman un intervalo conteniendo a  $\beta$ , esto es, existen enteros  $p, q \geq 0$  tal que*

$$\beta - p\alpha, \dots, \beta - 2\alpha, \beta - \alpha, \beta, \beta + \alpha, \beta + 2\alpha, \dots, \beta + q\alpha$$

*son las únicas raíces de la forma  $\beta + k\alpha$  con  $k$  entero. Además, se tiene que*

$$p - q = \frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$$

*que es llamada la fórmula de Killing.*

El entero  $\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle}$  es denominado el número de killing asociado a las raíces  $\alpha$  y  $\beta$ .

Los números asociados a las raíces simples son colocados en forma de matriz  $l \times l$  como

$$C = \left( \frac{2\langle\alpha_i, \alpha_j\rangle}{\langle\alpha_j, \alpha_j\rangle} \right)_{i,j}.$$

Esta matriz recibe el nombre de *Matriz de Cartan* del sistema simple de raíces. Los elementos diagonales de esta matriz son todos iguales a 2 y los elementos fuera de la diagonal son enteros negativos. La siguiente proposición demostrada en [11] muestra las posibilidades para los elementos fuera de la diagonal.

**Proposición 1.15.** *Sean  $\alpha$  y  $\beta$  raíces*

1. *Si  $\theta$  denota el ángulo entre  $\alpha$  y  $\beta$  entonces,*

$$\cos\theta = 0, \pm 1, \pm \frac{\sqrt{3}}{2}, \pm \frac{\sqrt{2}}{2}, \pm \frac{1}{2},$$

*esto es,  $\theta = k\pi/6$  o  $k\pi/4$ .*

2. *Los posibles valores para los números de Killing son*

$$\frac{2\langle\beta, \alpha\rangle}{\langle\alpha, \alpha\rangle} = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3.$$

Esta Proposición nos muestra que los elementos por fuera de la diagonal de la matriz de Cartan asumen apenas los valores  $0, -1, -2, -3$  y que  $\theta$ , el ángulo entre las dos raíces simples, puede ser  $0^\circ, 90^\circ, 120^\circ, 135^\circ$  o  $150^\circ$ , si las raíces simples son distintas.

**Teorema 1.16.** *Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semi-simple compleja y  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan de  $\mathfrak{g}$ .*

1. El álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$  admite una descomposición en espacios de raíces de la forma:

$$\mathfrak{g} = \mathfrak{h} \oplus \bigoplus_{\alpha \in \Pi} \mathfrak{g}_\alpha.$$

2. Los espacios raíz  $\mathfrak{g}_\alpha$ ,  $\alpha \in \Pi$ , son de dimensión compleja uno, aquí  $\Pi$  es el conjunto de raíces del par  $(\mathfrak{g}, \mathfrak{h})$ .

3. Si  $\alpha$  y  $\beta$  son dos raíces cualquiera (incluyendo 0) y  $\beta \neq -\alpha$ , entonces  $\mathfrak{g}_\alpha$  y  $\mathfrak{g}_\beta$  son ortogonales con relación a la forma Cartan-Killing en  $\mathfrak{g} \times \mathfrak{g}$ .

4. Si  $\alpha$  es una raíz no nula,  $\Pi \cap \mathbb{Z}\{\alpha\} = \{-\alpha, \alpha\}$ .

5. Para cada  $\alpha \in \Pi$  existe un vector  $X_\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha$  de tal forma que para todo  $\beta \in \Pi$  tenemos:

- $[X_\alpha, X_{-\alpha}] = H_\alpha$ ,  $[H, X_\alpha] = \alpha(H)X_\alpha$ , (para todo  $H \in \mathfrak{h}$ ).
- $[X_\alpha, X_\beta] = 0$ , si  $\alpha + \beta \neq 0$  y  $\alpha + \beta \notin \Pi$ .
- $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 1$ , si  $\alpha + \beta = 0$  y  $\langle X_\alpha, X_\beta \rangle = 0$  en los otros casos.
- $[X_\alpha, X_\beta] = m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}$ , si  $\alpha + \beta \in \Pi$  con  $m_{\alpha,\beta} \in \mathbb{R}$  y  $m_{-\alpha,-\beta} = -m_{\alpha,\beta}$   
 $m_{-\alpha,\alpha+\beta} = m_{\alpha+\beta,-\beta} = m_{-\beta,-\alpha}$ .

Los elementos  $\{X_\alpha : \alpha \in \Pi\}$  que satisfacen el numeral 5 en el teorema anterior serán llamados una base de Weyl o Cartan-Weyl de  $\mathfrak{g}$  módulo  $\mathfrak{h}$ . Se aclara que en adelante será usada la notación  $m_{\alpha,\beta}$  para designar el coeficiente de  $[X_\alpha, X_\beta]$  en relación a  $X_{\alpha+\beta}$ .

### 1.3. Clasificación de las Álgebras de Lie

Presentamos aquí la clasificación de las álgebras de Lie semi-simples de dimensión finita. Primero tomamos una subálgebra de Cartan, la cuál determina via representación adjunta, un sistema de raíces  $\Pi$  y un sistema simple de raíces  $\Sigma$ . A partir de la fórmula de Killing se establecen los números de Killing que forman la matriz de Cartan del álgebra  $\mathfrak{g}$ , con estos números y  $\Sigma$  se encuentra el diagrama de Dynkin. Para garantizar que un diagrama es determinado a partir de una álgebra semi-simple, es necesario verificar que todos los sistemas simples en todas las subálgebras de Cartan de una álgebra dada tiene el mismo diagrama de Dynkin, el cuál es un diagrama que contiene la misma información que la matriz de Cartan como lo veremos aquí.

Definido un sistema simple de raíces

$$\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_l\},$$

un diagrama es un digrafo que contiene  $l$  vértices representando cada una de las raíces. Los vértices son ligados por una, dos o tres segmentos de acuerdo al número de Killing asociado (determinando el ángulo que se forma entre las dos raíces simples). Se presentarán los diagramas de las álgebras  $A_l, B_l, C_l, D_l$  que están asociadas a álgebras de matrices, conocidas como álgebras clásicas, los demás diagramas  $G_2, F_4, E_6, E_7, E_8$  están asociados a las llamadas álgebras excepcionales.

Veamos como ejemplo el caso  $B_l$  particularizando los resultados a  $B_2$ .

$B_l$ ,  $l \geq 2$ ; está asociado al álgebra de matrices antisimétricas de dimensión impar

$$so(2l + 1) = \{A \in sl(n) : A^t + A = 0\}.$$

Para encontrar una subálgebra de Cartan de  $so(2l + 1)$  es más conveniente escribir esta álgebra de la siguiente forma: las matrices de  $so(n)$  son matrices de transformaciones lineales antisimétricas en relación a una forma cuadrática no degenerada, definida por la matriz identidad. Como el cuerpo de escalares es algebraicamente cerrado, las formas cuadráticas no degeneradas son equivalentes, lo que implica que las álgebras de matrices antisimétricas en relación a formas cuadráticas no degeneradas son isomorfas. Entonces definimos

$$\mathfrak{g}_i = \{A \in sl(n) : A^t J_i + J_i A = 0\}.$$

Por lo tanto existen diferentes formas de ver a  $so(2l + 1)$ , escogiendo diferentes formas cuadráticas, en este caso la más conveniente para determinar una subálgebra de Cartan es dada por la matriz  $J$ , escrita por bloques así

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1_l \\ 0 & 1_l & 0 \end{pmatrix},$$

donde  $1_l$  representa la matriz identidad de tamaño  $l \times l$ .

Escribiendo una matriz  $A$  de tamaño  $(2l + 1) \times (2l + 1)$  en bloques del mismo tamaño que los bloques de  $J$  y comprobando que se cumpla que  $A^t J + J A = 0$ ,  $A \in so(2l + 1)$  si y solo si  $A$  es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \beta & \gamma \\ -\gamma^t & a & b \\ -\beta^t & c & d \end{pmatrix},$$

con  $\beta$  y  $\gamma$  matrices  $1 \times l$ , las demás  $l \times l$  y con  $b$  y  $c$  antisimétricas.

Una subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  es una subálgebra de dimensión  $l$  de matrices diagonales en  $so(2l + 1)$ , esto es  $H \in \mathfrak{h}$  si y solo si  $H$  es de la forma

$$H = \begin{pmatrix} 0 & & \\ & \Lambda & \\ & & -\Lambda \end{pmatrix},$$

con  $\Lambda$  una matriz de tamaño  $l \times l$  diagonal arbitraria.

Las posibles raíces las determinamos al aplicar  $[A, H] = \lambda_j H A$ ,  $j = 1, \dots, l$  donde resultan unos sistemas de ecuaciones, que al resolverlos llegamos a que:

- $\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, l$  con el espacio de raíces formados por las matrices  $A$  en que  $a = b = c = 0$ ,  $\beta = 0$  y  $\gamma = (0, \dots, x_j, \dots, 0)$ .
- $-\lambda_j$ ,  $j = 1, \dots, l$  con el espacio de raíces dado por  $a = b = c = 0$ , y  $\gamma = 0$  y  $\beta = (0, \dots, x_j, \dots, 0)$ .
- $\lambda_i - \lambda_j$ , con  $i \neq j$  con el espacio de raíces dado por  $b = c = 0$ , y  $\gamma, \beta = 0$  y  $a$  una matriz  $l \times l$  cuya única entrada no nula esta en  $i, j$ .
- $\lambda_i + \lambda_j$ , con  $i \neq j$  con el espacio de raíces dado por  $a = c = 0$ , y  $\gamma, \beta = 0$  y  $b$  una matriz antisimétrica cuyas únicas entradas no nulas estan en  $i, j$  y  $j, i$ .
- $-(\lambda_i + \lambda_j)$ , con  $i \neq j$  con el espacio de raíces dado por las matrices transpuestas de la anterior.

Utilizando la Definición 1.13, tenemos que el sistema simples de raíces es

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \dots, \lambda_{l-1} - \lambda_l, \lambda_l\}.$$

En el caso particular de  $B_2$ , sería

$$\Sigma = \{\lambda_1 - \lambda_2, \lambda_2\},$$

el cuál vamos a escribir como

$$\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2\},$$

donde  $\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2$  y  $\alpha_2 = \lambda_2$ .

Ahora encontraremos las raíces positivas al escribirlas como una combinación lineal de las simples con todos los coeficientes enteros mayores o iguales a cero, estas son:

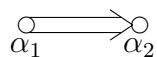
$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2\}.$$

Considerando la  $\alpha_1$  secuencia iniciada en  $\alpha_2$  tenemos que  $p = 0$  y  $q = 1$ , en cuanto a la  $\alpha_2$  secuencia iniciada en  $\alpha_1$  tenemos que  $p = 0$  y  $q = 2$ , en la fórmula de Killing. Luego  $\alpha_1 + \alpha_2$  es la única raíz de altura 2 y  $\alpha_1 + 2\alpha_2$  la única de altura 3. No existen raíces de altura 4, siendo la altura de una raíz el entero positivo resultante de la suma de los coeficientes en la combinación lineal equivalente a cada raíz positiva.

La matriz de Cartan del sistema simple  $B_2$ , obtenida a partir del número de Killing asociado a estas raíces esta dada por

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix},$$

y su respectivo diagrama de Dynkin tiene ligación doble debido a que el número de Killing entre las raíces simples  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  es  $-2$ , además apunta a la raíz corta pues  $\alpha_2$  tiene menor longitud que  $\alpha_1$ . Luego el correspondiente digrafo es:



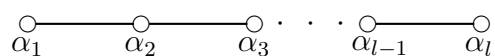
A continuación se presentaran los diagramas obtenidos para las álgebras clásicas y excepcionales:

### Diagramas de las álgebras clásicas.

- $A_l$ ,  $l \geq 1$ ; está asociado al álgebra  $sl(l + 1)$ , que es el álgebra de matrices de traza cero.

$$sl(l + 1) = \{A \in \mathfrak{gl}(n) : tr A = 0\}.$$

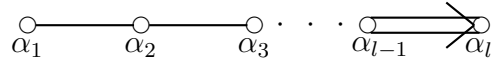
El diagrama de Dynkin que la representa es:



- $B_l$ ,  $l \geq 2$ ; está asociado al álgebra de matrices antisimétricas de dimensión impar

$$so(2l + 1) = \{A \in sl(n) : A^t + A = 0\}.$$

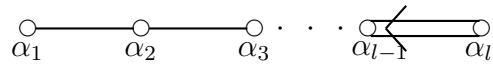
El diagrama de Dynkin que la representa es:



- $C_l$ ,  $l \geq 3$ ; está asociada al álgebra simpléctica  $sp(l) = \{A \in sl(2l) : AJ + JA^t = 0\}$ , siendo  $J$  la matriz antisimétrica  $2l \times 2l$  escrita en bloques de tamaño  $l \times l$  como

$$J = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix},$$

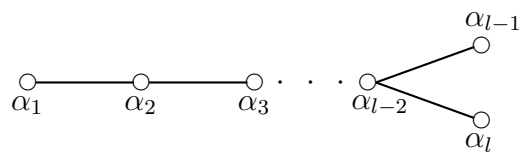
donde 1 representa la matriz identidad de tamaño  $l \times l$ . El diagrama de Dynkin que la representa es:



- $D_l$ ,  $l \geq 4$ ; está asociada al álgebra de matrices antisimétricas de dimensión par

$$so(2l) = \{A \in sl(2l) : A + A^t = 0\}.$$

El diagrama de Dynkin que la representa es:



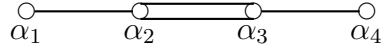
### Diagramas de las álgebras excepcionales.

Su construcción se sale del estudio de este trabajo, sin embargo consideraremos sus raíces y el diagrama de Dynkin asociado a esta álgebra debido a que serán utilizados en el capítulo 3.

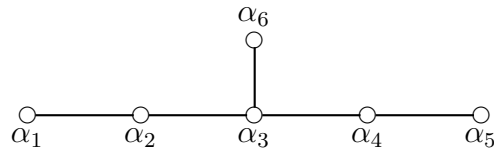
- $G_2$



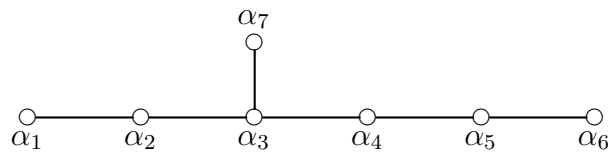
- $F_4$



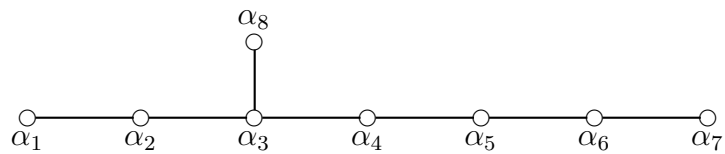
- $E_6$



- $E_7$



- $E_8$



## 1.4. Variedades Bandera

Para estudiar estas variedades es importante que partamos de la noción de espacio homogéneo y acción transitiva, elementos tratados dentro de esta sección.

Una variedad  $M$  se llama espacio homogéneo de un grupo de Lie  $G$  si hay una acción transitiva de  $G$  en  $X$ . El grupo  $G$  actúa transitivamente sobre  $M$  de manera natural, esto significa que dados dos elementos  $x, y \in M$  existe un  $g \in G$  tal que  $x.g = y$ .

En este trabajo vamos a considerar las variedades bandera maximales, las cuales primero definiremos de una manera general basándonos en [8] de la siguiente forma:

Sea  $\mathbb{F}(n) = \{(L_1, \dots, L_n) : L_i \text{ un subespacio de } \mathbb{C}^n; \dim_{\mathbb{C}} L_i = 1, L_i \perp L_j\}$ . El grupo unitario  $U(n) = \{A \in M(n, \mathbb{C}) : A \cdot \overline{A}^t = I\}$  actúa transitivamente sobre  $\mathbb{F}(n)$ , esto significa que si tomamos  $(L_1, \dots, L_n), (B_1, \dots, B_n) \in \mathbb{F}(n)$  existe  $A \in U(n)$  tal que  $(L_1, \dots, L_n) \cdot A = (B_1, \dots, B_n)$ .

Usando esta acción, obtenemos una descripción como espacio homogéneo para  $\mathbb{F}(n)$  así:

$$\mathbb{F}(n) = \frac{U(n)}{T},$$

donde  $T$  es un toro maximal en  $U(n)$ . Este conjunto será el que llamaremos variedad bandera maximal, geométrica o clásica.

En un grupo de Lie  $G$  un toro es un subgrupo de Lie que es isomorfo al producto  $S^1 \times S^1 \times \dots \times S^1$ . Un toro  $T$  es un toro maximal en  $G$  si para cualquier toro  $S$  en  $G$ , con  $T \subset S \subset G$ , entonces  $T = S$ .

A continuación daremos unas definiciones que nos ayudarán a generalizar este concepto y a relacionarlo con los grupos y las álgebras de Lie.

**Definición 1.17.** Sea  $\mathfrak{g}$  una álgebra compleja. Una forma real de  $\mathfrak{g}$  es una subálgebra  $\mathfrak{g}_\sigma = \{X \in \mathfrak{g} : \sigma(X) = X\}$  de  $\mathfrak{g}^{\mathbb{R}}$ , que es el subespacio de los puntos fijos de una conjugación  $\sigma$  donde  $\sigma^2 = 1$  que satisface

$$[\sigma X, \sigma Y] = \sigma[X, Y].$$

**Definición 1.18.** Una álgebra de Lie sobre  $\mathbb{R}$  se dice compacta si su forma Cartan - Killing es definida negativa.

El término compacto usado para esas álgebras tiene un significado topológico. Una álgebra semi-simple real es un álgebra de Lie de un grupo de Lie compacto si y solo si es compacta en el sentido de la definición anterior. Existe una clase especial de forma real, las formas reales compactas. Toda álgebra compleja tiene una única (a menos de isomorfismos) forma real compacta.

Es importante recordar que el grupo  $S^1$  es el único grupo de Lie compacto y conexo de dimensión uno, y el producto de varias copias de  $S^1$  son los únicos grupos de Lie compactos, conexos y conmutativos.

**Definición 1.19.** Una subálgebra de Borel de una álgebra semi-simple sobre un cuerpo algebraicamente cerrado, es una subálgebra de tipo  $\mathfrak{p} = \mathfrak{h} \oplus \mathfrak{n}^+$ , con  $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ , para una subálgebra de Cartan  $\mathfrak{h}$  y algún sistema de raíces positivo.

La variedad bandera maximal  $\mathbb{F}$  asociada a  $\mathfrak{g}$  también puede verse como el conjunto de álgebras conjugadas de  $\mathfrak{p}$ . Así  $\mathbb{F} = G/P$  donde  $P = \{g \in G; Ad(g)\mathfrak{p} = \mathfrak{p}\}$  es el normalizador de  $\mathfrak{p}$  en  $G$  ( Grupo de Lie semi-simple complejo con álgebra de Lie  $\mathfrak{g}$ ).

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra semi-simple y  $\mathfrak{h}$  una subálgebra de Cartan, cuyo conjunto de raíces es  $\Pi$ , y sea  $\Sigma$  un sistema simple de raíces en  $\Pi$ . El concepto central en la construcción de una forma real compacta es la base de Weyl. Esa es una base de  $\mathfrak{g}$  formada por  $H_\alpha, \alpha \in \Sigma$  y  $X_{\alpha \in \mathfrak{g}_\alpha}, \alpha \in \Pi$  definida en el Teorema 1.16. Dada una base de Weyl, sea  $\mathfrak{u}$  el espacio real generado por

$$iH_\alpha, \quad A_\alpha = X_\alpha - X_{-\alpha}, \quad S_\alpha = X_\alpha + X_{-\alpha}$$

con  $\alpha$  recorriendo el conjunto  $\Pi^+$  de raíces positivas. Entonces  $\mathfrak{u}$  es una forma compacta de  $\mathfrak{g}$  debido a que:

1.  $\mathfrak{g} = \mathfrak{u} + i\mathfrak{u}$ , pues  $H_\alpha$  y  $X_\alpha$  pueden ser escritos como combinaciones lineales con coeficientes enteros, como fue enunciado anteriormente.
2.  $\mathfrak{u}$  es un álgebra real. Observemos en el Teorema 1.16 que los coeficientes en el numeral 5, son siempre reales.
3.  $\mathfrak{u}$  es compacta debido a que la forma de Cartan- Killing de  $\mathfrak{u}$  coincide con la restricción de la forma Cartan- Killing  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  de  $\mathfrak{g}$ , ya que  $\mathfrak{u}$  es una forma real.

Como la forma real compacta  $U$  de  $G$ , correspondiente a  $\mathfrak{u}$  actúa transitivamente sobre  $\mathbb{F}$ , por restricción a  $U$ , se puede escribir  $\mathbb{F} = U/T$ , donde  $T = P \cap U$ , el toro maximal de  $U$ . El álgebra de Lie de  $T$  es el subespacio real  $\mathfrak{t} = i\mathfrak{h}_\mathbb{R}$ .

Denotemos por  $b_0$  el origen del  $\mathbb{F}$ , visto como espacio homogéneo de  $G$  o de  $U$ , el espacio tangente de  $\mathbb{F}$  en  $b_0$  se identifica naturalmente con el subespacio  $\mathfrak{q} = \mathfrak{u} \setminus \mathfrak{t} \subset \mathfrak{u}$ , generado por  $A_\alpha, iS_\alpha, \alpha \in \Pi$ . La variedad bandera general  $\mathbb{F} = U/T$  es un espacio homogéneo reductivo debido a que satisface las siguientes condiciones:

- i).  $\mathfrak{u} = \mathfrak{q} \oplus \mathfrak{t}$ ,
- ii).  $Ad(T)\mathfrak{q} \subset \mathfrak{q}$ , esto implica que  $[\mathfrak{t}, \mathfrak{q}] \subset \mathfrak{q}$ .

Análogamente el espacio tangente complejo en  $\mathbb{F}$  en la identidad es identificado con  $\mathfrak{q}_\mathbb{C} = \mathfrak{g} \setminus \mathfrak{h} \subset \mathfrak{g}$ .

## 1.5. Métricas Invariantes

Una métrica Riemanniana en una variedad diferenciable  $M$  es una correspondencia que asocia a cada punto  $p \in M$  un producto interno  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p$  en el espacio tangente  $T_p M$ , que varía

diferencialmente en el siguiente sentido: Si  $X : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow M$  es un sistema de coordenadas locales en torno a  $p$  con  $X(x_1, x_2, \dots, x_n) = q \in X(U)$  y  $\frac{\partial(q)}{\partial x_i} = dx_q(0, \dots, 1, \dots, 0)$ , entonces  $\langle \frac{\partial(q)}{\partial x_i}, \frac{\partial(q)}{\partial x_j} \rangle_q = g_{ij}(x_1, \dots, x_n)$  es una función diferenciable en  $U$ .

Denotemos por  $b_o$  el origen de  $\mathbb{F} = U/T$ , con  $\mathbb{F}$  la variedad bandera general, vista como un espacio homogéneo de  $U \subset G$  y  $U$  es una forma compacta de  $G$ . Una métrica riemanniana  $U$ -invariante  $ds_\Lambda^2$  en  $\mathbb{F}$  es completamente determinada por sus valores en el origen, esto es, por un producto interno en  $\mathfrak{q}$ , que es invariante sobre la acción adjunta de  $T$ , tiene la forma  $(X, Y)_\Lambda = -\langle \Lambda X, Y \rangle$  con

$$\begin{aligned} \Lambda : \mathfrak{q} &\longmapsto \mathfrak{q} \\ Y &\longmapsto \Lambda(Y) = \Lambda \circ Y, \end{aligned}$$

donde  $\Lambda$  es la matriz de representación de la transformación y  $\circ$  es el producto de Hadamard o producto de matrices entrada por entrada.  $(X, Y)_\Lambda$  es definida positiva con relación a la forma Cartan- Killing, esto es  $-\langle \Lambda X, Y \rangle > 0$  para todo  $X, Y \in \mathfrak{q}$ . Se puede extender el producto interno  $(\cdot, \cdot)_\Lambda$  a una forma bilineal simétrica sobre la complejificación  $\mathfrak{q}_\mathbb{C}$  de  $\mathfrak{q}$  así  $(X + iY, Z + iW)_\Lambda = (X, Z)_\Lambda + i(X, W)_\Lambda + i(Y, Z)_\Lambda - (Y, W)_\Lambda$ . Usaremos la misma notación  $(\cdot, \cdot)_\Lambda$  para esta forma bilinear simétrica, como para la correspondiente aplicación complejificada  $\Lambda$  que es dada por  $\Lambda(X + iY) = \Lambda(X) + i\Lambda(Y)$ .

La invarianza de  $(X, Y)_\Lambda$  equivale a afirmar que para  $X_\alpha$  elemento de una base de Weyl,  $\Lambda(X_\alpha) = \lambda_\alpha X_\alpha$ . La explicación de esto se debe a que la invarianza de  $(X, Y)_\Lambda$  es equivalente a que los elementos de la base canónica  $A_\alpha, iS_\alpha, \alpha \in \Pi$  sean autovectores de  $\Lambda$  para un mismo autovalor  $\lambda_\alpha$ , luego en el espacio complejo tenemos:

$$\Lambda(X_\alpha) = \Lambda\left(\frac{A_\alpha + S_\alpha}{2}\right) = \frac{1}{2}(\lambda_\alpha A_\alpha + \lambda_\alpha S_\alpha) = \frac{1}{2}\lambda_\alpha(2X_\alpha) = \lambda_\alpha X_\alpha.$$

## 1.6. Estructura Casi Compleja Invariante

Una estructura casi compleja  $U$ -invariante sobre  $\mathbb{F}$  esta completamente determinada por  $J_x : T_x(\mathbb{F}) \rightarrow T_x(\mathbb{F})$ , con  $x \in \mathbb{F}$  tal que la aplicación  $J_x$  satisface  $J_x^2 = -1$  y  $dg_x \circ J_x = J_{gx} \circ dg_x$ , para todo  $g \in U$ , donde 1 denota la aplicación identidad. Cuando nos refiramos a este tipo de estructuras lo abreviaremos mediante *ecci*. Una variedad diferenciable  $\mathbb{F}$  equipada en cada espacio tangente  $T_p\mathbb{F}$  con una estructura compleja  $J_p$  que varía de forma diferenciable de punto a punto es llamada casi-compleja. Esta estructura compleja convierte a cada espacio tangente en un espacio vectorial complejo.

**Proposición 1.20.** Una ecci está completamente determinada por un endomorfismo  $J : \mathfrak{q} \rightarrow \mathfrak{q}$ , definido en el espacio tangente al origen satisfaciendo  $J^2 = -1$  y que conmuta con la acción adjunta de  $T$  (toro) sobre  $\mathfrak{g}$ , esto es,  $[JX, JY] = -[X, Y]$ , para todo  $X, Y \in \mathfrak{q}$ .

*Demostración.* Sean  $b_0$  el origen de  $\mathbb{F}$  y  $x \in \mathbb{F}$ . Como la acción adjunta de  $U$  sobre  $\mathbb{F}$  es transitiva, existe un  $g \in U$ , tal que  $x = gb_0$ , entonces definimos a  $J_x$  de la siguiente forma:

$$J_x : T_x(\mathbb{F}) \rightarrow T_x(\mathbb{F}).$$

con  $J_x = dg_{b_0} \circ J \circ (dg_{b_0})^{-1}$ . Debemos demostrar

- i). La definición de  $J_x$  no depende de la escogencia de  $g \in U$ .
- ii).  $J_x^2 = -1$ .
- iii).  $dg_x \circ J_x = J_{gx} \circ dg_x$ .

En seguida la demostración de estas afirmaciones:

- i). Tomemos  $g, \tilde{g} \in U$  tal que  $gb_0 = \tilde{g}b_0 = x$ , tenemos  $g^{-1}\tilde{g}b_0 = b_0$  y  $h = g^{-1}\tilde{g} \in T$ , debido a la acción transitiva de  $U$  sobre  $\mathbb{F}$ . Ahora

$$\begin{aligned} dg_{b_0} \circ J \circ (dg_{b_0})^{-1} = d\tilde{g}_{b_0} \circ J \circ (d\tilde{g}_{b_0})^{-1} &\Leftrightarrow J \circ dg_x^{-1} = (dg_{b_0})^{-1} d\tilde{g}_{b_0} \circ J \circ (d\tilde{g}_{b_0})^{-1} \\ &\Leftrightarrow J \circ dg_x^{-1} = dg_x^{-1} d\tilde{g}_{b_0} \circ J \circ (d\tilde{g}_{b_0})^{-1} \\ &\Leftrightarrow J \circ dg_x^{-1} \circ d\tilde{g}_{b_0} = (dg_{b_0})^{-1} d\tilde{g}_{b_0} \circ J \\ &\Leftrightarrow J \circ d(g^{-1}\tilde{g})_{b_0} = d(g^{-1}\tilde{g})_{b_0} \circ J \\ &\Leftrightarrow J \circ dh_{b_0} = dh_{b_0} \circ J \\ &\Leftrightarrow J \circ Ad(h) = Ad(h) \circ J \end{aligned}$$

y esto implica i).

$$\text{ii). } J_x^2 = (dg_{b_0} \circ J \circ (dg_{b_0})^{-1}) \circ (dg_{b_0} \circ J \circ (dg_{b_0})^{-1}) = dg_{b_0} \circ J^2 \circ (dg_{b_0})^{-1} = -1.$$

- iii). Mostrar que  $dg_x \circ J_x = J_{gx} \circ dg_x$  es equivalente a mostrar que  $dg_x \circ d\tilde{g}_{b_0} \circ J \circ (d\tilde{g}_{b_0})^{-1} = d\hat{g}b_0 \circ J \circ (d\hat{g}_{b_0})^{-1} \circ dg_x$ , con  $\hat{g} \in U$ , donde  $\hat{g}b_0 = gx$  y  $\tilde{g}b_0 = x$ . De i) se llega a que

$$\begin{aligned} \hat{g}b_0 &= g\tilde{g}b_0 \\ \hat{g} &= g\tilde{g} \\ g^{-1}\hat{g} &= \tilde{g}, \end{aligned}$$

basta entonces demostrar que  $dg_x \circ d(g^{-1}\widehat{g})_{b_0} \circ J \circ (d(g^{-1}\widehat{g})_{b_0})^{-1} = d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ dg_x$ , de donde,  $dg_x \circ dg_{g_x}^{-1} \circ d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ (dg_{g_x}^{-1})^{-1} = d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ dg_x$ . Utilizando que  $dg_x \circ dg_{g_x}^{-1} = d(gg^1)_{g_x}$ , se llega a

$$\begin{aligned} dg_x \circ dg_{g_x}^{-1} \circ d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ (dg_{g_x}^{-1})^{-1} &= d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ d(g_{g_x}^{-1})^{-1} \\ &= d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ d(g^{-1})_x^{-1} \\ &= d\widehat{g}_{b_0} \circ J \circ (d\widehat{g}_{b_0})^{-1} \circ dg_x. \end{aligned}$$

Con lo que se completa la demostración.  $\square$

Vamos también a denotar por  $J$  a la complejificación sobre  $\mathfrak{q}_{\mathbb{C}}$ . La invarianza de  $J$  garantiza que  $J(\mathfrak{g}_{\alpha}) = \mathfrak{g}_{\alpha}$ ,  $\forall \alpha \in \Pi$ . Los autovalores de  $J$  son  $\pm i$ , pues el polinomio característico de  $J$  es  $x^2 + 1$ . Consecuentemente,  $J(X_{\alpha}) = i\varepsilon_{\alpha}X_{\alpha}$ , con  $\varepsilon_{\alpha} = \pm 1$ . Veamos que  $A_{\alpha} - i(iS_{\alpha}) = X_{\alpha} - X_{-\alpha} - i(i(X_{\alpha} + X_{-\alpha})) = 2X_{\alpha}$ . De ahí que  $X_{\alpha} = \frac{1}{2}(A_{\alpha} - i(iS_{\alpha}))$  y

$$\begin{aligned} JX_{\alpha} &= \frac{1}{2}J(A_{\alpha} - i(iS_{\alpha})) = \frac{1}{2}(JA_{\alpha} - iJ(iS_{\alpha})) \\ &= \frac{1}{2}\varepsilon_{\alpha}i(A_{\alpha} - i(iS_{\alpha})) = \frac{1}{2}i\varepsilon_{\alpha}A_{\alpha} + \frac{1}{2}i\varepsilon_{\alpha}S_{\alpha} \\ &= \frac{1}{2}(i\varepsilon_{\alpha}A_{\alpha} + \varepsilon_{\alpha}iS_{\alpha}). \end{aligned}$$

Igualando las partes real e imaginaria tenemos que  $JA_{\alpha} = \varepsilon_{\alpha}(iS_{\alpha})$  y  $J(iS_{\alpha}) = -\varepsilon_{\alpha}iA_{\alpha}$ . Como  $A_{\alpha} = -A_{-\alpha}$ , entonces  $JA_{\alpha} = J(-A_{-\alpha})$  y por lo tanto,  $\varepsilon_{\alpha}(iS_{\alpha}) = -JA_{-\alpha} = -\varepsilon_{-\alpha}(iS_{-\alpha})$ . Ahora  $S_{\alpha} = S_{-\alpha}$  y por lo tanto  $\varepsilon_{\alpha} = -\varepsilon_{-\alpha}$ .

Usualmente los autovectores asociados a  $+i$  son llamados de tipo  $(1,0)$  y los vectores asociados a  $-i$  son llamados de tipo  $(0,1)$ . Entonces para  $X_{\alpha}$  los vectores de tipo  $(1,0)$  tendremos  $\varepsilon_{\alpha} = +1$  y para  $X_{\beta}$  los de tipo  $(0,1)$ ,  $\varepsilon_{\beta} = -1$ .

Una *eccí* sobre  $\mathbb{F}$  es completamente determinada por un conjunto de signos  $\{\varepsilon_{\alpha}\}_{\alpha \in \Pi}$ , con  $\varepsilon_{\alpha} = -\varepsilon_{-\alpha}$ . De ahora en adelante diremos que una *eccí* sobre  $\mathbb{F}$  esta definida por un  $J = \{\varepsilon_{\alpha}\}$ .

## 1.7. Forma de Kähler

Una métrica invariante  $ds_{\Lambda}^2$  se dice hermítica si verifica la siguiente condición de compatibilidad con la estructura casi compleja  $J$ :

$$ds_{\Lambda}^2(JX, JY) = ds^2(X, Y).$$

Sea  $\Omega = \Omega_{J,\Lambda}$  la función de la correspondiente forma Kähler

$$\Omega(X, Y) = ds^2(X, JY) = -\langle \Lambda X, JY \rangle,$$

esta 2-forma se extiende naturalmente a una 2-forma  $U$ -invariante en la complejificación de  $\mathfrak{q}$ , la cual es denotada igualmente por  $\Omega$ . Esta 2-forma evaluada en vectores de la base de Weyl resulta:

$$\Omega(X_\alpha, X_\beta) = -\langle \Lambda X_\alpha, JX_\beta \rangle = -\langle \lambda_\alpha X_\alpha, i\varepsilon_\beta X_\beta \rangle = -i\lambda_\alpha \varepsilon_\beta \langle X_\alpha, X_\beta \rangle$$

de donde  $\Omega(X_\alpha, X_\beta) = 0$  si  $\alpha + \beta \neq 0$  o  $\Omega(X_\alpha, X_\beta) = \Omega(X_\alpha, X_{-\alpha}) = -i\lambda_\alpha \varepsilon_{-\alpha} = i\lambda_\alpha \varepsilon_\alpha$  si  $\alpha + \beta = 0$ .

La siguiente fórmula es de gran ayuda para poder determinar propiedades de formas diferenciables.

**Lema 1.21.** *Sea  $\omega$  una forma invariante  $k$ -diferenciable sobre un espacio homogéneo  $G/T$ . Entonces*

$$d\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) = (k+1) \sum_{i < j} (-1)^{i+j} \omega([X_i, X_j], X_1, \dots, \widehat{X}_i, \dots, \widehat{X}_j, \dots, X_{k+1}),$$

para  $X_1, \dots, X_{k+1}$  en el álgebra de lie  $\mathfrak{g}$  de  $G$ .

Recordemos que la simbología  $\widehat{X}_i$  significa que esta coordenada no existe.

Aplicada a una 2-forma diferencial, entonces

$$d\omega(X, Y, Z) = 3\{X(\omega(Y, Z)) + Y(\omega(Z, X)) + Z\omega(X, Y) - \omega([X, Y], Z) - \omega([Y, Z], X) - \omega([Z, X], Y)\}, \text{ para } X, Y, Z \in \mathfrak{q}.$$

Como la derivada direccional de  $X(\omega(Y, Z))$  es dada por  $\frac{d}{dt}(Ad(e^{tX})Y, Ad(e^{tX})Z)_{t=0}$  y esta derivada es  $\Omega([X, Y], Z) + \Omega(Y, [X, Z])$  entonces tenemos

$$\begin{aligned} d\omega(X, Y, Z) &= 3\{\omega([X, Y], Z) + \omega(Y, [X, Z]) + \omega([Y, Z], X) + \omega(Z, [Y, X]) + \omega([Z, X], Y) + \\ &\quad \omega(X, [Z, Y]) - \omega([X, Y], Z) - \omega(Z, [Y, X]) - \omega([Z, X], Y)\} \\ &= 3\{\omega(Y, [X, Z]) + \omega(Z, [Y, X]) + \omega(X, [Z, Y])\} \\ &= 3\{-\omega([X, Z], Y) + \omega([X, Y], Z) + \omega([Y, Z], X)\}. \end{aligned}$$

Contextualizando lo anterior al caso de la forma de Kähler en una variedad bandera tenemos:

**Proposición 1.22.** *Sea  $\alpha, \beta, \gamma \in \Pi$  y  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ , entonces  $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$ . En caso contrario, si  $\alpha + \beta + \gamma = 0$ , entonces*

$$d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -3im_{\alpha, \beta}(\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma).$$

*Demostración.*

$$\begin{aligned}
d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= 3\{\Omega([X_\alpha, X_\beta], X_\gamma) - \Omega([X_\alpha, X_\gamma], X_\beta) + \Omega([X_\beta, X_\gamma], X_\alpha)\} \\
&= 3\{\Omega(m_{\alpha,\beta}X_{\alpha+\beta}, X_\gamma) - \Omega(m_{\alpha,\gamma}X_{\alpha+\gamma}, X_\beta) + \Omega(m_{\beta,\gamma}X_{\beta+\gamma}, X_\alpha)\} \\
&= 3\{-m_{\alpha,\beta}i\lambda_{\alpha+\beta}\varepsilon_\gamma\langle X_{\alpha+\beta}, X_\gamma \rangle + m_{\alpha,\gamma}i\lambda_{\alpha+\gamma}\varepsilon_\beta\langle X_{\alpha+\gamma}, X_\beta \rangle - \\
&\quad m_{\beta,\gamma}i\lambda_{\beta+\gamma}\varepsilon_\alpha\langle X_{\beta+\gamma}, X_\alpha \rangle\}.
\end{aligned}$$

Como  $\langle X_\eta, X_\theta \rangle = 0$  si  $\eta + \theta \neq 0$  se tiene que  $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$  si  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$ . Cuando  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  se cumple que  $m_{\alpha,\beta} = m_{\gamma,\alpha}$ , también  $m_{\alpha,\gamma} = -m_{\alpha,\beta}$  entonces

$$\begin{aligned}
d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) &= 3\{-im_{\alpha,\beta}\lambda_{-\gamma}\varepsilon_\gamma\langle X_{-\gamma}, X_\gamma \rangle - im_{\alpha,\beta}\lambda_{-\beta}\varepsilon_\beta\langle X_{-\beta}, X_\beta \rangle - im_{\alpha,\beta}\lambda_{-\alpha}\varepsilon_\alpha\langle X_{-\alpha}, X_\alpha \rangle\} \\
&= -3im_{\alpha,\beta}(\varepsilon_\alpha\lambda_\alpha + \varepsilon_\beta\lambda_\beta + \varepsilon_\gamma\lambda_\gamma).
\end{aligned}$$

Llegando a la igualdad deseada. □

**Definición 1.23.** Sea  $J = \{\varepsilon_\alpha\}$  una *ecc*. Una tripla de raíces  $\alpha, \beta, \gamma$  tal que  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  es llamada

1. Una  $\{0, 3\}$ -tripla si  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$  y
2. Una  $\{1, 2\}$ -tripla en los otros casos.

## 1.8. Variedad Bandera (1, 2)-Simpléctica

Una variedad bandera casi compleja  $(\mathbb{F}, J, \Lambda, \Omega)$  es llamada (1, 2)-simpléctica o casi Kähler si,

$$d\Omega(X, Y, Z) = 0, \quad X, Y, Z \in T_p\mathbb{F}, \quad p \in \mathbb{F},$$

cuando uno de los tres vectores es del tipo (1, 0) y los otros dos son del tipo (0, 1) o viceversa. Un vector es llamado de tipo (1, 0) (recíprocamente (0, 1)) si el autovalor asociado a la estructura  $J$  es 1 (respectivamente  $-1$ ).

Cada vez que nos vayamos a referir a  $(\mathbb{F}, J, \Lambda)$  con  $J$  una estructura casi-compleja invariante y  $\Lambda$  una métrica invariante utilizaremos, por abuso de notación, el par invariante  $(J, \Lambda)$ .

**Proposición 1.24.** *El par invariante  $(J = \{\varepsilon_\alpha\}, \Lambda = \{\lambda_\alpha\})$  es  $(1, 2)$ -simplético si y solamente si*

$$\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma = 0,$$

para toda tripla  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$ .

*Demostración.*  $\Rightarrow$  Supongamos que el par invariante es  $(1, 2)$ -simplético. Dada una  $\{1, 2\}$ -tripla  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  y la fórmula para la derivada de la forma de Kähler, por hipótesis tendríamos

$$0 = d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -3im_{\alpha, \beta}(\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma),$$

de donde

$$\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma = 0.$$

Si un vector es de tipo  $(0, 1)$  y los otros dos de tipo  $(1, 0)$  no se puede usar directamente la hipótesis. Mas en este caso  $\{-\alpha, -\beta, -\gamma\}$  es una  $\{1, 2\}$ -tripla con un vector de tipo  $(1, 0)$  y otros dos de tipo  $(0, 1)$ . Luego

$$d\Omega(X_{-\alpha}, X_{-\beta}, X_{-\gamma}) = -3im_{-\alpha, -\beta}(\varepsilon_{-\alpha} \lambda_{-\alpha} + \varepsilon_{-\beta} \lambda_{-\beta} + \varepsilon_{-\gamma} \lambda_{-\gamma}),$$

y por lo tanto

$$0 = \varepsilon_{-\alpha} \lambda_{-\alpha} + \varepsilon_{-\beta} \lambda_{-\beta} + \varepsilon_{-\gamma} \lambda_{-\gamma} = -(\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma).$$

$\Leftarrow$  Sabemos que si  $\alpha + \beta + \gamma \neq 0$  entonces  $d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = 0$ . Ahora si  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  y  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  es en particular una  $\{1, 2\}$ -tripla, es claro que utilizando la hipótesis tenemos que

$$d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -3im_{\alpha, \beta}(\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma) = 0.$$

Por lo tanto será un par invariante  $(1, 2)$ -simplético. □

Si una *ecci* es casi Kähler entonces no pueden existir  $\{0, 3\}$ -triplas, esto es debido a que por ser casi Kähler

$$d\Omega(X_\alpha, X_\beta, X_\gamma) = -3im_{\alpha, \beta}(\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma) = 0,$$

de donde

$$\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma = 0,$$

y si  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  fuera una  $\{0, 3\}$ -tripla los signos de  $\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma$  serían iguales, lo cual imposibilitaría que  $\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma$ , fuera igual a cero.

**Definición 1.25.** Se dice que una estructura  $J$  sobre  $\mathbb{F}(n)$  es integrable si la variedad  $(\mathbb{F}(n), J)$  es una variedad compleja, esto es, admite un sistema de coordenadas locales complejas.

Una condición equivalente a la anterior definición es la famosa ecuación de Newlander - Nirenberg

$$[JX, JY] = J[X, JY] + J[JX, Y] + [X, Y],$$

para cualquier  $X, Y$  campos vectoriales sobre  $\mathbb{F}(n)$ .

**Observación:** Sea  $(\mathbb{F}, J, \Lambda, \Omega)$  una variedad hermítica diferenciable, donde  $J$  es una estructura casi-compleja y  $\Omega$  es la forma Kähler asociada a la métrica invariante hermítica  $\Lambda$ . Se dice que  $\mathbb{F}$  es casi Kähler si la forma de Kähler  $\Omega$  es cerrada, esto es si  $d\Omega = 0$ . Si además  $J$  es integrable, se dice que  $\mathbb{F}$  es una variedad Kähler.

**Proposición 1.26.** Si un par invariante  $(J, \Lambda)$  es casi Kähler entonces  $P = \{\alpha / \varepsilon_\alpha = +1\}$  es una escogencia de raíces positivas con relación a algún orden lexicográfico en  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}^*$ .

*Demostración.* Debemos demostrar que si  $\alpha, \beta \in P$  y  $\alpha + \beta$  es una raíz entonces  $\alpha + \beta \in P$ . Supongamos que  $\alpha + \beta$  es una raíz. Si  $\varepsilon_{\alpha+\beta} = -1$  entonces como  $\alpha + \beta - (\alpha + \beta) = 0$ , dado que  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta$  y  $\varepsilon_{-(\alpha+\beta)} = -\varepsilon_{\alpha+\beta} = +1$ , tenemos que  $\{\alpha, \beta, -(\alpha + \beta)\}$  es una  $\{0, 3\}$ -tripla lo que contradice la hipótesis de ser casi Kähler. Además  $\Pi = P \cup (-P)$  donde  $-P = \{\alpha / \varepsilon_\alpha = -1\}$  lo cual hace que  $P$  sea una escogencia de raíces positivas.  $\square$

**Proposición 1.27.** Si el par invariante  $(J, \Lambda)$  es casi Kähler entonces  $J$  es integrable.

*Demostración.* Por la Proposición 1.21,  $P = \{\alpha / \varepsilon_\alpha = +1\}$  es una escogencia de raíces positivas. Además  $J = \{\varepsilon_\alpha\}_{\alpha \in \Pi}$  donde  $\varepsilon_\alpha = +1$ , si  $\alpha > 0$ . Dados  $\alpha, \beta \in \Pi$  tenemos que:

$$\begin{aligned} [JX_\alpha, JX_\beta] &= [i\varepsilon_\alpha X_\alpha, i\varepsilon_\beta X_\beta] \\ &= -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta [X_\alpha, X_\beta] \\ &= -\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta}. \end{aligned}$$

Además,

$$\begin{aligned} J[X_\alpha, JX_\beta] + J[JX_\alpha, X_\beta] + [X_\alpha, X_\beta] &= J[X_\alpha, i\varepsilon_\beta X_\beta] + J[i\varepsilon_\alpha X_\alpha, X_\beta] + [X_\alpha, X_\beta] \\ &= i\varepsilon_\beta J[X_\alpha, X_\beta] + i\varepsilon_\alpha J[X_\alpha, X_\beta] + [X_\alpha, X_\beta] \\ &= i\varepsilon_\beta Jm_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} + i\varepsilon_\alpha Jm_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} + m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} \\ &= i\varepsilon_\beta Jm_{\alpha, \beta} \varepsilon_{\alpha+\beta} X_{\alpha+\beta} - i\varepsilon_\alpha Jm_{\alpha, \beta} \varepsilon_{\alpha+\beta} X_{\alpha+\beta} + m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} \\ &= m_{\alpha, \beta} X_{\alpha+\beta} (-\varepsilon_\beta \varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha+\beta} + 1). \end{aligned}$$

Debemos mostrar que

$$-\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta} = m_{\alpha,\beta} X_{\alpha+\beta} (1 - \varepsilon_\beta \varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha+\beta}).$$

lo cual es lo mismo que demostrar que

$$-\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = 1 - \varepsilon_\beta \varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha+\beta}.$$

De hecho si  $\alpha + \beta$  es una raíz, como no existen  $\{0, 3\}$ -tripla para  $J$  pues es casi Kähler, entonces las posibilidades de signos para  $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_{-(\alpha+\beta)})$  son:

$$(+, +, -) \quad (-, -, +) \quad (+, -, +) \quad (-, +, +) \quad (+, -, -) \quad (-, +, -).$$

De los dos primeros casos  $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = 1$  y  $1 - \varepsilon_\beta \varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha+\beta} = -1$ , de donde

$$-\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = 1 - \varepsilon_\beta \varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha+\beta}.$$

De los otros casos  $\varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta = -1$  y  $1 - \varepsilon_\beta \varepsilon_{\alpha+\beta} - \varepsilon_\alpha \varepsilon_{\alpha+\beta} = 1$  y la igualdad se verifica una vez más. Por lo tanto  $J$  es integrable.  $\square$

Es conocido que en toda variedad ser casi Kähler no implica ser Kähler y viceversa, sin embargo esto si se cumple en variedades bandera, como lo es tratado en la siguiente proposición.

**Proposición 1.28.**  $(J, \Lambda)$  es casi Kähler si y solo si  $(J, \Lambda)$  es Kähler.

*Demostración.*  $\Rightarrow$  Si  $(J, \Lambda)$  es casi Kähler entonces es integrable ( Proposición 1.27) y por lo tanto  $(J, \Lambda)$  es Kähler.

$\Leftarrow$  Es directa de la definición.  $\square$

**Definición 1.29.** Se dice que  $\Lambda$  es  $(1, 2)$ -simpléctica con respecto a  $J$  si el par invariante  $(J, \Lambda)$  es  $(1, 2)$ -simplético. También,  $J$  se dice  $(1, 2)$ -admisibile si existe  $\Lambda$  tal que el par invariante  $(J, \Lambda)$  es  $(1, 2)$ -simplético.

## Capítulo 2

# Estructura casi compleja invariante afín

El objetivo de este capítulo consiste en demostrar que si en la variedad bandera se considera una estructura casi compleja afín  $J = J(A)$ , donde  $A$  es una alcoba, entonces la variedad bandera es  $(1, 2)$ -admisibile. Para poder entender la demostración de esta proposición es necesario realizar un estudio previo sobre cámaras de Weyl, grupos de Weyl afines y alcobas, el cual está basado en [6], [11] y [13].

### 2.1. Cámaras de Weyl

Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$ . Dado un elemento no nulo  $\alpha \in E$ , una reflexión en relación a  $\alpha$  es una transformación lineal  $r : E \rightarrow E$  que satisface

1.  $r(\alpha) = -\alpha$
2. El conjunto  $F_r = \{\beta \in E : r(\beta) = \beta\}$  de los puntos fijos de  $s$  es un hiperplano de  $E$ .

**Definición 2.1.** Sea  $E$  un espacio vectorial de dimensión finita sobre  $\mathbb{R}$ , un subconjunto  $\Pi$  de  $E$  es llamado un sistema de raíces de  $E$  si satisface los siguientes axiomas:

1.  $\Pi$  es un conjunto finito de vectores no nulos que generan a  $E$ .
2. Para todo  $\alpha \in \Pi$ , existe una reflexión  $r_\alpha$  en relación a  $\alpha$  tal que  $r_\alpha(\Pi) = \Pi$ .
3. Para todo  $\alpha, \beta \in \Pi$ ,  $r_\alpha(\beta) - \beta$  es múltiplo entero de  $\alpha$ .

Sea  $\Pi$  un sistema de raíces en  $E$ . Denote por  $W$  el grupo generado por las reflexiones  $r_\alpha$ ,  $\alpha \in \Pi$ .  $W$  es llamado el grupo de Weyl de  $\Pi$ .

Sea  $\Pi \subset E$  un sistema de raíces. El conjunto

$$\bar{E} = \{\beta \in E : \langle \alpha, \beta \rangle \neq 0\}$$

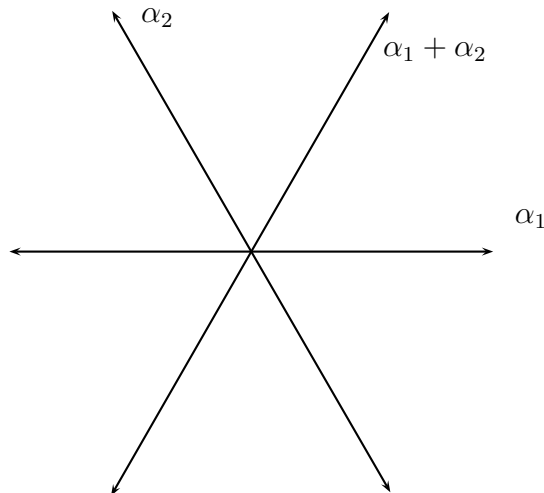
es llamado el conjunto de elementos regulares de  $E$ . Una Cámara de Weyl es una componente conexa del conjunto de los elementos regulares de  $E$ .

**Ejemplo 2.2.** En el caso en que  $E$  es de dimensión 1, las cámaras de Weyl están dadas por dos semirectas complementarias al origen. En este caso los únicos sistemas de raíces posibles son el reducido  $\{\pm\alpha\}$  y el no reducido  $\{\pm\alpha, \pm 2\alpha\}$ .



**Ejemplo 2.3.** Las cámaras de Weyl de  $A_2$ .

En  $A_2$  las raíces positivas, según lo explicado en el capítulo 1, son  $\pm\alpha_1, \pm\alpha_2$  y  $\pm(\alpha_1 + \alpha_2)$  y el ángulo entre ellas es un múltiplo de  $60^\circ$ . Por lo tanto  $A_2$  tiene 6 cámaras.



**Proposición 2.4.**

a). Sea  $C$  una cámara de Weyl y defina

$$\Pi^+(C) = \{\alpha \in \Pi : \langle \alpha, \beta \rangle > 0, \forall \beta \in C\}$$

entonces existe un orden lexicográfico tal que  $\Pi^+(C)$  es el conjunto de las raíces positivas asociadas a ese orden.

b). Sea  $\Sigma(C)$  un conjunto de raíces simples en  $\Pi^+(C)$  entonces

$$C = \{\beta \in E : \langle \beta, \alpha \rangle > 0, \forall \alpha \in \Sigma(C)\}.$$

c). Sea  $C_1, C_2$  cámaras de Weyl. Entonces

$$\Sigma(C_1) = \Sigma(C_2) \iff C_1 = C_2.$$

*Demostración.*

a). Sea  $\{\gamma_1, \dots, \gamma_l\}$  una base ordenada de  $E$  y sea  $\gamma_l \in C$ . En relación con el orden lexicográfico definido por esa base el conjunto de raíces positivas es  $\Pi^+(C)$ . Si  $\alpha \in \Pi^+(C)$  entonces

$$\alpha = \langle \alpha, \gamma_1 \rangle \gamma_1 + \dots + \langle \alpha, \gamma_l \rangle \gamma_l,$$

donde  $\langle \alpha, \gamma_l \rangle > 0$  pues  $\gamma_l \in C$ . Por lo tanto  $\alpha$  es positiva en relación a ese orden lexicográfico.

Recíprocamente, sea  $\alpha$  una raíz positiva, escribiendo  $\alpha$  como

$$\alpha = \langle \alpha, \gamma_1 \rangle \gamma_1 + \dots + \langle \alpha, \gamma_l \rangle \gamma_l,$$

con  $\langle \alpha, \gamma_l \rangle \neq 0$  pues  $\gamma_l$  es elemento regular. Como  $\langle \alpha, \gamma_1 \rangle$  es el primer coeficiente no nulo de la descomposición de  $\alpha$ ,  $\langle \alpha, \gamma_1 \rangle > 0$ , supongamos por absurdo que existe  $\beta \in C$  tal que  $\langle \alpha, \beta \rangle < 0$ , entonces la función dada por  $\langle \alpha, t\gamma_1 + (1-t)\beta \rangle$  sería menor que 0 si  $t = 0$  y mayor que 0 si  $t = 1$ , luego se anula en  $t \in [0, 1]$ , lo que es absurdo pues  $t\gamma_1 + (1-t)\beta$  está en  $C$  y es por tanto formado por elementos regulares. De donde si  $\langle \alpha, \gamma_l \rangle > 0$  entonces  $\alpha \in \Pi^+(C)$ .

b). Sea  $\beta \in C$  y  $\alpha \in \Sigma(C)$ , ya que  $\Sigma(C) \subseteq \Pi^+(C)$ , entonces  $\alpha \in \Pi^+(C)$ , de donde por definición de  $\Pi^+(C)$  se tiene que  $\langle \beta, \alpha \rangle > 0$ .

Recíprocamente suponga que  $\langle \beta, \alpha \rangle > 0$  para toda raíz simple  $\alpha$  entonces  $\langle \beta, \gamma \rangle > 0, \forall \gamma \in \Pi^+(C)$ , pues esas raíces son combinaciones de elementos positivos de las raíces simples.

Como  $\Pi = \Pi^+ \cup \{-\Pi^+\}$ ,  $\beta$  es elemento regular y por lo tanto pertenece a alguna cámara de Weyl. Tomando  $\beta' \in C$  y sea  $t\beta_1 + (1-t)\beta'$ ,  $t \in [0, 1)$ , el segmento que lo une a  $\beta$ . Para todo  $t \in [0, 1]$

$$\langle \gamma, t\beta_1 + (1-t)\beta' \rangle > 0,$$

para toda raíz positiva  $\gamma$ . Por lo tanto ese segmento está contenido en  $\overline{E}$  y de ahí que  $\beta$  y  $\beta'$  pertenezcan a la misma componente conexa del conjunto de los elemento regulares de donde  $\beta \in C$ .

c). Esta demostración es inmediata de b). □

Una cámara de Weyl define de forma natural un sistema simple de raíces y viceversa. Sea

$$C_\Sigma = \{\beta \in E : \langle \beta, \alpha \rangle > 0, \forall \alpha \in \Sigma\},$$

una cámara de Weyl.

$C_\Sigma$  es un cono convexo contenido en el conjunto de los elementos regulares y por lo tanto existe una cámara de Weyl que lo contiene. Tomando  $C_\Sigma$  y  $C'$  conos. Si  $C_\Sigma \subset C'$  entonces, existe algún elemento de su frontera que está contenido en  $C'$ , por lo tanto existe un  $\beta$  tal que  $\langle \beta, \alpha \rangle = 0$  para alguna raíz simple  $\alpha$  y por lo tanto  $\beta$  no es elemento regular de donde  $C_\Sigma = C'$  es una cámara de Weyl.

Recordemos que al grupo de Weyl de un sistema de raíces  $\Pi$  como el grupo generado por las reflexiones  $r_\alpha, \alpha \in \Pi$ . El grupo de Weyl es finito debido a que  $\Pi$  es finito y deja el sistema de raíces invariante. Si  $w \in W$  entonces  $w(\Sigma) \subset \Pi$  es una base de  $E$  y

$$\Pi = w(\Pi^+) \cup w(-\Pi^+),$$

además los elementos de  $w(\Pi^+)$  se escriben como combinación lineal de  $w(\Sigma)$  con coeficientes enteros positivos.

En las cámaras de Weyl  $w(\beta)$  no es elemento regular si  $\beta$  no lo es, pues si  $\beta$  es no regular  $\langle \alpha, \beta \rangle = 0$  para alguna raíz  $\alpha$  y como el producto interno es invariante  $\langle w(\alpha), w(\beta) \rangle = 0$ , mostrando que  $w(\beta)$  no es regular, pues  $w(\alpha)$  es raíz. De esta forma  $w$  deja invariante al conjunto de elementos no regulares y por lo tanto al complemento de  $\overline{E}$ .

Como  $w$  es continua y  $w(C)$  es conexo entonces  $w(C) \subset C'$ ,  $C'$  una cámara de Weyl. De forma simétrica  $w^{-1}(C') \subset C$  de donde  $C' \subset w(C)$  por lo tanto  $w(C) = C'$  y de esta manera el grupo de Weyl también es un conjunto de cámaras de Weyl.

Ahora se van a considerar el conjunto de alcobas o equivalentemente el grupo de Weyl afín asociado con el sistema de raíces  $\Pi$ .

## 2.2. Alcobas

Sea  $\Pi$  un sistema reducido de raíces, que es aquel cuyos únicos múltiplos de  $\alpha \in \Pi$  que son raíces son  $\alpha$  y  $-\alpha$ . Sea  $E$  el espacio euclidiano determinado por  $\Pi$  con un producto interno definido positivo  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  tal que  $|\alpha|^2 = \langle \alpha, \alpha \rangle = 1$  para cualquier raíz corta  $\alpha$  de  $\Pi$ . Escojamos un sistema de raíces simple  $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_l\}$  de  $\Pi$ . Entonces  $\Pi^+$  y  $\Pi^-$  son los sistemas positivo y negativo de raíces respectivamente. Definamos los pesos fundamentales  $\lambda_1, \dots, \lambda_l$  por  $\langle \lambda_i, \alpha_j^\vee \rangle = \delta_{ij}$  (delta de Kronecker), donde para algún  $\alpha \in \Pi$ ,  $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$  es llamada la co-raíz de  $\alpha$ . Sea  $-\alpha_0$  la más alta de las raíces cortas de  $\Pi$ . Entonces el conjunto  $\{\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_l\}$  tiene la propiedad de que  $\langle \alpha_i, \alpha_j^\vee \rangle$  consiste de enteros no positivos para todo par  $i, j$  en  $\{0, 1, \dots, l\}$ , con  $i \neq j$ . El conjunto  $\Pi^\vee = \{\alpha^\vee / \alpha \in \Pi\}$  de co-raíces es un sistema simple de raíces tal que el conjunto  $\{\alpha_1^\vee, \dots, \alpha_l^\vee\}$  provee una escogencia de un sistema simple de raíces en si. La raíz  $(-\alpha_0)^\vee$  es la más alta co-raíz de  $\Pi^\vee$ .

Sea  $W$  el grupo de Weyl de  $\Pi$  generado por las reflexiones  $S_\alpha$  sobre  $E$ , donde  $S_\alpha$  es la siguiente transformación:

$$\begin{aligned} S_\alpha : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x - \langle x, \alpha^\vee \rangle. \end{aligned}$$

Denotemos por  $\mathcal{Q}$  el reticulado  $\mathbb{Z}\Pi$ . Sea  $N$  que denota el grupo de todas las traslaciones  $t_\lambda$  operando sobre  $E$  con  $\lambda \in \mathcal{Q}$ , donde:

$$\begin{aligned} t_\lambda : E &\longrightarrow E \\ x &\longmapsto x + \lambda. \end{aligned}$$

Denotaremos por  $W_a$  al grupo  $NW$  de traslaciones afines de  $E$  generado por  $N$  y  $W$ . Es bien conocido que  $W_a$  es la extensión semidirecta de  $W$  por el subgrupo normal  $N$  sobre el cual la acción  $W$  es conocida.

Para las transformaciones lineales y afines, definiremos  $s_0 = s_{\alpha_0} t_{-\alpha_0}$ ,  $s_i = s_{\alpha_i}$ ,  $1 \leq i \leq l$  y escribiremos a  $\Delta = \{s_0, s_1, \dots, s_l\}$  el grupo de generadores de  $W_a$ .  $W_a$  será llamado el grupo de Weyl afín. Cada  $w \in W_a$  puede ser escrito como producto de esos generadores. Para cada  $\alpha \in \Pi^+$ ,  $k \in \mathbb{Z}$  y un número real positivo  $m$ , se definen los hiperplanos

$$\begin{aligned} H(\alpha, k) &= H_{\alpha; k} = \{v \in E / \langle v, \alpha^\vee \rangle = k\}, \\ H_{\alpha; k}^m &= H_{-\alpha; -k}^m = \{v \in E / k < \langle v, \alpha^\vee \rangle < k + m\}. \end{aligned}$$

Llamaremos a cualquier conexo simple, no vacío, de

$$E = \bigcup_{\alpha \in \Pi^+} H_{\alpha; k}, \quad k \in \mathbb{Z}$$

una alcoba de  $E$ . Cada alcoba de  $E$  tiene la forma  $\bigcap_{\alpha \in \Pi^+} H_{\alpha; k_{\alpha}}$  para una  $\Pi^+$ -upla  $(k_{\alpha})_{\alpha \in \Pi^+}$  sobre  $\mathbb{Z}$ . Dado  $H_{-\alpha; -k_{\alpha}}^1 = H_{\alpha; -k_{\alpha}}^1$ , en algunos casos es más conveniente denotar a la alcoba  $\bigcap_{\alpha \in \Pi^+} H_{\alpha; k_{\alpha}}$  por  $\bigcap_{\alpha \in \Pi} H_{\alpha; k_{\alpha}}$  con la condición que  $k_{-\alpha} = -k_{\alpha}$  para  $\alpha \in \Pi^+$ . Más adelante daremos ejemplos sobre alcobas en  $A_2$  y  $B_2$

El grupo de Weyl afín  $W_a$  es el grupo de transformaciones afines de  $\mathfrak{h}_{\mathbb{R}}$  generado por las reflexiones ortogonales con relación a hiperplanos  $H(\alpha, k)$ ,  $\alpha \in \Pi$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . El grupo  $W_a$  deja invariante la unión de los hiperplanos  $H(\alpha, k)$ ,  $\alpha \in \Pi$  y  $k \in \mathbb{Z}$ . Sabemos que  $W_a$  es el producto generado sobre  $\mathbb{Z}$  por las co-raíces  $\Pi^{\vee} = \{\alpha^{\vee} = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}; \alpha \in \Pi\}$ . Otro grupo relevante de transformaciones afines es  $\widehat{W}_a$  que es el producto semidirecto de  $W$  por el grupo de traslaciones generadas por los elementos del reticulado

$$\widehat{L} = \{x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}}; \forall \alpha \in \Pi, \langle \alpha, x \rangle \in \mathbb{Z}\}.$$

Dada una alcoba  $A$  y una raíz  $\alpha$ , existe un entero  $k_{\alpha} = k_{\alpha}(A)$  tal que

$$k_{\alpha} < \langle x, \alpha \rangle < k_{\alpha} + 1,$$

para todo  $x \in A$ , donde  $k_{\alpha} = [\alpha(x)]$  para cada  $x \in A$ , donde  $[a]$  es el menor entero tal que  $a - [a] > 0$ . En [13] los enteros  $k_{\alpha}(A)$  son llamados las coordenadas de la alcoba  $A$ . Estos enteros  $k_{\alpha}$  deben cumplir una serie de condiciones para ser las coordenadas de una alcoba. Veamos:

**Proposición 2.5.** *Si los enteros  $k_{\alpha}$ ,  $\alpha \in \Pi$ , son las coordenadas de una alcoba, entonces*

1.  $k_{-\alpha} = -k_{\alpha} - 1$  y
2.  $k_{\gamma} = k_{\alpha} + k_{\beta}$  o  $k_{\gamma} = k_{\alpha} + k_{\beta} + 1$  si  $\gamma = \alpha + \beta$ .

*Demostración.*

1. Sabemos que  $k_{\alpha} < \langle x, \alpha \rangle < k_{\alpha} + 1$ , lo cual es equivalente a tener  $-k_{\alpha} - 1 < \langle x, -\alpha \rangle < -k_{\alpha}$  que es igual a  $-k_{\alpha} - 1 < \langle x, -\alpha \rangle < (-k_{\alpha} - 1) + 1$ , por la definición de coordenadas de una alcoba tendríamos que  $k_{-\alpha} = -k_{\alpha} - 1$ .

2. Por definición de coordenadas  $k_\alpha < \langle x, \alpha \rangle < k_\alpha + 1$  y  $k_\beta < \langle x, \beta \rangle < k_\beta + 1$  de donde  $k_\alpha + k_\beta < \langle x, \alpha + \beta \rangle < k_\alpha + k_\beta + 2$ , si  $\alpha + \beta = \gamma$  entonces  $k_\alpha + k_\beta = k_\gamma$  o  $k_\alpha + k_\beta \neq k_\gamma$ . Si  $k_\alpha + k_\beta \neq k_\gamma$  entonces  $k_\gamma > k_\alpha + k_\beta$  pues si  $k_\gamma < k_\alpha + k_\beta$  entonces  $k_\gamma + 1 < k_\alpha + k_\beta$  y  $\langle x, \gamma \rangle \leq k_{\gamma+1} \leq k_\alpha + k_\beta$  y sería una contradicción. Ahora  $k_\gamma < k_\alpha + k_\beta + 2$  pues si  $k_\gamma \geq k_\alpha + k_\beta + 2$  entonces  $k_\alpha + k_\beta + 2 \leq k_\gamma < \langle x, \gamma \rangle$  lo cual es una contradicción, por lo tanto si  $k_\alpha + k_\beta \neq k_\gamma$  entonces  $k_\gamma = k_\alpha + k_\beta + 1$ .  $\square$

**Proposición 2.6.** *Supongamos que  $A_k = \bigcap_{\alpha \in \Pi^+} H_\alpha$ ;  $k_\alpha$  es una alcoba de  $E$  con  $k_\alpha \in \mathbb{Z}$ . Entonces para cualquier  $\alpha, \beta \in \Pi^+$  tenemos:*

$$|\alpha|^2 k_\alpha + |\beta|^2 k_\beta + 1 \leq |\alpha + \beta|^2 (k_{\alpha+\beta} + 1) \leq |\alpha|^2 k_\alpha + |\beta|^2 k_\beta + |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\alpha + \beta|^2 - 1.$$

*Demostración.* Si  $v \in A_k$  entonces  $k_\alpha < \langle v, \alpha^\vee \rangle < k_\alpha + 1$ ,  $k_\beta < \langle v, \beta^\vee \rangle < k_\beta + 1$  y  $k_{\alpha+\beta} < \langle v, (\alpha + \beta)^\vee \rangle < k_{\alpha+\beta} + 1$  como  $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$  entonces

$$\begin{aligned} |\alpha|^2 k_\alpha &< 2\langle v, \alpha \rangle < |\alpha|^2 k_\alpha + |\alpha|^2 \\ |\beta|^2 k_\beta &< 2\langle v, \beta \rangle < |\beta|^2 k_\beta + |\beta|^2 \end{aligned}$$

y

$$|\alpha + \beta|^2 k_{\alpha+\beta} < 2\langle v, \alpha + \beta \rangle < |\alpha + \beta|^2 k_{\alpha+\beta} + |\alpha + \beta|^2$$

de donde

$$|\alpha|^2 k_\alpha + |\beta|^2 k_\beta < 2\langle v, \alpha \rangle + 2\langle v, \beta \rangle < |\alpha|^2 k_\alpha + |\beta|^2 k_\beta + |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\alpha + \beta|^2$$

pero  $2\langle v, \alpha + \beta \rangle < |\alpha + \beta|^2 (k_{\alpha+\beta} + 1)$ , de aquí se puede concluir que

$$|\alpha|^2 k_\alpha + |\beta|^2 k_\beta + 1 \leq |\alpha + \beta|^2 (k_{\alpha+\beta} + 1) \leq |\alpha|^2 k_\alpha + |\beta|^2 k_\beta + |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\alpha + \beta|^2 - 1$$

$\square$

**Ejemplo 2.7.** Las alcobas correspondientes a los sistemas de raíces  $\Pi$  de tipo  $A_2$ ,  $B_2$  son como en los diagramas que mostraremos a continuación, donde cada triángulo pequeño en este diagrama representa una alcoba. Cada alcoba estará determinada por sus coordenadas. Entonces cuando  $\Pi$  tiene tipo  $A_2$ , sabemos que  $\Pi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2\}$ . Si en cada triángulo del diagrama se establece,

$$\begin{array}{ccc} & k_{\alpha_1 + \alpha_2} & \\ k_{\alpha_1} & & k_{\alpha_2} \end{array}$$

y observando la posición que tiene las raíces en el ejemplo 2,3, algunas alcobas y sus coordenadas correspondientes en  $A_2$  son:

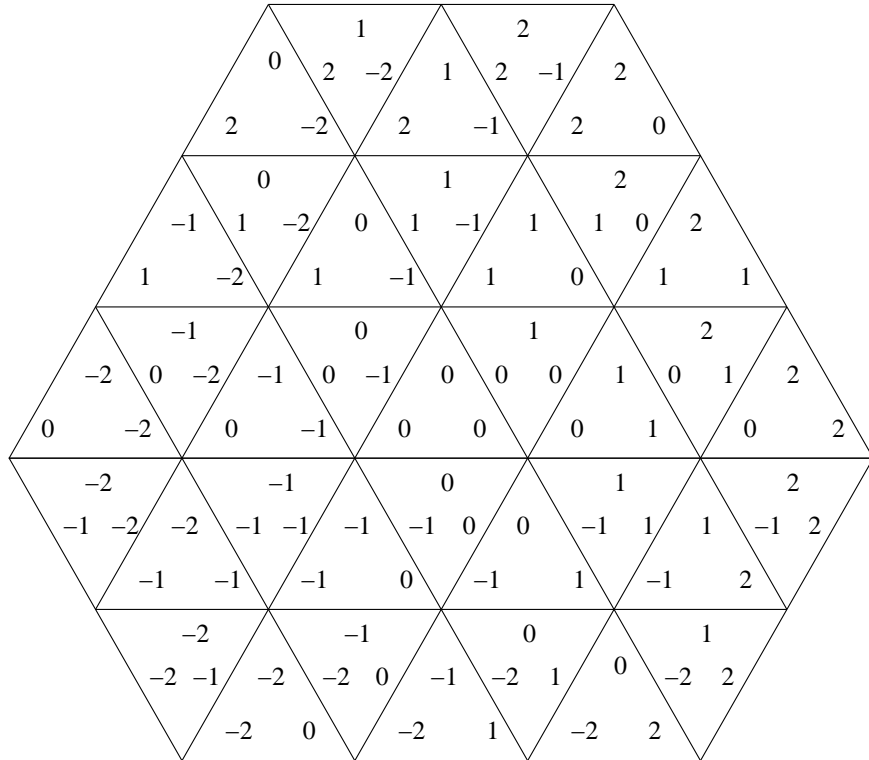


Figura 2.1: Alcobas correspondientes a  $A_2$ .

Cuando  $\Pi$  es de tipo  $B_2$ , sabemos que  $\Pi^+ = \{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2\}$  si establecemos en el diagrama la distribución de las coordenadas de la forma

$$\begin{array}{ccc}
 & & k_{\alpha_2} \\
 k_{\alpha_1 + \alpha_2} & & k_{\alpha_1} \\
 & & k_{2\alpha_1 + \alpha_2}
 \end{array}$$

Algunas alcobas y sus coordenadas correspondientes son:

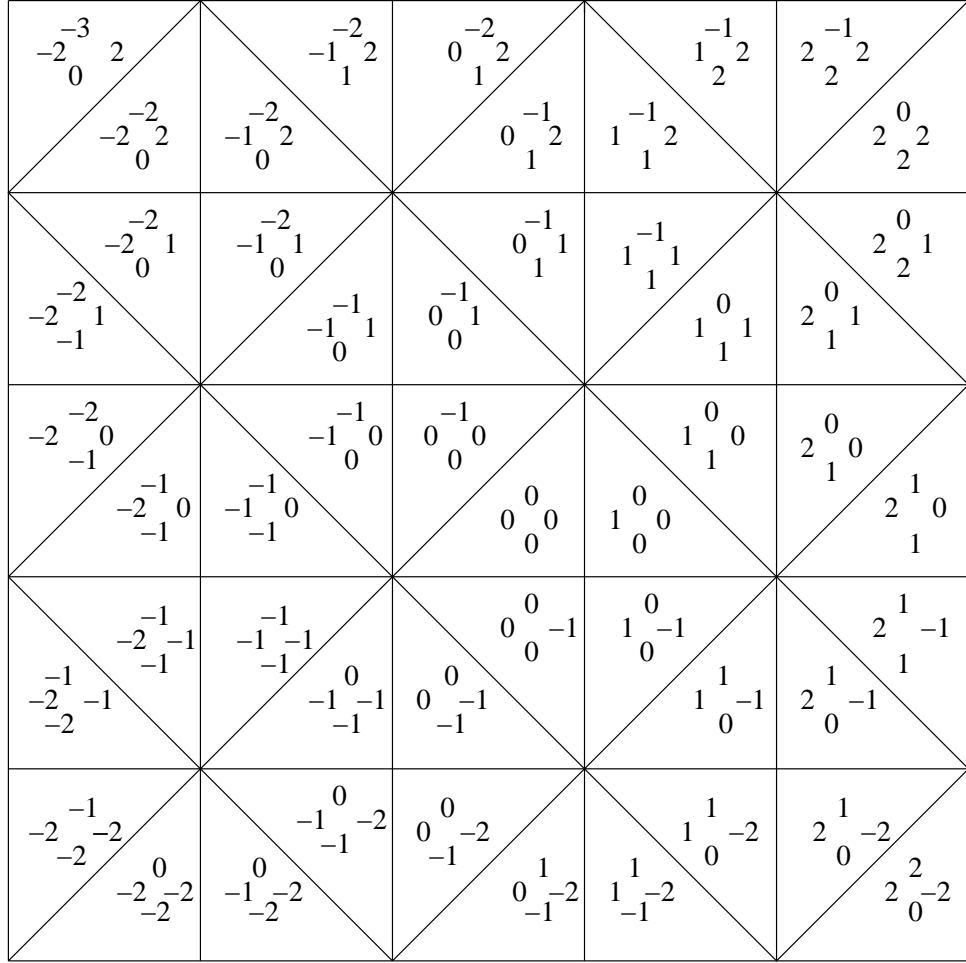


Figura 2.2: Alcobas correspondientes a  $B_2$ .

**Definición 2.8.** Dada una alcoba  $A$  con coordenadas  $k_\alpha$  la *ecci* afín  $J(A) = \{\varepsilon_\alpha(A)\}$  donde  $\varepsilon_\alpha(A) = (-1)^{k_\alpha}$ . Se dice que  $J$  es *ecci* afín si tiene la forma  $J = J(A)$  para alguna alcoba  $A$ .

$J(A)$  es de hecho una *ecci* pues

$$\varepsilon_{-\alpha}(A) = (-1)^{k_{-\alpha}} = (-1)^{-k_\alpha - 1} = -(-1)^{k_\alpha} = -\varepsilon_\alpha(A).$$

La definición de *ecci* afín tiene una interpretación geométrica. Tomando raíces positivas  $\Pi^+ \subset \Pi$  se define la alcoba básica

$$A_0 = \{x \in \mathfrak{h}_{\mathbb{R}} : \forall \alpha \in \Pi^+, 0 < \langle x, \alpha \rangle < 1\},$$

con coordenadas  $k_\alpha = 0, \alpha \in \Pi^+$ .

Dado un hiperplano  $H(\alpha, k)$ ,  $\alpha \in \Pi$  y  $k \in \mathbb{Z}$ , cada alcoba  $A$  esta en uno de los dos semi-espacios definidos por  $H(\alpha, k)$ . Decimos que  $H(\alpha, k)$  separa las alcobas  $A$  y  $B$  si estas alcobas están en diferentes semi-espacios relativos a  $H(\alpha, k)$ .

Si  $A_0$  y  $A$  son alcobas y  $\alpha \in \Pi^+$ , denotamos por  $q_\alpha(A)$  el número de hiperplanos de la forma  $H(\alpha, k)$  separando a  $A$  de  $A_0$ . Como  $\alpha > 0$ ,  $q_\alpha(A) = |k_\alpha(A)|$ , luego  $(-1)^{k_\alpha(A)} = (-1)^{q_\alpha(A)}$  y por lo tanto el número de hiperplanos separando a  $A$  de  $A_0$  determinan a  $J(A)$ .

**Proposición 2.9.** *La aplicación  $A \rightarrow J(A)$  es equivariante por la acción del grupo de Weyl  $W$ , esto es  $J(wA) = wJ(A)$ ,  $w \in W$ . Aquí  $wA$  es la restricción de  $W$  a la acción de  $W_\alpha$  sobre  $A$  y  $w\{\varepsilon_{-\alpha}\} = \{\varepsilon_{w^{-1}\alpha}\}$  es la acción de  $W$  sobre el conjunto de ecci definidas anteriormente.*

*Demostración.* Se debe demostrar que  $k_\alpha(wA) = k_{w^{-1}\alpha}(A)$ . De hecho  $k_\alpha(wA) < \langle wx, \alpha \rangle < k_\alpha(wA) + 1, \forall x \in A$ ,

luego

$$k_\alpha(wA) < \langle x, w^{-1}\alpha \rangle < k_\alpha(wA) + 1, \forall x \in A,$$

llegando con esto a la igualdad propuesta.

Tenemos  $J(wA) = \{\varepsilon_\alpha(wA)\} = \{(-1)^{k_\alpha(wA)}\}$  y  $wJ(A) = w\{\varepsilon_\alpha(A)\} = \varepsilon_{w^{-1}\alpha}(A)$ , de donde  $J(wA) = \varepsilon_\alpha(wA) = (-1)^{k_\alpha(wA)} = (-1)^{k_{w^{-1}\alpha}(A)} = \varepsilon_{w^{-1}\alpha}(A) = wJ(A)$ . Por lo tanto  $J(wA) = wJ(A)$ .  $\square$

Ahora si pasaremos a mostrar el teorema planteado como objetivo de este capítulo y cuya otra implicación será tratada en el próximo capítulo.

**Teorema 2.10.** *Sea  $J = J(A)$  una ecci afín, entonces  $J$  es  $(1, 2)$ -admisibile.*

*Demostración.* Debemos definir una métrica invariante  $\Lambda$  tal que el par  $(J, \Lambda)$  sea  $(1, 2)$ -simplético. Sea  $k_\alpha = k_\alpha(A)$  las coordenadas de la alcoba  $A$ . Tomemos  $x \in A$  y definamos una métrica invariante  $\Lambda = \{\lambda_\alpha\}$  de la siguiente manera:

$$\lambda_\alpha = \varepsilon_\alpha(\alpha(x) - k_\alpha) + \frac{1 - \varepsilon_\alpha}{2} = \begin{cases} \alpha(x) - k_\alpha, & \text{si } \varepsilon_\alpha = +1 \\ 1 - \alpha(x) + k_\alpha, & \text{si } \varepsilon_\alpha = -1. \end{cases} \quad (2.1)$$

Como  $k_\alpha = [\alpha(x)]$  entonces  $0 < \alpha(x) - k_\alpha < 1$  entonces  $\lambda_\alpha > 0$  para todo  $\alpha$ . Si  $\varepsilon_\alpha = 1$  entonces  $\varepsilon_{-\alpha} = -1$  y  $\lambda_{-\alpha} = 1 - (-\alpha)(x) + k_{-\alpha} = 1 + \alpha(x) - k_\alpha - 1 = \lambda_\alpha$ .

Si  $\varepsilon_\alpha = -1$  entonces  $\varepsilon_{-\alpha} = 1$  de donde  $\lambda_{-\alpha} = (-\alpha)(x) - k_{-\alpha} = -\alpha(x) + k_\alpha + 1 = \lambda_\alpha$ .

En ambos casos se aplicó que  $\varepsilon_{-\alpha} = -\varepsilon_\alpha$  y  $k_{-\alpha} = -k_\alpha - 1$ . Por lo tanto podemos deducir que  $\lambda_{-\alpha} = \lambda_\alpha$  y  $\Lambda$  es una métrica invariante bien definida.

Ahora se va a demostrar que el par  $(J, \Lambda)$  es  $(1, 2)$ -simplético. Utilizando la Proposición 1.24. Dada una  $\{1, 2\}$ -tripla  $\{\alpha, \beta, \gamma\}$  tenemos que

$$\begin{aligned} \varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma &= \varepsilon_\alpha \left( \varepsilon_\alpha (\alpha(x) - k_\alpha) + \frac{1 - \varepsilon_\alpha}{2} \right) + \varepsilon_\beta \left( \varepsilon_\beta (\beta(x) - k_\beta) + \frac{1 - \varepsilon_\beta}{2} \right) \\ &\quad + \varepsilon_\gamma \left( \varepsilon_\gamma (\gamma(x) - k_\gamma) + \frac{1 - \varepsilon_\gamma}{2} \right) \\ &= \alpha(x) - k_\alpha + \frac{\varepsilon_\alpha - 1}{2} + \beta(x) - k_\beta + \frac{\varepsilon_\beta - 1}{2} + \gamma(x) - k_\gamma + \frac{\varepsilon_\gamma - 1}{2} \\ &= \frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma - 3}{2} - (k_\alpha + k_\beta + k_\gamma), \end{aligned}$$

ya que  $\alpha + \beta + \gamma = 0$  y  $(\varepsilon_\alpha)^2 = (\varepsilon_\beta)^2 = (\varepsilon_\gamma)^2 = +1$ . Ahora  $k_{-\gamma} = k_\alpha + k_\beta$  o  $k_{-\gamma} = k_\alpha + k_\beta + 1$ . También  $k_\gamma = -(k_\alpha + k_\beta) - 1$  o  $k_\gamma = -(k_\alpha + k_\beta) - 2$  utilizando que  $k_{-\gamma} = -k_\gamma - 1$ . Esto significa que  $k_\gamma$  esta determinado por  $k_\alpha, k_\beta$  y las clases módulo 2 de  $k_\alpha, k_\beta$  y  $k_\gamma$ . Como  $J$  es afín,  $\varepsilon_\delta = (-1)^{k_\delta}$  para toda raíz  $\delta$ . Ahora  $k_\alpha + k_\beta + k_\gamma = -1$  o  $k_\alpha + k_\beta + k_\gamma = -2$ . Realizando las respectivas combinaciones para  $\alpha, \beta, \gamma$  podemos llegar a que  $\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma = 0$ , veamos:

1. Si  $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma) = (+1, +1, -1)$  entonces  $\frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma - 3}{2} = -1$  y  $k_\alpha + k_\beta + k_\gamma = -1$  pues  $k_\alpha, k_\beta$  están en la clase del 0 módulo 2 y  $k_\gamma$  en la clase del 1.
2. Si  $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma) = (+1, -1, +1)$  entonces  $\frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma - 3}{2} = -1$  y  $k_\alpha + k_\beta + k_\gamma = -1$ .
3. Si  $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma) = (+1, -1, -1)$  entonces  $\frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma - 3}{2} = -2$  y  $k_\alpha + k_\beta + k_\gamma = -2$ .
4. Si  $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma) = (-1, -1, +1)$  entonces  $\frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma - 3}{2} = -2$  y  $k_\alpha + k_\beta + k_\gamma = -2$ .
5. Si  $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma) = (-1, +1, -1)$  entonces  $\frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma - 3}{2} = -2$  y  $k_\alpha + k_\beta + k_\gamma = -2$ .
6. Si  $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_\gamma) = (-1, +1, +1)$  entonces  $\frac{\varepsilon_\alpha + \varepsilon_\beta + \varepsilon_\gamma - 3}{2} = -1$  y  $k_\alpha + k_\beta + k_\gamma = -1$ .

De donde  $\varepsilon_\alpha \lambda_\alpha + \varepsilon_\beta \lambda_\beta + \varepsilon_\gamma \lambda_\gamma = 0$  llegando a que el par  $(J, \Lambda)$  es  $(1, 2)$ -simplético y por lo tanto  $J$  es  $(1, 2)$ -admisibile.  $\square$

Para finalizar este capítulo se probará una propiedad de homomorfismos de *ecci* afín. Recordemos que el grupo  $\widehat{W}_a$  actúa transitivamente sobre el conjunto de alcobas. Por lo anterior para cada alcoba  $A$  existe un  $\lambda \in \widehat{L}$  y  $w \in W$  tal que  $A = t_\lambda w A_0$ . Aplicando  $w^{-1}$  a esta igualdad obtenemos:

$$w^{-1}A = (w^{-1}t_\lambda w)A_0.$$

Veamos que  $\widehat{L}$  es invariante por  $W$ . De hecho  $t_\lambda : \mathfrak{h}_\mathbb{R} \rightarrow \mathfrak{h}_\mathbb{R}$  es la traslación dada por  $t_\lambda(u) = u + \lambda$ , si  $u \in \mathfrak{h}_\mathbb{R}$  y  $w^{-1}t_\lambda w = t_{w^{-1}\lambda}$  dado en [7], por lo cual llegamos a que  $A = wt_{w^{-1}\lambda}A_0$ . Toda alcoba está en una  $W$ -órbita obtenida de trasladar a la alcoba básica  $A_0$  por un elemento de  $\widehat{L}$ . De hecho dada una alcoba  $A$ ,  $A \in W(t_{w^{-1}\lambda}A_0)$ , dado que  $A = wt_{w^{-1}\lambda}A_0$ , donde  $w$  y  $\lambda$  dependen de  $A$  como se definió anteriormente.

Como la aplicación  $A \mapsto J(A)$  es equivariante, tenemos que toda *ecci* afín es equivalente a una *ecci* de la forma  $J(t_\lambda A_0)$ ,  $\lambda \in \widehat{L}$ , pues si  $J = J(A)$  para alguna alcoba  $A$ , entonces  $J = J(A) = J(wt_{w^{-1}\lambda}A_0) = w(J(t_{w^{-1}\lambda}A_0))$  donde  $w$  y  $\lambda$  son obtenidos como antes y dependen de  $A$ .

**Lema 2.11.** *Sea  $\lambda \in \widehat{L}$ . Entonces las coordenadas de  $t_\lambda A_0$  son  $k_\alpha = \langle \lambda, \alpha \rangle$ , si  $\alpha > 0$  y por lo tanto,  $k_\alpha = \langle \lambda, \alpha \rangle - 1$ , si  $\alpha < 0$ .*

*Demostración.* Dado  $x \in A_0$ , tomamos  $\langle t_\lambda x, \alpha \rangle = \langle \lambda + x, \alpha \rangle = \langle \lambda, \alpha \rangle + \langle x, \alpha \rangle$ . De ahí que  $\langle \lambda, \alpha \rangle < \langle t_\lambda x, \alpha \rangle < \langle \lambda, \alpha \rangle + 1$ , si  $\alpha > 0$  pues  $0 < \langle x, \alpha \rangle < 1$ . Luego  $k_\alpha(t_\lambda A_0) = \langle \lambda, \alpha \rangle$ . Ahora si  $\alpha < 0$ ,  $-\alpha > 0$  y  $-k_\alpha - 1 = k_{-\alpha}(t_\lambda A_0) = \langle \lambda, -\alpha \rangle = -\langle \lambda, \alpha \rangle$ , por lo tanto  $k_\alpha = \langle \lambda, \alpha \rangle - 1$ .  $\square$

Si  $\alpha, \beta$  y  $\alpha + \beta$  son raíces positivas el Lema 2.11 implica que  $k_{\alpha+\beta} = \langle \lambda, \alpha + \beta \rangle = \langle \lambda, \alpha \rangle + \langle \lambda, \beta \rangle = k_\alpha + k_\beta$ . Asimismo  $J(t_\lambda A)$  se torna un homomorfismo cuando esta restringido a  $\mathfrak{n}^+ = \sum_{\alpha \in \Pi^+} \mathfrak{g}_\alpha$ . Esto es  $\varepsilon_{\alpha+\beta}(t_\lambda A_0) = (-1)^{k_{\alpha+\beta}} = (-1)^{k_\alpha} \cdot (-1)^{k_\beta} = \varepsilon_\alpha(t_\lambda A_0) \cdot \varepsilon_\beta(t_\lambda A_0)$ , si  $\alpha, \beta$  y  $\alpha + \beta \in \Pi^+$ .

**Proposición 2.12.** *Una *ecci*  $J = \{\varepsilon_\alpha\}$  es afín si y solamente si existe una escogencia de raíces positivas  $\Pi^+$  tal que  $\varepsilon_{\alpha+\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$  donde  $\alpha, \beta$  y  $\alpha + \beta \in \Pi^+$ . En otras palabras la restricción de  $J$  a  $\mathfrak{n}^+$  es un homomorfismo.*

*Demostración.*  $\Rightarrow$  Si  $J$  es afín  $J = J(A)$  para alguna alcoba  $A$  entonces  $J$  es equivalente a  $J(t_\lambda A_0)$  para algún  $\lambda \in \widehat{L}$  y por la observación hecha antes esta satisface la propiedad multiplicativa sobre raíces positivas.

$\Leftarrow$  Supongamos que exista una escogencia de raíces positivas tal que  $\varepsilon_{\alpha+\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$  si  $\alpha, \beta$  y  $\alpha + \beta \in \Pi^+$ , se quiere demostrar que  $J = J(t_\lambda A_0)$  para algún  $\lambda \in \widehat{L}$ . Debemos encontrar  $\lambda \in \widehat{L}$  tal que  $\varepsilon_\alpha = (-1)^{\langle \lambda, \alpha \rangle}$  si  $\alpha > 0$ . Como  $\varepsilon_{\alpha+\beta} = \varepsilon_\alpha \varepsilon_\beta$  para raíces positivas, es suficiente tener  $\varepsilon_{\alpha_i} = (-1)^{\langle \lambda, \alpha_i \rangle}$  donde  $\Sigma = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  es el correspondiente conjunto de raíces simples, pues toda raíz positiva es suma de raíces simples. Luego el  $\lambda$  requerido es dado por  $\lambda = \{a_1 w_1 + \dots + a_n w_n\}$  donde  $\langle w_i, \alpha_j \rangle = \delta_{ij}$ ,  $a_i = 0$ , si  $\varepsilon_{\alpha_i} = +1$  y  $a_i = 1$ , si  $\varepsilon_{\alpha_i} = -1$ . De hecho,  $(-1)^{\langle \lambda, \alpha_i \rangle} = (-1)^{a_1 \langle w_1, \alpha_1 \rangle + \dots + a_n \langle w_n, \alpha_n \rangle} = (-1)^{a_i \langle w_i, \alpha_i \rangle} = (-1)^{a_i}$ . Por lo tanto  $\varepsilon_{\alpha_i} = (-1)^{\langle \lambda, \alpha_i \rangle}$ .  $\square$

# Capítulo 3

## Las estructuras $(1, 2)$ -admisibles son afines

En el capítulo anterior asociamos a una alcoba  $A$  una *ecci* afín denotada por  $J(A)$ , también se definió en el Teorema 2.10 una métrica  $(1, 2)$ -simpléctica con relación a  $J(A)$ . En este capítulo probaremos que esta construcción cubre todas las *ecci*  $(1, 2)$ -admisibles. Partiendo de  $J$ , una *ecci*  $(1, 2)$ -admisible, vamos a encontrar una alcoba  $A$  tal que  $J = J(A)$ . La forma de  $A$  no exige utilizar una métrica, mas si que  $J$  pueda ser colocada como un ideal abeliano, por este motivo iniciaremos este capítulo definiéndolo.

Sea  $\mathfrak{g}$  un álgebra de Lie semi-simple compleja de dimensión finita y  $\mathbb{F}$  la variedad bandera maximal asociada. Denote por  $\Pi$  el conjunto de raíces de  $\mathfrak{g}$ .

**Definición 3.1.** Sea  $\Pi^+ \subset \Pi$  un sistema positivo de raíces de  $\mathfrak{g}$ . Decimos que un subconjunto  $\phi$  de  $\Pi^+$  es un ideal abeliano si verifica las siguientes condiciones:

- i). Si  $\alpha \in \phi$  y  $\beta \in \Pi^+$  son tales que  $\alpha + \beta$  es raíz, entonces  $\alpha + \beta \in \phi$ .
- ii). Si  $\alpha, \beta \in \phi$  entonces  $\alpha + \beta$  no es raíz.

La siguiente definición y teorema serán una base para que comprendamos el Teorema 3.4, objetivo principal de este capítulo.

**Definición 3.2.** Una raíz  $\alpha$  se dice  $J$ -descomponible o simplemente descomponible si existen raíces  $\beta, \gamma$  tales que  $\alpha = \beta + \gamma$  con  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$ . Una suma  $\beta + \gamma$  es una  $J$ -descomposición de  $\alpha$ . Una raíz que no es  $J$ -descomponible se dice que es  $J$ -indescomponible.

Denotemos por  $I$  al conjunto de raíces indescomponibles. La presencia de una métrica  $(1, 2)$ -simpléctica  $\Lambda$  permite un tratamiento para  $I$  análogo a la construcción de un sistema simple de raíces.

Escribiremos

$$I^+ = \{\alpha \in I / \varepsilon_\alpha = +1\},$$

tenemos que  $I = I^+ \cup I^-$  con  $I^- = -I^+ = \{\alpha \in I; \varepsilon_\alpha = -1\}$ .

**Teorema 3.3.** *Sea  $(J = \{\varepsilon_\alpha\}, \Lambda = \{\lambda_\alpha\})$  un par  $(1, 2)$ -simplético invariante y  $\Sigma$  un sistema simple de raíces  $J$ -indescromponibles contenido en  $I^+$ . Denotemos por  $\Pi^+$  el conjunto de raíces positivas con relación a  $\Sigma$ . Sea*

$$M(J, \Sigma) = \{\alpha \in \Pi^+ / \varepsilon_\alpha = -1\}$$

entonces  $M(J, \Sigma)$  es un ideal abeliano.

*Demostración.* Sea  $\alpha \in M(J, \Sigma)$  y  $\gamma \in \Sigma \subset \Pi^+$  tal que  $\alpha + \gamma$  es una raíz. Queremos probar que  $\alpha + \gamma \in M(J, \Sigma)$ . Si  $\varepsilon_{\alpha+\gamma} = +1$  entonces  $\gamma = (\alpha + \gamma) + (-\alpha)$  es una  $J$ -descomposición de  $\gamma$ , contradiciendo el hecho de que  $\gamma$  es  $J$ -indescromponible luego  $\alpha + \gamma \in M(J, \Sigma)$  y se cumple el numeral (i) de la definición de ideal abeliano, ahora si  $\alpha + \gamma \in \Sigma$  entonces  $\alpha + \gamma$  sería  $J$ -descomponible lo cual contradice la hipótesis, por lo tanto se cumple el numeral (ii).  $\square$

El teorema que trabajaremos a continuación es el objetivo principal de este capítulo.

**Teorema 3.4.** *Sea  $J = \{\varepsilon_\alpha\}$  un ecci. Fijamos un sistema simple de raíces  $\Sigma$  y supongamos que*

$$M(J, \Sigma) = \{\alpha > 0 / \varepsilon_\alpha = -1\}$$

es un ideal abeliano. Entonces existe una alcoba  $A$  tal que  $J = J(A)$ .

La demostración de este teorema es basada en los resultados presentados en [13] sobre las coordenadas de una alcoba y los tratados en este trabajo en el capítulo anterior. Estos resultados son establecidos con una normalización específica de nuestro sistema de raíces  $\Pi$ , que es visto como el conjunto de co-raíces de otro sistema de raíces.

Comencemos con un sistema de raíces  $\tilde{\Pi}$ , normalizado de tal modo que  $\langle \alpha, \alpha \rangle = 1$ , para todo  $\alpha \in \tilde{\Pi}$ , si este tiene solo ligaciones simples y de lo contrario  $\langle \alpha, \alpha \rangle = 1$  para las raíces cortas. Dada  $\alpha \in \tilde{\Pi}$  sea  $\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}$  la correspondiente co-raíz. Sabemos que el conjunto  $\tilde{\Pi}^\vee$  de co-raíces de  $\tilde{\Pi}$  es también un sistema de raíces y viceversa, todo sistema de raíces es el conjunto de co-raíces de otro sistema

$$\Pi = \tilde{\Pi}^\vee = \{\alpha^\vee = \frac{2\alpha}{\langle \alpha, \alpha \rangle}; \alpha \in \tilde{\Pi}\}.$$

Si  $\tilde{\Pi}$  tiene ligaciones simples entonces  $\Pi = 2\tilde{\Pi}$ .

Existen condiciones necesarias y suficientes para que un conjunto de enteros  $k_\alpha$  sean las coordenadas de una alcoba, una parte de ellas fueron expuestas en el capítulo anterior y la otra esta dada y demostrada en [13] mediante la siguiente proposición.

**Proposición 3.5.** *Un conjunto de enteros  $k_\alpha$ ,  $\alpha \in \tilde{\Pi}^+$ , son las coordenadas de una alcoba si y solo si para cada par de raíces  $\alpha, \beta \in \tilde{\Pi}^+$  tal que  $\alpha + \beta \in \tilde{\Pi}^+$  las siguientes desigualdades*

$$|\alpha|^2 k_\alpha + |\beta|^2 k_\beta + 1 \leq |\alpha + \beta|^2 (k_{\alpha+\beta} + 1) \leq |\alpha|^2 k_\alpha + |\beta|^2 k_\beta + |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\alpha + \beta|^2 - 1$$

*se cumplen.*

Recordemos también que en una construcción de una *ecci* afín  $J(A) = \{\varepsilon_\alpha(A)\}$  asociada a una alcoba  $A$  tenemos  $\varepsilon_\alpha = (-1)^{k_\alpha(A)}$ . De esta manera para demostrar el Teorema 3.4 es suficiente encontrar para una *ecci*  $J = \{\varepsilon_\alpha\}$  dada, un conjunto de enteros  $k_\alpha$  que satisfagan las desigualdades anteriormente dadas. Luego el Teorema 3.4 es una consecuencia de la construcción dada en la siguiente proposición.

**Proposición 3.6.** *Sea  $J = \{\varepsilon_\alpha\}$  una *ecci*,  $\Sigma$  un sistema simple de raíces fijo y  $M(J, \Sigma) = \{\alpha \in \Pi^+ / \varepsilon_\alpha = -1\}$  un ideal abeliano. Para  $\alpha > 0$  sea*

$$k_\alpha = \begin{cases} 0, & \text{si } \alpha \notin M(J, \Sigma) \text{ esto es } \varepsilon_\alpha = +1 \\ 1, & \text{si } \alpha \in M(J, \Sigma) \text{ esto es } \varepsilon_\alpha = -1 \end{cases} \quad (3.1)$$

*entonces la desigualdad*

$$|\alpha|^2 k_\alpha + |\beta|^2 k_\beta + 1 \leq |\alpha + \beta|^2 (k_{\alpha+\beta} + 1) \leq |\alpha|^2 k_\alpha + |\beta|^2 k_\beta + |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\alpha + \beta|^2 - 1$$

*se cumple para los enteros  $k_\alpha$ . Aquí estamos usando la convención de  $k_{\beta^\vee} = k_\beta, \beta \in \tilde{\Pi}$ .*

*Demostración.* La desigualdad  $|\alpha|^2 k_\alpha + |\beta|^2 k_\beta + 1 \leq |\alpha + \beta|^2 (k_{\alpha+\beta} + 1) \leq |\alpha|^2 k_\alpha + |\beta|^2 k_\beta + |\alpha|^2 + |\beta|^2 + |\alpha + \beta|^2 - 1$  es dada en términos de triplas de raíces en  $\tilde{\Pi}$ . La definición dada de los  $k_\alpha$  en esta proposición nos ayudará a escribir las desigualdades en términos de raíces en  $\Pi$ . La demostración la realizaremos en varias etapas, la primera la vamos a considerar el caso donde el diagrama de  $\tilde{\Pi}$  tiene ligaciones simples, caso  $A_l$ . Este es el caso  $\Pi = 2\tilde{\Pi}$  y ambos sistemas son isomorfos, esto implica que para  $\alpha, \beta \in \tilde{\Pi}$ ,  $\alpha + \beta \in \tilde{\Pi}$  si y solamente si  $\alpha^\vee + \beta^\vee \in \Pi$ . En este caso para cualquier tripla dicha desigualdad se reduce a

$$k_\alpha + k_\beta + 1 \leq k_{\alpha+\beta} + 1 \leq k_\alpha + k_\beta + 2.$$

Consideremos las posibilidades para  $k_\alpha$ ,  $\alpha > 0$ , definidas en (3.1) por medio de los signos de  $\varepsilon_\alpha$ . Escribiendo  $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_{\alpha+\beta}) = (\pm, \pm, \pm)$  tenemos:

1. Si los signos son  $(+, +, +)$  entonces  $k_\alpha = k_\beta = k_{\alpha+\beta} = 0$  y las desigualdades son  $1 \leq 1 \leq 2$ .
2. Si los signos son  $(+, +, -)$  entonces  $k_\alpha = k_\beta = 0$ ,  $k_{\alpha+\beta} = 1$  y las desigualdades son  $1 \leq 2 \leq 2$ .
3. Si los signos son  $(+, -, -)$  entonces  $k_\alpha = 0$ ,  $k_\beta = k_{\alpha+\beta} = 1$  y las desigualdades son  $2 \leq 2 \leq 3$ .

El caso  $(-, +, -)$  se comporta igual que el caso  $(+, -, -)$ . Los signos  $(+, -, +)$  y  $(-, +, +)$  no son considerados pues  $M(J, \Sigma)$  es un ideal abeliano y entonces contradeciríamos la primera condición de la definición.  $(-, -, -)$  y  $(-, -, +)$  tampoco pues contradicen la segunda condición de ser ideal abeliano. Esto concluye la demostración en caso de ligaciones simples.

Para el caso de ligaciones duplas los diagramas a analizar serían  $B_l, C_l$  o  $F_4$ , con cualquiera de ellos obtendríamos el mismo resultado. Tomemos un subsistema de tipo  $B_2$ , el cual tiene solo una ligación dupla, pues en  $B_l$ , con  $l > 2$  las ligaciones serán una dupla y el resto simples, caso que ya demostramos. Así mismo vamos a suponer que  $\|\alpha\|^2 = 1$  o  $\|\alpha\|^2 = 2$  si  $\alpha \in \tilde{\Pi}$ .

Cada par de desigualdades es dado por una tripla  $(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$  de raíces en  $\tilde{\Pi}$ , escribiendo  $l$  para una raíz larga y  $s$  para una corta, tenemos cuatro posibilidades:  $(s, s, s)$ ,  $(s, l, s)$ ,  $(l, l, l)$ ,  $(s, s, l)$ . El caso  $(l, l, s)$  no ocurre debido a que en un sistema de raíces la suma de dos raíces largas no puede dar una corta. El caso  $(l, s, s)$  es igual a  $(s, l, s)$  y lo trataremos más adelante. Veamos por que el caso  $(l, s, l)$  o  $(s, l, l)$  tampoco puede ocurrir.

Revisemos las raíces positivas de un sistema  $B_2$  dadas en el capítulo 1, con  $\alpha_1, \alpha_2$  raíces simples larga y corta respectivamente y la matriz de Cartan dada por:

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Las raíces positivas de  $B_2$  son  $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2\}$  donde  $\alpha_1$  y  $\alpha_1 + 2\alpha_2$  son las raíces largas y  $\alpha_2$  y  $\alpha_1 + \alpha_2$  las cortas. Cuando combinamos una raíz larga con una corta el resultado es una raíz corta  $\alpha_1 + \alpha_2$ , esto excluye el caso  $(l, s, l)$ .

Recordemos entonces que las posibilidades serían  $(s, s, s)$ ,  $(l, l, l)$ ,  $(s, l, s)$ ,  $(s, s, l)$  para triplas en  $\Pi$ . Tomando co-raíces llegamos a los casos  $(l, l, l)$ ,  $(s, s, s)$ ,  $(l, s, l)$  y  $(l, l, s)$ . En los dos

primeros casos  $\alpha^\vee + \beta^\vee = (\alpha + \beta)^\vee$  debido a que  $\alpha^\vee = 2\alpha$ ,  $\beta^\vee = 2\beta$  y  $\alpha^\vee + \beta^\vee = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)^\vee$ , pues  $\alpha, \beta$  y  $\alpha + \beta$  son de tipo  $s$ . También  $\alpha^\vee = \alpha$ ,  $\beta^\vee = \beta$  y  $(\alpha + \beta)^\vee = \alpha + \beta$  cuando son de tipo  $l$ , luego  $(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$  corresponden a la tripla de raíces  $(u, v, u + v)$  en  $\Pi$ . Los otros dos casos no corresponden a triplas en  $\Pi$ , más estas triplas las obtenemos de la siguiente manera: dada una tripla  $(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$  de tipo  $(s, l, s)$  en  $\tilde{\Pi}$  tenemos  $\alpha^\vee + 2\beta^\vee = 2\alpha + 2\beta = 2(\alpha + \beta) = (\alpha + \beta)^\vee$  y recíprocamente, la tripla  $(u, v, w)$  de tipo  $(l, s, l)$  en  $\Pi$  viene dada por una de tipo  $(s, l, s)$  en  $\tilde{\Pi}$ , si  $w = u + 2v$ . Análogamente para triplas de tipo  $(s, s, l)$  en  $\tilde{\Pi}$ , tenemos  $\frac{\alpha^\vee}{2} + \frac{\beta^\vee}{2} = \frac{2\alpha}{2} + \frac{2\beta}{2} = \alpha + \beta = (\alpha + \beta)^\vee$  y recíprocamente la tripla  $(u, v, w)$  de tipo  $(l, l, s)$  en  $\Pi$  viene de una de tipo  $(s, s, l)$  en  $\tilde{\Pi}$  si  $w = \frac{u+v}{2}$ . Teniendo ya esta correspondencia reescribiremos la Proposición (3.6) para sistemas de ligaciones duplas de la siguiente manera:

Sea  $\Pi$  un sistema de raíces de ligaciones duplas. Un conjunto de enteros  $k_\alpha, \alpha \in \Pi^+$  corresponde a las coordenadas de una alcoba si las siguientes desigualdades son satisfechas, para las correspondientes triplas de raíces en  $\Pi^+$ :

1.  $(\alpha, \beta, \alpha + \beta) = (l, l, l) = k_\alpha + k_\beta + 1 \leq k_{\alpha+\beta} + 1 \leq k_\alpha + k_\beta + 2$
2.  $(\alpha, \beta, \alpha + \beta) = (s, s, s) = 2k_\alpha + 2k_\beta + 1 \leq 2k_{\alpha+\beta} + 2 \leq 2k_\alpha + 2k_\beta + 5$
3.  $(\alpha, \beta, \alpha + \beta) = (l, s, l) = k_\alpha + 2k_\beta + 1 \leq k_{\alpha+\beta} + 1 \leq k_\alpha + 2k_\beta + 3$
4.  $(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{2}) = (l, l, s) = k_\alpha + k_\beta + 1 \leq 2k_{\frac{\alpha+\beta}{2}} + 2 \leq k_\alpha + k_\beta + 3.$

Los valores de  $k_\alpha$ , definidos en la Proposición 3.6 deben ahora satisfacer estas desigualdades. Como  $k_\alpha$  es dado por  $\varepsilon_\alpha$  escribimos las posibilidades en términos de signos. En los dos primeros casos solamente los signos  $(+, +, +)$ ,  $(+, +, -)$  y  $(+, -, -) = (-, +, -)$  aparecen. De hecho  $(-, +, +) = (+, -, +)$  contradice la primera condición de ser ideal abeliano y  $(-, -, +)$  y  $(-, -, -)$  la segunda.

Para los posibles signos tenemos,

	$(+, +, +)$	$(+, +, -)$	$(-, +, -)$
$(l, l, l)$	$1 \leq 1 \leq 2$	$1 \leq 2 \leq 2$	$2 \leq 2 \leq 3$
$(s, s, s)$	$1 \leq 2 \leq 5$	$1 \leq 4 \leq 5$	$3 \leq 4 \leq 7$

En el caso de  $\alpha, \beta, \alpha + 2\beta = (l, s, l)$ , tenemos  $\alpha, \beta \in \Pi^+$  tal que  $\alpha + 2\beta \in \Pi^+$ . Entonces  $\varepsilon_\beta = +1$ . Si  $\varepsilon_\beta = -1$  implica que  $\alpha + \beta \in M(J, \Sigma)$ , luego por la propiedad abeliana  $(\alpha + \beta) + \beta = \alpha + 2\beta$  no es una raíz lo que es una contradicción. También si  $\varepsilon_\alpha = -1$  como  $\varepsilon_\beta = +1$  para que sea un ideal abeliano  $\varepsilon_{\alpha+\beta} = -1$ . Los mismos argumentos aplicados a  $\beta$  y a  $\alpha + \beta$  nos

da  $\varepsilon_{\alpha+2\beta} = -1$ . Esto excluye los casos  $(-, +, +)$ ,  $(-, -, +)$ ,  $(-, -, -)$ ,  $(+, -, +)$ ,  $(+, -, -)$ . Solo quedan tres casos con sus correspondientes desigualdades:

1.  $(+, +, +)$ ;  $1 \leq 1 \leq 3$ ,
2.  $(+, +, -)$ ;  $1 \leq 2 \leq 3$ ,
3.  $(-, +, -)$ ;  $2 \leq 2 \leq 4$ .

El caso  $(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{2}) = (l, l, s)$ . Tomemos  $\alpha, \beta$  raíces positivas tal que  $\frac{\alpha+\beta}{2} \in \Pi^+$ . Vamos a identificar la intersección de  $\Pi$  con el subespacio generado por  $\alpha$  y  $\beta$  con el sistema de raíces  $B_2$  cuyas raíces positivas son:

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2\}$$

La identificación es hecha de forma que :  $\alpha = \alpha_1$  y  $\beta = \alpha_1 + 2\alpha_2$ , por lo tanto  $\frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha_1 + \alpha_2$ . Si  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -1$ , entonces  $\varepsilon_{\frac{\alpha+\beta}{2}} = -1$  debido a que  $\frac{\alpha+\beta}{2}$  es mayor que  $\alpha$  o  $\beta$ , dependiendo si  $\alpha_2$  es positiva o negativa en  $\Pi$ . En ambos casos  $\varepsilon_{\frac{\alpha+\beta}{2}} = +1$  contradiciendo el hecho de que  $M(J, \Sigma)$  es un ideal. Notemos que  $\varepsilon_\beta = -1$  y  $\alpha_2 > 0$  implica que  $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{\alpha+\beta}{2} \in M(J, \Sigma)$ . Si  $\varepsilon_\beta = -1$  y  $\alpha_2 < 0$  implica que  $\beta - \alpha_2 = \frac{\alpha+\beta}{2} \in M(J, \Sigma)$ , luego los signos  $(-, -, +)$  no pueden ocurrir. Por otro lado si  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = +1$  entonces  $\varepsilon_{\frac{\alpha+\beta}{2}} = +1$  debido a que si  $\alpha_2$  es negativo en  $\Pi$  como  $\frac{\alpha+\beta}{2} = \alpha_1 + \alpha_2$ , esto es,  $\frac{\alpha+\beta}{2} - \alpha_2 = \alpha_1$  entonces  $\frac{\alpha+\beta}{2} \in M(J, \Sigma)$  lo que implica que  $\beta \in M(J, \Sigma)$  que es una contradicción, luego los signos  $(+, +, -)$  no pueden darse. Veamos ahora los signos que quedan con sus respectivas desigualdades:

1.  $(+, +, +)$ ;  $1 \leq 2 \leq 3$ ,
2.  $(+, -, +)$ ;  $2 \leq 2 \leq 4$  que es igual  $(-, +, +)$ ,
3.  $(+, -, -)$ ;  $2 \leq 4 \leq 4$  que es igual  $(-, +, -)$ ,
4.  $(-, -, -)$ ;  $3 \leq 4 \leq 5$ .

De esta forma queda demostrada la proposición para diagramas de doble ligación.

Ahora consideraremos el caso  $G_2$  esto es  $\tilde{\Pi} = G_2$ , en [11] aparecen las raíces positivas que esta álgebra posee:



Si  $\varepsilon_{\alpha_1} = \varepsilon_{\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} = -1$  entonces  $\varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1$  y  $\varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1$ . Esto excluye las posibilidades:

$$\begin{array}{c} + \\ + \quad - \quad + \quad \pm . \\ + \end{array}$$

Si  $\varepsilon_{\alpha_1} = \varepsilon_{\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} = +1$  y  $\varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1$  entonces  $\varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1$  eliminando el caso:

$$\begin{array}{c} + \\ + \quad + \quad - \quad + . \\ + \end{array}$$

Finalmente si  $\varepsilon_{\alpha_1} = \varepsilon_{\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = +1$  y  $\varepsilon_{\alpha_1+2\alpha_2} = \varepsilon_{\alpha_1+3\alpha_2} = -1$  entonces  $\varepsilon_{2\alpha_1+3\alpha_2} = -1$  eliminando:

$$\begin{array}{c} + \\ + \quad - \quad - \quad + . \\ + \end{array}$$

Por lo tanto  $J_1, J_2, J_3$  y  $J_4$  presentadas anteriormente son las únicas *ecci* posibles tal que  $M(J, \Sigma)$  es abeliano.

Para el caso de ligaciones múltiples probaremos la proposición 3.6 cuando  $\tilde{\Pi}$  corresponde a  $G_2$ , verificando las desigualdades para cada una de las posibles *ecci* dadas arriba. Consideremos  $\alpha_1$  una raíz larga y  $\alpha_2$  una raíz corta donde  $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2\}$  es un sistema simple de raíces. Las posibles triplas de raíces  $(\alpha, \beta, \gamma)$  en  $\tilde{\Pi}$  para las cuales  $\alpha + \beta = \gamma$  son:

1.  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2) = (l, s, s)$  llevada a una tripla  $(s, l, l)$  en  $\Pi$ .
2.  $(\alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2) = (s, s, s)$  llevada a una tripla  $(l, l, l)$  en  $\Pi$ .
3.  $(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2) = (s, s, l)$  llevada a una tripla  $(l, l, s)$  en  $\Pi$ .
4.  $(\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2) = (s, s, l)$  llevada a una tripla  $(l, l, s)$  en  $\Pi$ .
5.  $(\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2) = (l, l, l)$  llevada a una tripla  $(s, s, s)$  en  $\Pi$ .

En  $\tilde{\Pi}$ ,  $\langle \alpha, \alpha \rangle = 1$ , si  $\alpha$  es una raíz corta. Ya que el ángulo entre  $\alpha_1$  y  $\alpha_2$  es  $\frac{5\pi}{6}$ , obtenemos que  $\langle \alpha_1, \alpha_2 \rangle = \frac{-3}{2}$ . Notemos que  $\langle \alpha_1, \alpha_1 \rangle = 1$  y  $\langle \alpha_2, \alpha_2 \rangle = 3$ . De ahí que  $\alpha_1^\vee = 2\alpha_2$  y  $\alpha_2^\vee = \frac{2}{3}\alpha_1$ ,  $(\alpha_1 + \alpha_2)^\vee = 2(\alpha_1 + \alpha_2)$ ,  $(\alpha_1 + 2\alpha_2)^\vee = 2(\alpha_1 + 2\alpha_2)$ ,  $(\alpha_1 + 3\alpha_2)^\vee = \frac{2}{3}(\alpha_1 + 3\alpha_2)$  y  $(2\alpha_1 + 3\alpha_2)^\vee = \frac{2}{3}(2\alpha_1 + 3\alpha_2)$ . Luego quedaría

$G_2 = \tilde{\Pi}$	$\Pi$	Por tamaño en $\tilde{\Pi}$
$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$	$(u, v, 3u + v)$	$(l, s, s)$
$(\alpha_1, \alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2)$	$(u, v, u + v)$	$(s, s, s)$
$(\alpha_1 + \alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2)$	$(u, v, \frac{u+v}{3})$	$(s, s, l)$
$(\alpha_2, \alpha_1 + 2\alpha_2, \alpha_1 + 3\alpha_2)$	$(u, v, \frac{u+v}{3})$	$(s, s, l)$
$(\alpha_1, \alpha_1 + 3\alpha_2, 2\alpha_1 + 3\alpha_2)$	$(u, v, u + v)$	$(l, l, l)$

Veamos por que se obtienen estos resultados. Como  $\alpha_1^\vee = \frac{2}{3}\alpha_1$  entonces  $\alpha_1 = \frac{3}{2}\alpha_1^\vee$  y  $\alpha_2^\vee = 2\alpha_2$  y  $\frac{\alpha_2^\vee}{2} = \alpha_2$ , por lo tanto  $\alpha_1 + \alpha_2 = \frac{1}{2}(3\alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee)$  de donde  $(\alpha_1 + \alpha_2)^\vee = 2(\alpha_1 + \alpha_2) = 3\alpha_1^\vee + \alpha_2^\vee$  y de esta manera se tiene  $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_1 + \alpha_2)$  en  $\tilde{\Pi}$  es equivalente a  $(u, v, 3u + v)$  en  $\Pi$ , de la misma manera se prosigue para determinar las otras triplas.

La Proposición 3.6 para  $\tilde{\Pi} = G_2$ , tendría el siguiente enunciado:

Un conjunto de enteros  $k_\alpha, \alpha \in \Pi^+$ , forma las coordenadas de una alcoba si las desigualdades se cumplen para:

1.  $(\alpha, \beta, 3\alpha + \beta) = (s, l, l) = 3k_\alpha + k_\beta + 1 \leq k_{3\alpha+\beta} + 1 \leq 3k_\alpha + k_\beta + 4.$
2.  $(\alpha, \beta, \alpha + \beta) = (l, l, l) = k_\alpha + k_\beta + 1 \leq k_{\alpha+\beta} + 1 \leq k_\alpha + k_\beta + 2.$
3.  $(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{3}) = (l, l, s) = k_\alpha + k_\beta + 1 \leq 3(k_{\frac{\alpha+\beta}{3}} + 1) \leq k_\alpha + k_\beta + 4.$
4.  $(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{3}) = (l, l, s) = k_\alpha + k_\beta + 1 \leq 3(k_{\frac{\alpha+\beta}{3}} + 1) \leq k_\alpha + k_\beta + 4.$
5.  $(\alpha, \beta, \alpha + \beta) = (s, s, s) = 3k_\alpha + 3k_\beta + 1 \leq 3(k_{\alpha+\beta} + 1) \leq 3k_\alpha + k_\beta + 8 .$

Computaremos para la tripla  $(\alpha, \beta, 3\alpha + \beta)$  las posibilidades de signos  $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_{3\alpha+\beta})$ . Si  $\varepsilon_\alpha = -1, \varepsilon_\beta = -1$  entonces  $\alpha + \beta$  y  $3\alpha + \beta$  no son raíces. Esto excluye los signos  $(-, -, \pm)$ . Si  $\varepsilon_\alpha = -1, \varepsilon_\beta = +1$  entonces  $\alpha + \beta \in M(J, \Sigma)$  y  $2\alpha + \beta$  y  $3\alpha + \beta$  no son raíces. Esto excluye los signos  $(-, +, \pm)$ . También si  $\varepsilon_\alpha = +1, \varepsilon_\beta = -1$ , entonces  $\alpha + \beta \in M(J, \Sigma)$  y  $3\alpha + \beta \in M(J, \Sigma)$ , luego las posibilidades de signos con las respectivas desigualdades son:

1.  $(+, +, +); 1 \leq 1 \leq 4,$
2.  $(+, +, -); 1 \leq 2 \leq 4,$
3.  $(+, -, -); 2 \leq 2 \leq 5.$

Para las triplas  $(\alpha, \beta, \alpha + \beta)$  correspondientes a las 2 y 5 línea de la tabla, tenemos las siguientes posibilidades  $(\varepsilon_\alpha, \varepsilon_\beta, \varepsilon_{\alpha+\beta})$ : Si  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -1$  entonces  $\alpha + \beta$  no es raíz, luego se descarta  $(-, -, \pm)$ .

Si  $\varepsilon_\alpha = -1, \varepsilon_\beta = +1$  o  $\varepsilon_\alpha = +1, \varepsilon_\beta = -1$  entonces  $\varepsilon_{\alpha+\beta} = -1$  y excluiríamos  $(+, -, +)$  y  $(-, +, +)$ .

Luego las posibilidades con sus respectivas desigualdades son:

1.  $(+, +, +)$ ;  $1 \leq 1 \leq 2$  si la tripla es de tipo  $(l, l, l)$  y  $1 \leq 3 \leq 8$  si la tripla es de tipo  $(s, s, s)$ ,
2.  $(+, +, -)$ ;  $1 \leq 2 \leq 2$  si la tripla es de tipo  $(l, l, l)$  y  $1 \leq 6 \leq 8$  si la tripla es de tipo  $(s, s, s)$ ,
3.  $(+, -, -)$ ;  $2 \leq 2 \leq 3$  si la tripla es de tipo  $(l, l, l)$  y  $4 \leq 6 \leq 11$  si la tripla es de tipo  $(s, s, s)$ ,
4.  $(-, +, -)$ ;  $2 \leq 2 \leq 3$  si la tripla es de tipo  $(l, l, l)$  y  $1 \leq 6 \leq 11$  si la tripla es de tipo  $(s, s, s)$ .

Miremos el caso  $(\alpha, \beta, \frac{\alpha+\beta}{3})$  correspondiente a los casos 3 y 4. Identificaremos la intersección de  $\Pi$  con el subespacio generado por  $\alpha$  y  $\beta$  con el sistema de raíces  $G_2$ . La identificación hecha sería  $\alpha = \alpha_1, \beta = 2\alpha_1 + 3\alpha_2$  y  $\frac{\alpha+\beta}{3} = \alpha_1 + \alpha_2$ . Mas con esa identificación si  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = +1$  y  $\varepsilon_{\frac{\alpha+\beta}{3}} = \varepsilon_{\alpha_1+\alpha_2} = +1$ , entonces las posibilidades serían:

1.  $(+, +, +)$ ;  $1 \leq 3 \leq 4$ ,
2.  $(+, -, +)$ ;  $2 \leq 3 \leq 5$ .

Con lo cual se concluye la demostración de la proposición 3.6 para el caso  $G_2$ . □

De lo demostrado en estos capítulos podemos decir que:

1. Toda *ecc* afín es  $(1, 2)$ -admisibile, de acuerdo con el Teorema 2.10.
2. Toda *ecc*  $(1, 2)$ -admisibile está en forma de ideal abeliano con relación a algún sistema simple de raíces  $\Sigma$ , de acuerdo al Teorema 3.3.
3. Toda *ecc* en forma de ideal abeliano con relación a  $\Sigma$  es afín, de acuerdo al Teorema 3.4.

# Capítulo 4

## Equivalencia de *ECCI* (1,2)-admisibles

El objetivo de este capítulo será encontrar las clases de equivalencia de las estructuras (1,2)-admisibles sobre el grupo de Weyl. En el capítulo anterior vimos que estas estructuras pueden ser colocadas en forma de ideal abeliano. Falta determinar cuando dos pares  $(J_1, \Lambda_1)$  y  $(J_2, \Lambda_2)$  que satisfacen la propiedad de ideal abeliano con relación al mismo  $\Sigma$  son equivalentes. Vamos a fijar un sistema de raíces  $\Sigma$  y verificaremos que existe un  $w \in W$  tal que  $J_2 = wJ_1$ . Teniendo eso en cuenta encontraremos una fórmula  $M(wJ, \Sigma)$  para cuando tanto  $J$  como  $wJ$  satisfacen la propiedad de ideal abeliano con relación a  $\Sigma$ .

En términos de los signos de  $\varepsilon_\alpha$ , la acción de  $W$  sobre el conjunto de *ecc* es dada por  $wJ = w\{\varepsilon_\alpha\} = \{\varepsilon_{w^{-1}\alpha}\}$ . Así mismo toda raíz  $\alpha$  es  $J$ -descomponible si y solamente si  $w\alpha$  es  $WJ$ -descomponible. De hecho si  $\alpha$  es descomponible entonces  $\alpha = \beta + \gamma$  con  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma$ ; queremos probar que  $w\alpha = \beta_1 + \gamma_1$  donde  $\delta_{w\alpha} = \delta_{\beta_1} = \delta_{\gamma_1}$  esto es  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{w^{-1}\beta_1} = \varepsilon_{w^{-1}\gamma_1}$ . Mas  $w\alpha = w\beta + w\gamma$  y  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{w^{-1}(w\alpha)} = \varepsilon_{w^{-1}(w\beta)} = \varepsilon_{w^{-1}(w\gamma)}$ , luego  $w\alpha$  es  $w$ -descomponible. Recíprocamente si  $w\alpha$  es  $w$ -descomponible entonces  $w\alpha = \beta + \gamma$  y  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_{w^{-1}(w\alpha)} = \varepsilon_{w^{-1}\beta} = \varepsilon_{w^{-1}\gamma}$ , ahí que  $\alpha = w^{-1}\beta + w^{-1}\gamma$  y  $\alpha$  es  $J$ -descomponible. De este hecho podemos concluir que  $I(wJ) = wI(J)$ .

La siguiente definición y proposición serán útiles para poder demostrar proposiciones posteriores en el capítulo.

**Definición 4.1.** Una raíz positiva  $\mu$  es máxima si para todo  $\alpha \in \Sigma$ ,  $\mu + \alpha$  no es raíz. Como  $\Pi^+$  es finito podemos tomar  $\mu$  como una raíz positiva de altura máxima.

**Proposición 4.2.** Si  $J$  satisface la propiedad de ideal abeliano con relación a  $\Sigma$ , entonces  $I^+(J) = \Sigma$  si  $M(J, \Sigma) = \emptyset$  y  $I^+(J) = \Sigma \cup \{-\mu\}$  si  $M(J, \Sigma) \neq \emptyset$ .

*Demostración.* Primero vamos a demostrar que  $I^+(J) = \Sigma$  si  $M(J, \Sigma) = \emptyset$ .

Dado  $\alpha \in I^+(J) = \{\alpha \in I; \varepsilon_\alpha = +1\}$ , si  $\alpha \in \Pi^-$  entonces  $-\alpha \in \Pi^+$  y  $\varepsilon_{-\alpha} = -1$ , implicando que  $-\alpha \in M(J, \Sigma)$  lo que es una contradicción, de donde podemos concluir que  $\alpha \in \Pi^+ \setminus M(J, \Sigma)$ .

Si  $\alpha \notin \Sigma$  entonces  $\alpha = \beta + \gamma$ , con  $\beta, \gamma > 0$ . Como  $M(J, \Sigma) = \emptyset$ ,  $\varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma = +1$  y  $\alpha = \beta + \gamma$  es una  $J$ -descomposición para  $\alpha$ , lo que contradice la hipótesis sobre  $\alpha$ , de donde  $\alpha \in \Sigma$ .

Recíprocamente dado  $\alpha \in \Sigma$ ,  $\varepsilon_\alpha = +1$  pues  $M(J, \Sigma) = \emptyset$ . Si  $\alpha \notin I^+(J)$  entonces existen raíces  $\beta, \gamma$  tal que  $\alpha = \beta + \gamma$  con  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma = +1$ . De ahí que  $-\beta, -\gamma$  son ambas raíces negativas pues de lo contrario estarían en  $M(J, \Sigma)$ , entonces  $\beta$  y  $\gamma$  son positivas y esto contradice la definición para  $\alpha$  simple.

Ahora demostremos que si  $M(J, \Sigma) \neq \emptyset$  entonces  $I^+(J) = \Sigma \cup \{\mu\}$ .

Si  $\alpha \in \Sigma$ ,  $\varepsilon_\alpha = +1$ , pues  $M(J, \Sigma) \cap \Sigma = \emptyset$  debido a que  $M(J, \Sigma) = \{\alpha \in \Pi^+; \varepsilon_\alpha = -1\}$  y  $\Sigma \subset I^+ = \{\alpha \in I; \varepsilon_\alpha = +1\}$ . Si  $\alpha \notin \Pi^+(J)$  entonces  $\alpha = \beta + \gamma$  con  $\varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = \varepsilon_\gamma = +1$ . Como  $\alpha \in \Sigma$  entonces  $\gamma$  o  $\beta$  son raíces negativas, supongamos  $\beta < 0$ , de ahí que  $-\beta > 0$ ,  $\varepsilon_{-\beta} = -1$  y  $-\beta \in M(J, \Sigma)$  de donde  $\alpha - \beta = \gamma \in M(J, \Sigma)$  y  $\varepsilon_\gamma = -1$ , lo que es una contradicción, por lo tanto  $\alpha \in I^+(J)$ . Debemos también demostrar que  $-\mu \in I^+(J)$ . Tenemos que  $\varepsilon_{-\mu} = +1$ . De hecho, como  $M(J, \Sigma) \neq \emptyset$  existe  $\alpha \in M(J, \Sigma)$  y podemos escribir  $\alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_n = \mu$ , con  $\alpha_i \in \Sigma$  y  $\beta_k = \alpha + \alpha_1 + \dots + \alpha_k$  raíz para todo  $1 \leq k \leq n$ . También  $\alpha + \alpha_1 \in M(J, \Sigma)$ . Repitiendo el argumento obtenemos que  $\mu \in M(J, \Sigma)$  o sea que  $\varepsilon_{-\mu} = +1$ . También si  $-\mu$  es descomponible  $\mu$  también lo es, en este caso  $\mu = \alpha + \beta$  y  $\varepsilon_\mu = \varepsilon_\alpha = \varepsilon_\beta = -1$ , de donde  $\alpha, \beta \in \Pi^+$  pues  $\mu$  es una raíz de altura máxima. Luego  $\alpha, \beta \in M(J, \Sigma)$  y  $\alpha + \beta = \mu$  es una raíz. Esto es una contradicción, luego  $\mu$  es  $J$ -indescomponible y por lo tanto  $-\mu \in I^+(J)$ .

Ahora,  $\Sigma$  es un sistema simple de raíces contenido en  $I^+$  entonces  $I^+ = \Sigma \cup \{-\mu\}$  debido a que si  $\alpha \in I^+$  y  $\alpha \notin \Sigma$  entonces  $\alpha - \beta$  no es una raíz para todo  $\beta \in I^+$ , luego  $\alpha - \beta$  no es una raíz para todo  $\beta \in \Sigma$ , esto implica que  $\alpha = -\mu$ .  $\square$

La siguiente proposición caracteriza los  $w \in W$  que no anulan la propiedad de ideal abeliano.

**Proposición 4.3.** *Fijado un sistema simple de raíces  $\Sigma$  sea  $\tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \{-\mu\}$ . Si los pares  $(J_1, \Lambda_1)$  y  $(J_2, \Lambda_2)$  son equivalentes y poseen una forma de ideal abeliano con relación a  $\Sigma$  entonces existe  $w \in W$  satisfaciendo  $w\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}$  tal que  $(J_2, \Lambda_2) = w(J_1, \Lambda_1)$  que satisface la propiedad de ideal abeliano con relación al mismo  $\Sigma$ .*

*Demostración.* Supongamos que los pares invariantes  $(J_2, \Lambda_2)$  y  $(J_1, \Lambda_1)$  poseen una forma de ideal abeliano con relación a  $\Sigma$  y son equivalentes, entonces existe  $w \in W$ , talque  $(J_2, \Lambda_2) = w(J_1, \Lambda_1)$ . Sea  $J_1 = \{\varepsilon_\alpha\}$  y  $J_2 = \{\delta_\alpha\}$ . Por la Proposición 4.2

$$I(J_1) = I(J_2) = (\pm\Sigma) \cup \{\pm\mu\}.$$

Por lo escrito al inicio del capítulo  $I(J_2) = I(wJ_1) = wI(J_1)$  y  $w^{-1}I(J_2) = I(J_1)$ . De ahí  $w$  y  $w^{-1}$  aplican el subconjunto  $(\pm\Sigma) \cup \{\pm\mu\}$  sobre si mismo. Queremos mostrar que  $I^+(J_1) = I^+(J_2) = \Sigma \cup \{-\mu\}$  es también invariante por  $w$  y por  $w^{-1}$ . Sea  $\alpha \in \Sigma$  entonces  $\varepsilon_\alpha = \delta_\alpha = +1$  pues  $M(J_1, \Sigma)$  y  $M(J_2, \Sigma)$  no interceptan a  $\Sigma$ . Más  $\delta_\alpha = \varepsilon_{w^{-1}\alpha}$  y  $\varepsilon_\alpha = \delta_{w\alpha}$ . Luego  $w\Sigma \subset \Sigma \cup \{-\mu\}$  es  $w^{-1}\Sigma \subset \Sigma \cup \{-\mu\}$ . Notemos que  $\varepsilon_{-\mu} = +1$  pues  $-\mu \in I^+(J_1)$ . Por la Proposición 4.2 si  $w^{-1}\Sigma \subset \Sigma$  entonces  $w = 1$  y  $w\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}$ . Caso contrario existe  $\alpha \in \Sigma$  tal que  $w^{-1}\alpha = -\mu$ , esto es  $w(-\mu) = \alpha$ . Esto significa que  $w\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}$  y  $w^{-1}\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}$  o sea  $\tilde{\Sigma}$  es invariante por  $w$  y  $w^{-1}$ .

Ahora supongamos que  $\Sigma \cup \{-\mu\}$  es invariante por  $w^{\pm 1} \in W$ . Entonces  $\Sigma_1 = w^{-1}\Sigma$  es la otra escogencia de un sistema simple de raíces dentro de  $\Sigma \cup \{-\mu\}$ , luego  $J_1$  y  $wJ_1$  están en forma de ideal abeliano con respecto a  $\Sigma$  y a  $\Sigma_1$ .  $\square$

Denotemos por  $W_{\tilde{\Sigma}}$  el subconjunto de  $W$  que deja a  $\tilde{\Sigma}$  invariante. Debido a la biyección de  $W$  con el conjunto de los sistemas simples de raíces (ver comentarios posteriores a la Proposición 2.4), tenemos que  $W_{\tilde{\Sigma}}$  está en biyección con el conjunto de sistemas simples de raíces contenidos en  $\tilde{\Sigma}$ . Estos sistemas pueden ser determinados con la ayuda de los grafos de coxeter de los grupos de Weyl afines, que son los diagramas de Dynkin extendidos (Ver apéndice).

**Lema 4.4.** *Un subconjunto  $\Sigma_1 \subset \tilde{\Sigma} = \Sigma \cup \{-\mu\}$  es un sistema simple de raíces si y solamente si  $\Sigma_1$  es un subgrafo del diagrama de Dynkin extendido, igual al diagrama de Dynkin de  $\Sigma$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$  Supongamos que  $\Sigma_1 \subset \tilde{\Sigma}$  es un sistema simple de raíces. Como  $\tilde{\Sigma}$  es el diagrama de Dynkin extendido entonces  $\Sigma_1$  es un subgrafo del diagrama extendido, igual al diagrama de Dynkin.

$\Leftarrow$  Los diagramas de Dynkin extendidos son presentados en el apéndice. Los subgrafos  $\Sigma_1$  que son isomorfos a  $\Sigma$ , son obtenidos retirando  $\tilde{\Sigma}$  una raíz  $\{-\mu\}$  o una raíz simple en un subconjunto  $\Delta \subset \Sigma$ . En [6] se define a  $\mu$  como una combinación de raíces simples  $\bar{\alpha} = \sum c_i \alpha_i$ , donde  $\Delta = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$ . Tomemos una raíz positiva  $\beta = \sum_{\gamma \in \Sigma} c_\gamma \gamma$ ,  $c_\gamma = 0$  o  $c_\gamma = 1$ , pues  $c_\alpha$  es menor o igual que el coeficiente de  $\mu$  con relación a  $\alpha$ . Ahora  $\beta$  es

una combinación lineal de  $(\Sigma \setminus \{\alpha\}) \cup \{-\mu\}$  con coeficientes enteros  $m_i$  que son todos mayores o iguales a cero si  $c_\alpha = 0$  o menores o iguales a cero si  $c_\alpha = 1$ . De hecho si  $c_\alpha = 0$ ,  $\beta$  es combinación lineal de  $\Sigma \setminus \{\alpha\} \subset (\Sigma \setminus \{\alpha\}) \cup \{-\mu\}$  y todos los coeficientes son no negativos. Si  $c_\alpha = 1$  escribiremos

$$\mu = \alpha + \sum_{\delta \in \Delta \setminus \{\alpha\}} \delta + \sum_{\gamma \in \Sigma \setminus \Delta} c_\gamma \gamma \quad \text{y} \quad \beta = \alpha + \sum_{\xi \in \Sigma \setminus \{\alpha\}} c_\xi \xi.$$

De ahí,  $\beta = -(-\mu) - \sum_{\delta \in \Delta \setminus \{\alpha\}} \delta - \sum_{\gamma \in \Sigma \setminus \Delta} c_\gamma \gamma + \sum_{\xi \in \Sigma \setminus \Delta} c_\xi \xi = -(-\mu) - \sum_{\delta \in \Delta \setminus \{\alpha\}} \delta + \sum_{\gamma \in \Sigma \setminus \Delta} m_\gamma \gamma$ , donde  $m_\gamma \leq 0$  pues los coeficientes de  $\mu$  son mayores o iguales de los coeficientes de  $\beta$ . Esto implica que  $(\Sigma \setminus \{\alpha\}) \cup \{-\mu\}$ ,  $\alpha \in \Delta$  es un sistema simple de raíces.  $\square$

Observando la tabla de los diagramas extendidos encontramos los siguientes sistemas de raíces  $\Sigma_1 \subset \widetilde{\Sigma}$  (ver [6]):

$\widetilde{\Sigma}$	$ W_{\widetilde{\Sigma}} $	$\{\text{raíces simples}\}$	$\Delta$
$\widetilde{A}_l$	$l+1$	$\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$	$\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$
$\widetilde{B}_l$	2	$\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$	$\{\alpha_1\}$
$\widetilde{C}_l$	2	$\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$	$\{\alpha_l\}$
$\widetilde{D}_l$	4	$\{\alpha_1, \dots, \alpha_l\}$	$\{\alpha_1, \alpha_{l-1}, \alpha_l\}$
$\widetilde{E}_6$	3	$\{\alpha_1, \dots, \alpha_6\}$	$\{\alpha_1, \alpha_6\}$
$\widetilde{E}_7$	2	$\{\alpha_1, \dots, \alpha_7\}$	$\{\alpha_7\}$
$\widetilde{E}_8$	1	$\{\alpha_1, \dots, \alpha_8\}$	$\emptyset$
$\widetilde{G}_2$	1	$\{\alpha_1, \alpha_2\}$	$\emptyset$
$\widetilde{F}_4$	1	$\{\alpha_1, \dots, \alpha_4\}$	$\emptyset$

Los números de esa tabla son los índices de conectividad del grupo afín  $W_\alpha$ . Este índice es el orden de  $\widehat{W}_\alpha/W_\alpha$  o, de forma equivalente el orden del subgrupo  $\widehat{W}_\alpha$  que deja invariante a la alcoba básica  $A_0 \in W_{\widetilde{\Sigma}}$ . Sea  $P$  un paralelepípedo abierto

$$P = \{x \in \mathfrak{h}_R; \forall \alpha \in \Sigma; 0 < \langle x, \alpha \rangle < 1\},$$

donde  $P$  es la unión de varias alcobas incluyendo  $A_0$  y partes de sus clausuras. Dado  $w \in W$  y  $x \in A_0$  un elemento arbitrario de , existe un  $\rho_w \in \widehat{L}$  con  $\rho_w = \sum a_i w_i$  tal que  $wx \in P$  con  $0 < \langle wx + \rho_w, \alpha_i \rangle < 1$  para todo  $i$ , ahora  $\langle wx, \alpha_i \rangle = \langle x, w^{-1} \alpha_i \rangle$  que se encuentra entre 0 y 1 debido a que  $w^{-1} > 0$  y  $x \in A_0$ . Por otro lado  $\langle \rho_w, \alpha_i \rangle = a_i$  es un entero, entonces si  $0 < \langle wx + \rho_w, \alpha_i \rangle < 1$  que es equivalente a  $0 < \langle wx, \alpha_i \rangle + \langle \rho_w, \alpha_i \rangle < 1$  de donde  $a_i = 0$  para  $w^{-1} \alpha_i > 0$  y  $a_i = 1$  para  $w^{-1} \alpha_i < 0$ .

Dado  $w \in W_{\widehat{\Sigma}}$ , existe justamente una raíz simple, llamémosla  $\alpha_w$  tal que  $w^{-1}\alpha_w = -\mu$ . Para las otras raíces  $\alpha \in \Sigma$  y entonces  $w^{-1}\alpha_i > 0$ , luego  $\rho_w = w_i$  si  $\alpha_w = \alpha_i$ . Esto viene de la definición de  $W_{\widehat{\Sigma}}$ .

**Lema 4.5.** *Sean  $w \in W_{\widehat{\Sigma}}$  y  $\alpha > 0$ . Entonces  $w^{-1}\alpha > 0$  si y solamente si  $\langle \rho_w, \alpha \rangle = 0$  y  $w^{-1}\alpha < 0$  si y solamente si  $\langle \rho_w, \alpha \rangle = 1$ .*

*Demostración.*  $\Rightarrow$  Sea  $w \in W_{\widehat{\Sigma}}$  y  $\alpha > 0$ . Tenemos que el coeficiente  $b_{\alpha_w}$  de  $\alpha_w$  en  $\alpha = \sum_{\beta \in \Sigma} b_{\beta} \beta$  es  $\langle \rho_w, \alpha_i \rangle$ , de hecho si  $\alpha_w = \alpha_i$ ,  $\rho_w = w_i$  y  $\langle \rho_w, \alpha_i \rangle = \langle w_i, \sum_{\beta \in \Sigma} b_{\beta} \beta \rangle = b_{\alpha_w} \langle w_i, \alpha_w \rangle = b_{\alpha_w}$ . (Observemos la demostración del Lema 4.4). En el sistema simple  $\Sigma_1 = \{w\alpha_1, \dots, w\alpha_l\}$ , la raíz retirada es  $\alpha_w$ , o sea,  $\alpha_w \in \Delta$ . Como en  $\langle \rho_w, \alpha \rangle$ , el coeficiente de  $\alpha$  en la dirección  $\alpha_w$  es menor o igual que el coeficiente de  $\mu$  en dirección de  $\alpha_w$ , entonces  $\langle \rho_w, \alpha \rangle = 0$  o  $\langle \rho_w, \alpha \rangle = 1$ . Si  $w^{-1}\alpha > 0$  significa que  $\alpha$  es una combinación lineal de  $\Sigma \setminus \{\alpha_w\}$ , esto es  $\langle \rho_w, \alpha \rangle = 0$ , ahora si  $w^{-1}\alpha < 0$ , significa que  $\alpha_w$  contribuirá a la expresión de  $\alpha$  como combinación lineal de elementos de  $\Sigma$ , esto es  $\langle \rho_w, \alpha \rangle = 1$ .

$\Leftarrow$  Si  $\langle \rho_w, \alpha \rangle = 0$  entonces  $w^{-1}\alpha$  es una combinación lineal de enteros positivos de  $w^{-1}(\Sigma \setminus \{\alpha_w\}) \subset \Sigma$  o sea  $w^{-1}\alpha > 0$ . Notemos que  $w^{-1}\beta \in \Sigma$  si  $\beta \neq \alpha_w$  y  $\beta \in \Sigma$ . Por otro lado si  $\langle \rho_w, \alpha \rangle = 1$  entonces  $w^{-1}\alpha = -\mu + \gamma$  con  $\gamma$  una combinación lineal de  $w^{-1}(\Sigma \setminus \{\alpha_w\})$  con coeficientes necesariamente menores que los coeficientes de  $\mu$ . Luego al menos uno de los coeficientes de  $w^{-1}\alpha$  es negativo, implicando que  $w^{-1}\alpha < 0$ . □

El siguiente lema establece una conexión entre  $W_{\widehat{\Sigma}}$  y el subgrupo  $\widehat{W}_a$  que deja a  $A_0$  invariante.

**Lema 4.6.** *Sea  $w \in W_{\widehat{\Sigma}}$  entonces  $t_{\rho_w} w(A_0) = A_0$*

*Demostración.* Dado  $x \in A_0$  y una raíz positiva  $\alpha$ , tenemos que  $\langle t_{\rho_w} wx, \alpha \rangle = \langle wx + \rho_w, \alpha \rangle = \langle \rho_w, \alpha \rangle + \langle x, w^{-1}\alpha \rangle$ . Si  $w^{-1}\alpha > 0$  entonces  $0 < \langle x, w^{-1}\alpha \rangle < 1$  y por el lema anterior  $\langle \rho_w, \alpha \rangle = 0$ . Luego  $0 < \langle t_{\rho_w} wx, \alpha \rangle < 1$  y daría que  $t_{\rho_w} wx \in A_0$ . Análogamente si  $w^{-1}\alpha < 0$  entonces  $\langle \rho_w, \alpha \rangle = 1$  y  $-1 < \langle x, w^{-1}\alpha \rangle < 1$ , luego  $0 < \langle t_{\rho_w} wx, \alpha \rangle < 1$  y podemos llegar a que  $t_{\rho_w} w(A_0) \subset A_0$ . La igualdad se da del hecho que las alcobas son abiertos disyuntos, separados por hiperplanos  $H(\alpha, k)$ ,  $\alpha \in \pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . □

Retomemos la pregunta inicial de la equivalencia. Sea  $J = J(A)$  una *ecc* afín y supongamos que esta satisface la propiedad de ideal abeliano con  $M(J, \Sigma)$  el correspondiente ideal abeliano. Por el Teorema 3.4 y la Proposición 3.6 podemos suponer que las coordenadas  $k_{\alpha} = k_{\alpha}(A)$ ,  $\alpha > 0$  de  $A$  son  $k_{\alpha} = 0$  si  $\alpha \notin M(J, \Sigma)$  y  $k_{\alpha} = 1$  si  $\alpha \in M(J, \Sigma)$ .

Utilicemos los lemas anteriores para calcular las coordenadas de la alcoba  $\rho_w wA$ , para  $w \in W_{\tilde{\Sigma}}$ , observemos que los hiperplanos separando  $A_0$  y  $A$  son  $H(\alpha, 1)$ ,  $\alpha \in M(J, \Sigma)$ , pues las coordenadas de la alcoba básica son  $k_\alpha(A_0) = 0$ , si  $\alpha > 0$ . Utilizando la aplicación afín  $t_{\rho_w} w$  vemos que los hiperplanos separando  $t_{\rho_w} wA$  y  $t_{\rho_w} wA_0 = A_0$  son  $t_{\rho_w} wH(\alpha, 1) = t_{\rho_w} H(w\alpha, 1) = H(w\alpha, 1 + \langle \rho_w, w\alpha \rangle)$ ,  $\alpha \in M(J, \Sigma)$ ,  $w \in W_{\tilde{\Sigma}}$ , de acuerdo a la proposición dada en [6] página 88.

**Lema 4.7.** *Dados  $w \in W_{\tilde{\Sigma}}$  y  $\alpha > 0$ , entonces*

$$\langle \rho_w, w\alpha \rangle = \begin{cases} 0, & \text{si } w\alpha > 0 \\ -1, & \text{si } w\alpha < 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

*Demostración.* Vamos a calcular los coeficientes de  $w\alpha$  en la dirección de  $\alpha_w$ . Sea  $\alpha_j \in \Sigma$  tal que  $w\alpha_j = -\mu$ . Tenemos  $\alpha_j = w^{-1}(-\mu)$  y, como  $w^{-1} \in W_{\tilde{\Sigma}}$ , concluimos que el coeficiente de  $\mu$  en dirección de  $\alpha_j$  es 1. De hecho, en el sistema simple de raíces  $\{w^{-1}\alpha_1, w^{-1}\alpha_2, \dots, w^{-1}\alpha_l\}$ ,  $\alpha_j$  es una raíz que se retira, o sea,  $\alpha_j \in \Delta$ . Notemos que  $w\alpha_k \in \Sigma$ , si  $k \neq j$ . Por el lema 4.3,  $w\alpha > 0$  si y solamente si  $\langle w_j, \alpha \rangle = 0$ , pues  $w_j = \rho_w^{-1}$ . Sea  $w^{-1}\alpha_w = -\mu$ , lo que implica que no existen raíces simples  $\alpha_k$ , tal que  $w\alpha_k = \alpha_w$ . Lo que significa que la única posibilidad para  $w\alpha$  tener coeficientes no nulos en dirección  $\alpha_w$  es cuando  $\langle w_j, \alpha \rangle \neq 0$ . Luego  $\langle \rho_w, w\alpha \rangle = 0$  si  $\langle w_j, \alpha \rangle = 0$ , esto es, si  $w\alpha > 0$ . Además si  $\langle w_j, \alpha \rangle \neq 0$ , el coeficiente de  $w\alpha$  en dirección  $\alpha_w$  es el coeficiente de  $-\mu$  en la dirección de  $\alpha_w$ , el cual es -1.  $\square$

Por el anterior lema los hiperplanos  $H(w\alpha, 1 + \langle \rho_w, w\alpha \rangle)$ ,  $\alpha \in M(J, \Sigma)$ ,  $w \in W_{\tilde{\Sigma}}$ , separando  $t_{\rho_w} wA$  y  $t_{\rho_w} wA_0 = A_0$  los vamos a reescribir para  $\alpha \in M(J, \Sigma)$ , de la siguiente forma

$$\begin{aligned} &H(w\alpha, 1) \text{ si } w\alpha > 0 \\ &H(w\alpha, 0) \text{ si } w\alpha < 0. \end{aligned}$$

Lo que implica los siguientes lemas para las coordenadas de  $t_{\rho_w} wA$  :

**Lema 4.8.** *Sea  $w \in W_{\tilde{\Sigma}}$  y  $\beta > 0$ , entonces*

$$k_\beta(t_{\rho_w} wA) = \begin{cases} 0, & \text{si } \beta \notin \pm wM(J, \Sigma) \\ 1, & \text{si } \beta \in wM(J, \Sigma) \\ -1, & \text{si } \beta \in -wM(J, \Sigma). \end{cases} \quad (4.2)$$

*Demostración.* Los hiperplanos separando  $t_{\rho_w}wA$  y  $A_0$  poseen la forma de  $H(w\alpha, k)$ ,  $\alpha \in M(J, \Sigma)$ ,  $k = 0, 1$ . Luego, si  $\beta \notin \pm wM(J, \Sigma)$ , cualquier hiperplano de la forma  $H(\beta, k)$  separa  $t_{\rho_w}wA$  y  $A_0$ , lo que implica que  $k_\beta(t_{\rho_w}wA) = 0$ . Ahora, si  $\beta = w\alpha > 0$ ,  $\alpha \in M(J, \Sigma)$ , entonces  $H(\beta, 1)$  es el único hiperplano ortogonal a  $\beta$  separando  $t_{\rho_w}wA$  y  $A_0$ . De ahí  $k_\beta(t_{\rho_w}wA) = 1$ . Ahora si,  $\beta = -w\alpha > 0$ , el hiperplano separando a  $t_{\rho_w}wA$  y  $A_0$  es  $H(\beta, 0) = H(w\alpha, 0)$ . Luego  $k_\beta(t_{\rho_w}wA) = -1$ .  $\square$

Vamos ahora a obtener las coordenadas de la alcoba  $wA$ ,  $w \in W_{\widehat{\Sigma}}$ .

**Lema 4.9.** *Sea  $w \in W_{\widehat{\Sigma}}$  y  $\beta > 0$ , entonces*

$$k_\beta(wA) = \begin{cases} 0, & \text{si } \beta \notin \pm wM(J, \Sigma) \text{ y } \langle \rho_w, \beta \rangle = 0 \\ -1, & \text{si } \beta \notin \pm wM(J, \Sigma) \text{ y } \langle \rho_w, \beta \rangle = 1 \\ 1, & \text{si } \beta \in wM(J, \Sigma) \\ -2, & \text{si } \beta \in -wM(J, \Sigma). \end{cases} \quad (4.3)$$

*Demostración.* Observemos que si  $x \in A$ ,  $\beta > 0$  y  $\lambda \in \widehat{L}$ , entonces

$$k_\beta(A) < \langle x, \beta \rangle < k_\beta(A) + 1.$$

Luego,

$$k_\beta(A) + \langle \lambda, \beta \rangle < \langle x, \beta \rangle + \langle \lambda, \beta \rangle < k_\beta(A) + \langle \lambda, \beta \rangle + 1,$$

que equivale a

$$k_\beta(A) + \langle \lambda, \beta \rangle < \langle t_\lambda x, \beta \rangle < k_\beta(A) + \langle \lambda, \beta \rangle + 1,$$

dado que  $t_\lambda x = \lambda + x$ . Esto implica que

$$k_\beta(t_\lambda A) = k_\beta(A) + \langle \lambda, \beta \rangle.$$

Ahora, si  $\beta \notin \pm wM(J, \Sigma)$  y  $\langle \rho_w, \beta \rangle = 0$  por el lema anterior  $0 = k_\beta(t_{\rho_w}wA) = k_\beta(wA) + \langle \rho_w, \beta \rangle = k_\beta(wA)$ . Si  $\beta \notin \pm wM(J, \Sigma)$  y  $\langle \rho_w, \beta \rangle = 1$ , entonces  $0 = k_\beta(t_{\rho_w}wA) = k_\beta(wA) + \langle \rho_w, \beta \rangle = k_\beta(wA) + 1$ , esto significa que  $k_\beta(wA) = -1$ . Si  $\beta \in wM(J, \Sigma)$ , esto es,  $\beta = w\alpha > 0$ ,  $\alpha \in M(J, \Sigma)$ , entonces por los Lemas 4.7 y 4.8,  $1 = k_\beta(t_{\rho_w}wA) = k_\beta(wA) + \langle \rho_w, \beta \rangle = k_\beta(wA)$ . Para terminar, para  $\beta \in -wM(J, \Sigma)$ , esto es si  $\beta = -w\alpha > 0$ ,  $\alpha \in M(J, \Sigma)$  entonces  $-1 = k_\beta(t_{\rho_w}wA) = k_\beta(wA) + \langle \rho_w, -w\alpha \rangle = k_\beta(wA) + 1$  lo que significa que  $k_\beta(wA) = -1$ . De esta manera concluimos la demostración.  $\square$

Podemos describir los ideales abelianos correspondientes a  $wJ$ , si  $w \in W_{\widehat{\Sigma}}$  y  $J$  tiene la forma de ideal abeliano respecto a  $\Sigma$ .

**Proposición 4.10.** *Sea  $J = J(A)$  una ecci afín que satisface las propiedad de ideal abeliano con relación a  $\Sigma$ , con  $M(J, \Sigma)$  el correspondiente ideal abeliano. Dado  $w \in W_{\tilde{\Sigma}}$ , entonces  $wJ$  tiene la propiedad de ideal abeliano con relación a  $\Sigma$  y*

$$M(wJ, \Sigma) = (wM(J, \Sigma) \cap \Pi^+) \cup \{\beta \in \Pi^+ / w^{-1}\beta \notin M(J, \Sigma) \text{ y } \langle \rho_w, \beta \rangle = 1\}.$$

*Demostración.* La primera afirmación es consecuencia de la Proposición 4.2, debido a que si  $w \in W_{\tilde{\Sigma}}$  entonces  $w\tilde{\Sigma} = \tilde{\Sigma}$ .

Vamos a probar la igualdad entre los dos conjuntos. Si  $\beta \in wM(J, \Sigma) \cap \Pi^+$ ,  $\beta = w\alpha > 0$ ,  $\alpha \in M(J, \Sigma)$ . De donde  $-1 = \varepsilon_\alpha = \varepsilon_{w^{-1}\beta}$  y  $\beta \in M(wJ, \Sigma) = \{\alpha > 0; \varepsilon_{w^{-1}\alpha} = -1\}$ . Si  $\beta \in \{\beta \in \Pi^+; w^{-1}\beta \notin M(J, \Sigma) \text{ y } \langle \beta, \rho_w \rangle = 1\}$ , entonces  $\beta \notin wM(J, \Sigma)$  y  $\langle \rho_w, \beta \rangle = 1$ . Por el lema anterior y la Proposición 2.4,  $-1 = k_\beta(wA) = k_{w^{-1}\beta}(A)$ . Como  $\varepsilon_{w^{-1}\beta} = (-1)^{k_{w^{-1}\beta}} = -1$ , entonces  $\varepsilon_{w^{-1}\beta} = -1$  y de ahí llegamos a que  $\beta \in M(wJ, \Sigma)$ . Por otro lado, dado  $\beta \in M(wJ, \Sigma)$ , entonces  $\beta > 0$  y  $\varepsilon_{w^{-1}\beta} = -1$ . Como  $\varepsilon_{w^{-1}\beta} = (-1)^{k_\beta(wA)} = -1$ , entonces  $k_\beta(wA)$  es impar. Luego por el Lema 4.9,  $k_\beta(wA) = -1$ ,  $\beta \notin \pm wM(J, \Sigma)$  y  $\langle \rho_w, \beta \rangle = 1$  o  $k_\beta(wA) = 1$ , y  $\beta \in wM(J, \Sigma)$ . Como  $\beta \notin \pm wM(J, \Sigma)$  implica que  $w^{-1}\beta \notin M(J, \Sigma)$ , de donde  $\beta \in (wM(J, \Sigma) \cap \Pi^+) \cup \{\beta \in \Pi^+; w^{-1}\beta \notin M(J, \Sigma) \text{ y } \langle \rho_w, \beta \rangle = 1\}$ .  $\square$

De esta expresión para  $M(wJ, \Sigma)$  podemos ser capaces de buscar los ideales abelianos que representan la misma clase de equivalencia, y eventualmente encontrar formas canónicas para estructuras casi hermitianas invariantes (1, 2)-simpléticas. Miremos el caso de las ecci canónicas  $J_c = \{\varepsilon_\alpha\}$ ,  $\varepsilon_\alpha = +1$  si  $\alpha > 0$ , cuando  $M(J, \Sigma) = \emptyset$ . Por la Proposición 4.10,  $M(wJ, \Sigma) = \{\beta \in \Pi^+; \langle \rho_w, \beta \rangle = 1\}$ , esto es,  $M(wJ, \Sigma)$  es el conjunto de las raíces positivas que poseen coeficientes no nulos en dirección  $\alpha_w$ , si  $w \in W_{\tilde{\Sigma}}$ . Por ejemplo, un álgebra  $A_l$  con raíces  $\alpha_{ij}$ ,  $1 \leq i \neq j \leq n = l + 1$  (Ver [10]), cualquier raíz simple  $\alpha_{i, i+1}$  y  $\alpha_w$  para algún  $w \in W_{\tilde{\Sigma}}$ . En este caso  $\Delta = \Sigma$ . También el conjunto de raíces positivas teniendo coeficientes en  $\alpha_{i, i+1} = \alpha_w$  y el “rectángulo”  $\{\alpha_{rs}; r \leq i, s \geq i + 1\}$ . Cualquiera de estos rectángulos es un representante de las estructuras Kähler invariantes. Notemos que los rectángulos interceptan el conjunto de las raíces simples, y de ahí que la ecci canónica no puede ser colocada en forma de ideal abeliano.

# Apéndice A

## Grupos Coxeter

Los grupos de Coxeter surgen en la teoría de grupos geométricos como los grupos generados por reflexiones. Sea  $\Pi$  un sistema reducido de raíces y  $W$  el grupo de Weyl de  $\Pi$  generado por las reflexiones  $S_\alpha$  sobre  $E$ , consideremos a  $\Delta = \{s_1, \dots, s_n\}$  donde  $\alpha \in \Pi$ . Denotemos a  $m(\alpha, \beta)$  al orden de  $s_\alpha s_\beta$  en  $W$ . Por ejemplo  $m(\alpha, \alpha) = 1$ .

**Definición A.1.** Un grupo Coxeter finito es un grupo finito  $W$  con una presentación

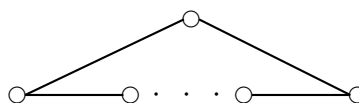
$$W = \{s_\alpha : (s_\alpha s_\beta)_{m(\alpha, \beta)} = 1, \alpha, \beta, \in \Pi\}.$$

El par  $(W, S)$  es llamado un sistema Coxeter.

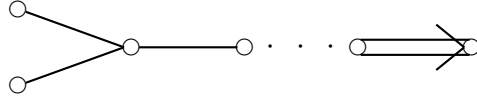
Los grupos Coxeter se clasifican en términos de diagramas de Coxeter-Dynkin; todos son representados por grupos de reflexión. La primera clasificación fue presentada en el *capítulo 1*, al realizar los diagramas de la clasificación de las álgebras de Lie, estos corresponden a los grupos de Weyl.

Los grupos de Weyl afines forman la segunda clasificación importante de los grupos Coxeter. Estos no son ellos en si mismos finitos, pero cada uno contiene un subgrupo normal abeliano tal que el grupo cociente correspondiente es finito. El diagrama se obtiene mediante la adición de un vértice adicional, que es la raíz máxima. Veamos estos diagramas:

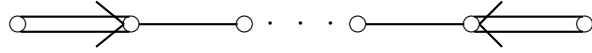
- $\tilde{A}_l$



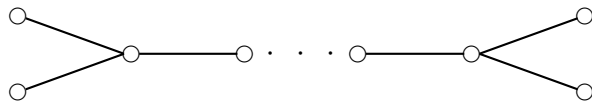
■  $\widetilde{B}_l$



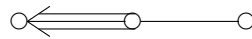
■  $\widetilde{C}_l$



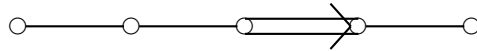
■  $\widetilde{D}_l$



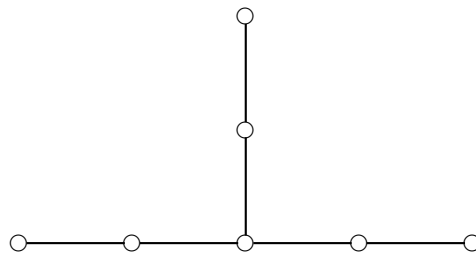
■  $\widetilde{G}_2$



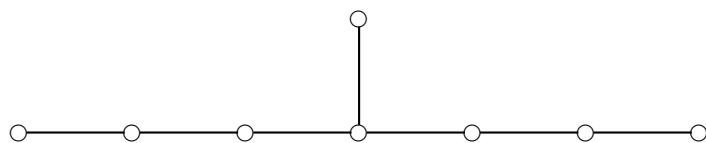
■  $\widetilde{F}_4$



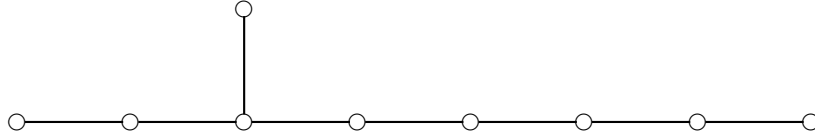
■  $\widetilde{E}_6$



■  $\widetilde{E}_7$



■  $\widetilde{E}_8$



En la teoría de Lie es conveniente codificar el diagrama extendido de Dynkin con el fin de tener información sobre la longitud relativa a la raíz máxima  $\mu$ , que se define como el mas pequeño  $r$  para el cual  $w$  es un producto de  $r$  elementos de  $\Delta$ . Por ejemplo consideremos el sistema de tipo  $B_l$ . En términos de las bases estándar de  $\mathbb{R}^n$ , las raíces simples son:

$$\alpha_1 = \lambda_1 - \lambda_2, \alpha_2 = \lambda_2 - \lambda_3, \dots, \alpha_{n-1} = \lambda_{n-1} - \lambda_n, \alpha_n = \lambda_n,$$

y por lo tanto  $\mu = \lambda_1 + \lambda_2$  dado que  $\mu$  tiene la forma  $\mu = \sum c_i \alpha_i$ , con  $\alpha_i \in \Sigma$ , un sistema simple de raíces. De esta manera realizando las combinaciones adecuadas llegamos a que los  $c_i$  serían  $1, 2, 2, \dots, 1$ . De la misma forma se realiza para los otros diagramas llegando a obtener la siguiente información:

Tipo	coeficientes $c_i$	$\mu$
$\widetilde{A}_l$	$1, 1, \dots, 1$	$\lambda_1 - \lambda_{n+1}$
$\widetilde{B}_l$	$1, 2, \dots, 2$	$\lambda_1 + \lambda_2$
$\widetilde{C}_l$	$2, 2, \dots, 1$	$2\lambda_1$
$\widetilde{D}_l$	$1, 2, \dots, 2, 1, 1$	$\lambda_1 + \lambda_2$
$\widetilde{E}_6$	$1, 2, 2, 3, 2, 1$	$\frac{1}{2}(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 + \lambda_5 - \lambda_6 - \lambda_7 + \lambda_8)$
$\widetilde{E}_7$	$2, 2, 3, 4, 3, 2, 1$	$\lambda_8 - \lambda_7$
$\widetilde{E}_8$	$2, 3, 4, 6, 5, 4, 3, 2$	$\lambda_7 + \lambda_8$
$\widetilde{G}_2$	$2, 3, 4, 2$	$\lambda_1 + \lambda_2$
$\widetilde{F}_4$	$3, 2$	$2\lambda_3 - \lambda_1 - \lambda_2$

# Conclusiones

- En este trabajo se realizó una revisión y explicitación de los principales resultados presentados en el artículo: *Invariant almost hermitian structures on flag manifolds*, en particular el análisis de las condiciones bajo las cuales una estructura casi compleja es  $(1, 2)$ –admisibles.
- La condición necesaria y suficiente para que una variedad bandera maximal sea  $(1, 2)$ -simpléctica es que la estructura casi compleja invariante que se considere sea afín.
- Se muestra que dos estructuras casi complejas afines son equivalentes cuando al fijar un sistema de raíces  $\Sigma$  existe un  $w \in W$  tal que  $J_2 = wJ_1$ .

# Bibliografía

- [1] A. L. Besse, *Einstein manifolds*. Springer-Verlag, Berlín, Heidelberg. 1987.
- [2] M. Black, *Harmonic maps into homogeneous spaces*. Pitman research notes. Math series 255. Longman, Harlow. 1991.
- [3] A. Borel, *Kählerian coset spaces of semi-simple Lie groups*. Proc. Nat. Acad. of Sci, 40: 1147-1151. 1954.
- [4] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol. 1. Interscience Publishers, 1963.
- [5] S. Kobayashi and K. Nomizu, *Foundations of differential geometry*, Vol. 2. Interscience Publishers, 1969.
- [6] J.E. Humphreys, *Reflection groups and Coxeter groups*. Cambridge university press. 1990.
- [7] E.C. Licurgo, *Estructuras quase Hermitianas Invariantes e Ideais Abelianos*. Tesis Mestrado, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2003.
- [8] M. Paredes, *Aspectos da geometria complexa das variedades bandeira*. Ph. D. Tesis, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2000.
- [9] S. Pinzón y M. Paredes, *Geometria de variedades bandera*. Revista de la Academia Colombiana de Ciencias. Vol. 28 (106) (2004), 123-134.
- [10] S. Pinzón, *Variedades bandeira,  $f$ -estructuras e métricas (1-2)- simpléticas*. Ph. D Tesis, Universidade Estadual de Campinas, Brasil, 2003.
- [11] L. A. B. San Martín, *Álgebras de Lie*. Editora da Unicamp. 1999.
- [12] L.A.B. San Martín and C. J. C. Negreiros, *Invariant almost hermitian structures on flag manifolds*. Adv. Math 178(2003), 277-310.
- [13] J.Y. Shi, *Corresponding to an affine Weyl group*. J. London Math. Soc., 35. 1987.