Análisis del efecto del término de Hall en hojas de corriente asociadas con erupciones solares

Lizeth Daniela Jaimes González

Trabajo de Investigación para optar al título de Magíster en Matemática Aplicada

Director

Fabio Duvan Lora Clavijo

Doctorado en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Maestría en Matemática Aplicada

Bucaramanga

2023

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Lista de Tablas

Lista de Apéndices

Resumen

Título: Análisis del efecto del término de Hall en hojas de corriente asociadas con erupciones solares *

Autor: Lizeth Daniela Jaimes González **

Palabras Clave: Magnetohidrodinámica, Erupciones Solares, Reconexión Magnética.

Descripción: Las erupciones solares son manifestaciones altamente relevantes en la corona solar, ya que estos eventos representan los procesos de liberación de energía más violentos que ocurren en el sistema solar. Actualmente, la reconexión magnética es ampliamente aceptada en la comunidad científica como el mecanismo clave para la liberación de energía, tanto en erupciones solares como en diversos plasmas astrofísicos. A pesar de este consenso, todavía no se conocen completamente los detalles y mecanismos precisos de esta transferencia y conversión de energía. Por esta razón, se han desarrollado varios modelos teóricos que han permitido realizar simulaciones numéricas y contribuir así a la comprensión de la física asociada a estos mecanismos, incluyendo modelos como la magnetohidrodinámica Hall.

Con el propósito de realizar un estudio sistemático sobre la influencia del término de Hall en las hojas de corriente asociadas a las erupciones solares, se lleva a cabo una comparación de la morfología, tasas de reconexión, flujo reconectado y energía transferida para los casos con y sin la inclusión del término de Hall en el sistema. Para ello, se realizan simulaciones numéricas de la reconexión magnética en una erupción solar, empleando una hoja de corriente de Harris con una resistividad localizada, en un entorno 2.5D. Además, con el objetivo de establecer un escenario considerablemente realista, se considera la influencia de la gravedad en el sistema. Estas simulaciones se llevan a cabo utilizando el código MAGNUS (Navarro et al., 2017), el cual

---

* Trabajo de Investigación de Maestría en Matemática Aplicada.

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Fabio Duvan Lora Clavijo, Doctorado en Física.

resuelve las ecuaciones de la magnetohidrodinámica resistiva y con flujo de calor. Por lo tanto, se incluyen los nuevos flujos de Hall en el código, así como el paso de tiempo adaptativo que tiene en cuenta los nuevos modos de onda generados por éste término. En términos generales, se observa que la presencia del efecto Hall en el proceso de reconexión magnética en las erupciones solares produce cambios en la morfología de la hoja de corriente, generando asimetría y regiones de difusión más pequeñas. Además, se ha encontrado que el efecto Hall aumenta la tasa de reconexión, lo cual concuerda con los valores reportados en observaciones y otras simulaciones numéricas. Por último, se ha observado que la presencia del efecto Hall tiene un impacto significativo en los flujos de energía entrantes, resultando en velocidades de hasta 400 km/s y liberaciones de energía del orden de 10^{26} erg en los flujos ascendentes. Estos valores son consistentes con los informados para las microerupciones.

Abstract

Title: Analysis of the effect of the Hall term on current sheets associated with solar flares *

Author: Lizeth Daniela Jaimes González **

Keywords: Magnetohydrodynamics, Solar Flares, Magnetic Reconnection

Description: Solar flares are highly relevant manifestations in the solar corona, as these events represent the most violent energy release processes in the solar system. Currently, magnetic reconnection is widely accepted in the scientific community as the key mechanism for energy release, both in solar flares and in various astrophysical plasmas. Despite this consensus, the precise details and mechanisms of this energy transfer and conversion are not yet fully understood. For this reason, several theoretical models have been developed that allow numerical simulations and thus contribute to the understanding of the physics associated with these mechanisms, including models such as Hall magnetohydrodynamics.

In order to systematically study the influence of the Hall term on the current sheets associated with solar flares, a comparison of the morphology, reconnection rates, reconnected flux, and transferred energy is made for the cases with and without inclusion of the Hall term in the system. For this purpose, numerical simulations of magnetic reconnection in a solar flare using a Harris current sheet with localized resistivity are performed in a 2.5D environment. In addition, the influence of gravity on the system is considered in order to obtain a reasonably realistic scenario. These simulations are carried out with the MAGNUS code (Navarro et al., 2017), which solves the equations of resistive magnetohydrodynamics and with heat flux. Therefore, the new Hall fluxes are included in the code, as well as the adaptive time step that takes into account the new wave modes

---

* Research Work in Applied Mathematics.

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Fabio Duvan Lora Clavijo, Doctorado en Física.

generated by this term. In general, it is observed that the presence of the Hall effect in the magnetic reconnection process in solar flares produces changes in the morphology of the current sheet, generating asymmetry and smaller diffusion regions. In addition, it has been found that the Hall effect increases the reconnection rate, which is in agreement with the values reported in observations and other numerical simulations. Finally, it was observed that the presence of the Hall effect has a significant effect on the incoming energy fluxes, resulting in velocities of up to 400 km/s and energy releases of the order of 10^{26} erg in the upflows. These values are in agreement with those reported for micro-eruptions.

INTRODUCCIÓN

Gracias al trascendental descubrimiento de las erupciones solares por Carrington (1859) y Hodgson (1859), y al informe de Hale (1908) sobre la existencia de campos magnéticos en las manchas solares, se ha ampliado la discusión sobre la relación entre la producción de erupciones solares y el magnetismo de las regiones activas (Toriumi and Wang, 2019; Toriumi et al., 2017). Estos eventos representan los procesos de liberación de energía más violentos en el sistema solar. Una erupción considerable puede liberar más de 10^{32} ergios de energía y expulsar más de 10^{16} gramos de plasma solar. Además, una fracción de esta masa se manifiesta en forma de partículas energéticas, con rangos de energía que oscilan entre 10 keV y 1 GeV, lo que las convierte en suficientemente energéticas como para causar daños graves en satélites, perturbar las comunicaciones terrestres y afectar las redes eléctricas (Lin et al., 2003). A pesar de su gran relevancia para la Tierra y el constante avance en su estudio, la comprensión de los procesos de activación y liberación de energía en las erupciones solares sigue siendo un desafío fundamental en la física solar.

El término "reconexión" no fue acuñado hasta más tarde, pero el concepto fue sugerido por primera vez por Giovanelli como un mecanismo de aceleración de partículas en las erupciones solares (Giovanelli, 1946). Actualmente, la reconexión magnética es ampliamente aceptada en la comunidad científica de la física solar como el mecanismo clave para el proceso de liberación de energía en las erupciones solares (Priest and Forbes, 2002a). Además, se ha reconocido que la reconexión magnética es un proceso esencial en varios plasmas astrofísicos (Priest and Forbes, 2000; Démoulin et al., 1993). El Sol y la magnetosfera terrestre han desempeñado un papel fundamental en los avances de la comprensión de este fenómeno. En el contexto de la atmósfera solar, la reconexión magnética está relacionada con fenómenos como las erupciones solares, las eyecciones de masa coronal y el calentamiento coronal (Gosling et al., 1995). Por otro lado, en la magnetosfera terrestre, la reconexión magnética facilita la entrada de partículas y energía del viento solar en la magnetosfera (Sonnerup et al., 1981) y está asociada con la liberación de energía magnética en la cola magnética (Birn and Hesse, 1996).

Aunque hay un consenso sobre la relevancia de la reconexión magnética en la liberación de energía en las erupciones solares, todavía no se conocen completamente los detalles y los mecanismos precisos de esta transferencia y conversión de energía. Es crucial comprender la física que permite que la reconexión sea rápida y, por lo tanto, existen un área de investigación en curso que se centra en las tasas de reconexión rápida que ocurren en este fenómeno. Tanto las observaciones en laboratorio como las observaciones espaciales indican que estos procesos de reconexión magnética rápida ocurren en plasmas con baja colisión. Algunos ejemplos de estas observaciones incluyen la oscilación en forma de diente de sierra en los tokamaks, las subtormentas magnetosféricas en la magnetocola de la Tierra y las erupciones solares en la corona solar. Estos casos se caracterizan por su baja colisión y una tasa de reconexión rápida (Treumann et al., 2006).

El análisis teórico de los procesos plasmáticos en entornos de baja colisión a menudo requiere un modelo cinético. Esto es especialmente cierto cuando las funciones de distribución de partículas se desvían significativamente de la distribución de Maxwell y cuando los radios de Larmor superan las escalas típicas de gradiente (Biskamp, 1997). En la cromosfera superior y la corona solar, el plasma tiene un valor de beta plasma menor a la unidad y el tamaño de escala de los iones

(c/ω_i, donde c es la velocidad de la luz y ω_i es la frecuencia del ciclotrón iónico) es mayor que el radio de Larmor del ion (Threlfall et al., 2012). Por lo tanto, en el contexto de las erupciones solares, resulta conveniente investigar la dinámica utilizando una teoría de fluidos, ya que es más adecuada tanto para el análisis analítico como para las simulaciones numéricas.

Al ser válido utilizar una teoría de fluidos, la descripción teórica de los procesos de reconexión magnética en las erupciones solares se ha desarrollado principalmente dentro del marco de la magnetohidrodinámica (MHD) resistiva. Sin embargo, se ha observado que mediante este enfoque se obtienen tasas de reconexión demasiado bajas para explicar las escalas de tiempo observadas en la liberación de energía de este fenómeno (Craig and McClymont, 1991; Cassak et al., 2006). Estas consideraciones teóricas y observacionales han motivado la construcción de modelos de reconexión que van más allá de la MHD resistiva. En este sentido, un área de investigación activa en la física espacial se centra en la inclusión de efectos de baja colisión en estos modelos.

Varios estudios teóricos y numéricos indican que los términos no disipativos de la ley de Ohm, como la inercia de los electrones (Drake and Kleva, 1991; Ottaviani and Porcelli, 1993), la presión de los electrones (Aydemir, 1992; Kleva et al., 1995; Rogers and Zakharov, 1996) y el término de Hall (Mandt et al., 1994; Biskamp et al., 1995), que previamente se habían despreciado en las teorías de reconexión (Biskamp, 1994), pueden dar lugar a una reconexión más rápida o acelerar el proceso de reconexión. Se ha sugerido que, en particular, el término de Hall juega un papel crítico en la rapidez de la reconexión (Shay et al., 1999). Los efectos de Hall son significativos cuando las escalas de longitud se aproximan al tamaño de escala del ion (c/ω_i), y las frecuencias de onda se aproximan a la frecuencia del ciclotrón iónico (ω_i). Dado que el plasma coronal tiene baja resistividad y, por lo tanto, una pequeña escala de longitud resistiva, es válido incluir estos efectos en los modelos de reconexión de las erupciones solares. Se cree que la reconexión con el término de Hall es rápida debido a la naturaleza dispersiva de las ondas “whistler” y de deriva introducidas por este término (Mandt et al., 1994; Rogers et al., 2001).

Las simulaciones numéricas sugieren que el término de Hall en las ecuaciones de la MHD resistiva (teoría que se denomina MHD Hall) puede desempeñar un papel clave en la aceleración de la tasa de reconexión, independientemente de otros supuestos del modelo y los códigos empleados (Birn et al., 2001). En particular, la MHD Hall puede proporcionar el modelo físico más simple para describir la reconexión magnética rápida en plasmas de baja colisión. Aunque se requiere la resistividad del plasma para extraer energía y alterar la topología del campo magnético, el término de Hall actúa indirectamente al controlar la advección del campo magnético hacia la región de reconexión. El efecto Hall desempeña un papel importante en la dinámica del campo magnético en una variedad de objetos astrofísicos, como nubes moleculares densas, enanas blancas o discos de acreción (Mininni et al., 2003).

Con la anterior motivación, en este trabajo de investigación se busca simular numéricamente la reconexión magnética en una erupción solar, con la implementación de una hoja de corriente de Harris en 2.5D y un perfil de resistividad anómala o localizada. En el modelo se tendrá en cuenta la influencia de la gravedad en el sistema. Además, se trabaja con un perfil de temperatura tangencial, y los perfiles de densidad y presión son derivados de la ecuación de estado y la ecuación de equilibrio hisdrostático. Con el fin de analizar cualitativa y cuantitativamente el efecto de agregar el término de Hall en la ley de Ohm generalizada, este trabajo de investigación se realiza para dos casos: sin tener en cuenta el término de Hall y teniéndolo en cuenta. Para la realización del análisis, se hace un estudio morfológico de la hoja de corriente a la largo del tiempo, para variables como la densidad de corriente, temperatura y velocidades de entrada y de salida. Posteriormente, se hace un análisis de la tasa de reconexión y el flujo reconectado para comparar estos resultados con los datos reportados en las observaciones y otras simulaciones numéricas. Finalmente se hace un análisis de la energía transferida en sistema teniendo en cuenta tres flujos: el vector de Poyinting, el flujo de entalpía y el flujo de energía cinética.

El siguiente trabajo está seccionado de la siguiente manera: en el capítulo 1, se presentan los aspectos generales de las erupciones solares (fases, estructura, características) y la teoría básica de la reconexión magnética aplicada a este fenómeno. En el capítulo 2 se da una breve explicación del fenómeno Hall, y se introduce la magnetohidrodinámica Hall (MHD HALL). En el capítulo 3 se exponen los métodos numéricos utilizados en el código MAGNUS, así como la inclusión del efecto Hall al código y la modificación del paso de tiempo debido a este término. Además, se presenta el modelo implementado con sus respectivas condiciones iniciales y de frontera. En el capítulo 4 se muestran los resultados obtenidos en tres secciones: morfología, flujo reconectado y energía liberada. Finalmente, en el capítulo 5 se presentan el análisis general con respecto a la morfología de la hoja de corriente para distintas variables, las tasas de reconexión obtenidas con respecto a las reportadas y la energía que fue transferida al sistema.

1. ERUPCIONES SOLARES

Los fenómenos eruptivos solares abarcan diversos tipos de actividades magnéticas transitorias que ocurren en la atmósfera solar, como prominencias, erupciones y eyecciones de masa coronal. Con la disponibilidad de datos en múltiples longitudes de onda, se ha vuelto evidente que estos eventos son diferentes manifestaciones de un proceso físico que implica la alteración de los campos magnéticos coronales (Lin et al., 2003). Además, existe un consenso casi universal en que la reconexión magnética desempeña un papel fundamental en la perturbación de los campos magnéticos y en la disipación de la energía magnética almacenada en la corona (Lakhina, 2000; Priest and Forbes, 2002b). Este capítulo aborda los aspectos generales de las erupciones solares, incluyendo su definición, fases, estructura y características según su clasificación. Además, se abordará la reconexión magnética y los modelos básicos asociados con esta teoría.

1.1. Aspectos generales

Desde el descubrimiento de destellos localizados en el Sol en septiembre de 1859 por Carrington (Carrington, 1859) y Hodgson (Hodgson, 1859), las erupciones solares han sido uno de los temas científicos más atractivos en el campo de la física solar debido a la amplia gama de fenómenos físicos asociados a su comportamiento. En la actualidad, la definición más aceptada de una erupción solar, también conocida como llamarada solar, es “un fenómeno explosivo que involucra una liberación repentina de energía en diversas formas, incluyendo energía térmica, energía cinética, energía radiativa y energía no térmica"(Shibata and Magara, 2011). En la figura 1, se muestra la erupción solar más grande registrada hasta ahora, captada por el satélite Observatorio Solar y

Heliosférico (SOHO) en abril de 2001, en una región activa cercana al extremo noreste del Sol. Esta erupción expulsó una eyección de masa coronal al espacio a una velocidad de 7.2 millones de kilómetros por hora. Fue considerablemente más potente que la famosa erupción solar del 6 de marzo de 1989, que causó interrupciones en las redes eléctricas de Canadá e incluso México. Afortunadamente, la erupción de 2001 no estaba dirigida directamente hacia la Tierra (Shea, 2004).

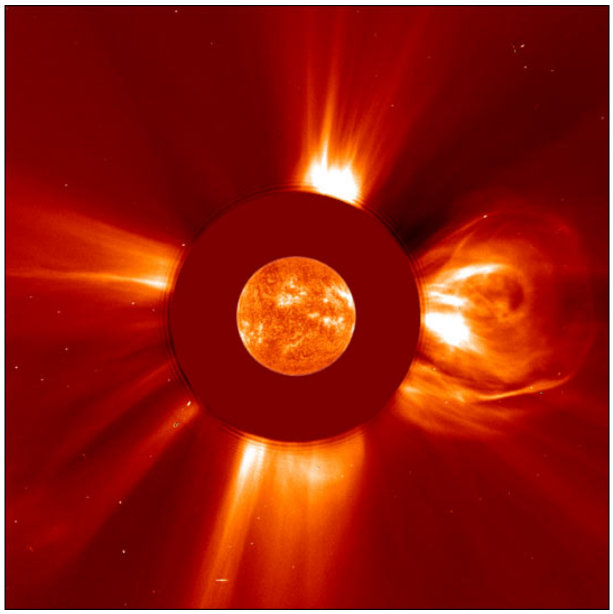

Figura 1. Erupción solar del 2 de abril de 2001, considerada la mayor erupción solar jamás registrada, capturada por el satélite Observatorio Solar y Heliosférico (SOHO). La imagen fue obtenida de la página oficial de la NASA.

Tras el descubrimiento inicial de las erupciones solares en luz blanca, se desarrollaron los espectroheliógrafos y se inventó el filtro H_α, permitiendo así el estudio de la línea H_α originada en la cromosfera solar[1]. Esto llevó a un aumento en la frecuencia de informes sobre erupciones, pero

[1] La línea H_α en la cromosfera solar es una línea de emisión del hidrógeno atómico que ocurre en la región visible del espectro electromagnético. Específicamente, esta línea de emisión se encuentra en la región roja del espectro,

también a una mayor complejidad en su investigación. Durante mucho tiempo, se consideró que las erupciones eran fenómenos cromosféricos. Sin embargo, el descubrimiento de emisiones coronales de radio y rayos X reveló que las erupciones son en realidad fenómenos coronales (Hey, 1983; Peterson and Winckler, 1959). Actualmente, se sabe que las erupciones son un proceso en el cual la energía se libera en la corona mediante la reconexión de los campos magnéticos. Este proceso calienta el plasma en la región de reconexión a temperaturas de decenas de millones de grados Kelvin y acelera las partículas solares a altas velocidades en cuestión de segundos (Anastasiadis, 2002).

1.1.1. Fases. En general, las erupciones solares constan de cuatro etapas principales: la *fase previa*, la *fase impulsiva*, la *fase destello* y la *fase de decaimiento*. La Figura 2 muestra la variación temporal de las emisiones observadas en diferentes longitudes de onda durante una erupción solar. Durante la *fase previa* a la erupción, se registra un aumento gradual y relativamente pequeño en ciertas emisiones térmicas, como los rayos X suaves (o los rayos X de baja energía) y los EUV. Este incremento de temperatura se interpreta como un aumento en la energía libre en una región de campo magnético cerrado, como una región activa. Los campos magnéticos se deforman debido a los movimientos subfotosféricos y la rotación diferencial, lo que resulta en un aumento de energía en los tubos de flujo magnético. A medida que estos tubos atraviesan la superficie, tienden a expandirse, deformando las líneas de campo y, por lo tanto, aumentando la energía disponible.

---

con una longitud de onda de aproximadamente 656.3 nanómetros. Se forma debido a la interacción entre los átomos de hidrógeno y la radiación ultravioleta emitida por el núcleo solar.

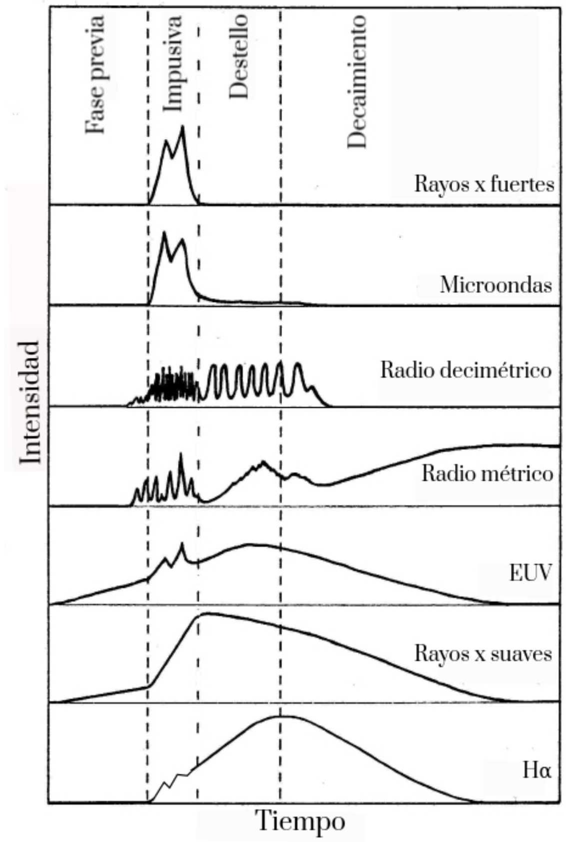

Figura 2. Perfil esquemático de la intensidad de la llamarada en varias longitudes de onda. Las diversas fases indicadas en la parte superior varían mucho en duración. En un evento grande, la fase previa a la llamarada suele durar unos pocos minutos, la fase impulsiva de 3 a 10 minutos, la fase de destello de 5 a 20 minutos y la fase de decaimiento de una a varias horas. Imagen adaptada de Benz (2012).

Sin embargo, existe un límite crítico para la deformación del campo, más allá del cual la estructura se desestabiliza por completo (Shibata and Magara, 2011). En este punto, las líneas de campo se "rompen" y se reconectan para adoptar una configuración de menor energía, lo que acelera las partículas presentes en la región de reconexión (ver Figura 3).

El proceso de desestabilización y liberación súbita de energía se conoce como *fase impulsiva*. Durante esta etapa, el flujo electromagnético experimenta un aumento significativo en todas las longitudes de onda. La fase impulsiva de la erupción solar es particularmente interesante, ya que es durante este período donde tiene lugar la conversión y liberación de energía, así como la aceleración de partículas. Las partículas de alta energía que se dirigen hacia las capas inferiores de la atmósfera chocan con el material, que se vuelve cada vez más denso, generando radiación de frenado e incluso desencadenando reacciones nucleares (Sweet, 1958). Por otro lado, algunas partículas son expulsadas hacia el medio interplanetario y, en determinadas circunstancias, pueden ser detectadas en las proximidades de la Tierra algún tiempo después de la explosión solar. Estas partículas energéticas se conocen como rayos cósmicos solares (Cordero Tercero et al., 2013). Además, algunas partículas de alta energía quedan atrapadas y producen emisiones intensas en la banda de radio.

Las emisiones térmicas de rayos X suaves y H_α alcanzan su máximo después de la fase impulsiva, cuando la energía se libera de manera más gradual. En este momento, se observan pulsaciones decimétricas y una distribución más amplia de la energía liberada (Hoyng et al., 1981). El rápido aumento en la intensidad y la anchura de la línea H_α se conoce como la *fase destello*. Finalmente, en la *fase de decaimiento*, el plasma de la corona solar vuelve casi a su estado original, excepto en la corona alta (por encima de 1.2 R$\odot$, siendo R$\odot$ el radio fotosférico), donde continúa la reconfiguración magnética, las eyecciones de plasma y las ondas de choque, lo que sigue acelerando partículas y provocando ráfagas de radio de ondas métricas y eventos de partículas interplanetarias (Benz, 2017).

1.1.2. Estructura. Aunque existe un amplio consenso en que los campos magnéticos cizallados o antiparalelos son responsables de la liberación de energía en las erupciones solares, la geometría de estos campos a gran escala en la corona solar sigue siendo objeto de estudio. En la figura 3, se ilustra el modelo estándar de una erupción solar en la fase impulsiva (izquierda), mientras que en la parte derecha se muestra una imagen captada por el coronógrafo LASCO/SOHO en luz blanca, brindando una representación visual del fenómeno.

La erupción solar se desencadena por la ascensión de una prominencia a través de la atmósfera solar (Sinha, 2019). En el modelo estándar representado en la parte izquierda de la figura 3, se considera una geometría bidimensional. Después de la reconexión magnética (tema que se abordará en la sección 1.2), la parte superior del bucle es expulsada en forma de plasmoide (Zheng, 2018). En la parte inferior de la región de reconexión magnética, se forma un bucle magnético de rayos X blandos sobre una fuente de rayos X duros en la cromosfera. Las hélices en la figura representan el movimiento de electrones e iones, los cuales son acelerados debido a la reconexión magnética en la región de difusión, a lo largo de las líneas de campo hacia los puntos de anclaje del bucle, donde se producen rayos gamma (Masuda, 1996). La principal contribución a las emisiones de rayos X blandos proviene de un bucle lleno de plasma caliente con una temperatura de aproximadamente $T > 10^7$ K. Este plasma se origina en la cromosfera a través de la evaporación impulsada por la conducción térmica (y en parte por electrones de alta energía) que emana de una región supercaliente formada en la corona, alrededor de la región de reconexión magnética. La conducción térmica también calienta continuamente el plasma evaporado e intenta mantener su temperatura coronal. Finalmente, el plasma evaporado reduce su temperatura debido al enfriamiento radiativo y forma bucles Hα (Bregman, 1994).

Las pruebas observacionales también incluyen la presencia de entradas horizontales de material frío desde los lados, así como dos fuentes de plasma caliente que se ascienden y descienden del punto de reconexión magnética, o también conocido como punto X. La primera de estas entradas se ha observado en un solo evento (Yokoyama et al., 2001; Chen et al., 2004). Las fuentes de plasma caliente eyectadas se observan con mayor frecuencia en rayos X blandos (Shibata et al., 1995), y se ha demostrado que están asociadas con estructuras pulsantes y cambios en la emisión de radio decimétrica, lo que indica la presencia de electrones no térmicos (Khan et al., 2002). La asociación con rayos X duros y emisión de radio centimétrica, causada por la emisión sincrotrónica de electrones con velocidades relativistas, sugiere la presencia de partículas altamente energéticas en los plasmoides (Hudson et al., 2001). Además, en ocasiones se han observado pruebas del chorro de reconexión descendente junto con el movimiento ascendente de la fuente de rayos X blandos (Sui et al., 2004).

1.1.3. Características. La energía liberada durante un erupción solar es de unos $10^{26} - 10^{32}$ erg, y, como se mencionó anteriormente, adopta diversas formas como energía radiativa, energía cinética, energía térmica y no térmica. El tamaño espacial de una erupción depende de los eventos individuales; en el evento más pequeño la altura de un bucle de erupción es inferior a 10^4 km, mientras que puede alcanzar más de los 10^5 km en el evento más grande. El tamaño también afecta a la duración y la cantidad de energía liberada (Lin et al., 2003). Por esta razón, las erupciones solares y los fenómenos similares a las erupciones (arcadas a gran escala o también conocidas como eyecciones de masa coronal) se han clasificado según su tamaño, escala temporal y energía en: *micro-erupciones*, *erupciones impulsivas*, *erupciones ELD* (evento de larga duración) y *Arcadas a gran escala*. Las tablas 1 y 2 resumen las características y cantidades físicas, de los

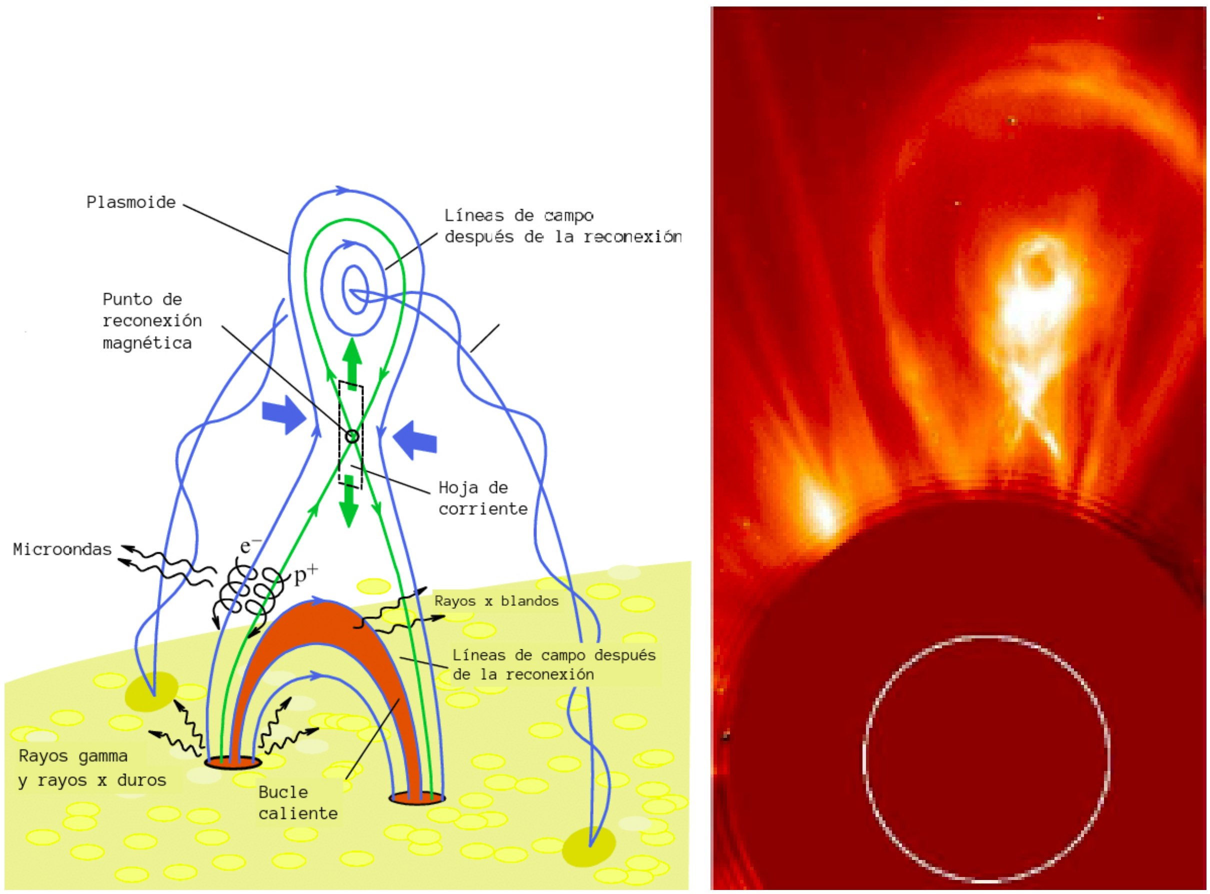

Figura 3. Izquierda: Modelo estándar de una erupción solar. La entrada de plasma frío se observa a los lados del bucle (flechas azules) y la salida de plasma caliente arriba y abajo (flechas verdes). Imagen adaptada de Lysenko et al. (2020). Derecha: Observación de una erupción solar observada por LASCO/SOHO en luz blanca.

distintos tipos de erupciones, estas tablas fueron tomadas de Shibata and Magara (2011).

Clasificación	Tamaño (Mm)	Escala temporal (s)	Energía (erg)
Micro-erupción	5 – 40	60 – 600	10^{26} – 10^{29}
Erupción impulsiva	10 – 100	60 – 3000	10^{29} – 10^{32}
Erupción ELD	100 – 400	3000 – 10^5	10^{30} – 10^{32}
Arcada a gran escala	300 – 1000	10^4-3x10^5	10^{29} – 10^{32}

Tabla 1
Comparación de las siguientes escalas características para diferentes tipos de erupciones: tamaño en megametros, escala temporal en segundos y energías en ergios.

Clasificación	B(G)	n_e(cm^{-3})	V_A(km/s)	t_A (s)	t/t_A
Micro-erupción	100	10^{10}	3000	5	12-120
Erupción impulsiva	100	10^{10}	3000	10	6-30
Erupción ELD	30	2x10^9	2000	90	30 - 10^3
Arcada a gran escala	10	3x10^8	1500	400	25-500

Tabla 2
Comparación de las siguientes cantidades físicas para diferentes tipos de erupciones: campo magnético B en Gauss, número de densidad de electrones n_e en cm^{-3}, velocidad de Alfvén V_A en km/s, tiempo de Alfvén t_A en segundos y la relación entre la escala temporal y t_A.

Durante la reconexión magnética, se espera que la conversión de energía magnética ocurra en la corona solar, donde se observa comúnmente una temperatura del plasma mucho más alta que en la fotosfera. Descubrir la verdadera causa del calentamiento de la corona a más de aproximadamente 10^7 K es uno de los principales objetivos en la física del plasma solar (Birn and Priest, 2007). Aunque existen otras posibilidades, como el calentamiento por ondas, se considera que la reconexión magnética es el candidato más probable para el mecanismo de calentamiento coronal, ya que el campo magnético representa la fuente de energía dominante en la corona. Las fuentes del campo magnético en la fotosfera son dinámicas y altamente fragmentadas. El flujo magnético en la superficie del Sol en estado de calma cambia cada 14 horas (Hagenaar, 2001). Investigar las propiedades estadísticas de las líneas de campo magnético de la corona ha sido un desafío debido a su naturaleza cambiante, pero gracias a los magnetogramas y datos del satélite SOHO, se ha logrado construir, rastrear y calcular la conectividad de las líneas de campo magnético de la corona baja (Close et al., 2005).

1.2. Reconexión magnética

La disipación óhmica de la corriente eléctrica, que es causada por un valor finito de resistividad, es particularmente efectiva en una región donde circula una corriente eléctrica intensa, conocida como hoja de corriente. Cuando ocurre la disipación, se producen cambios en la estructura del campo magnético, reduciéndolo a un estado de menor energía. A este fenómeno se le conoce como reconexión magnética. Durante la reconexión magnética, la energía magnética almacenada tanto dentro como fuera de la hoja de corriente se convierte en energía cinética y térmica. Además, la reconexión magnética genera un campo eléctrico fuerte alrededor de la hoja de corriente, el cual puede acelerar partículas cargadas. La reconexión magnética fue propuesta por primera vez por Giovanelli en la década de 1940 como un posible mecanismo para convertir la energía magnética en energía cinética de partículas. Desde entonces, se han llevado a cabo diversos estudios de las erupciones solares con el objetivo de comprender los mecanismos físicos que subyacen a la reconexión magnética (Shibata and Magara, 2011).

1.2.1. Modelos básicos de la reconexión magnética. Ya que una de los principales objetivos de este trabajo son las tasas de reconexión rápida que se dan en las erupciones solares, es necesario analizar cómo se ha definido este concepto en los modelos básicos de la reconexión magnética. La velocidad de reconexión, también conocida como tasa de reconexión, se define como el flujo magnético que se reconecta por unidad de tiempo, representado por $d\Phi/dt$. Aquí, Φ es el flujo magnético por unidad de longitud en la dirección perpendicular al plano que contiene la hoja de corriente. En un estado estacionario, la ecuación de Faraday y la ley de Ohm proporcionan la siguiente expresión para la tasa de reconexión:

$$\frac{d\Phi}{dt} = VB = \text{constante}. \tag{1}$$

En el estado estacionario, se tiene $\nabla \times \mathbf{E} = 0$, con $\mathbf{E}$ siendo el campo eléctrico, lo que implica que fuera de la región de difusión (región de afluencia), $\mathbf{E} = -\mathbf{V} \times \mathbf{B}$. Como se observa en la Figura 4, $\mathbf{V}$ es la velocidad del plasma medida en la región de afluencia y $\mathbf{B}$ es el campo magnético en la misma región. Dentro de la región de difusión, el campo eléctrico se relaciona con la densidad de corriente como $\mathbf{E} = \eta \mathbf{J}$, ya que se asume que la difusividad solo toma un valor distinto de cero en esta región. $\mathbf{J}$ es la densidad de corriente en una región de difusión con una difusividad magnética finita η.

La tasa de reconexión dada por la ecuación (1) puede ser adimensionalizada usando el número Alfvén Mach M_A en la región de entrada;

$$\frac{d\Phi/dt}{v_A B} = \frac{VB}{v_A B} = \frac{V}{v_A} = M_A, \tag{2}$$

donde v_A es la velocidad de Alfvén, también en la región de entrada. El tiempo de recone-

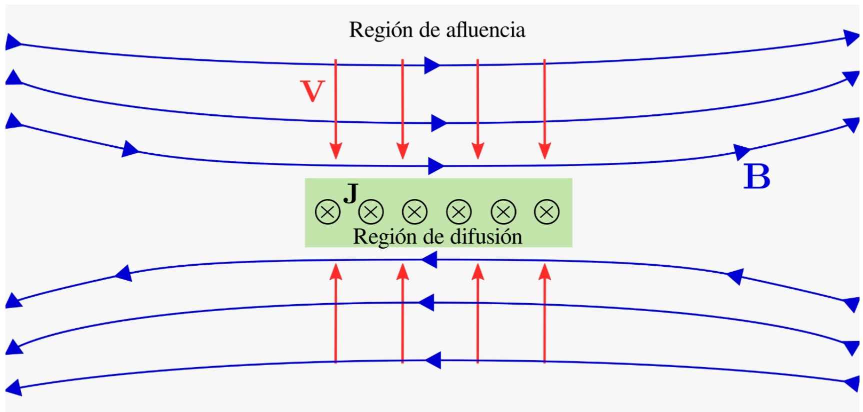

Figura 4. Representación visual de la reconexión magnética en una hoja de corriente. La imagen muestra el proceso en el cual, al haber una velocidad V en la región de afluencia, las líneas de campo magnético B empiezan a cambiar su configuración.

xión en una hoja de corriente de longitud L es:

$$t_{rec} = \frac{L}{V} = \frac{t_A}{M_A}, \tag{3}$$

aquí $t_A = L/v_A$ es el tiempo de tránsito Alfvén. Tomando la longitud típica L de una estructura magnética coronal ($10^4 - 10^5$km), t_A puede tomar valores entre 10 y 100 segundos.

$$M_A \simeq \frac{1}{\sqrt{S}}, \tag{4}$$

donde

$$S = \frac{L v_A}{\eta} \tag{5}$$

es el número de Lundquist y es un caso especial del número magnético de Reynolds (R_m) cuando la velocidad de Alfvén es la velocidad típica del sistema, y representa una relación adimensional que compara la escala de tiempo de un cruce de onda de Alfvén con la escala de tiempo de difusión resistiva. S toma típicamente valores de $\approx 10^{14}$ en la corona, por lo que $M_A \approx 10^{-7}$. Esto lleva a que $t_{rec} \approx 10^8 - 10^9$s según la ecuación (3), lo cual es mucho más grande que la escuela de tiempo típica de una erupción solar, que es $10^2 - 10^4$s. Por lo tanto, este modelo no puede explicar la rápida liberación de energía en una erupción solar (Parker, 1963).

Petschek propuso un modelo alternativo para la reconexión magnética que permite una liberación de energía más rápida que el modelo Sweet-Parker. La velocidad de reconexión en el modelo de Petschek está determinada por la siguiente expresión:

$$M_A \approx \frac{\pi}{8 \ln S}, \tag{6}$$

donde M_A es de aproximadamente 0.01-0.1 en la corona (Petschek, 1964). Este valor implica un tiempo de reconexión comparable a la escala temporal de una llamarada. Posteriormente, Forbes and Priest (1987) ampliaron el modelo propuesto por Petschek. Sin embargo, aún no se ha comprendido completamente la evolución hacia el estado estacionario asumido en el modelo de Petschek, y el factor que controla la velocidad de reconexión sigue siendo objeto de controversia (Biskamp, 1997; Priest and Forbes, 2000).

1.2.2. Reconexión en plasmas débilmente colisionales. Como se discutió anteriormente, los modelos clásicos de Sweet-Parker y Petschek nos plantean un dilema en el caso de plasmas de baja resistividad, que corresponden a altos números de Lundquist (S). Por un lado, la escala temporal del modelo de Sweet-Parker es realizable dinámicamente en simulaciones MHD resistivas de alta resolución en el régimen de alta S, pero resulta demasiado lenta para explicar los procesos dinámicos de las erupciones solares o subtormentas magnetosféricas. Por otro lado, el modelo de Petschek proporciona una escala temporal más rápida, pero parece no ser realizable en el régimen de alta S.

Además, los modelos resistivos de estado estacionario solo pueden proporcionar una escala temporal: la de reconexión estacionaria (proporcional a $S^{1/2}$ para Sweet-Parker y $\ln S$ para Petschek). Sin embargo, la reconexión constante no es una condición genérica. Es una hipótesis teórica fuerte que a menudo no se cumple en muchas situaciones dinámicas de gran interés físico. En particular, en las erupciones solares se observan fenómenos de reconexión magnética en los que la dinámica muestra impulsividad, es decir, un aumento repentino en la derivada temporal de la tasa de crecimiento. Este problema se conoce como el *problema del disparador* (Birn and Priest, 2007): la configuración del campo magnético evoluciona lentamente durante un largo período de tiempo, solo para sufrir un cambio dinámico repentino en un período de tiempo mucho más corto. Dado que los modelos clásicos de reconexión en estado estacionario de Sweet-Parker y Petschek no consideran la dependencia temporal, no pueden explicar la evolución temporal de la tasa de reconexión.

Por lo anterior, se ha incluido física más allá de la MHD resistiva en la descripción de las ecuaciones (Terasawa, 1983). Para investigar y comparar los diferentes modelos de disipación, se llevó a cabo el Geospace Environment Challenge, también conocido como GEM Challenge (Birn et al., 2001). En este desafío, se utilizaron diversos códigos que contenían modelos de disipación como MHD resistivo, MHD Hall, híbrido y cinético, aplicados al mismo problema: una lámina de

Harris perturbada, en el contexto de la magnotocola terrestre (Khomenko, 2020). Los resultados de este estudio revelaron que la tasa de reconexión en todos los modelos es comparable, excepto en el caso del MHD resistivo, que es considerablemente más baja que en los demás modelos. Esto indica que la tasa de reconexión, al tener en cuenta fenómenos sin colisión, suele ser órdenes de magnitud más rápida que la reconexión basada únicamente en la resistividad. Este resultado es relevante en sistemas como la liberación de energía en las erupciones solares, las tormentas magnéticas en la magnetocola de la Tierra y las interrupciones en dispositivos de fusión (Brown et al., 2006; Yamada et al., 2006). Las observaciones de naves espaciales (Eastwood et al., 2007), los experimentos de laboratorio (Ren et al., 2005), los análisis teóricos (Bellan, 2014) y las simulaciones numéricas (Cassak et al., 2005) indican que el efecto Hall, en particular, desempeña un papel importante en la aceleración de la velocidad de reconexión.

2. MODELO MATEMÁTICO

Los plasmas astrofísicos están compuestos por electrones, iones y neutrales, los cuales interactúan con campos magnéticos a través de colisiones o de manera directa. Cuando las interacciones de inercia y colisión producen una deriva entre electrones e iones, se hace necesario modificar la teoría MHD ideal para incluir efectos no lineales, como el efecto Hall. Este último es un término de la ley de Ohm generalizada que describe la velocidad relativa entre electrones e iones, generando un campo eléctrico de Hall que es proporcional al producto cruzado entre la densidad de corriente y el campo magnético. Es importante mencionar que, debido al efecto Hall, las líneas del campo magnético se congelan en el fluido de electrones, pero no en el fluido de iones. La inclusión del término de Hall modifica la ecuación de inducción y la ecuación de densidad de energía total en la teoría MHD, lo que corresponde a la teoría MHD Hall (MacTaggart and Hillier, 2020).

2.1. Efecto HALL

Para realizar un análisis del efecto Hall, inicialmente es necesario considerar un entorno ideal en el que no se tenga en cuenta ni la resistividad ni el término de Hall en las ecuaciones de la MHD. En este entorno, el comportamiento del plasma y los campos electromagnéticos están gobernados por la MHD ideal, que es aplicable a plasmas altamente conductores. En la MHD ideal, la ley de Ohm se simplifica y se trabaja de la siguiente manera:

$$\mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} = 0. \tag{7}$$

En esta ecuación **U** es la velocidad y **B** es el campo magnético. Cuando la ecuación (7) es válida, se puede demostrar que el flujo magnético se puede "congelar en el fluido". Lo anterior quiere decir que el flujo magnético que pasa a través de cualquier circuito cerrado, que sea comóvil al fluido, es constante. Además, que si seguimos las líneas de campo en cualquier momento a lo largo de su longitud, se traza un volumen espacial que se denomina tubo de flujo magnético, tiene el mismo flujo magnético para cualquier superficie que corte el tubo. Esto quiere decir, que todas las partículas inicialmente en un tubo de flujo permanecerán unidas a lo largo de este a medida que se convectan en el plasma.

Para que se de la reconexión magnética, es necesario que la restricción de *flujo congelado* no aplique. Este proceso de reconexión se da en la región de difusión (ver imagen 4) y ya no se puede describir con la MHD ideal, sino con la MHD resistiva. El problema, es que con valores pequeños de resistividad (como los de la corona solar), la tasa de reconexión magnética es muy baja con respecto a los datos observacionales. Por lo tanto, es necesario tener en cuenta otros efectos dominantes de la corona solar, como el efecto Hall.

La importancia de los efectos no ideales, como el efecto Hall, se puede evaluar al examinar la relación entre la frecuencia del ciclotrón y las frecuencias de colisión. En la fotosfera, la frecuencia del ciclotrón puede superar la frecuencia de colisión en áreas fuertemente magnetizadas, como los tubos de flujo y las manchas solares. En la cromosfera y la corona, esto ocurre en la mayor parte de su volumen, incluso en regiones con un campo magnético más débil (Khomenko et al., 2014). Bajo estas condiciones, se espera que las partículas se comporten de manera diferente en comparación con situaciones en las que la frecuencia de colisión es mayor que la frecuencia del ciclotrón, lo cual tiene implicaciones directas en la dinámica del plasma y el intercambio de energía.

El efecto Hall se manifiesta cuando los iones se desacoplan del campo magnético mientras que los electrones permanecen adheridos a él. En un plasma totalmente ionizado, como la cromosfera superior y la corona, los iones se desacoplan del campo magnético debido a la diferencia en inercia entre los iones y los electrones. Este desacoplamiento generalmente ocurre en procesos de alta frecuencia. La frecuencia ciclotrónica de la partícula α viene dada por $\omega_{c\alpha} = eB/m_\alpha$, donde e es la carga del electrón y m_α es la masa de la partícula en cuestión. Cuando la frecuencia ciclotrónica del electrón ω_{ce} es alta, los electrones pueden girar libremente alrededor de las líneas de campo magnético entre colisiones. Por otro lado, debido a la mayor masa de los iones, la frecuencia ciclotrónica de los iones ω_{ci} es tres órdenes de magnitud menor que ω_{ce}, lo que implica que, para la misma frecuencia de colisión, los electrones permanecen unidos al campo magnético, mientras que los iones no lo hacen (Malakit et al., 2009).

La región de disipación al tener en cuenta el efecto Hall desarrolla una estructura de dos escalas, como se observa en la figura 5; una región interior de tamaño de escala transversal c/ω_{pe} controlada por la dinámica de electrones incrustada en una capa mayor de longitud de escala c/ω_{pi} controlada por los iones (Biskamp, 1997). Donde c es la rapidez de la luz y $\omega_{p\alpha} = 4\pi n_\alpha e^2/m_\alpha$ es la frecuencia de plasma de la partícula α, siendo n_α su respectiva densidad. Fuera de la región de disipación, los electrones y los iones se mueven juntos y ambos cumplen con la restricción del flujo congelado. Dentro de una longitud de escala c/ω_{pi} de la hoja de corriente, el efecto Hall permite desacoplar el movimiento de electrones e iones, permaneciendo los electrones congelados en el campo magnético y desviándose los iones en la dirección del flujo de salida de la hoja de corriente (Mandt et al., 1994). Los electrones continúan acelerando hacia la línea neutra hasta que se desacoplan del campo magnético en una región de longitud de escala c/ω_{pe}. A continuación, son expulsados de la hoja de corriente a gran velocidad, superando ampliamente la velocidad de Alfven, y finalmente se frenan y vuelven a unirse a los iones en el flujo de salida de la región de disipación (Shay et al., 1998).

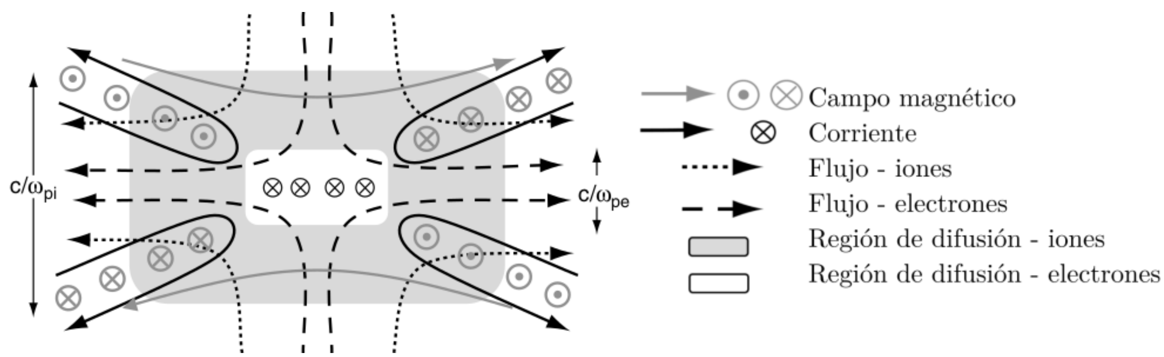

Figura 5. Esquema de la estructura de dos escalas de la región de disipación durante la reconexión magnética. Región de disipación de electrones (iones) en blanco (gris) con tamaño de escala c/ω_{pe} (c/ω_{pi}). Flujos de electrones (iones) en líneas discontinuas largas (cortas). Corrientes en el plano corrientes en el plano marcadas con líneas oscuras sólidas y el campo cuadrupolar fuera del plano en gris. Imagen adaptada de (Birn and Priest, 2007).

2.2. Ley de Ohm generalizada

La esencia de la física del modelo MHD-Hall está contenido en la Ley de Ohm. La Ley de Ohm generalizada está dada de la siguiente manera:

$$\frac{m_e}{ne^2}\frac{\partial \mathbf{J}}{\partial t} - \frac{1}{ne}\nabla \cdot \vec{\mathbf{P}}_e = \mathbf{E} + \mathbf{U} \times \mathbf{B} - \frac{1}{ne}\mathbf{J} \times \mathbf{B} - \eta \mathbf{J}, \tag{8}$$

aquí e la carga del electrón, m_e es la masa del electrón y $\vec{\mathbf{P}}_e$ es el tensor de presión electrocinético. Para un plasma donde las corrientes varían muy lentalmente en el tiempo en comparación con los procesos hidrodinámicos, es razonable suponer que las corrientes son estacionarias y, por lo tanto, que $\partial \mathbf{J}/\partial t = 0$. Además $L >> \rho_e$, lo cual lleva a despreciar el termino de presión electrocinético. De modo que, los términos en el lado izquierdo de la ecuación (8) se hacen cero (Bittencourt, 2004), y la Ley de Ohm generalizada se puede reescribir de la siguiente forma:

$$\mathbf{E} = -\mathbf{U} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J} + \frac{1}{ne} \mathbf{J} \times \mathbf{B}, \tag{9}$$

donde el término final en la ecuación (9) es definido como el término de Hall. Físicamente, el término de Hall desacopla el movimiento de los iones y los electrones en escalas de longitud de la inercia del ion: $L \leq c/\omega_{pi}$.

El significado físico de los diferentes términos de la ley de Ohm generalizada se aprecia mejor a partir de la ecuación de inducción. Para obtener la ecuación de inducción, se combinan la ley de Ohm (ec. (9)) con la ley de inducción de Faraday (ec. (10)), de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times \mathbf{E} = -\nabla \times (-\mathbf{U} \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J} + \eta_H \mathbf{J} \times \mathbf{B}), \tag{10}$$

donde se define $\eta_H = \frac{1}{ne}$ como el coeficiente de Hall. Además, se escribe la velocidad de Hall como

$$\mathbf{U}_H = -\eta_H \mathbf{J}, \tag{11}$$

de modo que

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\nabla \times [-(\mathbf{U} + \mathbf{U}_H) \times \mathbf{B} + \eta \mathbf{J}]. \tag{12}$$

Cuando $\eta >> 1$ no tiene realmente sentido hablar de la estructura magnética ya que las líneas de campo se difunden a través del fluido en todas las escalas. Cuando $\eta << 1$, como en casi todas las aplicaciones astrofísicas, el campo magnético se comportará como si siguiera el MHD ideal excepto en regiones (generalmente pequeñas) donde hay una fuerte densidad de corriente. En estos lugares es donde se produce la reconexión magnética.

Ahora, el término de Hall introduce dos nuevos modos de onda al sistema: ondas *whistler* y ondas de deriva Hall:

$$\nabla \times (\mathbf{U}_H \times \mathbf{B}) = \underbrace{-\frac{1}{ne}\nabla \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B})}_{Ondas\ whistler} + \underbrace{\frac{1}{n^2 e}\nabla n \times (\mathbf{J} \times \mathbf{B})}_{Ondas\ de\ deriva\ Hall}. \tag{13}$$

La disociación del movimiento de electrones e iones a escalas espaciales pequeñas implica que la onda de Alfvén ya no controla el comportamiento colectivo del movimiento del plasma por debajo de estas escalas. En particular, la onda Alfvén ya no impulsa la aceleración del plasma lejos de la línea X, permitiendo que las líneas de campo dobladas y recién reconectadas liberen su energía magnética almacenada. Cerca de la línea X, este papel es asumido por las ondas *whistler* (Birn and Priest, 2007). Las ondas de deriva de Hall solamente ocurren en plasmas no homogéneos.

2.3. Ecuaciones MHD resistiva con términos de HALL

La MHD es un modelo matemático que acopla ecuaciones para la dinámica de fluidos junto con las ecuaciones de Maxwell y la ley de Ohm para describir el comportamiento del plasma. En muchos escenarios astrofísicos, el plasma se puede aproximar como un único fluido conductor. Las ecuaciones de la MHD incluyen la ecuación de continuidad, la ecuación de movimiento, la ecuación de energía, la ecuación de inducción de Faraday y la ecuación de la divergencia del campo magnético. Cuando se consideran términos de Hall en las ecuaciones de la MHD resistiva, se obtiene el modelo matemático conocido como MHD Hall. Estas ecuaciones, escritas de manera conservativa, son:

$$\frac{\partial \rho_m}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho_m \mathbf{U}) = 0, \tag{14}$$

$$\frac{\partial (\rho_m \mathbf{U})}{\partial t} + \nabla \cdot \left(\rho_m \mathbf{U} \otimes \mathbf{U} - \frac{1}{\mu_0} \mathbf{B} \otimes \mathbf{B} + p_T \mathbf{I} \right) = \rho_m \mathbf{g}, \tag{15}$$

$$\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} + \nabla \cdot \left\{ (\varepsilon + p_T)\mathbf{U} - \frac{\mathbf{B}(\mathbf{B} \cdot \mathbf{U})}{\mu_0} \right\} + \nabla \cdot \left\{ \frac{1}{\mu_0} [B^2 \mathbf{U}_H - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_H)\mathbf{B}] \right\} =$$

$$-\nabla \cdot (\eta \mathbf{J} \times \mathbf{B}) + \rho_m \mathbf{U} \cdot \mathbf{g}, \tag{16}$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} + \nabla \cdot (\mathbf{U} \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{U}) + \nabla \cdot (\mathbf{U}_H \otimes \mathbf{B} - \mathbf{B} \otimes \mathbf{U}_H) = -\nabla \times \eta \mathbf{J}, \tag{17}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{18}$$

donde $\otimes$ representa el producto tensorial, $p_t = p + B^2/2\mu_0$ representa la presión total, que es la suma de la presión térmica y la presión magnética. $\mathbf{I}$ es la matriz identidad y $\varepsilon = p/(\gamma - 1) +$

$\rho U^2/2 + B^2/(2\mu_0)$ corresponde a la densidad de energía total, que es la suma de las densidades de energía interna, cinética y magnética. Además, ρ_m representa la densidad de masa, p representa la presión térmica, $\mathbf{g}$ representa la gravedad, y γ es la relación de calores específicos. En este caso, considerando un gas monoatómico, γ corresponde a $5/3$.

En la ecuación de movimiento, se puede despreciar el término relacionado con el campo eléctrico, ya que, al considerar velocidades características del fluido no relativistas (mucho menores que la velocidad de la luz), los efectos de las corrientes de desplazamiento pueden ser ignorados. Para la ecuación de energía, se requiere utilizar una relación constitutiva, como la ecuación de estado para un gas ideal. Finalmente, es importante incluir la ecuación (18), ya que la condición de nulidad de la divergencia del campo magnético garantiza la ausencia de monopolos magnéticos. Los términos en rojo en las ecuaciones (16) y (17) representan las adiciones correspondientes en las ecuaciones de la MHD resistiva debido al término de Hall incluido en la ley de Ohm generalizada (ec. (9)). El sistema de ecuaciones completo (14-18) se conoce como MHD HALL.

3. MODELO NUMÉRICO

Las ecuaciones MHD describen la dinámica del plasma, proporcionando información de variables como la densidad de masa, presión, velocidad y campo magnético. Al ser un sistema de ecuaciones no lineal, métodos numéricos como el método de líneas no son aptos, de manera que, es necesario implementar métodos mucho más sofisticados, incluyendo uno que garantice la ausencia de monopolos magnéticos, los cuales violarían la física implicada en el sistema. Al agregar el término de Hall en el sistema de ecuaciones de la MHD, se hace necesario agregar los flujos asociado a este término y, tener en cuenta los nuevos modos de onda en el sistema para adaptar el paso de tiempo.

3.1. Métodos numéricos

El sistema de ecuaciones (14-18) son las ecuaciones MHD resistiva con términos de Hall, escritas de manera conservativa. Este sistema se puede expresar de una manera más compacta de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathbf{Q}}{\partial t} + \frac{\partial \mathbf{F}_x}{\partial x} + \frac{\partial \mathbf{F}_y}{\partial y} + \frac{\partial \mathbf{F}_z}{\partial z} = \mathbf{S}, \tag{19}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0, \tag{20}$$

donde $\mathbf{Q}$ es el vector de variables conservativas, $\mathbf{F}_x$, $\mathbf{F}_y$, $\mathbf{F}_z$ son los vectores de los flujos a lo largo de la dirección x, y, z respectivamente y $\mathbf{S}$ el vector de fuentes. El vector $\mathbf{Q}$ viene dado por

$$\mathbf{Q} = (\rho_m, M_x, M_y, M_z, \varepsilon, B_x, B_y, B_z)^T, \tag{21}$$

siendo $\mathbf{M} = \rho_m \mathbf{U}$ el vector de cantidad de movimiento. Los vectores de flujo están compuestos por los flujos de la MHD ideal y los flujos relacionados con los términos de Hall, de la siguiente forma:

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{IDEAL} + \mathbf{F}_{HALL}, \tag{22}$$

$$\mathbf{F}^i_{IDEAL} = \begin{bmatrix} \rho_m U^i \\ \\ \rho_m U^i U_j - \frac{B^i B_j}{\mu_0} + p_t \delta^i_j \\ \\ (\varepsilon + p_t) U^i - \frac{B^i (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U})}{\mu_0} \\ \\ U^i B_j - U_j B^i \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{F}^i_{HALL} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ 0 \\ \\ \frac{B^2 U^i_H - (\mathbf{B} \cdot \mathbf{U}_H) B^i}{\mu_0} \\ \\ U^i_H B_j - U_{H_j} B^i \end{bmatrix}, \tag{23}$$

y, finalmente, el vector de fuentes

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 \\ \\ \rho_m \mathbf{g} \\ \\ \rho_m \mathbf{U} \cdot \mathbf{g} - \nabla \cdot \left(\frac{\eta}{\mu_0} \mathbf{J} \times \mathbf{B} \right) \\ \\ -\nabla \times \eta \mathbf{J} \end{bmatrix}. \tag{24}$$

Debido a la no linealidad del sistema de ecuaciones anteriormente presentado, por lo general se desarrollan discontinuidades en las variables de estado del sistema, como lo son las ondas de choque, independientemente de que los datos iniciales sean suaves. Por esta razón, los métodos numéricos basados en las diferencias finitas no son aptos para el tratamiento de este tipo de ecuaciones. Existen diferentes métodos para la resolución de las ecuaciones MHD. En este trabajo se resuelven las ecuaciones MHD resistiva numéricamente usando el código MAGNUS (Navarro et al., 2017) el cual, en particular, usa métodos de alta resolución para captura de choques (*High Resolution Shock Capturing Methods-HRSC*).

Los métodos de alta resolución para la captura de choques se basan en el método de líneas, el cual consiste en la discretización del sistema de ecuaciones diferenciales parciales, de modo que se convierte a un sistema de ecuaciones diferenciales ordinaria en cada punto de la malla numérica. La parte espacial de este sistema de ecuaciones se discretiza usando del método de volúmenes finitos y para la evolución temporal se utiliza un método de integración estándar como un Runge-Kutta. Con el fin de obtener evoluciones estables, el paso de tiempo se elige siguiendo la condición de Courant?Friedrichs?Levy (Titarev and Toro, 2005; Courant et al., 1967), el cual adapta el paso de tiempo según las velocidades características del sistema. Debido a que el método de volúmenes finitos requiere calcular los flujos numéricos a través de las interceldas de la malla numérica, se utilizan los resolvedores de Riemann aproximado, como lo es el método HLLE (Einfeldt, 1988; Harten et al., 1983), el cual se basa en la solución del problema de Riemann. Además, existen diferentes algoritmos para reconstruir cualquier dato inicial en un problema de Riemann aproximado, como lo es el método MINMOD (Roe, 1986; Godunov, 1959), el cual es un método de segundo orden que rehace las funciones por medio de líneas rectas.

Finalmente, ya que los errores numéricos usualmente hacen que la divergencia del campo magnético pueda ser diferente de cero en la evolución temporal, se han ideado diversas estrategias numéricas para controlar este problema. En este caso, en particular, se usa el método de transporte de flujo restringido (Balsara, 2004; Evans and Hawley, 1988), para el cual se requiere que inicialmente se satisfaga que $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Todo lo anterior sin tener en cuenta el vector de flujos de Hall, $\mathbf{F}^i_{HALL}$, el cual se implenta en el código como se describe a continuación.

3.1.1. Inclusión del efecto HALL. La inclusión del efecto Hall en las ecuaciones de la MHD resistiva modifica las ecuaciones de energía (16) e inducción (17). Como parte de este trabajo se implementaron estos flujos adicionales en el código. Las ecuaciones se discretizan con el método del volúmenes finitos. Para ilustrar el método, se considera una malla numérica con una dimensión espacial y una dimensión temporal $\vec{x} = (t^n, x_i)$, donde la coordenada temporal se discretiza como $t^n = n\Delta t$ y la coordenada espacial como $x_i = i\Delta x$, donde $i = 0, 1, 2, ..., N_x$ y $n = 0, 1, 2, ..., N_t$ son las celdas en las que se divide el dominio espacio-temporal en cuestión. Ver figura 6.

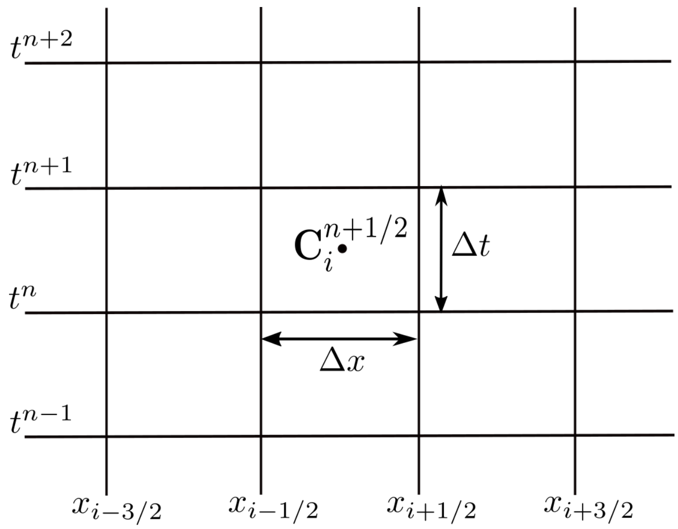

Figura 6. Discretización de la malla numérica en el esquema de volúmenes finitos. En esta figura se muestra un elemento de volumen del espacio tiempo $\Delta V = \Delta t \Delta x$ en una dimensión espacial.

De modo que, la discretización del sistema de ecuaciones (19), queda escrito de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \frac{dQ_{(i,j,k)}}{dt} = &- \frac{F^x_{(i+1/2,j,k)} - F^x_{(i-1/2,j,k)}}{\Delta x} \\ &- \frac{F^y_{(i,j+1/2,k)} - F^y_{(i,j-1/2,k)}}{\Delta y} \\ &- \frac{F^z_{(i,j,k+1/2)} - F^z_{(i,j,k-1/2)}}{\Delta z} + S_{(i,j,k)}, \end{aligned} \tag{25}$$

donde $F^x_{(i+1/2,j,k)}$, $F^y_{(i,j-1/2,k)}$, $F^z_{(i,j,k-1/2)}$ son los promedios espacio-temporales de los flujos en las interfaces de las celdas y Δx, Δy, Δz son las resoluciones espaciales en cada una de las dimensiones del dominio.

El vector $\mathbf{F}^i$, como se describió en la ecuación (22), está conformado por una parte ideal $\mathbf{F}^{IDEAL}$, que se calcula usando el método HLLE de alta resolución para la captura de choques y una parte con términos de Hall $\mathbf{F}^{HALL}$. Para calcular $\mathbf{F}^{HALL}$, es necesario calcular la velocidad de Hall $\mathbf{U_H}$, como se observa en la ecuación (23). Teniendo en cuenta que la velocidad de Hall es directamente proporcional a la densidad de corriente $\mathbf{J}$, es necesario calcular sus respectivas componentes:

$$\begin{aligned} J_x &= \partial_y B_z - \partial_z B_y, \\ J_y &= \partial_z B_x - \partial_x B_z, \\ J_z &= \partial_x B_y - \partial_y B_x, \end{aligned} \tag{26}$$

todas divididas por μ_0. Para calcular las anteriores derivadas, es necesario implementar un módulo que calcula las derivadas a lo largo de cada dirección usando un esquema de diferencias finitas de segundo orden. Así, en cada punto de la malla las derivadas se aproximan numéricamente utilizando diferencias finitas centrales en todo el dominio numérico, en excepción de las fronteras, en las cuales se utiliza diferencias finitas desbalanceadas hacia adelante o hacia atrás.

En este caso en particular, el módulo se utiliza para calcular las derivadas del campo magnético, por lo cual, se explicará el funcionamiento del módulo implementado con esta variable. Para un esquema de diferencias finitas de segundo orden, la derivada $\partial_x B_{i,j,k}$ se puede aproximar usando expansiones de series de Taylor truncadas, de la siguiente manera:

$$
\begin{aligned}
B_{i+1,j,k} &= B_{i,j,k} + \Delta x B'_{i,j,k} + \frac{\Delta x^2}{2} B''_{i,j,k} + \Delta\left(O^3\right), \\
B_{i-1,j,k} &= B_{i,j,k} - \Delta x B'_{i,j,k} + \frac{\Delta x^2}{2} B''_{i,j,k} - \Delta\left(O^3\right),
\end{aligned}
\tag{27}
$$

donde $\Delta\left(O^3\right)$ es el error de truncamiento que incluye los términos de orden superior. Restando las dos ecuaciones de (27) se obtiene que

$$
B'_{i,j,k} = \frac{B_{i+1,j,k} - B_{i-1,j,k}}{2\Delta x} + \Delta\left(O^2\right). \tag{28}
$$

Lo anterior constituye una expresión para el operador primera derivada con error de segundo orden. Cabe resaltar que este esquema de diferencias finitas es central, pues requiere los valores de la función en los puntos $(i+1, j, k)$ y $(i-1, j, k)$. Como consecuencia, solo funciona para puntos que no están ubicados en las fronteras de la malla. Para estos últimos se utilizan diferencias finitas hacia adelante y hacia atrás, las cuales utilizan los valores de la función en $(i, j, k), (i \pm 1, j, k)$ y $(i \pm 2, j, k)$. Así, para los extremos se tiene que

$$
\begin{aligned}
B'_{i=0,j,k} &= -\frac{B_{i+2,j,k} - 4B_{i+1,j,k} + 3B_{i,j,k}}{2\Delta x} + \Delta\left(O^2\right), \\
B'_{i=N_x,j,k} &= \frac{B_{i-2,j,k} - 4B_{i-1,j,k} + 3B_{i,j,k}}{2\Delta x} + \Delta\left(O^2\right),
\end{aligned}
\tag{29}
$$

donde, de forma análoga se calcula las derivadas parciales respecto a las otras direcciones. Una vez hecho calculadas las componentes de la densidad de corriente, es posible calcular las componentes de la velocidad de Hall, la cual se presenta en la ecuación (11)

$$(U_{H_x})_{i,j,k} = -(\eta_H)_{i,j,k}(J_x)_{i,j,k}, \tag{30}$$

y de forma análoga para las componentes U_{H_y}, U_{H_z}. Siendo η_H,

$$\eta_H = \frac{1}{ne} = \frac{m}{e}\frac{1}{\rho}, \tag{31}$$

en la cual se tiene el valor de $(\rho)_{i,j,k}$, y el factor m/e se conoce como el parámetro de Hall (Smith et al., 2004), el cual fue tomado como 0.25. Finalmente, se define la velocidad en la intercelda, ya que ahí es donde se calculan los flujos, de la siguiente manera

$$(U_H)_{i+1/2,j,k} = \frac{(U_H)_{i,j,k} + (U_H)_{i+1,j,k}}{2}, \tag{32}$$

donde, también aplica de forma análoga para $(U_H)_{i,j+1/2,k}$ y $(U_H)_{i,j,k+1/2}$.

3.1.2. Paso de tiempo adaptativo con término de HALL. Debido a la introducción de nuevos modos de onda en el sistema, el paso de tiempo con la condición de Courant?Friedrichs?Levy (Titarev and Toro, 2005; Courant et al., 1967), debe ser modificado. Por lo tanto, para garantizar la estabilidad del sistema, se utiliza

$$\Delta t_H^n = C_{CFL} \times \left(\frac{\Delta x}{\lambda_{Hi,j,k}^{n,x}} + \frac{\Delta y}{\lambda_{Hi,j,k}^{n,y}} + \frac{\Delta z}{\lambda_{Hi,j,k}^{n,z}} \right), \tag{33}$$

donde C_{CFL} es el parámetro de Courant-Friedrichs-Lewy y $\lambda_{Hi,j,k}^{n,p}$ es la velocidad de la onda más rápida en el tiempo n, que viaja en la dirección p, teniendo en cuenta la velocidad debido al término de Hall. Para saber qué valor toma esta velocidad, es necesario hacer un análisis dimensional, de la siguiente manera:

$$\frac{B_o}{t_o} = \eta_H \frac{j_o B_o}{x_o} = \eta_H \frac{B_o^2}{x_o^2}, \tag{34}$$

donde x_o representa una longitud característica dada por la resolución espacial de la simulación en cada dirección. En consecuencia, el tiempo característico está dado por

$$t_o = \frac{x_o^2}{B_o \eta_H} = \frac{x_o}{\frac{B_o \eta_H}{x_o}}, \tag{35}$$

siendo el denominador de la última fracción la rápidez del modo asociado con el efecto Hall. Teniendo en cuenta este término de la ecuación (35), la rapidez de onda más rápida se describe de la siguiente manera (Strumik and Stasiewicz, 2017; Tóth et al., 2008):

$$\lambda_H = |U| + |c_f| + \frac{B_o \eta_H}{x_o}, \tag{36}$$

donde U es la velocidad del fluido y c_f la velocidad magnetosónica rápida. En cada nivel de tiempo se evalua la rápidez λ_H en todos los puntos del dominio y elige la mayor. Con estos valores, se obtiene el paso de tiempo de la ecuación (33).

3.2. Modelo implementado

En los modelos convencionales de reconexión magnética en erupciones solares, generalmente se utilizan perfiles de densidad, presión y temperatura ideales, sin considerar la influencia de la gravedad. En estos casos, el perfil de presión se mantiene constante. Algunos artículos de investigación relevantes que han abordado este modelo incluyen referencias como Yokoyama and Shibata (2001); Takasao et al. (2015); Takasao and Shibata (2016). Sin embargo, en este trabajo de investigación, se propone un enfoque considerablemente más realista al tener en cuenta la influencia de la gravedad en el sistema. Además, se incorpora un perfil de temperatura analítico que se ajusta a los valores de temperatura observacionales en la corona solar, que es la región del Sol en la que se centra este estudio. La presión y la densidad se determinan mediante la aplicación de la ecuación de equilibrio hidrostático y la ecuación de estado.

Este estudio se basa en simulaciones numéricas 2.5-dimensionales, lo cual significa que todas las cantidades físicas son invariantes translacionalmente a lo largo del eje y. El dominio numérico correspondiente a x, y, z es [-7.5,7.5]Mm, [-0.1,0.1]Mm, [0,20]Mm respectivamente, con una malla de 300 puntos en x, 4 puntos en y, 400 puntos en z, la cual corresponde a una resolución espacial uniforme de 0.02Mm en las tres direcciones.

El perfil de temperatura se basa en el trabajo de Toriumi and Yokoyama (2011) y se define de la siguiente manera:

$$T(z) = T_{ph} + \frac{T_{cor} - T_{ph}}{2}\left[\tanh\left(\frac{z - z_{cor}}{w_{tr}}\right) + 1\right], \tag{37}$$

donde los valores $T_{ph} = 6100$K, $T_{cor} = 0.92 \times 10^6$K, $z_{cor} = 2.38$Mm y $w_{tr} = 0.18$Mm se utilizan para describir la transición de temperatura a lo largo de la altura z. En la figura 7 se presenta este perfil de temperatura, donde se establece que la altura cero ($z = 0$) corresponde a la parte más baja de la fotosfera. Según el modelo de capas de la atmósfera solar de la NASA, se estima que la fotosfera tiene un grosor de 0.4Mm, seguida de la cromosfera con un grosor de 1.7Mm, lo que ubicaría su límite en 2.1Mm. La zona de transición tiene un grosor aproximado de 0.1Mm, y finalmente, la corona, que es la capa más externa del Sol, comienza aproximadamente a 2.2Mm sobre la superficie solar.

Ahora, para definir la presión y la densidad de masa en el estado de equilibrio, es necesario tener en cuenta la ecuación de equilibrio hidrostático y la ecuación de estado para el gas en equilibrio, las cuales se muestran en las ecuaciones (38) y (39), respectivamente

$$\nabla p_0 - \rho_{m0}\mathbf{g} - \mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 = 0, \tag{38}$$

$$p_0 = \frac{2K_B}{m_p}\rho_{m0}T_0, \tag{39}$$

donde $\mathbf{J}_0 = \nabla \times \mathbf{B}_0/\mu_0$ y los subíndices 0 corresponde a las variables en el estado de equilibrio.

En este caso, se considera una configuración de campo magnético libre de fuerza, de modo que $\mathbf{J}_0 \times \mathbf{B}_0 = 0$; además, se define la gravedad constante y actuando en $-\hat{e}_z$, de modo que $\mathbf{g} = -2.74 \times 10^{-4} \hat{e}_z$[Mm/s^2]. Bajo las anteriores consideraciones, la ecuación de equilibrio hidrostática queda descrita de la siguiente manera

$$\frac{dp_0}{dz} = -g\rho_{m0}, \tag{40}$$

en la cual se reemplaza la densidad de masa utilizando la ecuación de estado

$$\frac{dp_0}{dz} = -\frac{m_p g}{2K_B}\frac{p_0}{T_0}, \tag{41}$$

de modo que al integrar (41) se obtiene la expresión (42) que presenta la presión en equilibrio en términos de la temperatura. Posteriormente, con la ecuación de estado es posible obtener la densidad de masa en equilibrio en términos de la presión y la temperatura, como se observa en la ecuación (43),

$$p_0(z) = p_0(z_0)\exp\left[-\frac{m_p g}{2K_B}\int_{z_0}^{z}\frac{dz'}{T_0(z')}\right], \tag{42}$$

$$\rho_0(z) = \frac{m_p}{2K_B}\frac{p_0(z)}{T_0(z)}, \tag{43}$$

donde z_0 en este caso es la base de la corona, de modo que $p_0(z_0) = 1.29$[Pa] es la presión en z_0 en el estado de equilibrio.

En la figura 7 se presenta la temperatura, junto con los perfiles de densidad y presión en el estado de equilibrio. Se trabaja en el dominio [0, 20]Mm, donde se observa que en la región de transición, que es aproximadamente en $z = 2.2$Mm, se presentan cambios abruptos en las variables de estado.

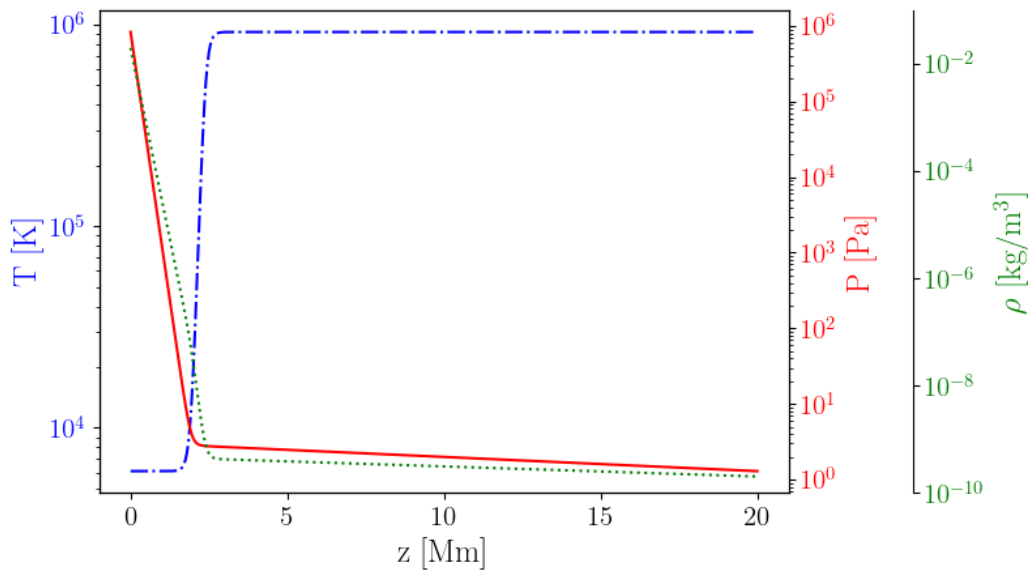

Figura 7. Modelo de temperatura analítico (curva azul), presión (curva roja) y densidad (curva verde) en estado de equilibrio, en escala logarítmica.

A tiempo inicial, las componentes de la velocidad se establecen en cero. Por otro lado, el campo magnético inicial se basa en el estudio de Shibata et al. (2023) y se define como un campo libre de fuerzas. Este campo magnético inicial corresponde a la hoja de corriente de Harris, el cual es un tipo específico de configuración de campo magnético que se utiliza comúnmente en el estudio de la reconexión magnética. Fue propuesto por E. G. Harris en 1962 como una solución simplificada de las ecuaciones de la MHD para describir un estado de equilibrio antes de la reconexión magnética. Este campo magnético se describe de la siguiente manera:

$$B_x(x,y,z) = 0, \tag{44}$$

$$B_y(x,y,z) = B/\cosh(x/\lambda), \tag{45}$$

$$B_z(x,y,z) = -B\tanh(x/\lambda), \tag{46}$$

donde $\lambda = 0.5$Mm es el ancho de la hoja de corriente inicial y B es la magnitud del campo magnético y se toma como 0.01 teslas, valor que se toma de la tabla 2 para las microerupciones. Ahora, para inducir la reconexión magnética, se adopta una resistividad espacialmente localizada en forma de

$$\eta(x,y,z) = \eta_0 \exp\left[-\left(\frac{\sqrt{x^2+(z-h_\eta)^2}}{w_\eta}\right)^2\right], \tag{47}$$

con $w_\eta = 1$Mm, $h_\eta = 10$Mm y $\eta_0 = 0.005\eta_a$ [2]. La geometría del campo magnético en la condición inicial se muestran en la Figura 8, donde las líneas representan la magnitud del campo magnético.

---

[2] El valor de η_a, así como las otras variables de normalización, se encuentra en el Anexo A.

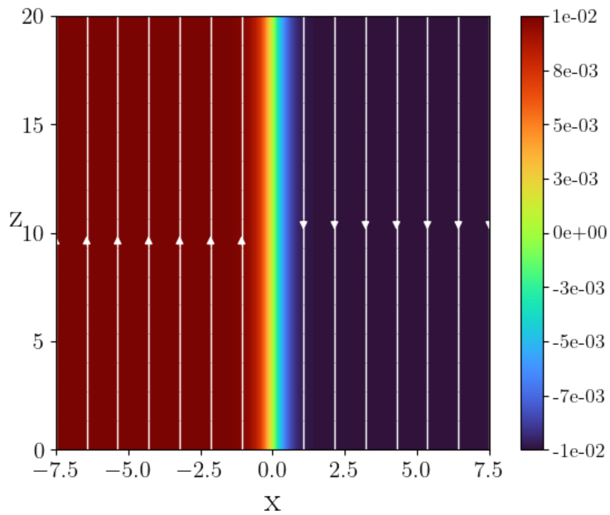

Figura 8. Campo magnético transversal inicial representado en el plano xz, con las líneas indicando la magnitud del campo magnético.

Ahora, las condiciones de frontera impuestas fueron las siguientes: Para la parte izquierda y derecha del dominio numérico se imponen condiciones de frontera fijas, es decir, la evolución temporal de las variables en estos puntos es nula, y se mantienen las condiciones iniciales para dichas fronteras, de modo que

$$\begin{aligned} \alpha(1,j,z) &= \alpha_p(1,j,z), \\ \alpha(0,j,z) &= \alpha_p(0,j,z), \\ \alpha(Nx-1,j,z) &= \alpha_p(Nx-1,j,z), \\ \alpha(Nx,j,z) &= \alpha_p(Nx,j,z), \end{aligned} \tag{48}$$

siendo α una variable arbitraria y α_p es dicha variable en el estado inicial. j, k recorren todos los puntos de la malla en los ejes y, z respectivamente y N_x es el último punto de la malla en el eje x.

Por otro lado, para las caras frontal y trasera se aplican condiciones de flujo saliente, las cuales en cada paso de tiempo toman el valor de las variables en el punto inmediatamente anterior a la frontera y se lo asignan al de la frontera correspondiente. Esta condición evita que el flujo que ha salido del dominio numérico regrese y contamine de errores numéricos la evolución

$$\begin{aligned}
\alpha(i,1,z) &= \alpha(i,2,z),\\
\alpha(i,0,z) &= \alpha(1,1,z),\\
\alpha(i,Ny-1,z) &= \alpha(1,Ny-2,z),\\
\alpha(i,Ny,z) &= \alpha(1,Ny-1,z),
\end{aligned} \tag{49}$$

donde i, k recorren todos los puntos de la malla en los ejes x, z respectivamente y N_y es el último punto de la malla en el eje y.

Finalmente, para la parte inferior del dominio se imponen condiciones de frontera fijas y, para la parte superior condiciones de flujo saliente, de modo que

$$\alpha(i,j,1) = \alpha_p(i,j,1),$$

$$\alpha(i,j,0) = \alpha_p(i,j,0),$$

$$\tag{50}$$

$$\alpha(i,j,Nz-1) = \alpha(i,j,Nz-2),$$

$$\alpha(Nx,j,Nz) = \alpha(i,j,Nz-1),$$

en el cual i, j recorren todos los puntos de la malla en los ejes x, y respectivamente y N_z es el último punto de la malla en el eje z.

4. RESULTADOS Y DISCUSIÓN

4.1. Morfología

Con el objetivo de realizar una revisión morfológica de la hoja de corriente, se muestra la evolución temporal del campo magnético para un caso en particular: sin considerar el término de Hall en el sistema. En la Figura 9, se tiene la evolución del campo magnético transversal en diferentes instantes de tiempo (t = 13[s], 30[s], 45[s], 62[s], 78[s] y 98[s]). Durante la transición de la fase previa a la erupción en t=0[s] a la fase impulsiva, se destaca la presencia de una perturbación en la hoja de corriente debido a la reconexión magnética, esta perturbación se hace evidente en t=13[s]. Debido a la resistividad localizada, el punto z=10[Mm] en la lámina de corriente evoluciona hacia un punto X, tal como se observa a los 30 segundos.

Posteriormente, a los 45 segundos, se puede apreciar una estructura similar al modelo estándar de una erupción solar, tal como se muestra en el esquema de la Figura 3. En esta estructura, las líneas de campo inicialmente extendidas se reconectan en el punto X, debido al flujo entrante perpendicular a la hoja de corriente. Las líneas de campo reconectadas, junto con el plasma congelado, son expulsadas como chorros ascendentes y descendentes desde este punto X debido a la fuerza de tensión magnética. El campo magnético reconectado que desciende desde el punto X forma un bucle cerrado que está bien anclado en sus puntos de pie en la fotosfera. En la parte superior de este bucle, el chorro de reconexión colisiona con el plasma del bucle. A raíz de ese esto, se forma un choque MHD de modo rápido, y el plasma del chorro se comprime detrás de este choque (Yokoyama and Shibata, 1998). La mancha en la parte superior de los bucles en los tiempos t=62[s], 78[s] y 98[s] es producto de este efecto.

Además, es notorio que el sistema de bucles aumenta con el tiempo, esto es debido a que la fuerza de tensión de las líneas de campo reconectadas acelera el plasma fuera del punto de disipación. En respuesta a este flujo de salida, el plasma ambiente es atraído. El plasma entrante arrastra las líneas de campo magnético ambiente hacia el punto de disipación. Estas líneas de campo continúan el ciclo de reconexión y producen un crecimiento en el bucle. Una de las pruebas que apoya este modelo es la observación de un bucle de una erupción de rayos X blandos con forma de cúspide (Tsuneta et al., 1992). Se cree que la punta de la cúspide es el remanente del pliegue de las líneas de campo reconectadas. Este bucle de erupción en forma de cúspide aumenta su altura y la distancia entre los puntos de pie, como consecuencia del amontonamiento de las líneas de campo magnético (Forbes and Priest, 1987; Hiei et al., 1993). La observación de la erupción realizada por Masuda et al. (1994) demuestra la existencia de una fuente de rayos X duros por encima del bucle de rayos X blandos. Esta fuente sugiere que algún proceso de alta energía, como la aceleración de electrones asociada a la reconexión, está ocurriendo por encima del bucle de rayos X blandos.

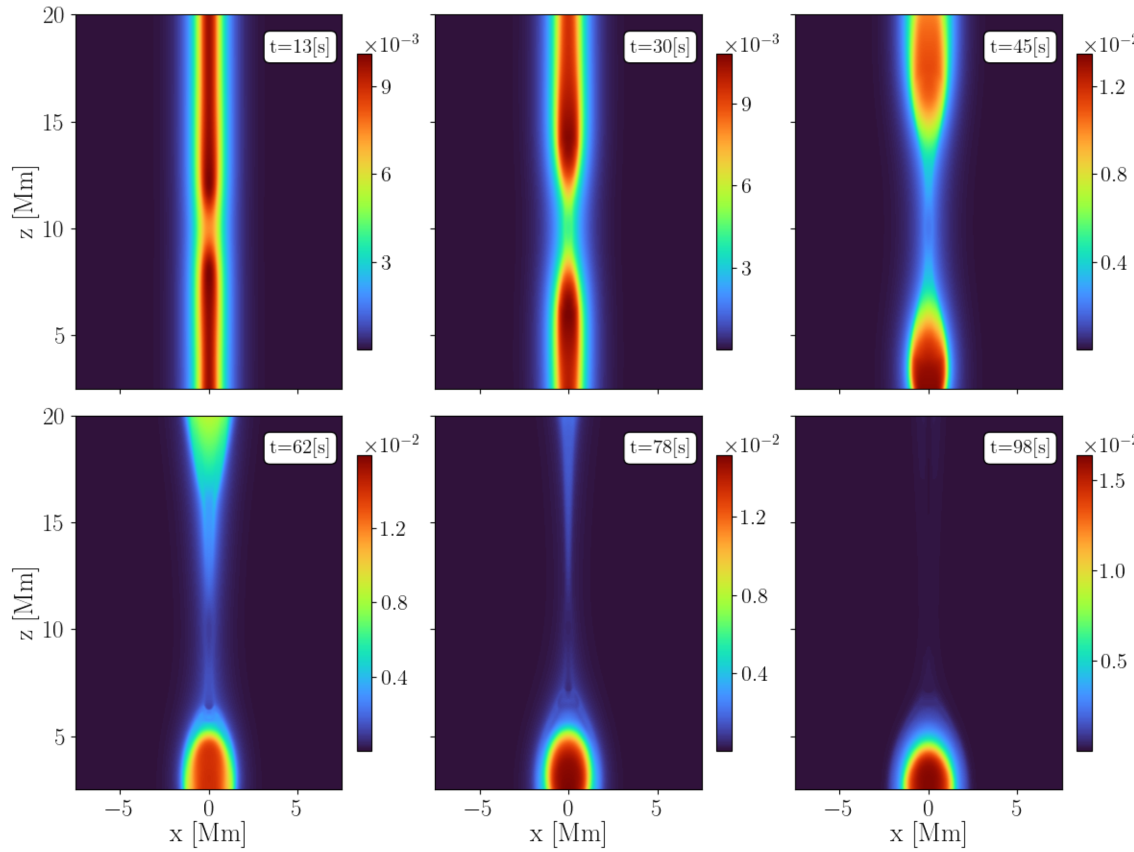

Figura 9. Campo magnético transversal B_y en T para el caso en el que no se tiene en cuenta la influencia del término de Hall, en diferentes instantes de tiempo: $t = 13s, 30s, 45s, 62s, 78s$ y $98s$, respectivamente. En esta gráfica se puede observar la estructura del modelo estándar de una erupción solar.

Por otro lado, el flujo ascendente forma una isla magnética o plasmoide que se desplaza a través de la corona solar. Dependiendo de si este plasmoide es expulsado hacia el espacio interplanetario, podría generar una eyección de masa coronal (EMC). Se han observado EMC asociadas a erupciones (Shibata et al., 1995; Shibata, 1996), las cuales son el resultado del flujo de salida del punto de reconexión. Pero, a pesar de que están fuertemente relacionadas, las EMC no son necesariamente el propio flujo de reconexión de las erupciones solares.

Ahora, con el fin de comparar la morfología entre los casos sin y con término de Hall, se presenta la Figura 10, en la cual se muestra la densidad de corriente en las dos primeras filas (sin Hall y con Hall, respectivamente), y la temperatura en las dos últimas filas (también sin Hall y con Hall). Por otro lado, en la Figura 11, se presentan la componente x de la velocidad, U_x, en las dos primeras filas (sin Hall y con Hall, respectivamente), y la componente z de la velocidad, U_z en las dos últimas filas (también sin Hall y con Hall). Ambas gráficas se centran en tres instantes de tiempo: t=22[s], 36[s], 45[s].

En la Figura 10, se puede observar en detalle la morfología de la hoja de corriente a través de la densidad de corriente. En el escenario donde no se considera el efecto Hall (primera fila), se aprecia una simetría completa en el sistema. Sin embargo, al introducir el término de Hall (segunda fila), se observa una asimetría discernible. Esta asimetría se debe a que el efecto Hall provoca la aparición de un campo eléctrico en el plano donde ocurre la reconexión magnética, entonces la densidad de corriente, $\mathbf{J}$, ya no está alineada con el campo eléctrico, $\mathbf{E}$. Este acoplamiento incompleto produce corrientes adicionales que afectan el movimiento del plasma, y por lo tanto, la simetría en la estructura de la hoja de corriente. Además, también se puede observar que la región de difusión para el caso sin efecto Hall es más grande que en el caso considerando el efecto.

En la distribución de la temperatura mostrada en las últimas dos filas de la Figura 10, se observa que el punto X es la zona más caliente. La temperatura en el punto X y sus alrededores aumenta con el tiempo para los dos casos presentados. En el caso sin Hall, se alcanzan temperaturas de 8.5[MK] en el punto X a los 45[s], mientras que las zonas superior e inferior a este punto tienen una temperatura de aproximadamente 5[MK] en ese mismo instante. Por otro lado, considerando el efecto Hall, a los 45[s], la temperatura en el punto X es de 6.5[MK] y alrededor de 4[MK] en las cercanías. Se observa que, aunque la temperatura en el caso con Hall es menor en ese instante, el dominio de temperatura de 4[MK] alrededor del punto X es más amplio que en el caso sin Hall. Esto significa que cuando el sistema con Hall alcance la temperatura de 8.5[MK] en el punto X, las zonas cercanas tendrán una temperatura mayor que en el caso sin Hall y, además, abarcará un dominio mucho más grande.

En relación a los perfiles de velocidad que se muestran en la Figura 11, se puede observar que existe un flujo que se desplaza hacia la hoja de corriente, presentando velocidades positivas a la derecha y velocidades negativas a la izquierda, en concordancia con la configuración inicial del campo magnético. Además, se puede notar que las contribuciones positivas y negativas en las partes inferior y superior de la estructura se invierten. Esto se debe a que estas contribuciones corresponden a ondas Alfvénicas que surgen después de que el flujo descendente y ascendente tocan el límite de los bucles y se reflejan (Birn and Priest, 2007).

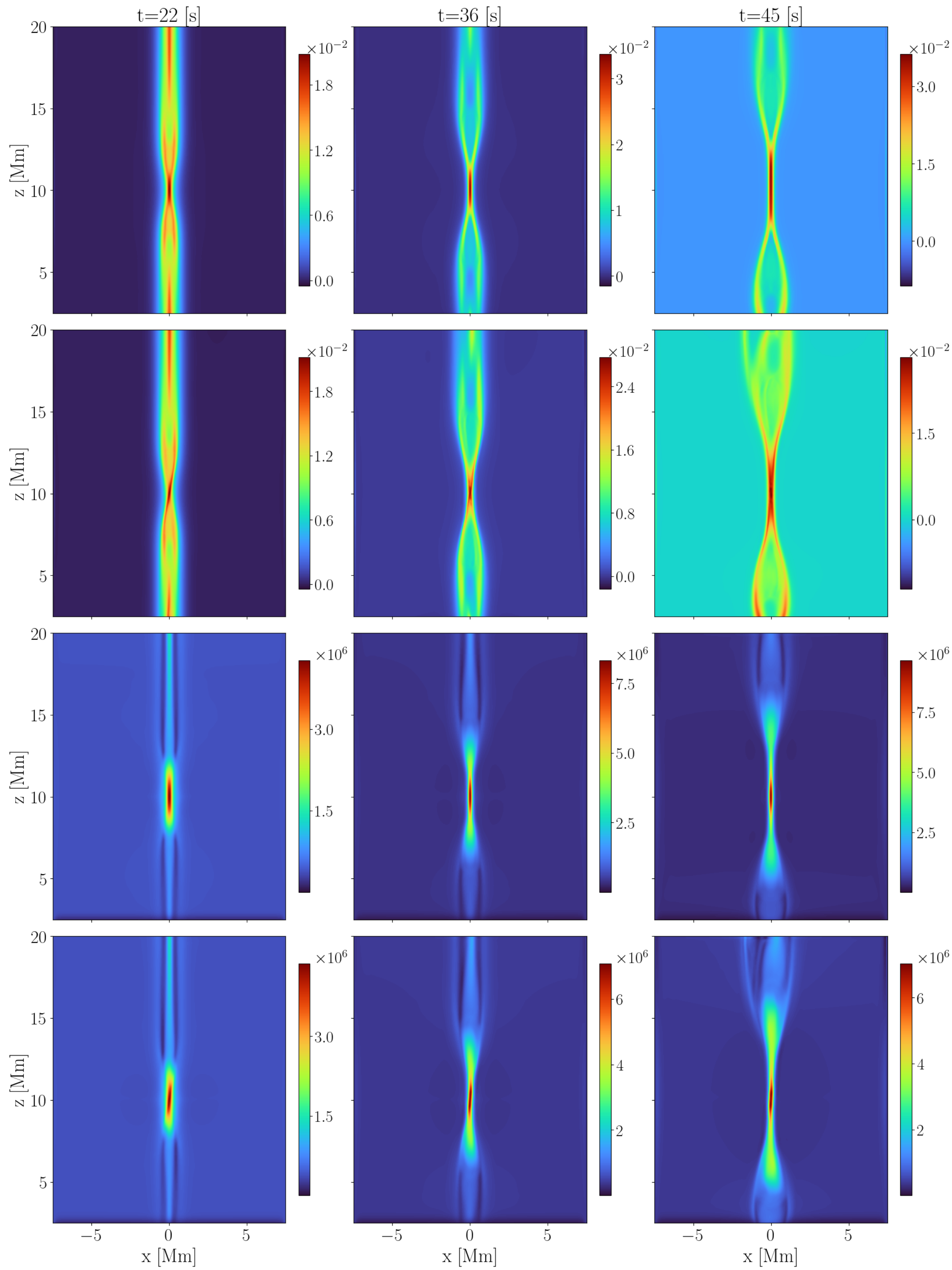

Figura 10. Densidad de corriente J_y en A/m^2, sin y con término de hall (primera y segunda fila, respectivamente). Temperatura T en K, sin y con término de hall (tercera y cuarta fila, respectivamente). Lo anterior para los tiempos $t = 22s$ (primera columna), $t = 36s$ (segunda columna) y $t = 45s$ (tercera columna).

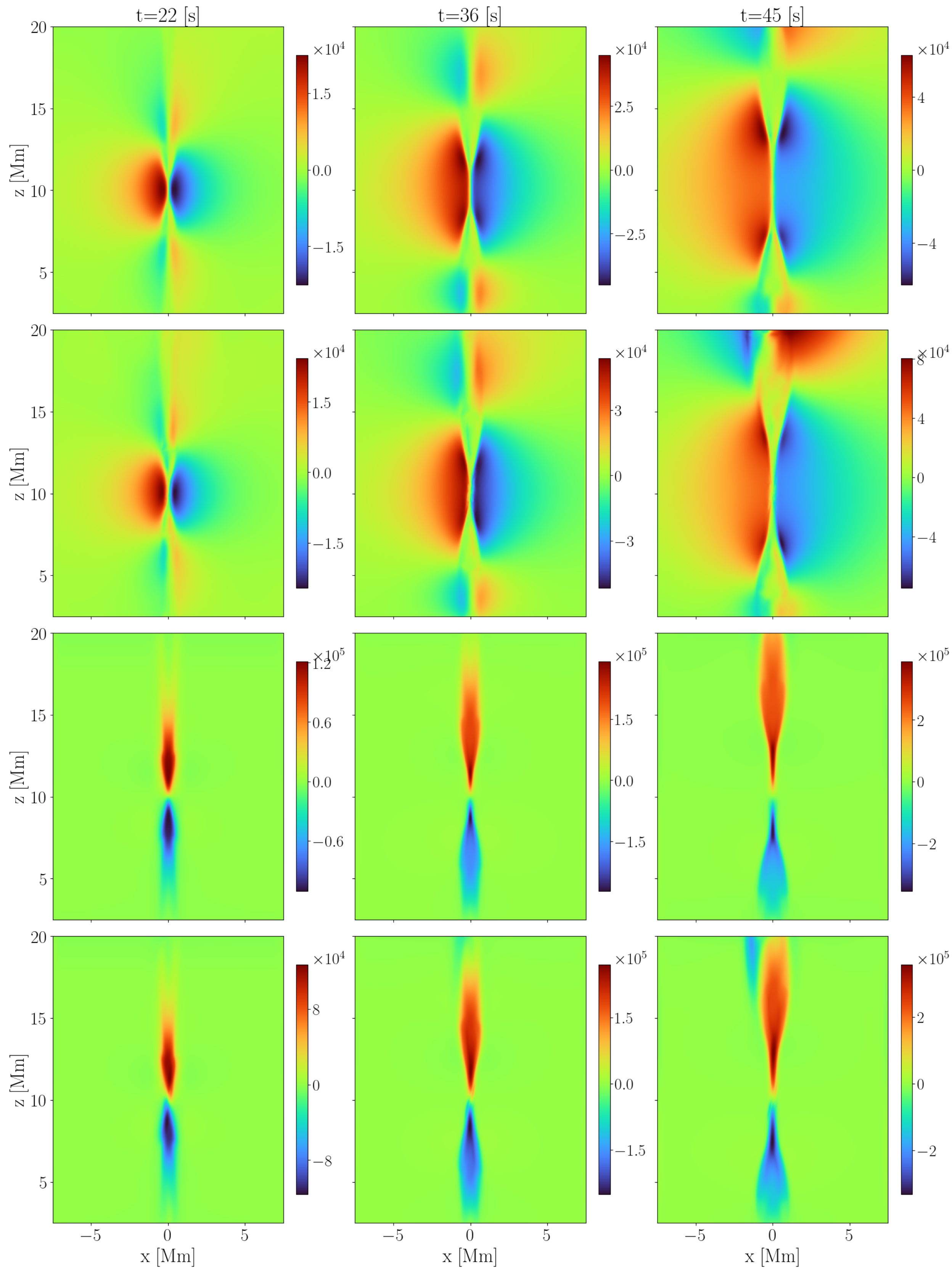

Figura 11. Velocidad de entrada U_x en m/s, sin y con término de hall (primera y segunda fila, respectivamente). Velocidad de salida U_z en m/s sin y con término de hall (tercera y cuarta fila, respectivamente). Lo anterior para los tiempos $t = 22s$ (primera columna), $t = 36s$ (segunda columna) y $t = 45s$ (tercera columna).

Cuantitativamente, tanto las velocidades de los flujos en la dirección x como las velocidades de los flujos en la dirección z aumentan con el tiempo. A los 45 segundos, la velocidad del flujo de entrada alcanza los 50 $[km/s]$ en el caso sin Hall, mientras que, al considerar el efecto Hall, llega a 80 $[km/s]$ en ese mismo instante. Por otro lado, la velocidad del flujo de salida es aproximadamente de 400 $[km/s]$ en ese tiempo tanto en el caso con Hall como en el caso sin Hall. Estas velocidades de los flujos de salida se encuentran dentro del rango de 50-400 $[km/s]$, que ha sido reportado por Shibata et al. (1995) y Shibata and Magara (2011), para las velocidades características de plasmoides asociados a microerupciones y erupciones impulsivas.

4.2. Flujo reconectado

Una de las principales propiedades que caracterizan a las erupciones solares es la cantidad de flujo magnético que se reconecta, el cual se estudia a través de la tasa de reconexión adimensional. La tasa de reconexión es una de las cantidades más importantes en la física de la reconexión magnética. Aunque el flujo reconectado no puede medirse directamente a partir de las observaciones de la corona, el modelo estándar implica una relación cuantitativa entre el flujo de reconexión en la corona y el flujo magnético barrido por los bucles de la erupción (Kazachenko et al., 2017). El flujo de reconexión por unidad de tiempo $\partial\Phi/\partial t$ está definido por

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial t}\int B_c dS_c = \frac{\partial}{\partial t}\int B_n dS_r, \tag{51}$$

el cual está definido por la integración del campo magnético coronal de entrada, B_c, sobre el área de reconexión, dS_c. En el lado derecho, B_n es la componente normal del campo magnético en los bucles que son los puntos de pie de las líneas de campo magnético recién reconectadas en la corona. Mientras que las medidas directas de B_c y dS_c en la corona no son factibles actualmente, B_n y dS_r son relativamente sencillas de obtener a partir de magnetogramas fotosféricos y observaciones de bucles de erupciones en la atmósfera baja. Sumando el flujo normal total barrido por el área del bucle dS_r, se obtiene

$$\Phi = \int B_c dS_c = \int B_n dS_r, \quad (52)$$

de manera observacional es una medida indirecta, pero bien definida, de la cantidad de flujo magnético procesado por reconexión en la corona durante la erupción. En la implementación computacional del modelo, se utiliza la expresión del campo magnético de entrada B_x sobre la hoja de corriente que está en el plano yz. Por lo tanto, el flujo reconectado se calcula como:

$$\Phi = (y_{max} - y_{min}) \int_0^{N_z/2} B_x(N_x/2, N_y/2, z) dz, \quad (53)$$

teniendo en cuenta que y es invariante translacionalmente. Por otro lado, también se calcula la tasa de reconexión tal como se define en la ecuación (12). Aunque resulta imposible determinar la ubicación y el volumen exacto de toda la región de difusión en cada paso de tiempo, se mantiene constante el ancho inicial de la hoja de corriente en el centro del dominio. Esto se aprecia en la densidad de corriente J_y presentada en la figura 10.

Por lo tanto, la entrada de la región de difusión se puede considerar como un punto del dominio con coordenadas $(N_{xi}, N_y/2, N_z/2)$, donde N_{xi} está determinado por el ancho inicial de la hoja de corriente. Teniendo en cuenta el punto a la región de entrada, la tasa de reconexión M_A se calcula como

$$M_A = \frac{U\left(N_{xi}, N_y/2, N_z/2\right)}{v_A\left(N_{xi}, N_y/2, N_z/2\right)}, \tag{54}$$

con $v_A = B/\sqrt{\mu_0 \rho}$ y el punto N_{xi} definido como

$$N_{xi} = int\left(\frac{x_c - x_{\text{mín}}}{dx}\right), \tag{55}$$

donde el valor de x_c es de 0.5.

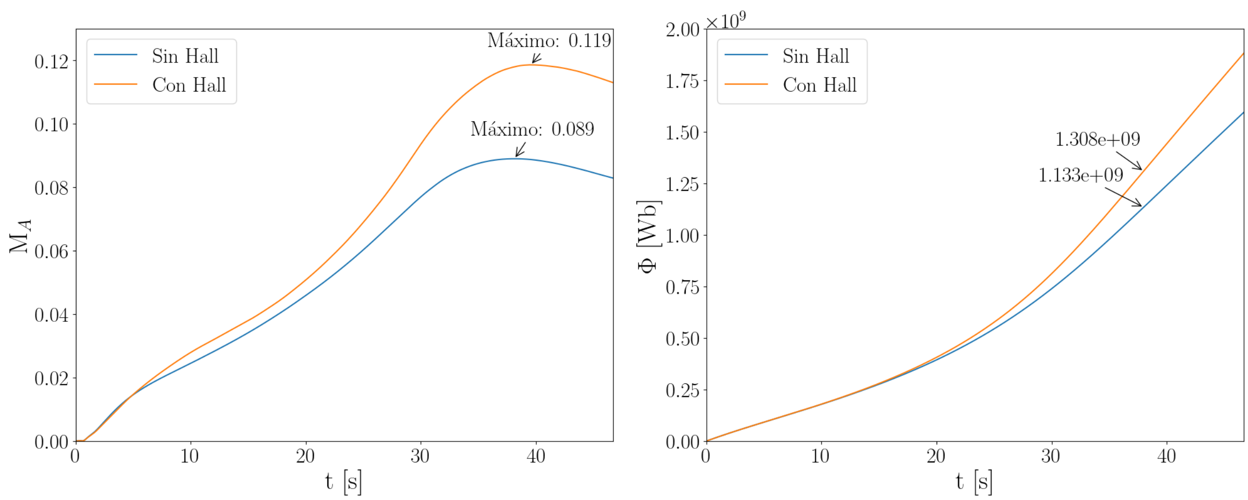

Figura 12. Tasa de reconexión vs tiempo en segundos (izquierda). Flujo reconectado en weber vs tiempo en segundos (derecha). Se presenta el caso sin Hall (línea azul) y el caso en el que la influencia de este término se tuvo en cuenta (línea naraja). El máximo de reconexión para el caso sin hall es de 0.089 y con hall es de 0.119

En la figura 12, se muestra la tasa de reconexión y el flujo reconectado en función del tiempo, utilizando las ecuaciones (54) y (53), respectivamente. En ambas gráficas, el caso sin Hall se representa con la línea azul y el caso con Hall con la línea amarilla. En la imagen de la derecha, se observa que al considerar el término de Hall, el flujo reconectado aumenta más rápidamente que en el caso sin Hall, a partir de aproximadamente $t = 20$s. A los $t = 38$s, se puede apreciar que el flujo reconectado es aproximadamente un 15 % mayor con Hall que en el caso sin Hall. Por otro lado, en la imagen de la izquierda se puede observar que la máxima tasa de reconexión para el caso sin Hall es de 0.089. En cambio, para el caso con Hall, este valor es de 0.119. Esto indica que, al considerar el efecto Hall, la tasa de reconexión máxima es aproximadamente un 37 % mayor que sin tenerlo en cuenta.

En el contexto de las erupciones solares, las observaciones han proporcionado tasas normalizadas de reconexión magnética en un rango de 0.001 a 0.2 (Ohyama and Shibata, 1998; Yokoyama and Shibata, 2001; Isobe et al., 2002; Qiu et al., 2002; Fletcher et al., 2004; Lin et al., 2005; Isobe et al., 2005), aunque es importante tener en cuenta las grandes incertidumbres asociadas a la medición de los campos magnéticos para realizar esta normalización (Cassak et al., 2017). Pero, las simulaciones numéricas en una amplia gama de entornos con plasmas debilmente colisionales indican que la tasa de reconexión magnética se sitúa alrededor de 0.1 (Cassak and Shay, 2012). Este resultado se respalda por ejemplo, con los resultados del desafío de reconexión magnética del proyecto GEM (*Geospace Environment Modeling*), proyecto en el cual se estudia la reconexión magnética 2D en la magnetocola terrestre utilizando códigos PIC (*Particle-in-Cell*)[3], híbridos[4], MHD Hall y MHD (con una resistividad uniforme de $\eta = 0.005$) (Hesse et al., 2001; Kuznetsova et al., 2001; Ma and Bhattacharjee, 2001; Otto, 2001; Pritchett, 2001). En este proyecto se obtuvo que las tasas de reconexión para todos los casos, en excepción de MHD con resistividad uniforme, daban valores cercanos a 0.1. Esto ha llevado a la idea de que la reconexión de baja colisión exhibe una "tasa universal" (Shay et al., 1999). En la Figura 12, se observa que este valor de tasa de reconexión se obtiene al tener en cuenta el término de Hall, lo cual nos lleva a concluir que, este término no da lugar por sí mismo a la reconexión, pero puede amplificar la tasa de reconexión en presencia de una resistividad finita.

4.3. Energía transferida

No cabe duda de que la energía liberada en las erupciones solares procede de la energía magnética almacenada en la corona solar y que la reconexión magnética es el proceso físico que permite esta liberación y su conversión en energía cinética y energía interna. Pero los detalles de esta transferencia de energía siguen siendo muy poco conocidos. Por lo tanto, se hace necesario analizar las propiedades de transferencia de energía asociadas al proceso de reconexión magnética.

Con el fin de estudiar la energía transferida en este proceso, se analizan los flujos en la

---

[3] Las simulaciones PIC se utilizan para modelar el comportamiento cinético del plasma, no como un fluido sino como una colección de partículas que interactúan y exhiben un comportamiento colectivo. En general, estos códigos resuelven las ecuaciones de Maxwell junto con ecuaciones para el movimiento de macropartículas, las cuales representan numerosas partículas del plasma que se mueven en conjunto a una misma velocidad.

[4] Los modelos híbridos utilizan la aproximación cinética de los códigos PIC junto con la de fluido de la MHD. Por ejemplo, tratan los electrones como fluido y los iones cinéticamente.

ecuación de energía (la cual se presenta en la ec. (16)). En primer lugar, se expande el término $(\varepsilon + p_T)\mathbf{U}$, obteniendo así

$$\begin{aligned}(\varepsilon + p_T)\mathbf{U} &= \frac{p}{\gamma - 1}\mathbf{U} + \frac{\rho U^2}{2}\mathbf{U} + \frac{B^2}{2\mu_0}\mathbf{U} + p\mathbf{U} + \frac{B^2}{2\mu_0}\mathbf{U}, \\ (\varepsilon + p_T)\mathbf{U} &= \frac{\gamma p}{\gamma - 1}\mathbf{U} + \frac{\rho U^2}{2}\mathbf{U} + \frac{B^2}{\mu_0}\mathbf{U}, \end{aligned} \tag{56}$$

en la cual se identifican los siguientes flujos de energía: el flujo de entalpía, $\mathbf{H}$, que describe el transporte convectivo de energía térmica

$$\mathbf{H} = \frac{\gamma p}{\gamma - 1}\mathbf{U}, \tag{57}$$

el flujo de energía cinética, $\mathbf{K}$,

$$\mathbf{K} = \frac{\rho U^2}{2}\mathbf{U}, \tag{58}$$

y el término $B^2/\mu_0\mathbf{U}$ asociado al transporte de energía electromagnética, el cual junto a los otros flujos de campo magnético del lado izquierdo de la ecuación (16), conforman el vector de Poyinting incluyendo el término de Hall. El vector de Poyinting, $\mathbf{S}$, se define como

$$\mathbf{S} = \frac{\mathbf{E} \times \mathbf{B}}{\mu_0}, \tag{59}$$

donde el campo eléctrico $\mathbf{E}$ se define según la ley de Ohm generalizada descrita en la ecuación (8), obteniendo la siguiente expresión

$$\mathbf{S} = \frac{1}{\mu_0}(-(\mathbf{U}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + \eta\mathbf{J}\times\mathbf{B} + \eta_H(\mathbf{J}\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}), \tag{60}$$

término que coincide con los términos de flujo asociados a los campos magnéticos de la ecuación (16).

La Figura 13 muestra, de izquierda a derecha, las componentes del vector de Poynting S_x y S_z, así como la componente del flujo de energía cinética en z, K_z. Estas representaciones corresponden tanto al caso sin Hall (fila superior) como al caso con Hall (fila inferior) en un tiempo de 38[s]. Es importante destacar que la morfología observada es similar a la presentada en la Figura 11, la cual muestra las velocidades en el sistema. Cabe mencionar que el flujo de entalpía, H_z, presenta una morfología muy similar a la de K_z, por lo que no se incluye en el gráfico. Además, se observa que tanto el flujo de energía cinética como el flujo de entalpía solo son significativos en las proximidades del punto de reconexión.

Con el fin de analizar la evolución temporal de los flujos de energía en una región donde todos realicen aportes significativos, se integran los términos específicados en las ecuaciones (57), (58) y (60) en una caja numérica de x [-3,3], y [-0.1,0.1] y z [8,15], la cual se enmarca con rectángulos rojos en las gráficas de la figura 13. La evolución temporal de los flujos de energía en el dominio anteriormente mencionado se muestra en la Figura 14, donde se presentan los flujos S_x, H_x, y K_x en la columna izquierda y los flujos S_z, H_z, y K_z en la columna derecha, con respecto al tiempo. Para las anteriores gráficas se presenta el caso sin Hall en azul y el caso con Hall en amarillo. Las unidades de los flujos de energía son erg/s.

En la Figura 14, se puede observar que en t=0[s], todos los flujos de energía son igual a cero. En la columna izquierda se muestra la componente x de los flujos de energía. Cuando se considera el efecto Hall, en la componente x del flujo de Poynting se observan fluctuaciones marcadas, representadas por valles y picos. Estas fluctuaciones indican que al sumar los flujos en la caja numérica especificada en la Figura 13, predominan los flujos negativos para los valles y los flujos positivos para los picos. Por otro lado, en el caso sin Hall, no se observan estas fluctuaciones, esto se debe a que el sistema es simétrico y los flujos se cancelan. Asimismo, en el flujo de entalpía y el flujo de energía cinética también se aprecian valles y picos para el caso con Hall, aunque no tan pronunciados como en el vector de Poyinting. Para el caso sin Hall los flujos de entalpía y energía cinética son muy pequeños, tal como se presenta en el estudio de energía transferida de Birn and Priest (2007).

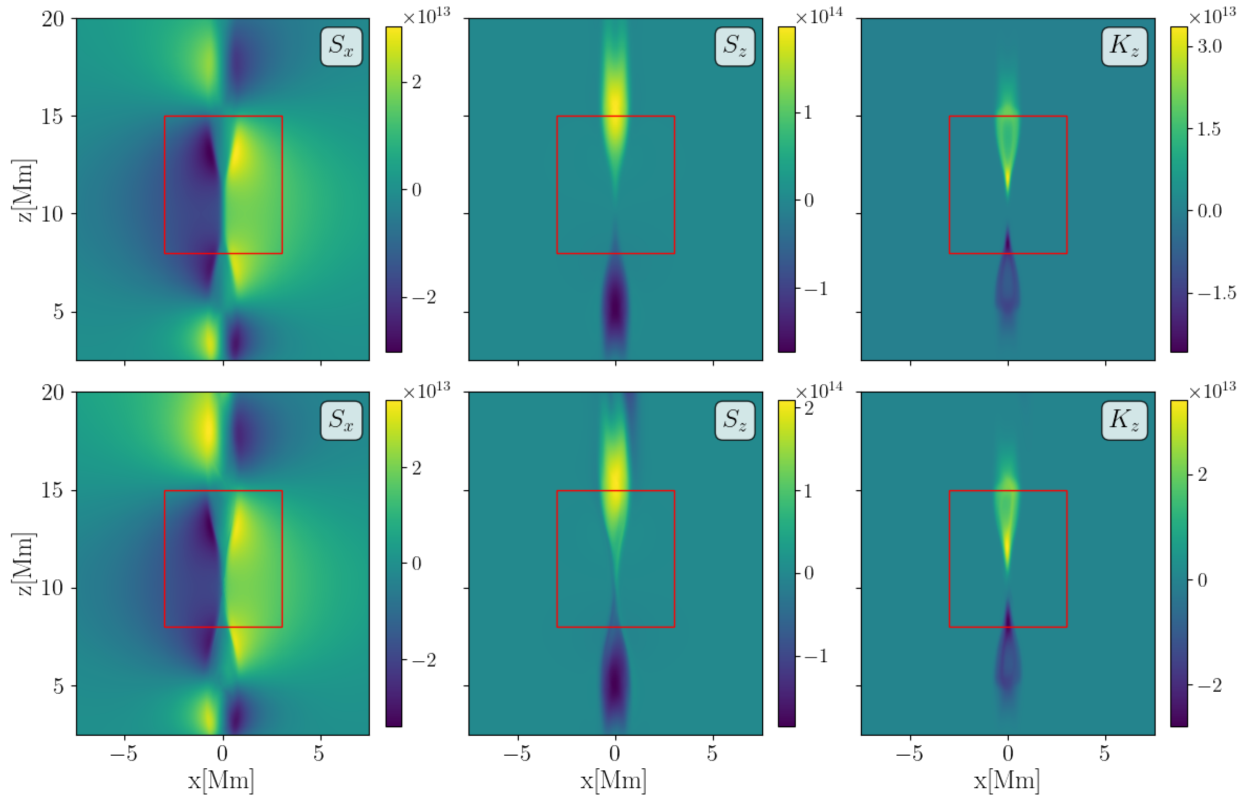

Figura 13. De izquierda a derecha: componentes del vector de Poynting S_x y S_z, y la componente del flujo de energía cinética en z, K_z. Lo anterior para el caso sin hall (fila superior) y para el caso con hall (fila inferior), en un tiempo de 38[s]. Las unidades son $erg/(m^2 s)$.

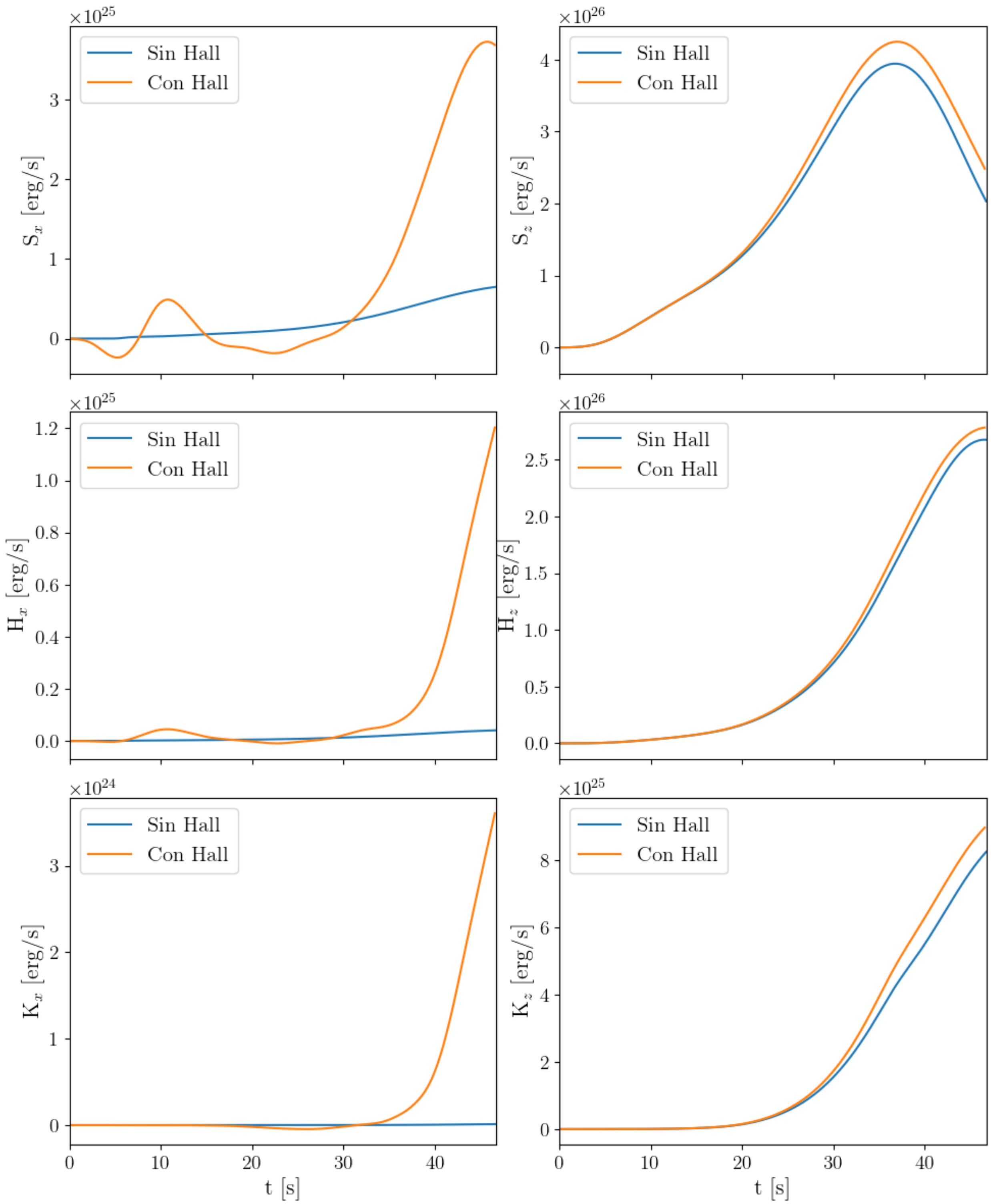

Figura 14. Evolución temporal de los flujos de energía entrantes S_x, H_x, y K_x en la columna izquierda y los flujos de energía salientes S_z, H_z, y K_z en la columna derecha. Las unidades se dan en erg/s.

Hasta aproximadamente los 35 segundos, las componentes x de los flujos de energía se mantienen en un mismo orden de magnitud para los dos casos. Posteriormente se presenta un aumento abrupto en los flujos de energía para el caso con Hall. Con el fin de hacer un análisis cuantitativo se presentan los valores de los flujos en el tiempo de mayor tasa de reconexión: t=38[s]. En este instante de tiempo, el flujo de energía cinética entrante es 4×10^{22} [erg/s], dos órdenes de magnitud menor que para el caso con hall. El flujo de entalpía entrante, en cambio, es de 3×10^{24} [erg/s], aproximadamente un orden de magnitud menor que para el caso con Hall. Por otro lado, si bien el flujo de Poyinting es mayor, es de 0.5×10^{25} [erg/s] para el caso sin hall, en comparación a 2×10^{25} [erg/s] para el caso con Hall. Esto implica que, al igual que en el análisis de las velocidades, el término de Hall tiene un impacto significativo en la componente x. En conclusión, el término de Hall juega un papel fundamental en el estudio de los flujos entrantes a las hojas de corriente durante la reconexión magnética en las erupciones solares.

En relación a la componente z de los flujos presentados en la columna derecha, los flujos de Hall no experimentan cambios abruptos como en las componentes x. Sin embargo, se observa un aumento en comparación con los flujos sin Hall. Por ejemplo, en $t = 38$s, se puede notar que con el término de Hall, el vector de Poynting es un $9\,\%$ mayor, el flujo de entalpía es un $7\,\%$ mayor y el flujo de energía cinética es un $15\,\%$ mayor. Es importante destacar que estos flujos de energía saliente están en el orden de 10^{26} [erg/s], lo cual es consistente con los datos de energía reportados en Yokoyama and Shibata (2001) y Shibata and Magara (2011) para las microerupciones.

5. CONCLUSIONES

Se llevaron a cabo simulaciones numéricas de la reconexión magnética en una erupción solar, en particular, teniendo en cuenta las escalas características y cantidades fśicas correspondientes a una microerupción. Se consideró un entorno considerablemente más realista que el abordado en la mayoría de los artículos relacionados con esta área de investigación, ya que se tuvo en cuenta la influencia de la gravedad en el sistema. La influencia de la gravedad en el sistema agregó un nivel adicional de complejidad al estudio, particularmente en las condiciones de frontera. Además, se logró trabajar con valores de campos magnéticos de 0.01 teslas, que corresponden con las medidas observacionales, pero al ser tan grandes representaron un desafío computacional significativo. Asimismo, se incorporaron los flujos de Hall en el código MAGNUS mediante el uso de diferencias finitas centrales; en excepción de las fronteras, en las cuales se utilizó diferencias finitas hacia adelante y hacia atrás. Además, se adaptó el paso de tiempo para tener en cuenta los nuevos modos de onda generados por el término de Hall.

En particular, se encontró que al tener en cuenta el término de Hall, se produce un campo eléctrico de Hall que es perpendicular tanto a la densidad de corriente como al campo magnético. Al no estar alineada la densidad de corriente con el campo eléctrico, se producen corrientes adicionales que afectan la simetría en la estructura de la hoja de corriente. Caso contrario cuando no se tiene en cuenta el término de Hall, donde el sistema es totalmente simétrico. Este cambio morfológico tambiíen afecta el tamano de la región de difusión, que se alarga más en el caso sin Hall. En particular, en el análisis de las velocidades de entrada y salida del punto X de reconexión, se observa un aumento significativo en las velocidades de entrada, lo que da a entender que la mayor contribución del término de Hall se da en la dirección x.

Por otro lado, la máxima tasa de reconexión magnética aumentó de manera considerable para el caso con Hall, siendo aproximadamente un 37 % más grande que en el caso sin Hall. Al considerar la influencia del término Hall, se obtuvo una tasa de reconexión de 0.12, que parece ser un valor universal para las tasas de reconexión magnética adimensionales en plasmas poco colisionales. Comprender los fenómenos que subyacen a esta tasa característica es de suma importancia, ya que la velocidad de reconexión está estrechamente relacionada con la eficacia de la aceleración y el calentamiento de partículas durante el proceso de reconexión. Este aspecto reviste gran relevancia para la identificacin de la reconexión y el estudio de sus efectos a distancia, especialmente en entornos astrofísicos donde resulta impracticable medir directamente los campos magnéticos.

En el análisis de la transferencia de energía en el proceso de reconexión magnética, se observa un aumento abrupto en la componente x de los flujos de energía a partir de aproximadamente 35 segundos cuando se considera el efecto Hall. Además, se puede apreciar que los flujos de salida alcanzan valores del orden de 10^{26}[erg/s], lo cual concuerda con los flujos de energía reportados en las microerupciones. Estos hallazgos, junto con el análisis de las velocidades, permiten concluir que el término de Hall tiene una gran influencia en los flujos de entrada, aumentando tanto su velocidad como los flujos de energía asociados. Por otro lado, las características de las velocidades y las energías de los flujos ascendentes son consistentes con los reportes para las microerupciones.

A partir de este trabajo de investigación, se ha redactado un artículo con los resultados obtenidos y se está llevando a cabo la codirección de un estudiante de pregrado cuyo enfoque se centra en el estudio de las trazas de ionización y recombinación asociadas a las erupciones solares en la cromosfera. Además, se está expandiendo este estudio a un entorno tridimensional para investigar con mayor precisión los cambios en la morfología de la hoja de corriente, así como el flujo reconectado y transferido en el sistema. Como proyección futura, se tiene la intención de abordar erupciones solares más energéticas, como las erupciones impulsivas o incluso las eyecciones de masa coronal en un entorno 3D.

Referencias Bibliográficas

Anastasiadis, A. (2002). Acceleration of solar energetic particles: the case of solar flares. *Journal of Atmospheric and Solar-Terrestrial Physics*.

Aydemir, A. (1992). Nonlinear studies of m= 1 modes in high-temperature plasmas. *Physics of Fluids B: Plasma Physics*, 4(11):3469–3472.

Balsara, D. S. (2004). Second-order-accurate schemes for magnetohydrodynamics with divergence-free reconstruction. *The Astrophysical Journal Supplement Series*, 151(1):149.

Bellan, P. M. (2014). Fast, purely growing collisionless reconnection as an eigenfunction problem related to but not involving linear whistler waves. *Physics of Plasmas*, 21(10):102108.

Benz, A. O. (2012). *Plasma astrophysics: Kinetic processes in solar and stellar coronae*, volume 184. Springer Science & Business Media.

Benz, A. O. (2017). Flare observations. *Living Reviews in Solar Physics*, 14:1–59.

Birn, J., Drake, J., Shay, M., Rogers, B., Denton, R., Hesse, M., Kuznetsova, M., Ma, Z., Bhattacharjee, A., Otto, A., et al. (2001). Geospace environmental modeling (gem) magnetic reconnection challenge. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3715–3719.

Birn, J. and Hesse, M. (1996). Details of current disruption and diversion in simulations of magnetotail dynamics. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 101(A7):15345–15358.

Birn, J. and Priest, E. R. (2007). *Reconnection of magnetic fields: magnetohydrodynamics and collisionless theory and observations*. Cambridge University Press.

Biskamp, D. (1994). Magnetic reconnection. *Physics Reports*, 237(4):179–247.

Biskamp, D. (1997). *Nonlinear magnetohydrodynamics*. Number 1. Cambridge University Press.

Biskamp, D., Schwarz, E., and Drake, J. (1995). Ion-controlled collisionless magnetic reconnection. *Physical review letters*, 75(21):3850.

Bittencourt, J. A. (2004). *Fundamentals of plasma physics*. Springer Science & Business Media.

Bregman, J. (1994). X-ray-emitting gas surrounding the spiral galaxy ngc 891. *The Astrophysical Journal*.

Brown, M. R., Cothran, C., and Fung, J. (2006). Two fluid effects on three-dimensional reconnection in the swarthmore spheromak experiment with comparisons to space data. *Physics of plasmas*, 13(5):056503.

Carrington, R. C. (1859). Description of a singular appearance seen in the sun on september 1, 1859. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society, Vol. 20, p. 13-15*, 20:13–15.

Cassak, P., Drake, J., and Shay, M. (2006). A model for spontaneous onset of fast magnetic reconnection. *The Astrophysical Journal*, 644(2):L145.

Cassak, P., Liu, Y.-H., and Shay, M. (2017). A review of the 0.1 reconnection rate problem. *Journal of Plasma Physics*, 83(5):715830501.

Cassak, P. and Shay, M. (2012). Magnetic reconnection for coronal conditions: reconnection rates, secondary islands and onset. *Space science reviews*, 172:283–302.

Cassak, P., Shay, M., and Drake, J. (2005). Catastrophe model for fast magnetic reconnection onset. *Physical review letters*, 95(23):235002.

Chen, P., Shibata, K., Brooks, D., and Isobe, H. (2004). A reexamination of the evidence for reconnection inflow. *The Astrophysical Journal*, 602(1):L61.

Close, R., Parnell, C., Longcope, D., and Priest, E. (2005). Coronal flux recycling times. *Solar Physics*, 231:45–70.

Cordero Tercero, M. G., Lara Sánchez, A., Maravilla Meza, M. D., Ortega, M., Emma, B., and Valdés Galicia, J. F. (2013). Introducción a la física espacial.

Courant, R., Friedrichs, K., and Lewy, H. (1967). On the partial difference equations of mathematical physics. *IBM journal of Research and Development*, 11(2):215–234.

Craig, I. J. and McClymont, A. (1991). Dynamic magnetic reconnection at an x-type neutral point.

Démoulin, P., van Driel-Gesztelyi, L., Schmieder, B., Hemoux, J., Csepura, G., and Hagyard, M. (1993). Evidence for magnetic reconnection in solar flares. *Astronomy and Astrophysics*, 271:292.

Drake, J. and Kleva, R. (1991). Collisionless reconnection and the sawtooth crash. *Physical review letters*, 66(11):1458.

Eastwood, J., Phan, T.-D., Mozer, F., Shay, M., Fujimoto, M., Retino, A., Hesse, M., Balogh, A., Lucek, E., and Dandouras, I. (2007). Multi-point observations of the hall electromagnetic field and secondary island formation during magnetic reconnection. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 112(A6).

Einfeldt, B. (1988). On godunov-type methods for gas dynamics. *SIAM Journal on Numerical Analysis*, 25(2):294–318.

Evans, C. R. and Hawley, J. F. (1988). Simulation of magnetohydrodynamic flows-a constrained transport method. *The Astrophysical Journal*, 332:659–677.

Fletcher, L., Pollock, J. A., and Potts, H. E. (2004). Tracking of trace ultraviolet flare footpoints. *Solar Physics*, 222:279–298.

Forbes, T. and Priest, E. (1987). A comparison of analytical and numerical models for steadily driven magnetic reconnection. *Reviews of Geophysics*, 25(8):1583–1607.

Giovanelli, R. (1946). A theory of chromospheric flares. *Nature*, 158(4003):81–82.

Godunov, S. K. (1959). A difference method for numerical calculation of discontinuous solutions of the equations of hydrodynamics. *Matematicheskii Sbornik*, 89(3):271–306.

Gosling, J., Birn, J., and Hesse, M. (1995). Three-dimensional magnetic reconnection and the magnetic topology of coronal mass ejection events. *Geophysical research letters*, 22(8):869–872.

Hagenaar, H. J. (2001). Ephemeral regions on a sequence of full-disk michelson doppler imager magnetograms. *The Astrophysical Journal*, 555(1):448.

Hale, G. E. (1908). No. 30. on the probable existence of a magnetic field in sun-spots. *Contributions from the Mount Wilson Observatory/Carnegie Institution of Washington*, 30:1–29.

Harten, A., Lax, P. D., and Leer, B. v. (1983). On upstream differencing and godunov-type schemes for hyperbolic conservation laws. *SIAM review*, 25(1):35–61.

Hesse, M., Birn, J., and Kuznetsova, M. (2001). Collisionless magnetic reconnection: Electron processes and transport modeling. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3721–3735.

Hey, J. S. (1983). The radio universe. *Oxford [Oxfordshire]; New York: Pergamon Press*.

Hiei, E., Hundhausen, A., and Sime, D. (1993). Reformation of a coronal helmet streamer by magnetic reconnection after a coronal mass ejection. *Geophysical research letters*, 20(24):2785–2788.

Hodgson, R. (1859). On a curious appearance seen in the sun. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 20:15–16.

Hoyng, P., Duijveman, A., Machado, M., Rust, D., Svestka, Z., Boelee, A., de Jager, C., Frost, K., Lafleur, H., Simnett, G., et al. (1981). Origin and location of the hard x-ray emission in a two-ribbon flare. *Astrophysical Journal, Vol. 246, P. L155, 1981*, 246:L155.

Hudson, H., Kosugi, T., Nitta, N., and Shimojo, M. (2001). Hard x-radiation from a fast coronal ejection. *The Astrophysical Journal*, 561(2):L211.

Isobe, H., Takasaki, H., and Shibata, K. (2005). Measurement of the energy release rate and the reconnection rate in solar flares. *The Astrophysical Journal*, 632(2):1184.

Isobe, H., Yokoyama, T., Shimojo, M., Morimoto, T., Kozu, H., Eto, S., Narukage, N., and Shibata, K. (2002). Reconnection rate in the decay phase of a long duration event flare on 1997 may 12. *The Astrophysical Journal*, 566(1):528.

Kazachenko, M. D., Lynch, B. J., Welsch, B. T., and Sun, X. (2017). A database of flare ribbon properties from the solar dynamics observatory. i. reconnection flux. *The Astrophysical Journal*, 845(1):49.

Khan, J., Vilmer, N., Saint-Hilaire, P., and Benz, A. O. (2002). The solar coronal origin of a slowly drifting decimetric-metric pulsation structure. *Astronomy & Astrophysics*, 388(1):363–372.

Khomenko, E. (2020). Multi-fluid extensions of mhd and their implications on waves and instabilities. *Topics in Magnetohydrodynamic Topology, Reconnection and Stability Theory*, pages 69–116.

Khomenko, E., Collados, M., Diaz, A., and Vitas, N. (2014). Fluid description of multi-component solar partially ionized plasma. *Physics of Plasmas*, 21(9):092901.

Kleva, R. G., Drake, J., and Waelbroeck, F. (1995). Fast reconnection in high temperature plasmas. *Physics of Plasmas*, 2(1):23–34.

Kuznetsova, M. M., Hesse, M., and Winske, D. (2001). Collisionless reconnection supported by nongyrotropic pressure effects in hybrid and particle simulations. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3799–3810.

Lakhina, G. (2000). Magnetic reconnection.

Lin, J., Ko, Y.-K., Sui, L., Raymond, J., Stenborg, G., Jiang, Y., Zhao, S., and Mancuso, S. (2005). Direct observations of the magnetic reconnection site of an eruption on 2003 november 18. *The Astrophysical Journal*, 622(2):1251.

Lin, J., Soon, W., and Baliunas, S. (2003). Theories of solar eruptions: a review. *New Astronomy Reviews*, 47(2):53–84.

Lysenko, A. L., Frederiks, D. D., Fleishman, G. D., Aptekar, R. L., Altyntsev, A. T., Golenetskii, S. V., Svinkin, D. S., Ulanov, M. V., Tsvetkova, A. E., and Ridnaia, A. V. (2020). X-ray and gamma-ray emission from solar flares. *Physics-Uspekhi*, 63(8):818.

Ma, Z. and Bhattacharjee, A. (2001). Hall magnetohydrodynamic reconnection: The geospace environment modeling challenge. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3773–3782.

MacTaggart, D. and Hillier, A. (2020). *Topics in Magnetohydrodynamic Topology, Reconnection and Stability Theory*. Springer.

Malakit, K., Cassak, P., Shay, M., and Drake, J. (2009). The hall effect in magnetic reconnection: Hybrid versus hall-less hybrid simulations. *Geophysical research letters*, 36(7).

Mandt, M., Denton, R., and Drake, J. (1994). Transition to whistler mediated magnetic reconnection. *Geophysical Research Letters*, 21(1):73–76.

Masuda, S. (1996). Discovery of a loop-top hard x-ray source in impulsive solar flares. *Advances in Space Research*.

Masuda, S., Kosugi, T., Hara, H., Tsuneta, S., and Ogawara, Y. (1994). A loop-top hard x-ray source in a compact solar flare as evidence for magnetic reconnection. *Nature*, 371(6497):495–497.

Mininni, P. D., Gómez, D. O., and Mahajan, S. M. (2003). Dynamo action in magnetohydrodynamics and hall-magnetohydrodynamics. *The Astrophysical Journal*, 587(1):472.

Navarro, A., Lora-Clavijo, F., and González, G. A. (2017). Magnus: A new resistive mhd code with heat flow terms. *The Astrophysical Journal*, 844(1):57.

Ohyama, M. and Shibata, K. (1998). X-ray plasma ejection associated with an impulsive flare on 1992 october 5: physical conditions of x-ray plasma ejection. *The Astrophysical Journal*, 499(2):934.

Ottaviani, M. and Porcelli, F. (1993). Nonlinear collisionless magnetic reconnection. *Physical review letters*, 71(23):3802.

Otto, A. (2001). Geospace environment modeling (gem) magnetic reconnection challenge: Mhd and hall mhdâ€”constant and current dependent resistivity models. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3751–3757.

Parker, E. N. (1963). The solar-flare phenomenon and the theory of reconnection and annihiliation of magnetic fields. *Astrophysical Journal Supplement, vol. 8, p. 177 (1963)*, 8:177.

Peterson, L. and Winckler, J. (1959). Gamma-ray burst from a solar flare. *Journal of Geophysical Research*, 64(7):697–707.

Petschek, H. E. (1964). 50 magnetic field annihilation. In *Proceedings of a Symposium Held at the Goddard Space Flight Center, Greenbelt, Maryland, October 28-30, 1963*, volume 50, page 425. Scientific and Technical Information Division, National Aeronautics and â€¦.

Priest, E. and Forbes, T. (2000). Magnetic reconnection: Mhd theory and applications, cambridge univ. *Press, Cambridge*, pages 1–45.

Priest, E. and Forbes, T. (2002a). The magnetic nature of solar flares. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 10(4):313–377.

Priest, E. and Forbes, T. (2002b). The magnetic nature of solar flares. *The Astronomy and Astrophysics Review*, 10(4):313–377.

Pritchett, P. (2001). Geospace environment modeling magnetic reconnection challenge: Simulations with a full particle electromagnetic code. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 106(A3):3783–3798.

Qiu, J., Lee, J., Gary, D. E., and Wang, H. (2002). Motion of flare footpoint emission and inferred electric field in reconnecting current sheets. *The Astrophysical Journal*, 565(2):1335.

Ren, Y., Yamada, M., Gerhardt, S., Ji, H., Kulsrud, R., and Kuritsyn, A. (2005). Experimental verification of the hall effect during magnetic reconnection in a laboratory plasma. *Physical review letters*, 95(5):055003.

Roe, P. L. (1986). Characteristic-based schemes for the euler equations. *Annual review of fluid mechanics*, 18(1):337–365.

Rogers, B., Denton, R., Drake, J., and Shay, M. (2001). Role of dispersive waves in collisionless magnetic reconnection. *Physical Review Letters*, 87(19):195004.

Rogers, B. and Zakharov, L. (1996). Collisionless m= 1 reconnection in tokamaks. *Physics of Plasmas*, 3(6):2411–2422.

Shay, M., Drake, J., Rogers, B., and Denton, R. (1999). The scaling of collisionless, magnetic reconnection for large systems. *Geophysical research letters*, 26(14):2163–2166.

Shay, M. A., Drake, J. F., Denton, R. E., and Biskamp, D. (1998). Structure of the dissipation region during collisionless magnetic reconnection. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 103(A5):9165–9176.

Shea, M. (2004). Solar proton events for 450 years: The carrington event in perspective. *Advances in Space Research*.

Shibata, K. (1996). New observational facts about solar flares from yohkoh studiesâ€”evidence of magnetic reconnection and a unified model of flares. *Advances in Space Research*, 17(4-5):9–18.

Shibata, K. and Magara, T. (2011). Solar flares: magnetohydrodynamic processes. *Living Reviews in Solar Physics*, 8:1–99.

Shibata, K., Takasao, S., and Reeves, K. K. (2023). Numerical study on excitation of turbulence and oscillation in above-the-loop-top region of a solar flare. *The Astrophysical Journal*, 943(2):106.

Shibata, K. c., Masuda, S., Shimojo, M., Hara, H., Yokoyama, T., Tsuneta, S., Kosugi, T., and Ogawara, Y. (1995). Hot-plasma ejections associated with compact-loop solar flares. *The Astrophysical Journal*, 451(2):L83.

Sinha, S. (2019). Solar filament eruptions as precursors to flareâ€“cme events: Establishing the temporal connection. *The Astrophysical Journal*.

Smith, D., Ghosh, S., Dmitruk, P., and Matthaeus, W. (2004). Hall and turbulence effects on magnetic reconnection. *Geophysical research letters*, 31(2).

Sonnerup, B. Ö., Paschmann, G., Papamastorakis, I., Sckopke, N., Haerendel, G., Bame, S., Asbridge, J., Gosling, J., and Russell, C. (1981). Evidence for magnetic field reconnection at the earth's magnetopause. *Journal of Geophysical Research: Space Physics*, 86(A12):10049–10067.

Strumik, M. and Stasiewicz, K. (2017). Multidimensional hall magnetohydrodynamics with isotropic or anisotropic thermal pressure: numerical scheme and its validation using solitary waves. *Journal of Computational Physics*, 330:846–862.

Sui, L., Holman, G. D., and Dennis, B. R. (2004). Evidence for magnetic reconnection in three homologous solar flares observed by rhessi. *The Astrophysical Journal*, 612(1):546.

Sweet, P. (1958). The production of high energy particles in solar flares. *Il Nuovo Cimento (1955-1965)*, 8:188–196.

Takasao, S., Matsumoto, T., Nakamura, N., and Shibata, K. (2015). Magnetohydrodynamic shocks in and above post-flare loops: two-dimensional simulation and a simplified model. *The Astrophysical Journal*, 805(2):135.

Takasao, S. and Shibata, K. (2016). Above-the-loop-top oscillation and quasi-periodic coronal wave generation in solar flares. *The Astrophysical Journal*, 823(2):150.

Terasawa, T. (1983). Hall current effect on tearing mode instability. *Geophysical research letters*, 10(6):475–478.

Threlfall, J., Parnell, C. E., De Moortel, I., McClements, K., and Arber, T. D. (2012). Nonlinear wave propagation and reconnection at magnetic x-points in the hall mhd regime. *Astronomy & Astrophysics*, 544:A24.

Titarev, V. A. and Toro, E. F. (2005). Ader schemes for three-dimensional non-linear hyperbolic systems. *Journal of Computational Physics*, 204(2):715–736.

Toriumi, S., Schrijver, C. J., Harra, L. K., Hudson, H., and Nagashima, K. (2017). Magnetic properties of solar active regions that govern large solar flares and eruptions. *The Astrophysical Journal*, 834(1):56.

Toriumi, S. and Wang, H. (2019). Flare-productive active regions. *Living Reviews in Solar Physics*, 16(1):1–128.

Toriumi, S. and Yokoyama, T. (2011). Numerical experiments on the two-step emergence of twisted magnetic flux tubes in the sun. *The Astrophysical Journal*, 735(2):126.

Tóth, G., Ma, Y., and Gombosi, T. I. (2008). Hall magnetohydrodynamics on block-adaptive grids. *Journal of Computational Physics*, 227(14):6967–6984.

Treumann, R., Jaroschek, C., Nakamura, R., Runov, A., and Scholer, M. (2006). The role of the hall effect in collisionless magnetic reconnection. *Advances in Space Research*, 38(1):101–111.

Tsuneta, S., Hara, H., Shimizu, T., Acton, L. W., Strong, K. T., Hudson, H. S., and Ogawara, Y. (1992). Observation of a solar flare at the limb with the yohkoh soft x-ray telescope. *Publications of the Astronomical Society of Japan*, 44:L63–L69.

Yamada, M., Ren, Y., Ji, H., Breslau, J., Gerhardt, S., Kulsrud, R., and Kuritsyn, A. (2006). Experimental study of two-fluid effects on magnetic reconnection in a laboratory plasma with variable collisionality. *Physics of Plasmas*, 13(5):052119.

Yokoyama, T., Akita, K., Morimoto, T., Inoue, K., and Newmark, J. (2001). Clear evidence of reconnection inflow of a solar flare. *The Astrophysical Journal*, 546(1):L69.

Yokoyama, T. and Shibata, K. (1998). A two-dimensional magnetohydrodynamic simulation of chromospheric evaporation in a solar flare based on a magnetic reconnection model. *The Astrophysical Journal*, 494(1):L113.

Yokoyama, T. and Shibata, K. (2001). Magnetohydrodynamic simulation of a solar flare with chromospheric evaporation effect based on the magnetic reconnection model. *The Astrophysical Journal*, 549(2):1160.

Zheng, R. (2018). Two-sided-loop jets associated with magnetic reconnection between emerging loops and twisted filament threads. *The Astrophysical Journal*.

APÉNDICES

Apéndice A. Análisis dimensional

Dado que todos los términos adicionales de una ecuación tienen las mismas unidades, es posible hacer que cualquier ecuación sea adimensional al dividir cada término por un conjunto de constantes y/o variables cuyo producto tenga las mismas unidades. En el contexto del código MAGNUS, este enfoque se aplica a las ecuaciones evolutivas, lo que resulta en magnitudes adimensionales que describen la evolución del sistema. Estas magnitudes adimensionales se pueden escalar posteriormente utilizando cantidades que sí tienen dimensiones y dependen del sistema físico que se está simulando.

En particular, para el modelo implementado en este trabajo de investigación, se utilizan las unidades de normalización que se presenta en la tabla 3. Las fórmulas para esta normalización se tomaron de Navarro et al. (2017), a excepción de η_{H_a}, que es el coeficiente de Hall.

Para realizar un análisis dimensional del coeficiente η_H, se parte de la ecuación de inducción (ecuación 17), donde se examinan las unidades de los dos primeros términos del lado derecho y el término resistivo del lado izquierdo. Utilizando las unidades de normalización proporcionadas en la tabla 3, se lleva a cabo este análisis, obteniendo:

Cantidad	Unidad	Valor
Longitud	L_a	10^6m
Densidad	ρ_a	10^{-12}kg/m^3
Velocidad	U_a	10^6 m/s
Tiempo	$t_a = L_a/U_a$	1s
Presión	$p_a = \rho_a U_a^2$	1 Pa
Campo magnético	$B_a = U_a\sqrt{\mu_0\rho_a}$	11 G
Gravedad	$g_a = L_a/t_a^2$	10^6 m/s^2
Resistividad	$\eta_a = L_a\mu_0 U_a$	1.3x10^6 Ωm
Coeficiente Hall	$\eta_{H_a} = L_a\sqrt{\mu_0/\rho_a}$	10^9 m^3/C

Tabla 3
Unidades de normalización para el modelo implementado.

$$\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{B_a}{t_a}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{u_a\sqrt{\mu_0\rho_a}}{l_a/u_a}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = \frac{u_a^2\sqrt{\mu_0\rho_a}}{l_a}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t},$$
$$\nabla\cdot(\mathbf{uB}-\mathbf{Bu}) = \frac{u_aB_a}{l_a}\nabla\cdot(\mathbf{uB}-\mathbf{Bu}) = \frac{u_a^2\sqrt{\mu_0\rho_a}}{l_a}\nabla\cdot(\mathbf{uB}-\mathbf{Bu}),$$
$$\eta\nabla\times\mathbf{j} = \frac{\eta_aB_a}{l_a^2\mu_0}\eta\nabla\times\mathbf{j} = \frac{(l_au_a\mu_0)\left(u_a\sqrt{\mu_0\rho_a}\right)}{l_a^2\mu_0}\eta\nabla\times\mathbf{j} = \frac{u_a^2\sqrt{\mu_0\rho_a}}{l_a}\eta\nabla\times\mathbf{j}.$$

Con la inclusión del término de Hall en el código, se hace nesario determinar expresiones para η_{Ha}. Por lo tanto, se hace el análisis dimensional del tercer término de la ecuación 17, las cual contiene la información del término de hall. Haciendo un análisis similar al de los otros términos, se obtiene:

$$\nabla \cdot (\mathbf{u}_H \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}_H) = \frac{\mathbf{u}_{Ha} B_a}{l_a} \nabla \cdot (\mathbf{u}_H \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}_H), \tag{61}$$

donde $\mathbf{u}_H = -\eta_H \mathbf{j}$ y

$$\mathbf{j} \to \frac{B_a}{l_a \mu_0} \nabla \times \mathbf{B}$$

la expresión 61 se reescribe como

$$\begin{aligned}
\nabla \cdot (\mathbf{u}_H \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}_H) &= \frac{\eta_{Ha} B_a^2}{l_a^2 \mu_0} \nabla \cdot (\mathbf{u}_H \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}_H), \\
&= \frac{\eta_{Ha} u_a^2 \rho_a}{l_a^2} \nabla \cdot (\mathbf{u}_H \mathbf{B} - \mathbf{B}\mathbf{u}_H).
\end{aligned}$$

Como el anterior término debe tener las dimensiones de los otros términos de la ecuación de inducción, se debe satisfacer las siguientes igualdades

$$\frac{\eta_{Ha} u_a^2 \rho_a}{l_a^2} = \frac{u_a^2 \sqrt{\mu_0 \rho_a}}{l_a},$$

obteniendo así, que el coeficiente de Hall, se puede dimensionalizar de la siguiente manera, la cual fue utilizada en el código:

$$\eta_{Ha} = l_a \sqrt{\frac{\mu_0}{\rho_a}}. \tag{62}$$