

SOBRE LOS PRODUCTOS SIMÉTRICOS EN ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS

CÉSAR DERIAN DUVAN GARCÍA PADILLA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2026

SOBRE LOS PRODUCTOS SIMÉTRICOS EN ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS

CÉSAR DERIAN DUVAN GARCÍA PADILLA

Trabajo de grado para optar al título de
Matemático

Director

Javier Enrique Camargo García
Doctor en Ciencias Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2026

DEDICATORIA

Dedicado a Shirley Tatiana Muñoz Beltran, mi novia de amores profundos y caóticos.

AGRADECIMIENTOS

Con admiración y respeto, agradezco a mi director de tesis, el Dr. Javier Enrique Camargo García, por su infinita paciencia y su ayuda en la realización de este trabajo. Le agradezco, más aún, haberme mostrado lo hermosa que puede ser esta rama de las matemáticas desde ese curso de Teoría de Conjuntos.

Agradezco a mi novia, por haberme ayudado con la redacción de este trabajo y por su apoyo incondicional. También, quisiera agradecer a mis padres, quienes me brindaron siempre comodidad y facilidad para poder dedicar toda mi atención y tiempo a este proceso educativo. A mi madre, por sus consejos útiles en tiempos difíciles y a mi padre, por siempre hacerme tener los pies sobre la tierra.

A mis amigos, en especial Isaac, Manuel, Daniel y Mateo, por haberme ayudado, alegrado y permitido disfrutar de su amistad.

CONTENIDO

	pág.
1. INTRODUCCIÓN	9
2. RESULTADOS BÁSICOS	11
2.1. PRELIMINARES	11
2.2. PRODUCTOS SIMÉTRICOS	17
2.3. ACERCA DE LOS MODELOS GEOMÉTRICOS	21
3. DIMENSIÓN Y CONEXIDAD	28
3.1. DIMENSIÓN	28
3.2. CONEXIDAD DE $F_n(X)$	37
3.2.1. Conexidad y arcoconexidad	37
3.2.2. Conexidad Local	41
3.2.3. El producto simétrico de $\mathcal{C}$	48
4. UNICOHERENCIA Y CONOS	51
4.1. UNICOHERENCIA	51
4.1.1. Límites inversos	52
4.1.2. Resultados sobre unicoherencia	57
4.2. PRODUCTOS SIMÉTRICOS COMO CONOS	59
BIBLIOGRAFÍA	66

LISTA DE FIGURAS

	pág.
2.1. ϕ para $n = 2$ en el intervalo $[0, 1]$	19
2.2. Modelo para $F_2([0, 1])$	22
2.3. Las fibras de γ	22
2.4. Modelo geométrico de $F_3([0, 1])$	23
2.5. El sombrero de dunce.	24
2.6. Triodo simple.	24
2.7. $F_2(J_1)$	25
2.8. Modelo $F_2(Y)$	25
2.9. Anillo R es homeomorfo a $\mathcal{NA}$	26
2.10. Corte en el anillo.	27
2.11. Cintas del anillo separadas.	27
2.12. Rotación e Identificación de las cintas.	27
2.13. Cinta de Möbius.	27
 3.1. Triodo Simple es Localmente Conexo.	 42
3.2. Sucesión de curvas del topólogo.	42
3.3. Sucesión de abanicos.	43
 4.1. $F_2(X)$ no es unicoherente	 59
4.2. Abanico de Cantor.	61
4.3. $F_2([0, 1])$ como un cono.	65

RESUMEN

TÍTULO: SOBRE LOS PRODUCTOS SIMÉTRICOS EN ESPACIOS MÉTRICOS COMPACTOS *

AUTOR: CÉSAR DERIAN DUVAN GARCÍA PADILLA **

PALABRAS CLAVE: TOPOLOGÍA DE VIETORIS, PRODUCTOS SIMÉTRICOS, DIMENSIÓN, CONTINUOS, UNICOHERENCIA, CONOS.

DESCRIPCIÓN:

Dado X un espacio métrico compacto, definimos el *hiperespacio del n -ésimo producto simétrico de X* como el conjunto $F_n(X) = \{A \subseteq X : 1 \leq |A| \leq n\}$ y el *hiperespacio de los subconjuntos finitos de X* como $F(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X)$, ambos dotados de la topología de Vietoris o, equivalentemente, de la topología inducida por la métrica de Hausdorff. En este trabajo estudiamos propiedades generales sobre $F_n(X)$ y $F(X)$, enfocándonos más en los resultados que responden a la siguiente pregunta: sea $\mathcal{P}$ una propiedad topológica. Si X tiene la propiedad $\mathcal{P}$, ¿bajo qué condiciones $F_n(X)$ y $F(X)$ preservan la propiedad $\mathcal{P}$? Recíprocamente, si $F_n(X)$ o $F(X)$ tienen la propiedad $\mathcal{P}$, ¿cuándo X la tiene?

Entre las propiedades que estudiamos se encuentran la compacidad, la dimensión topológica, diversas nociones de conexidad y la unicoherencia. Finalmente, presentamos una caracterización de aquellos productos simétricos $F_n(X)$ que son homeomorfos al cono sobre algún continuo, cuando X es el cono sobre un conjunto totalmente desconexo.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Javier Enrique Camargo García, Doctor en Ciencias Matemáticas.

ABSTRACT

TITLE: ON SYMMETRIC PRODUCTS IN COMPACT METRIC SPACES *

AUTHOR: CÉSAR DERIAN DUVAN GARCÍA PADILLA **

KEYWORDS: VIETORIS TOPOLOGY, SYMMETRIC PRODUCTS, DIMENSION, CONTINUA, UNICOHERENCE, CONES.

DESCRIPTION:

Given X a compact metric space, we define the *hyperspace of the n -th symmetric product of X* as the set $F_n(X) = \{A \subseteq X : 1 \leq |A| \leq n\}$ and the *hyperspace of finite subsets of X* as $F(X) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n(X)$, both endowed with the Vietoris topology or, equivalently, with the topology induced by the Hausdorff metric. In this work we study general properties of $F_n(X)$ and $F(X)$, focusing mainly on results that address the following question: let $\mathcal{P}$ be a topological property. If X has the property $\mathcal{P}$, under what conditions do $F_n(X)$ and $F(X)$ preserve the property $\mathcal{P}$? Conversely, if $F_n(X)$ or $F(X)$ have the property $\mathcal{P}$, when does X have it? Among the properties we study are compactness, topological dimension, various notions of connectedness and unicoherence. Finally, we present a characterization of those symmetric products $F_n(X)$ that are homeomorphic to the cone over some continuum, when X is the cone over a totally disconnected set.

* Bachelor Thesis

** Faculty of Science. School of Mathematics. Advisor: Javier Enrique Camargo García, Ph.D.

1. INTRODUCCIÓN

La teoría de hiperespacios ha sido, y continúa siendo, una de las ramas más activas y estudiadas de la topología en la actualidad. Dado un espacio topológico X , existen múltiples hiperespacios de interés, tales como $CL(X)$, el conjunto de todos los cerrados no vacíos de X , o $\mathcal{K}(X)$, el conjunto de todos los compactos no vacíos. El hiperespacio en el que centramos nuestra atención en este trabajo son los *productos simétricos de X* .

Para $n \in \mathbb{N}$, el n -ésimo producto simétrico de X , que denotamos por $F_n(X)$, está formado por los subconjuntos finitos no vacíos de X con a lo sumo n elementos. Esta noción fue introducida en 1931 por KAROL BORSUK y STANISŁAW ULAM en su artículo *On Symmetric Products of Topological Spaces*¹. Este trabajo se inscribió en el contexto de la escuela polaca de topología, que en las décadas de 1920 y 1930 fue particularmente influyente en el desarrollo de la topología moderna.

Para cualquier espacio métrico X , es posible dotar a estos hiperespacios de una estructura topológica mediante la topología inducida por la *métrica de Hausdorff*. Más aún, basta con que X tenga una topología (no necesariamente una inducida por métrica) para que, mediante la *topología de Vietoris*, se pueda construir de manera natural una estructura topológica sobre estos hiperespacios.

Una pregunta central en el estudio de los hiperespacios consiste en determinar en qué medida las propiedades topológicas del espacio base X se preservan, o se transforman, al pasar a sus productos simétricos $F_n(X)$. En esta dirección, organizamos el presente trabajo en tres capítulos. El primero senta las bases del estudio, presentando las herramientas fundamentales de la teoría de hiperespacios junto con algunos modelos geométricos que permiten visualizar concretamente los productos simétricos de continua clásicos. El segundo capítulo aborda propiedades de dimensión y conexidad, analizando en qué condiciones estas se preservan al pasar de X a $F_n(X)$. Finalmente, el tercer capítulo estudia la unicoherencia de los productos simétricos y concluye con la pregunta de cuándo $F_n(X)$ puede ser identificado como el cono sobre algún continuo, problema que articula de manera natural los resultados desarrollados a lo largo del trabajo.

Finalmente, en la presente tesis buscamos no solo exponer resultados ya conocidos, sino

¹ K. Borsuk y S. Ulam. On symmetric products of topological spaces. En: *Fund. Math.* (1931), págs. 875-882.

también revisar y actualizar las demostraciones clásicas, incorporar técnicas recientes y poner en diálogo los avances históricos con desarrollos actuales. Además, nos propusimos mostrar ejemplos concretos donde nos fue posible visualizar cómo cambiaron los espacios iniciales al considerar sus productos simétricos, ofreciendo así una perspectiva tanto conceptual como geométrica. De esta manera, el estudio pretende ofrecer una visión integral de los productos simétricos: desde su formalización original hasta sus aplicaciones y perspectivas contemporáneas.

2. RESULTADOS BÁSICOS

En este capítulo presentamos los conceptos y resultados fundamentales para la comprensión de este trabajo. En la sección de preliminares reunimos las definiciones y propiedades básicas de la teoría de hiperespacios que serán utilizadas a lo largo de la tesis. Posteriormente estudiamos la compacidad de los productos simétricos, y finalizamos con el análisis de algunos modelos geométricos: el arco, el triodo simple y la curva cerrada simple.

2.1. PRELIMINARES

En este trabajo todos los espacios serán espacios métricos. Dados X un espacio métrico y $A \subseteq X$, denotaremos por $\text{Cl}_X(A)$, $\text{Int}_X(A)$ y $\text{Fr}_X(A)$, a la clausura, interior y frontera respectivamente de A en X . Cuando no haya confusión solo denotaremos $\text{Cl}(A)$, $\text{Int}(A)$ y $\text{Fr}(A)$ la clausura, interior y frontera respectivamente de A en X . Si X e Y son homeomorfos, escribiremos $X \cong Y$. Dado un espacio métrico X con métrica d , denotaremos la bola con centro a y radio $r > 0$ por $B_d(a, r) := \{x \in X : d(x, a) < r\}$. Generalizando esta noción de bola cambiando el centro por cualquier subconjunto A de X , definimos

$$\mathcal{N}_d(A, r) := \{x \in X : d(x, a) < r, \text{ para algún } a \in A\}.$$

Note que $\mathcal{N}_d(A, r)$ es una bola cuando A es un conjunto con un único punto. Además, $A \subseteq \mathcal{N}_d(A, r)$ y si $r < r'$, entonces $\mathcal{N}_d(B, r) \subseteq \mathcal{N}_d(B, r')$. No es difícil demostrar que

$$\mathcal{N}_d(A, r) = \bigcup_{a \in A} B_d(a, r).$$

Por tanto, $\mathcal{N}_d(A, r)$ es un abierto. Algo que podemos probar para espacios métricos a partir de esta definición es que todo abierto se puede ver como la unión numerable de cerrados.

Teorema 2.1.1. *Sean X un espacio métrico y A un cerrado de X . Entonces, A es intersección numerable de abiertos.*

Demostración. Sea X un espacio métrico y A un conjunto cerrado de X . Consideremos $W = \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_d(A, \frac{1}{n})$ y veamos $W = A$. Notemos que, $A \subseteq \mathcal{N}_d(A, \frac{1}{n})$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego $A \subseteq W$. Sea $a \in W$, entonces $B_d(a, \frac{1}{n}) \cap A \neq \emptyset$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Luego, a esta en la clausura de A y como A es cerrado, entonces $a \in A$. Por tanto, $W = A$. $\square$

En un espacio métrico X , definimos el hiperespacio de todos los conjuntos cerrados de X , como

$$CL(X) := \{A \subseteq X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es cerrado}\}.$$

En esta tesis trabajaremos en la mayoría de casos X compacto. Concretamente en el contexto cuando X es compacto, el hiperespacio de los conjuntos cerrados $CL(X)$ de X coincide con $\mathcal{K}(X)$, donde

$$\mathcal{K}(X) := \{A \subseteq X : A \neq \emptyset \text{ y } A \text{ es compacto}\}.$$

Generalmente, el primer compacto que se da como ejemplo cuando se introduce la noción de un conjunto compacto, son los conjuntos finitos. De lo cual, surge un nuevo hiperespacio y nuestro hiperespacio de interés que definieron, KAROL BORSUK y STANISŁAW ULAM en¹ sobre $\mathcal{K}(X)$.

Definición 2.1.2. Dados X un espacio métrico compacto y $n \in \mathbb{N}$. Definimos

$$F_n(X) = \{A \subseteq X : 1 \leq |A| \leq n\},$$

y es conocido como el *n -ésimo producto simétrico de X* .

El 1-ésimo producto simétrico $F_1(X)$ son llamados los uno puntuales de X y son homeomorfo a X , como aclararemos más adelante cuando introduzcamos la topología en $F_n(X)$. Dado $n \in \mathbb{N}$, $F_n(X)$ está formado por conjuntos no vacíos cuya cardinalidad es menor o igual a n , por lo cual son compactos y es claro que $F_n(X) \subseteq \mathcal{K}(X)$. Otro hiperespacio que va de la mano con los productos simétricos es el de los subconjuntos finitos de X , que se definen de la siguiente manera.

Definición 2.1.3. Sea X un espacio métrico compacto. Definimos

$$F(X) = \bigcup_{n=1}^{\infty} F_n(X),$$

y lo llamaremos naturalmente el *hiperespacio de los subconjuntos finitos de X* .

¹ Borsuk y Ulam, ver n. 1.

Otro hiperespacio que es conocido es el n -ésimo hiperespacio de subconjuntos con a lo más n componentes. Dado X un espacio métrico compacto y $n \in \mathbb{N}$, definimos el n -ésimo hiperespacio de X por

$$C_n(X) = \{B \in \mathcal{K}(X) : B \text{ tiene } n \text{ componentes}\}.$$

$C_1(X)$ se denotará como $C(X)$, y se conoce como *el hiperespacio de los subcontinuos de X* . Cabe destacar que las definiciones previas de hiperespacios son aplicables a cualquier espacio topológico X . No obstante, es común analizar este tipo de hiperespacios en el contexto de los espacios métricos compactos.

Para estudiar propiedades topológicas sobre $F_n(X)$ es necesario dotarlo de una topología. Dado X un espacio métrico compacto con métrica d . Para cada $A, B \in \mathcal{K}(X)$, definimos

$$\mathcal{H}_d(A, B) = \inf\{r > 0 : A \subseteq \mathcal{N}_d(B, r) \text{ y } B \subseteq \mathcal{N}_d(A, r)\}. \quad (2.1)$$

La función $\mathcal{H}_d$ se conoce como *la métrica de Hausdorff*. Queremos ver en el Teorema 2.1.5 que en efecto $\mathcal{H}_d$ es una métrica, por lo cual, mostraremos el siguiente lema, cuya demostración se encuentra en² y se sigue directamente de (2.1).

Lema 2.1.4. *Sean X un espacio métrico compacto con métrica d , y A y B puntos en $\mathcal{K}(X)$. Si $\mathcal{H}_d(A, B) = L$, entonces para todo $\varepsilon > 0$, tenemos que $A \subseteq \mathcal{N}_d(B, L + \varepsilon)$ y $B \subseteq \mathcal{N}_d(A, L + \varepsilon)$.*

Teorema 2.1.5. *Sean X un espacio métrico compacto con métrica d . Entonces, $\mathcal{H}_d$ es una métrica para $\mathcal{K}(X)$.*

Demostración. Notemos que dados $A, B \in \mathcal{K}(X)$, la compacidad de A y B garantizan que siempre existe un $r > 0$ tal que $A \subseteq \mathcal{N}_d(B, r)$ y $B \subseteq \mathcal{N}_d(A, r)$. Así, $\mathcal{H}_d$ dada en (2.1) está bien definida. Observemos además que de la definición, es inmediato verificar que $\mathcal{H}_d(A, B) = 0$ si, y solo si, $A = B$; y que $\mathcal{H}_d(A, B) = \mathcal{H}_d(B, A)$ para cualesquiera $A, B \in \mathcal{K}(X)$. Luego solo debemos verificar la desigualdad triangular.

Sean $A, B, C \in \mathcal{K}(X)$. Queremos probar que:

$$\mathcal{H}_d(A, B) \leq \mathcal{H}_d(A, C) + \mathcal{H}_d(C, B).$$

² A. Illanes y S.B. Nadler Jr. *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*. Vol. 216. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York y Basel: Marcel Dekker, Inc., 1999, Teorema 2.2, pág. 11.

Por el Lema 2.1.4, tenemos que $A \subseteq \mathcal{N}_d(C, \mathcal{H}_d(A, C) + \frac{\varepsilon}{2})$ para todo $\varepsilon > 0$. Luego, existe $c \in C$ tal que

$$d(a, c) < \mathcal{H}_d(A, C) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.2)$$

Nuevamente, por el Lema 2.1.4, para este c , existe $b \in B$ tal que

$$d(c, b) < \mathcal{H}_d(C, B) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (2.3)$$

Sumando (2.2) y (2.3), y por desigualdad triangular de d , se tiene que

$$d(a, b) < \mathcal{H}_d(A, C) + \mathcal{H}_d(C, B) + \varepsilon.$$

Dado que ε fue arbitrario, entonces $a \in \mathcal{N}_d(B, \mathcal{H}_d(A, C) + \mathcal{H}_d(C, B) + \varepsilon)$. Por lo tanto, $A \subseteq \mathcal{N}_d(B, \mathcal{H}_d(A, C) + \mathcal{H}_d(C, B) + \varepsilon)$. Con un argumento similar, se tiene que $B \subseteq \mathcal{N}_d(A, \mathcal{H}_d(A, C) + \mathcal{H}_d(C, B) + \varepsilon)$. De esas dos desigualdades concluimos que

$$\mathcal{H}_d(A, B) \leq \mathcal{H}_d(A, C) + \mathcal{H}_d(C, B).$$

De esta manera $\mathcal{H}_d$ es una métrica para $\mathcal{K}(X)$. □

Más adelante mostraremos que $\mathcal{K}(X)$ dotado con la topología inducida por la métrica de Hausdorff, es también compacto. De lo anterior, $F_n(X)$ y $F(X)$ son espacios métricos con la métrica restringida apropiadamente de $\mathcal{H}_d$.

Teorema 2.1.6. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, $F(X)$ es denso en $\mathcal{K}(X)$ y si X es infinito, entonces $F(X)$ no es cerrado.*

Demostración. Para ver que $F(X)$ es denso en $\mathcal{K}(X)$, basta probar que $F(X) \cap B_{\mathcal{H}_d}(A, \varepsilon) \neq \emptyset$ para todo $A \in \mathcal{K}(X)$. Dado que A es compacto, tenemos que es totalmente acotado, es decir, para todo $\varepsilon > 0$ existen $x_1, \dots, x_n$ en A tales que

$$A \subseteq \bigcup_{k=1}^n B(x_k, \varepsilon). \quad (2.4)$$

Definamos $M = \{x_1, \dots, x_n\}$. Por (1.3) tenemos que $A \subseteq N_d(M, \varepsilon)$ y $M \subseteq A \subseteq N_d(A, \varepsilon)$, luego $\mathcal{H}_d(A, M) < \varepsilon$. Así, $M \in B_{\mathcal{H}_d}(A, \varepsilon) \cap F(X)$. Por tanto, $F(X) \cap B_{\mathcal{H}_d}(A, \varepsilon) \neq \emptyset$.

Observe que si $F(X)$ es cerrado, entonces, por la densidad de $F(X)$ mostrada en el párrafo anterior, tenemos que $F(X) = \mathcal{K}(X)$. Así, X es finito. □

Note que al querer estudiar propiedades topológicas sobre los hiperespacios, el enfoque de inducir una métrica se ve limitado para cuando el espacio base no es metrizable. Ahora bien, existe una segunda forma de inducir una topología sobre los hiperespacios. Esta forma que presentaremos a continuación, fue introducida por el matemático austriaco LEOPOLD VIETORIS (1891-2002) en el año 1922, que hoy se conoce con su nombre *Topología de Vietoris*.

Definición 2.1.7. Sea X un espacio topológico con topología τ . Definimos τ_V como la topología menos fina para $\mathcal{K}(X)$ tal que:

- $\{A \in \mathcal{K}(X) : A \subseteq U\}$ es abierto de $\mathcal{K}(X)$, para cada abierto U de X , y
- $\{A \in \mathcal{K}(X) : A \subseteq B\}$ es cerrado de $\mathcal{K}(X)$, para todo B cerrado de X .

Generalmente, siempre resulta más simple trabajar con los abiertos básicos de una topología, de lo cual, surge la necesidad de encontrar una base para τ_V .

Sean $D_1, \dots, D_n$ subconjuntos de X . Denotamos el siguiente conjunto:

$$\langle D_1, \dots, D_n \rangle = \{A \in \mathcal{K}(X) : A \subseteq \bigcup_{i=1}^n D_i \text{ y } A \cap D_i \neq \emptyset \text{ para todo } i = 1, \dots, n\}.$$

Para el lector interesado, las pruebas de los siguientes dos resultados se encuentran referenciadas en el siguiente texto³.

Teorema 2.1.8. Sea X un espacio topológico con topología τ , y τ_V la topología de Vietoris para $\mathcal{K}(X)$. Entonces, la colección

$$\mathcal{B} = \{\langle U_1, \dots, U_n \rangle : U_i \in \tau \text{ y } n \in \mathbb{N}\}$$

es una base para τ_V .

Con la notación introducida anteriormente y la Definición 2.1.7, la topología de Vietoris debe tener como subbase

$$\mathcal{S} = \{\langle U \rangle : U \in \tau\} \cup \{\langle X, V \rangle : V \in \tau\}; \quad (2.5)$$

ya que:

³ Illanes y Nadler Jr, ver n. 2, Teorema 1.2, pág.3, Teorema 3.1, pág.16.

- $\langle U \rangle = \{A \in \mathcal{K}(X) : A \subseteq U\}$, y
- $\mathcal{K}(X) \setminus \langle X, V \rangle = \{A \in \mathcal{K}(X) : A \subseteq B\}$ donde $V = X \setminus B$.

No es difícil ver que

$$\langle U_1, \dots, U_n \rangle = \langle U_1 \cup \dots \cup U_n \rangle \cap \langle X, U_1 \rangle \cap \dots \cap \langle X, U_n \rangle.$$

Con estas observaciones se tiene un esquema general de la prueba del Teorema 2.1.8.

Teorema 2.1.9. *Sea X un espacio métrico compacto. Si $\tau_{\mathcal{H}_d}$ es la topología inducida por la métrica de Hausdorff $\mathcal{H}_d$ y τ_V la topología de Vietoris, entonces $\tau_V = \tau_{\mathcal{H}_d}$.*

Note que el Teorema 2.1.9 nos permite, en el contexto métrico compacto, usar τ_V o $\mathcal{H}_d$ para probar propiedades topológicas.

La prueba del siguiente teorema la tomamos de⁴. En⁵ se puede encontrar una demostración de la compacidad usando sucesiones y la métrica de Hausdorff directamente; esta prueba, aunque mucho más elaborada, también es más geométrica.

Teorema 2.1.10. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, $\mathcal{K}(X)$ es también un espacio métrico compacto.*

Demostración. Por el Teorema 2.1.5, sabemos que $\mathcal{K}(X)$ es métrico. Luego, solo debemos demostrar la compacidad de $\mathcal{K}(X)$. Para esto usaremos el Lema de Alexander (ver⁶).

Sean $\{U_i \mid i \in I\}$ y $\{V_j \mid j \in J\}$ colecciones de abiertos en X tales que

$$\mathcal{U} = \{\langle U_i \rangle \mid i \in I\} \cup \{\langle X, V_j \rangle \mid j \in J\}$$

es una cubierta de $\mathcal{K}(X)$ con elementos de $\mathcal{S}$ (2.5). Supongamos primero que $\mathcal{K}(X) = \bigcup_{j \in J} \langle X, V_j \rangle$. Entonces, para cada $x \in X$ existe $j_0 \in J$ tal que $\{x\} \in \langle X, V_{j_0} \rangle$; es decir, $x \in V_{j_0}$. De lo anterior, $\{V_j \mid j \in J\}$ es una cubierta abierta de X . Como X es compacto, existen $j_1, \dots, j_n$ en J tales que $X = \bigcup_{i=1}^n V_{j_i}$. Es inmediato verificar que $\mathcal{K}(X) = \bigcup_{i=1}^n \langle X, V_{j_i} \rangle$, es decir, $\{\langle X, V_{j_i} \rangle \mid i \in \{1, \dots, n\}\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$.

⁴ J. Camargo y E. Villamizar. *Topología General*. Universidad Industrial de Santander, 2019, Teorema 6.62.

⁵ S. B. Nadler Jr. *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*. Marcel Dekker, 1978, Teorema 0.8.

⁶ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Teorema 6.58.

Supongamos ahora que, $\mathcal{K}(X) \neq \bigcup_{j \in J} \langle X, V_j \rangle$; esto es, $X \neq \bigcup_{j \in J} V_j$. Sea $A = X \setminus \bigcup_{j \in J} V_j$. Es claro que $A \in \mathcal{K}(X)$. Como $\mathcal{U}$ es una cubierta y $A \cap V_j = \emptyset$ para cada $j \in J$, tenemos que existe $i_0 \in I$ tal que $A \in \langle U_{i_0} \rangle$. Obsérvese que $X = U_{i_0} \cup (\bigcup_{j \in J} V_j)$. Como X es compacto, existe $\{j_1, \dots, j_n\} \subset J$ tal que $X = U_{i_0} \cup (\bigcup_{i=1}^n V_{j_i})$. Debemos probar que $\mathcal{K}(X) = \langle U_0 \rangle \cup (\bigcup_{i=1}^n \langle X, V_{j_i} \rangle)$. Sea $B \in \mathcal{K}(X)$. Si $B \cap V_{j_i} \neq \emptyset$ para algún $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces $B \in \langle X, V_{j_i} \rangle$. En caso contrario, como $X = U_{i_0} \cup (\bigcup_{i=1}^n V_{j_i})$, tenemos que $B \subseteq U_{i_0}$. Luego $B \in \langle U_0 \rangle$. Así, $\mathcal{K}(X) = \langle U_0 \rangle \cup (\bigcup_{i=1}^n \langle X, V_{j_i} \rangle)$. Por tanto, $\{\langle U_0 \rangle, \langle X, V_{j_1} \rangle, \dots, \langle X, V_{j_n} \rangle\}$ es una subcubierta finita de $\mathcal{U}$ y $\mathcal{K}(X)$ es compacto. $\square$

2.2. PRODUCTOS SIMÉTRICOS

La primera propiedad que estudiaremos es la compacidad de los productos simétricos. Para lo cual, tomaremos dos enfoques distintos. El primero, usando una función en particular entre el n -ésimo producto de X y el n -ésimo producto simétrico de X ; y el segundo, usando la topología de Vietoris.

De cursos básicos de topología general y análisis matemático es bien conocido que si X es un espacio métrico compacto, entonces, para cada $n \in \mathbb{N}$, el producto n -ésimo X^n es también un espacio métrico compacto. Además, si existe una función $f: X \rightarrow Y$ continua, sobreyectiva y X es compacto, entonces Y es compacto (ver^{7, 8} o⁹). La función que definimos a continuación fue dada en 1931 por Borsuk y Ulam en¹⁰ en el artículo donde se introdujeron por primera vez los productos simétricos.

Sean X un espacio métrico y $n \in \mathbb{N}$. Definimos la función $\phi: X^n \rightarrow F_n(X)$ para cada $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$, de la siguiente manera:

$$\phi((x_1, x_2, \dots, x_n)) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}. \quad (2.6)$$

Para la prueba de continuidad usaremos la métrica en X^n dada por $d^n(x, y) = \sum_{k=1}^n d(x_k, y_k)$ para cualesquiera $x = (x_1, \dots, x_n)$ e $y = (y_1, \dots, y_n)$ en X^n que induce la topología producto. A continuación mostraremos algunas propiedades de esta función.

⁷ Camargo y Villamizar, ver n. 4.

⁸ S. Willard. *General Topology*. Dover Publications, 2012.

⁹ R. Engelking. *General Topology*. Vol. 60. Monografie Matematyczne. Warszawa: PWN, 1977.

¹⁰ Borsuk y Ulam, ver n. 1.

Teorema 2.2.1. Sean X un espacio métrico, $n \in \mathbb{N}$ y ϕ la función dada en (2.6). Entonces, ϕ es continua y sobreyectiva.

Demostración. Observe que ϕ está bien definida. Veamos primero la sobreyectividad de ϕ . Sea $A \in F_n(X)$, esto es, $A = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}$ con $m \leq n$, donde $a_1, a_2, \dots, a_m$ son elementos diferentes. Si $m = n$, el punto $(a_1, a_2, \dots, a_n) \in X^n$ y es claro que

$$\phi((a_1, a_2, \dots, a_m)) = \{a_1, a_2, \dots, a_m\}.$$

Si $m < n$, note que $(a_1, a_2, \dots, a_m) \in X^m$ lo podemos completar con cualquier elemento para que esté en X^n . Sea $(x_1, \dots, x_m, x_1, \dots, x_1) \in X^n$. Tenemos que

$$\phi((x_1, \dots, x_m, x_1, \dots, x_1)) = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}.$$

Por tanto, ϕ es sobreyectiva.

Dados $\varepsilon > 0$ y $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in X^n$, queremos ver que existe $\delta > 0$ tal que si $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in X^n$ y $d^n(y, x) < \delta$ entonces, $\mathcal{H}_d(\{y_1, y_2, \dots, y_n\}, \{x_1, x_2, \dots, x_n\}) < \varepsilon$. Tomemos $\delta = \varepsilon$. Luego,

$$d^n(y, x) < \delta \Rightarrow \sum_{k=1}^n d(x_k, y_k) < \varepsilon,$$

de donde, para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ se tiene $d(y_k, x_k) < \varepsilon$; es decir,

$$\{y_1, y_2, \dots, y_n\} \subset \mathcal{N}_d(\{x_1, x_2, \dots, x_n\}, \varepsilon) \text{ y } \{x_1, x_2, \dots, x_n\} \subset \mathcal{N}_d(\{y_1, y_2, \dots, y_n\}, \varepsilon).$$

De lo cual, $\mathcal{H}_d(\{y_1, y_2, \dots, y_n\}, \{x_1, x_2, \dots, x_n\}) < \varepsilon$ (ver (2.1)). De lo anterior, ϕ es continua. $\square$

A continuación, se presenta una representación de $F_2([0, 1])$. Estas representaciones, conocidas como modelos geométricos, serán abordadas más adelante.

Ejemplo 2.2.2. Para $[0, 1]$ y $n = 2$, tenemos que $\phi: [0, 1]^2 \rightarrow F_2([0, 1])$ queda definida para cada $(a, b) \in [0, 1]^2$ como $\phi((a, b)) = \{a, b\}$. Algunos cálculos muestran que $F_2([0, 1])$ es homeomorfo a $\{(a, b) \in [0, 1]^2 : a \leq b\}$. La siguiente gráfica representa como actúa ϕ en este caso particular.

De los lemas anteriores, se tiene lo siguiente.

Teorema 2.2.3. Sean X un espacio métrico y $n \in \mathbb{N}$. Si X es compacto, $F_n(X)$ es también compacto

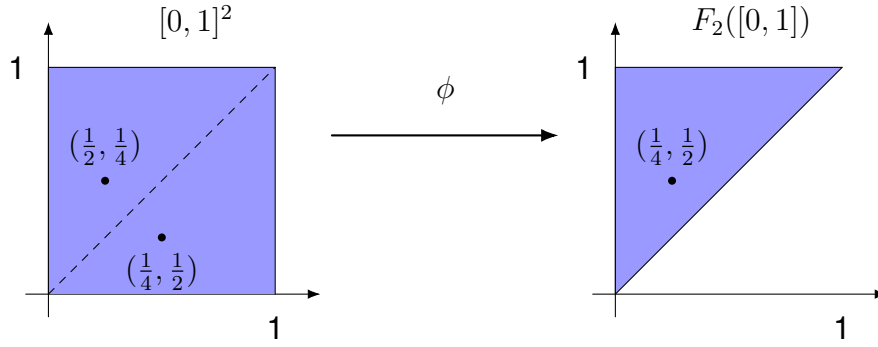


Figura 2.1: ϕ para $n = 2$ en el intervalo $[0, 1]$.

Demostración. Si X es compacto y $n \in \mathbb{N}$, entonces X^n es compacto por¹¹. Además, por¹², como ϕ es continua y sobreyectiva, $F_n(X)$ también es compacto. $\square$

Ahora bien, queremos saber qué pasa con la recíproca del teorema anterior. Como mencionamos en la introducción, continuamos con el segundo enfoque usando la topología de Vietoris. Primero, probaremos que $F_n(X)$ es cerrado en $\mathcal{K}(X)$. Note que esto muestra en particular, de una manera diferente a la que presentamos en el Teorema 2.2.3, que si X es compacto, entonces $F_n(X)$ es compacto.

Teorema 2.2.4. *Sea X un espacio métrico. Entonces, $F_n(X)$ es cerrado en $\mathcal{K}(X)$ para cualquier $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $A \in \mathcal{K}(X) \setminus F_n(X)$. Tomemos $a_1, \dots, a_{n+1}$ puntos diferentes en A y consideremos los abiertos $U_i = B_d(a_i, \delta)$, donde $i \in \{1, \dots, n+1\}$ y

$$0 < \delta < \frac{1}{2} \min\{d(a_i, a_j) : i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n+1\}\}.$$

Note que $U_i \cap U_j = \emptyset$ con $i \neq j, i, j \in \{1, \dots, n+1\}$. Además, el abierto básico de la topología de Vietoris

$$\mathcal{U} = \langle X, U_1, \dots, U_{n+1} \rangle,$$

cumple que $A \in \mathcal{U}$ y $\mathcal{U} \cap F_n(X) = \emptyset$. Por lo cual, $F_n(X)$ es cerrado. $\square$

¹¹ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Teorema 6.16.

¹² Camargo y Villamizar, ver n. 4, Teorema 6.5.

Teorema 2.2.5. *Sea X un espacio métrico. Si $\mathcal{K}(X)$ es compacto, entonces $F_n(X)$ es compacto para cualquier $n \in \mathbb{N}$.*

Demostración. Por el teorema anterior, $F_n(X)$ es un subespacio cerrado de $\mathcal{K}(X)$. Así, por¹³, $F_n(X)$ es compacto. $\square$

Observación 2.2.6. La demostración del Teorema 2.2.4 es válida si X es un espacio compacto de Hausdorff.

Si tomamos $n, m \in \mathbb{N}$ con $m \geq n$ y cambiamos $\mathcal{K}(X)$ por $F_m(X)$ en la demostración del Teorema 2.2.4, podemos concluir lo siguiente.

Corolario 2.2.7. *Sean X un espacio métrico y $n, m \in \mathbb{N}$. Entonces, $F_n(X)$ es cerrado en $F_m(X)$ siempre que $n \leq m$.*

Como resaltamos en la Definición 2.1.2, $F_1(X) = \{\{x\} : x \in X\}$ es homeomorfo a X , donde el encaje natural está dado por

$$\varphi: X \rightarrow \mathcal{K}(X), \quad \varphi(x) = \{x\}.$$

Con esto tenemos que si $\mathcal{K}(X)$ es compacto, entonces X también lo es. En efecto, $F_n(X)$ es también compacto por el Teorema 2.2.5. Por el Corolario 2.2.7, la compacidad de $F_n(X)$ para algún $n > 1$, implica la compacidad de $F_1(X) \cong X$. Finalmente, el Teorema 2.1.10 muestra que si X es compacto, entonces $\mathcal{K}(X)$ es compacto. Con lo anterior tenemos la prueba del siguiente teorema.

Teorema 2.2.8. *Sea X un espacio métrico. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. X es compacto;
2. $F_n(X)$ es compacto para cada $n \in \mathbb{N}$;
3. $\mathcal{K}(X)$ es compacto.

¹³ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Proposición 6.12.

2.3. ACERCA DE LOS MODELOS GEOMÉTRICOS

Un modelo geométrico de un hiperespacio es una representación explícita, es decir, un homeomorfismo del hiperespacio en el espacio euclidiano $\mathbb{R}^n$, donde $n \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Una motivación para el estudio de los productos simétricos son los modelos geométricos. El cálculo explícito de modelos geométricos para los productos simétricos es, en general, una tarea de considerable dificultad. Un ejemplo de esto es que K. BORSUK afirmó que $F_3(S^1)$ era homeomorfo a $S^1 \times S^2$ con la topología producto¹⁴. Sin embargo, R. BOTT mostró posteriormente que en realidad es homeomorfo a S^3 (ver¹⁵). Como se demostrará mediante argumentos dimensionales en secciones posteriores, el conjunto de hiperespacios que pueden ser modelados en el espacio euclidiano tridimensional $\mathbb{R}^3$ es sumamente restringido. En esta sección, se presentan los modelos geométricos de $F_2(X)$ para los casos en que X representa un arco, la circunferencia unitaria y el triodo simple. Un arco es un continuo homeomorfo a $[0, 1]$, la circunferencia unitaria es un continuo homeomorfo a $S^1 = \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ y un triodo simple es un continuo homeomorfo al subconjunto de $\mathbb{R}^3$,

$$[[0, 1] \times \{0\} \times \{0\}] \cup [\{0\} \times [0, 1] \times \{0\}] \cup [\{0\} \times \{0\} \times [0, 1]].$$

Ejemplo 2.3.1. Modelo geométrico para $F_2([0, 1])$.

Definimos $\varphi: F_2([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^2$, para cada $C = \{a, b\}$, por:

$$\varphi(C) = \left(\frac{a+b}{2}, |a-b| \right).$$

Gráficamente, la imagen y algunos puntos los representamos como en la Figura 2.2.

Note que $L_1 = \{\varphi(\{0, a\}) : a \in [0, 1]\}$, $L_2 = \{\varphi(\{1, b\}) : b \in [0, 1]\}$ y $L_3 = \{\varphi(\{c\}) : c \in [0, 1]\}$ son las aristas del triángulo. Es sabido, y no muy complicado de mostrar, que φ es un encaje de $F_2([0, 1])$ en $\mathbb{R}^2$ como se puede ver en¹⁶.

Ejemplo 2.3.2. Modelo geométrico de $F_3([0, 1])$.

¹⁴ Karol Borsuk. On the third symmetric potency of the circumference. En: *Fundamenta Mathematicae* 36 (1949), págs. 236-244.

¹⁵ R. Bott. On the third symmetric potency of S^1 . En: *Fund. Math.* 39 (1952), págs. 264-268.

¹⁶ Borsuk y Ulam, ver n. 1, pág. 877.

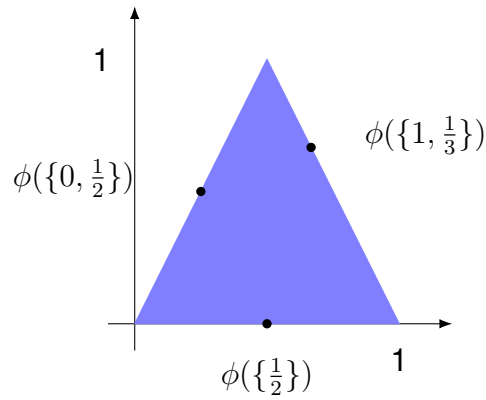


Figura 2.2: Modelo para $F_2([0, 1])$.

Observemos que $\gamma : F_3([0, 1]) \rightarrow \mathbb{R}^2$, dada por $\gamma(A) = (\min A, \max A)$, nos da el triángulo T como en el Ejemplo 2.2.2. Además, las fibras $\gamma^{-1}((c, d)) = \{\{c, e, d\} : c \leq e \leq d\}$ forman una curva cerrada simple que recorre el intervalo $[c, d]$ y termina en $\{c, c, d\} = \{c, d, d\}$. Gráficamente, el triángulo morado representa $\gamma(F_3([0, 1]))$, y cada punto del triángulo tiene como preimagen una curva cerrada simple como mostramos en la Figura 2.3.

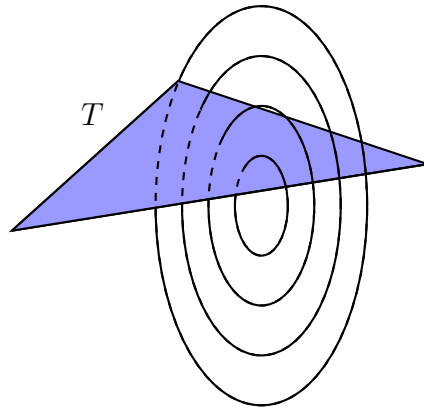


Figura 2.3: Las fibras de γ .

Luego, un modelo para $F_3([0, 1])$ viene dado por el cono generado por el sólido de revolución obtenido al girar el triángulo T alrededor de uno de sus lados. KAROL BORSUK y STANISŁAW ULAM, en¹⁷, dieron de forma explícita el homeomorfismo para obtener el modelo geométrico de $F_2([0, 1])$ que se puede representar en la siguiente Figura 2.4.

¹⁷ Borsuk y Ulam, ver n. 1, Teorema 6.

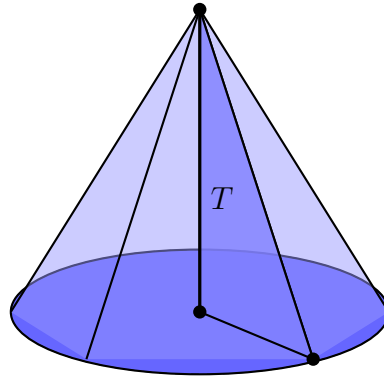


Figura 2.4: Modelo geométrico de $F_3([0, 1])$.

Decimos que X es una n – celda si $X \cong [0, 1]^n$. Note que, en ambos casos, el segundo y tercer producto simétrico de $[0, 1]$ son homeomorfos a una 2 y 3 celda, respectivamente. Naturalmente, se puede pensar que el n –ésimo producto simétrico del intervalo $[0, 1]$ será homeomorfo a una n -celda, pero en¹⁸ se probó que para $n \geq 4$, $F_n([0, 1])$ no es homeomorfo a $[0, 1]^n$ y en general, a ningún subconjunto de $\mathbb{R}^n$. Un ejemplo de esto es el mismo $F_4([0, 1])$, el cual R. N. ANDERSEN, M. M. MARJANOVIĆ y R. M. SCHORI en el Teorema 2.1 de¹⁹, demostraron que $F_4([0, 1])$ es homeomorfo a $\text{Cono}(D_2) \times [0, 1]$, donde D_2 es el *Sombrero de dunce*. Que se obtiene, primero, identificando dos de las flechas para obtener un cono; luego, identificando el vértice del cono con un punto de su base para obtener el espacio de la Figura 2.5 y finalmente, se identifican las dos curvas cerradas simples en negrita de la Figura 2.5.

¹⁸ Borsuk y Ulam, ver n. 1, Teorema 7.

¹⁹ R. N. Andersen, M. M. Marjanović y R. M. Schori. Symmetric products and higher-dimensional dunce hats. En: *Topology Proc.* 18 (1993), págs. 7-17.

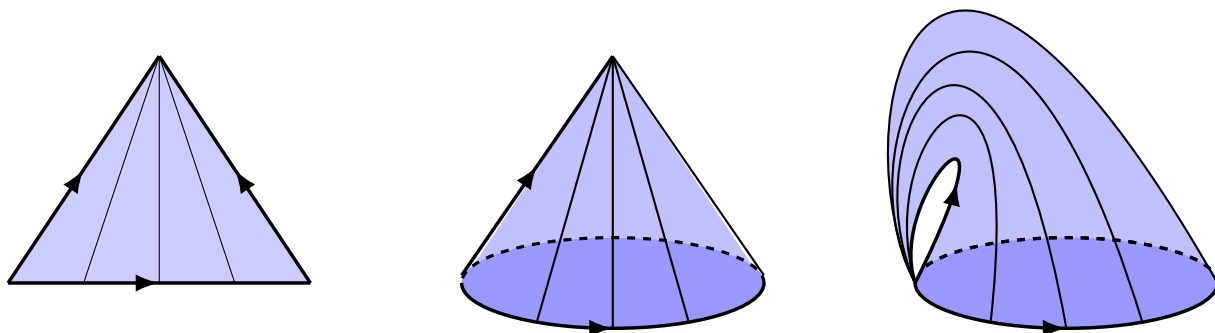


Figura 2.5: El sombrero de dunce.

El sombrero de dunce se puede construir en $\mathbb{R}^3$. Por tanto, $F_4([0, 1])$ se puede construir en $\mathbb{R}^5$. De lo cual surge la siguiente pregunta que aún permanece abierta.

Pregunta 2.3.3. Si $n \geq 5$, ¿es posible obtener un modelo geométrico de $F_n([0, 1])$ en $\mathbb{R}^{n+1}$?

Ejemplo 2.3.4. Modelo geométrico de $F_2(Y)$, donde Y es un triodo simple.

Un triodo simple Y en $\mathbb{R}^3$ se puede representar como la unión de 3 arcos como se muestra en la Figura 2.6.

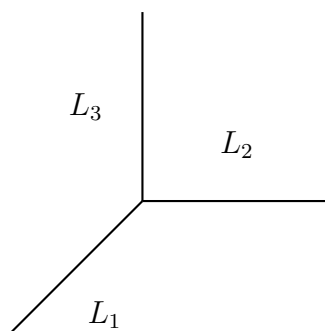


Figura 2.6: Triodo simple.

Tomemos $J_1 = L_1 \cup L_2$, $J_2 = L_1 \cup L_3$ y $J_3 = L_2 \cup L_3$. Note que, $F_2(Y) = F_2(J_1) \cup F_2(J_2) \cup F_2(J_3)$. Puesto que, J_1 es un arco, $F_2(J_j)$ es un triángulo para cada $j \in \{1, 2, 3\}$. Fijémonos en la siguiente representación de $F_2(J_1)$.

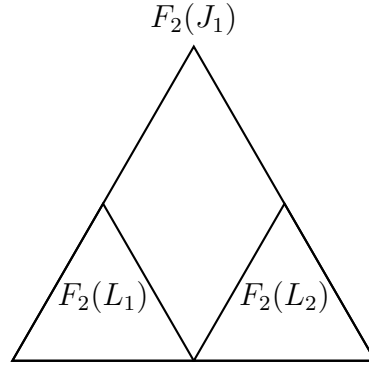


Figura 2.7: $F_2(J_1)$.

$F_2(J_1)$ es un triángulo que contiene dos triángulos que representan $F_2(L_1)$ y $F_2(L_2)$. La parte que no pertenece a ninguno de los dos conjuntos anteriores, son las combinaciones de dos elementos de L_1 con L_2 . Observemos que, por ejemplo $F_2(J_1) \cap F_2(J_2) = F_2(L_1)$, luego para evitar estas repeticiones procedemos a identificarlas de la siguiente manera:

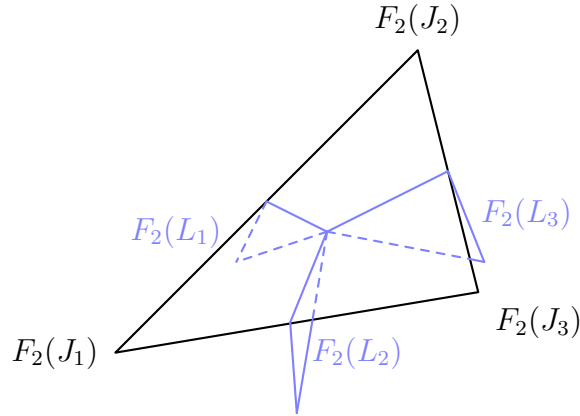


Figura 2.8: Modelo $F_2(Y)$

Para el lector interesado en el modelo de $F_3(Y)$, E. CASTAÑEDA en²⁰ lo describe.

Ejemplo 2.3.5. Modelo geométrico de $F_2(S^1)$.

El producto simétrico $F_2(S^1)$ es homeomorfo a la banda de Möbius. Podemos ver esto mediante el siguiente argumento. Sea

$$\mathcal{NA} = \{\{p, q\} \in F_2(S^1) : p \neq -q\}.$$

²⁰ P. I. V. Escobar. Los hiperespacios de continuos desde el punto de vista de sus modelos geométricos. Director: Enrique Castañeda. Tesis de Pregrado. Universidad Autónoma del Estado de México, 2009.

Definimos las aplicaciones $A : \mathcal{NA} \rightarrow C(S^1)$, $m : \mathcal{NA} \rightarrow S^1$, $L : \mathcal{NA} \rightarrow \mathbb{R}$ y $\varphi : \mathcal{NA} \rightarrow \mathbb{R}^2$ por

$A(\{p, q\}) =$ el arco más corto que une p y q en S^1 ,

$m(\{p, q\}) =$ el punto medio de $A(\{p, q\})$,

$L(\{p, q\}) =$ la longitud de $A(\{p, q\})$,

$\varphi(\{p, q\}) = \left(1 - \frac{1}{2\pi}L(\{p, q\})\right) m(\{p, q\})$.

Observemos que φ es un homeomorfismo entre $\mathcal{NA}$ y el anillo $R = \{z \in \mathbb{R}^2 : \frac{1}{2} < |z| \leq 1\}$.

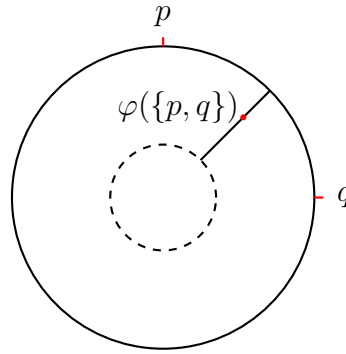


Figura 2.9: Anillo R es homeomorfo a $\mathcal{NA}$.

La idea para construir el modelo es extender φ al conjunto $A = \{\{z, -z\} \in F_2(S^1) : z \in S^1\}$. Dependiendo de la forma en que se aproxime el par $\{z, -z\}$, ya sea por izquierda o por derecha, mediante elementos de $\mathcal{NA}$, se debería definir $\varphi(\{z, -z\})$ con dos valores, a saber, w o $-w$, donde $2w$ es el punto obtenido al rotar z un ángulo de $\frac{\pi}{2}$. Para resolver este problema identificamos los puntos w y $-w$. Además, note que dichos puntos forman el círculo $B = \{u \in \mathbb{R}^2 : |u| = \frac{1}{2}\}$.

Para visualizar el espacio construido, realizamos un corte horizontal en el anillo, de forma que se obtengan dos mitades del mismo tamaño.

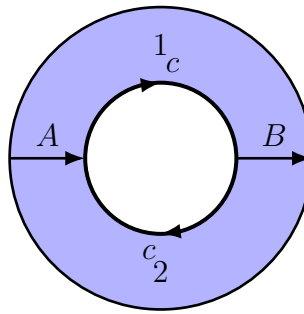


Figura 2.10: Corte en el anillo.

El cual, separándolo, tendríamos lo siguiente,

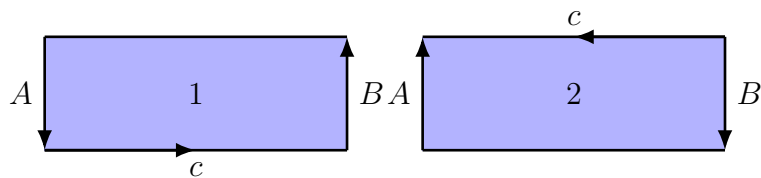


Figura 2.11: Cintas del anillo separadas.

Necesitamos que la dirección de las flechas entre A y B coincidan, para esto rotamos verticalmente a 1 y finalmente *pegamos* 1 en la parte superior de 2 de la siguiente manera:

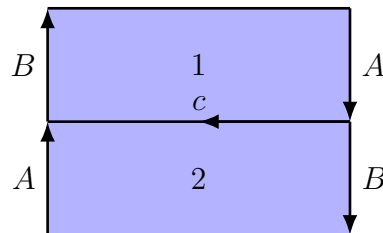


Figura 2.12: Rotación e Identificación de las cintas.

No es difícil ver que el espacio resultante de identificar los lados laterales de manera en que lo indican las flechas A y B , identificadas en un solo segmento por definición es la cinta de Möbius.

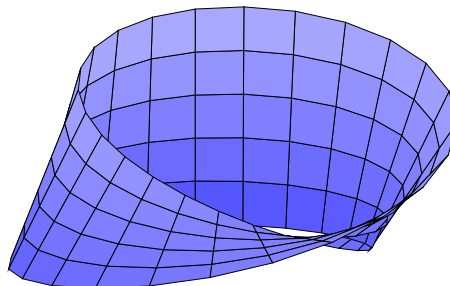


Figura 2.13: Cinta de Möbius.

3. DIMENSIÓN Y CONEXIDAD

Una de las primeras cuestiones que surgieron en el estudio de los productos simétricos fue la relación entre la dimensión topológica de $F_n(X)$ y la del producto cartesiano X^n . La función $\phi : X^n \rightarrow F_n(X)$ definida en (2.6) juega un papel fundamental al momento de estudiar esta propiedad. Aunque algunos resultados tempranos en¹ permitieron establecer desigualdades generales, pronto se observó que el comportamiento de la dimensión puede ser más sutil de lo esperado. Parte de los resultados fundamentales en esta dirección fueron obtenidos por D. CURTIS y N. T. NHU, para los productos simétricos, y por A. ILLANES, para los subconjuntos finitos.

Por otro lado, diversas propiedades globales de conexidad de los productos simétricos ya habían sido abordadas en trabajos previos; sin embargo, su comportamiento desde un punto de vista local permanecía en gran medida abierto. En este capítulo también estudiaremos algunas nociones de conexidad en espacios métricos compactos y analizaremos cómo dichas propiedades se conservan bajo los productos simétricos. En particular, dado un espacio métrico compacto X , mostraremos que las nociones de conexidad sobre X se preservan en sus correspondientes productos simétricos $F_n(X)$, con $n \in \mathbb{N}$, así como en el espacio de conjuntos finitos $F(X)$.

Comenzaremos estudiando los conceptos básicos de conexidad y arcoconexidad. Posteriormente, abordaremos la conexidad local y la conexidad en pequeño, siguiendo principalmente las ideas desarrolladas por A. ILLANES y J. J. CHARATONIK en². Finalmente, utilizaremos resultados sobre espacios totalmente desconexos y la presencia de puntos aislados para describir explícitamente el n -ésimo producto simétrico del conjunto de Cantor, lo que permitirá ilustrar de manera concreta la interacción entre dimensión y propiedades de conexidad en este contexto.

3.1. DIMENSIÓN

En esta sección, dado un espacio métrico compacto X y un entero positivo n , presentamos algunos resultados relacionados con la dimensión del n -ésimo producto simétrico $F_n(X)$.

¹ Borsuk y Ulam, ver n. 1.

² J. J. Charatonik y A. Illanes. Local connectedness in hyperspaces. En: *Rocky Mountain J. Math.* 36.3 (2006), págs. 811-856.

Antes de esto, definiremos el concepto de dimensión para espacios métricos separables. En la siguiente definición denotaremos por $\text{Fr}(A)$ a la frontera de A , para cualquier A contenido en un espacio métrico X .

Definición 3.1.1. Sea X un espacio métrico separable. Definimos la dimensión de X , denotada como $\dim(X)$, inductivamente de la siguiente manera:

- $\dim(X) = -1$ si, y solo si, $X = \emptyset$.
- $\dim(X) \leq n$ si, para todo $x \in X$ y cada abierto V tal que $x \in V$, existe un abierto $U \subseteq V$ tal que $\dim(\text{Fr}(U)) \leq n - 1$.
- $\dim(X) = n$ si $\dim(X) \leq n$ y $\dim(X) \not\leq n - 1$.
- $\dim(X) = \infty$ si para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $\dim(X) \not\leq n$.

Note que por el Ejercicio 7 de la Sección 6.7 de³, todo espacio métrico compacto es separable.

Observemos que todo espacio discreto no vacío es de dimensión 0; pues, todo conjunto tiene frontera vacía. Un ejemplo clásico de un espacio de dimensión n es $\mathbb{R}^n$, para cualquier número natural. En particular, para $n = 1$, es bien conocido que $\beta = \{(a, b) : a < b\}$ es una base de $\mathbb{R}$, y claramente $\text{Fr}(a, b) = \{a, b\}$ un conjunto finito discreto el cual es de dimensión 0. Así, se sigue fácilmente que $\dim(\mathbb{R}) = 1$. Para un estudio profundo sobre dimensión, el lector puede consultar⁴ o⁵.

La dimensión de un espacio es un invariante topológico; esto es, si $\dim(X) = n$ y $X \cong Y$, entonces $\dim(Y) = n$. El siguiente teorema lo usaremos con frecuencia en esta sección.

Teorema 3.1.2. Sean X y Y espacios métricos compactos. Si existe un encaje $f: X \rightarrow Y$, entonces $\dim(X) \leq \dim(Y)$.

Demostración. Como $f(X) \subseteq Y$, por⁶, $\dim(f(X)) \leq \dim(Y)$. Como f es un encaje, X es homeomorfo a $f(X)$. Así, $\dim(X) \leq \dim(Y)$. □

³ Camargo y Villamizar, ver n. 4.

⁴ W. Hurewicz y H. Wallman. *Dimension Theory*. Princeton University Press, 1941.

⁵ R. Engelking. *Dimension Theory*. Amsterdam: North-Holland, 1978.

⁶ Hurewicz y Wallman, ver n. 4, Teorema III 1, pág. 26.

En adelante, para cada espacio métrico compacto X y $n \in \mathbb{N}$, consideraremos $\phi: X^n \rightarrow F_n(X)$ la función dada en (2.6), definida por

$$\phi((x_1, \dots, x_n)) = \{x_1, \dots, x_n\}$$

para cada $(x_1, \dots, x_n) \in X^n$.

Teorema 3.1.3. *Dado X un espacio métrico compacto y $n \in \mathbb{N}$. Si $M = \phi^{-1}(F_n(X) \setminus F_{n-1}(X))$, entonces $\phi|_M: M \rightarrow F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ es abierta.*

Demostración. Notemos que como ϕ es continua y $F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$ es abierto, M es abierto en X^n . Sea $\mathcal{U}$ un subconjunto abierto de M . Probemos que $\phi(\mathcal{U})$ es abierto. Sea $A \in \phi(\mathcal{U})$. Sea $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathcal{U}$ tal que $\phi(a) = A$. Como $A \in F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)$, $a_i \neq a_j$ para cada $i \neq j$, con $i, j \in \{1, \dots, n\}$. Luego existen abiertos disjuntos $U_1, \dots, U_n$ tales que

$$a \in U_1 \times \dots \times U_n \subseteq \mathcal{U}. \quad (3.1)$$

Es inmediato verificar que $\phi(U_1 \times \dots \times U_n) = \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap F_n(X)$ y además, por (3.1), $\phi(a) = A \in \langle U_1, \dots, U_n \rangle \subseteq \phi(\mathcal{U})$. De esta manera $\phi(\mathcal{U})$ es abierto y $\phi|_M$ es abierta. $\square$

Corolario 3.1.4. *Sean X un espacio métrico compacto, $n \in \mathbb{N}$ y $U_1, \dots, U_n$ abiertos disjuntos dos a dos y no vacíos de X . Si $\mathcal{U} = U_1 \times \dots \times U_n$, entonces $\phi|_{\mathcal{U}}: \mathcal{U} \rightarrow \langle U_1, \dots, U_n \rangle \cap F_n(X)$ es un homeomorfismo.*

Demostración. Como la restricción de una función continua es continua, $\phi|_{\mathcal{U}}$ es continua. Observemos que $\mathcal{U} \subseteq \phi^{-1}(F_n(X) \setminus F_{n-1}(X))$. Luego, por el Teorema 3.1.3 $\phi|_{\mathcal{U}}$ es abierta. Veamos que la función es inyectiva. Sean $a, b \in \mathcal{U}$ y supongamos que $a \neq b$. Si $a = (a_1, \dots, a_n) \neq b = (b_1, \dots, b_n)$, existe un $1 \leq j \leq n$ tal que $a_j \neq b_j$, entonces $a_j \in \phi|_{\mathcal{U}}(a) \setminus \phi|_{\mathcal{U}}(b)$ ya que $a_j \notin U_k$ para todo $k \in \{1, \dots, n\} \setminus \{j\}$. Por tanto, $\phi|_{\mathcal{U}}(a) \neq \phi|_{\mathcal{U}}(b)$. La sobreyectividad es inmediata de la definición. Así, $\phi|_{\mathcal{U}}$ es un homeomorfismo por⁷. $\square$

En⁸ se prueba que la unión finita o numerable de cerrados con dimensión menor o igual a n , para todo $n \in \mathbb{N}$, tiene dimensión menor o igual a n . En esta dirección, D. Curtis y

⁷ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Proposición 3.13.

⁸ Hurewicz y Wallman, ver n. 4, Teorema III 2, pág. 30.

N. T. Nhu establecieron en el Lema 3.1 de⁹ una cota superior para la dimensión de los productos simétricos, siempre que el espacio X tenga dimensión finita.

Teorema 3.1.5. *Sea X un espacio métrico compacto de dimensión finita y $n \in \mathbb{N}$, entonces*

$$\dim(F_n(X)) \leq n \cdot \dim(X).$$

Demostración. Procedamos por inducción. Para $n = 1$, como ya se mencionó antes, se tiene que $F_1(X) \cong X$. Luego, $\dim(F_1(X)) \leq \dim(X)$. Supongamos que se cumple para $n = k$; es decir, $\dim(F_k(X)) \leq k \cdot \dim(X)$. Veamos que para $n = k + 1$ se tiene $\dim(F_{k+1}(X)) \leq (k + 1) \cdot \dim(X)$. Note que, $F_{k+1}(X) = (F_{k+1}(X) \setminus F_k(X)) \cup F_k(X)$. Por el Corolario 2.2.7, $F_{k+1}(X) \setminus F_k(X)$ es abierto. Luego, $F_{k+1}(X) \setminus F_k(X)$ es unión numerable de cerrados (ver 2.1.1). Además $F_k(X)$ es cerrado. Por¹⁰, basta con probar que $\dim(F_{k+1}(X) \setminus F_k(X)) \leq (k + 1) \cdot \dim(X)$. Sea $B \in \langle U_1, \dots, U_m \rangle \cap (F_{k+1}(X) \setminus F_k(X))$. Luego, existen abiertos disjuntos dos a dos $V_1, \dots, V_{k+1}$ tales que $B \in \langle V_1, \dots, V_{k+1} \rangle \cap F_{k+1}(X) \subseteq \langle U_1, \dots, U_m \rangle \cap (F_{k+1}(X) \setminus F_k(X))$. Por el Lema 3.1.4, $\phi|_{\mathcal{V}}: \mathcal{V} \rightarrow \langle V_1, \dots, V_{k+1} \rangle \cap F_{k+1}(X)$, con $\mathcal{V} = V_1 \times \dots \times V_{k+1}$ es un homeomorfismo. Luego, como $\dim(X^{k+1}) \leq (k + 1) \cdot \dim(X)$ por¹¹, existe un abierto $\mathcal{W} \subseteq \text{Cl}_{X^n}(\mathcal{W}) \subseteq \mathcal{V}$, tal que $\dim(\text{Fr}_{X^{k+1}}(\mathcal{W})) \leq (k + 1) \cdot \dim(X) - 1$ y $B \in \phi|_{\mathcal{V}}(\mathcal{W})$. Como $\phi|_{\mathcal{V}}$ es abierta, entonces $\phi|_{\mathcal{V}}(\mathcal{W})$ es un abierto en $\langle V_1, \dots, V_{k+1} \rangle \cap F_{k+1}(X)$, por tanto, abierto de $\langle U_1, \dots, U_m \rangle \cap F_{k+1}(X)$. Notemos que $\dim(\text{Fr}_{F_{k+1}(X) \setminus F_k(X)}(\phi|_{\mathcal{V}}(\mathcal{W})) \leq (k + 1) \cdot \dim(X) - 1$. Así, $\dim(F_{k+1}(X) \setminus F_k(X)) \leq (k + 1) \cdot \dim(X)$. De lo cual concluimos que $\dim(F_{k+1}(X)) \leq (k + 1) \cdot \dim(X)$. $\square$

R. Engelking en¹² demuestra que si $f: X \rightarrow Y$ es una función continua, cerrada, entre espacios métricos separables y existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $\dim(f^{-1}(y)) \leq k$ para cada $y \in Y$, entonces $\dim(X) \leq \dim(Y) + k$. Dado X un espacio métrico compacto y $n \in \mathbb{N}$. Observemos que $\dim(\phi^{-1}(y)) = 0$, para cada $y \in Y$. Luego $\dim(X^n) \leq \dim(F_n(X))$. Lo que nos lleva al siguiente teorema.

Teorema 3.1.6. *Sean X un espacio métrico compacto y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $\dim(X^n) = \dim(F_n(X))$.*

⁹ D. Curtis y N. T. Nhu. Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to $\aleph_0$ -dimensional linear metric spaces. En: *Topology Appl.* 19.3 (1985), págs. 251-260.

¹⁰ Hurewicz y Wallman, ver n. 4, Teorema III 2, pág. 30.

¹¹ Hurewicz y Wallman, ver n. 4, Teorema III 4, pág. 33.

¹² Engelking, *Dimension Theory*, ver n. 5, Teorema 1.12.4, pág. 136.

Demostración. Dados X un espacio métrico compacto y $n \in \mathbb{N}$. De¹³ se sigue $\dim(X^n) \leq \dim(F_n(X))$.

Observemos que de la demostración del Teorema 3.1.5 podemos afirmar lo siguiente. Dado $n \in \mathbb{N}$, entonces $\dim(F_n(X) \setminus F_{n-1}(X)) \leq \dim(X^n)$. Reescribamos $F_n(X)$ de la siguiente manera,

$$F_n(X) = \left(\bigcup_{k=2}^n (F_k(X) \setminus F_{k-1}(X)) \right) \cup F_1(X).$$

Notemos que $\dim(F_k(X) \setminus F_{k-1}(X)) \leq \dim(X^k)$. Más aún, $\dim(F_k(X) \setminus F_{k-1}(X)) \leq \dim(X^n)$ para cada $k \in \{2, \dots, n\}$. Además $F_1(X) \cong X$, luego es claro que $\dim(F_1(X)) \leq \dim(X^n)$. Nuevamente, por¹⁴, se tiene que $\dim(F_n(X)) \leq \dim(X^n)$. De lo anterior, $\dim(X^n) = \dim(F_n(X))$. $\square$

De acuerdo con el Teorema 3.1.5, si $\dim(X)$ es finita, entonces $F_n(X)$ también es de dimensión finita. Por otro lado, se sabe que el hiperespacio $\mathcal{K}(X)$ tiene siempre dimensión infinita¹⁵. Por consiguiente, $F_n(X)$ no puede ser homeomorfo a $\mathcal{K}(X)$ para ningún continuo X de dimensión finita.

Surge entonces una pregunta natural: ¿qué se puede inferir sobre la dimensión del espacio X si alguno de los productos simétricos $F_n(X)$ resulta ser de dimensión finita? El siguiente teorema proporciona una respuesta a esta cuestión.

Teorema 3.1.7. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, existe un $k \in \mathbb{N}$ tal que $F_k(X)$ es de dimensión finita si, y solo si, X es de dimensión finita.*

Demostración. Sea $k \in \mathbb{N}$ tal que $F_k(X)$ tiene dimensión finita. Nótese que la función $\rho: X \rightarrow F_k(X)$, definida por $\rho(x) = \{x\}$, es un encaje. En consecuencia, por el Teorema 3.1.2, la dimensión de X no puede exceder la dimensión de $F_k(X)$, y por tanto, X es de dimensión finita.

La otra implicación es consecuencia del Teorema 3.1.5. $\square$

De lo anterior se deduce que, si existe algún producto simétrico $F_k(X)$ de dimensión finita, entonces todos los productos simétricos $F_n(X)$ son también de dimensión finita, puesto que el espacio X mismo debe tener dimensión finita.

¹³ Engelking, *Dimension Theory*, ver n. 5, Teorema 1.12.4, pág. 136.

¹⁴ Hurewicz y Wallman, ver n. 4, Teorema III 2, pág. 30.

¹⁵ Illanes y Nadler Jr, ver n. 2, Teorema 72.1.

Recordemos que un espacio métrico X es totalmente desconexo si los únicos subconjuntos conexos de X son los conjuntos uno puntuales. En¹⁶, se muestra que si X es un espacio métrico compacto, entonces, $\dim(X) = 0$ si, y solo si, X es totalmente desconexo. De esta forma, un conjunto finito, un compacto numerable o el conjunto de Cantor (Ejemplo 3.1.9) son ejemplos de espacios de dimensión cero.

Para analizar la dimensión de los subconjuntos finitos de X , lo dividiremos en dos casos. Cuando $\dim(X) = 0$ y cuando $\dim(X) \geq 1$. Puesto que tenemos resultados diferentes. Cuando $\dim(X) = 0$ usando¹⁷, no es difícil ver que el espacio de subconjuntos finitos $F(X)$ también tiene dimensión finita como mostramos a continuación.

Teorema 3.1.8. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, $\dim(X) = 0$ si, y solo si, $\dim(F(X)) = 0$.*

Demostración. Sea X un espacio métrico compacto tal que $\dim(X) = 0$. Sabemos por el Teorema 3.1.5 que para todo $n \in \mathbb{N}$, $\dim(F_n(X)) = 0$ y por el Teorema 2.2.4, sabemos que son cerrados. Luego, la dimensión de $F(X)$ es a lo más cero (ver¹⁸). De lo cual se sigue que $\dim(F(X)) = 0$.

Recíprocamente, si $\dim(F(X)) = 0$, como $F_n(X) \subseteq F(X)$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Por¹⁹, $\dim(F_n(X)) \leq \dim(F(X))$. Como $F_n(X) \neq \emptyset$, $\dim(F_n(X)) = 0$. □

Ejemplo 3.1.9. Definimos $\mathcal{C}$ el conjunto de *Cantor*, como cualquier espacio homeomorfo a $\{0, 1\}^{\mathbb{N}}$. Como veremos más adelante, dado $n \in \mathbb{N}$, $F_n(\mathcal{C}) \cong \mathcal{C}$ y dado que $\dim(\mathcal{C}) = 0$, entonces por el Teorema 3.1.5, tenemos que $\dim(F_n(\mathcal{C})) = 0$. De la definición de $F(\mathcal{C})$, se deduce que $\dim(F(\mathcal{C})) = 0$.

Un continuo es un espacio métrico, compacto y conexo. Un subcontinuo es un continuo contenido en un espacio métrico.

Lema 3.1.10. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, $\dim(X) \geq 1$ si, y solo si, existe un subcontinuo no degenerado K de X .*

¹⁶ Hurewicz y Wallman, ver n. 4, D), pág. 22.

¹⁷ Hurewicz y Wallman, ver n. 4, Teorema III 2, pág. 30.

¹⁸ Hurewicz y Wallman, ver n. 4, Teorema III 2, pág. 30.

¹⁹ Hurewicz y Wallman, ver n. 4, Teorema III 1, pág. 26.

Demostración. Sabemos por²⁰ que $\dim(X) \geq 1$ si, y solo si, X no es totalmente desconexo. Luego, $\dim(X) \geq 1$ si, y solo si, existe una componente $C \subseteq X$ no degenerada. Esta componente es un subcontinuo no degenerado de X . $\square$

Como consecuencia del Lema 3.1.10, tenemos el siguiente corolario.

Corolario 3.1.11. *Si X es un continuo no degenerado, entonces $\dim(X) \geq 1$.*

A continuación, enunciaremos un teorema importante en la teoría de continuos que se conoce como *Teorema de Golpes en la Frontera*, cuya demostración se encuentra en²¹.

Teorema 3.1.12 (Teorema de Golpes en la Frontera). *Sea X un continuo y $U \subseteq X$ un abierto propio. Si C es una componente de $\text{Cl}_X(U)$, entonces $\text{Fr}_X(U) \cap C \neq \emptyset$.*

Note que en el teorema anterior, C es un subcontinuo de X .

Lema 3.1.13. *Sean $X_1, \dots, X_n$ continuos no degenerados, entonces $\dim(X_1 \times \dots \times X_n) \geq n$.*

Demostración. Procederemos por inducción. Sean X_1 y X_2 continuos tales que $\dim(X_i) \geq 1$ con $i \in \{1, 2\}$. Sea $p \in X_1 \times X_2$ y $U_1 \times U_2 \subseteq X_1 \times X_2$ un abierto que contiene a p . Notemos que $\text{Cl}_{X_1}(U_1) \times \text{Fr}_{X_2}(U_2) \subseteq \text{Fr}_{X_1 \times X_2}(U_1 \times U_2)$. Por el Teorema de golpes en la frontera, sabemos que existe un continuo no degenerado $K \subseteq \text{Cl}_{X_1}(U_1)$. Entonces, $\dim(\text{Cl}_{X_1}(U_1) \times \text{Fr}_{X_2}(U_2)) \geq 1$. Luego,²² nos garantiza que $\dim(\text{Fr}_{X_1 \times X_2}(U_1 \times U_2)) \geq 1$.

Supongamos que para $X_1, \dots, X_n$ continuos se tiene que $\dim(X_1 \times \dots \times X_n) \geq n$. Veamos que se cumple para $n + 1$. Sean $p \in X_1 \times \dots \times X_{n+1}$ y $U_1 \times \dots \times U_{n+1}$ un abierto que contiene a p . Nuevamente, notemos que, $\text{Cl}_{X_1}(U_1) \times \dots \times \text{Cl}_{X_n}(U_n) \times \text{Fr}_{X_{n+1}}(U_{n+1}) \subseteq \text{Fr}_{X_1 \times \dots \times X_{n+1}}(U_1 \times \dots \times U_{n+1})$. Del Teorema de Golpes en la frontera existen, K_i continuos no degenerados contenidos en $\text{Cl}_{X_i}(U_i)$ para cada i . Luego, de la hipótesis inductiva sabemos que $\dim(K_1 \times \dots \times K_n) \geq n$. Del Teorema 3.1.2, $\dim(\text{Cl}_{X_1}(U_1) \times \dots \times \text{Cl}_{X_n}(U_n) \times \text{Fr}_{X_{n+1}}(U_{n+1})) \geq n$ y, otra vez por²³, $\dim(\text{Fr}_{X_1 \times \dots \times X_{n+1}}(U_1 \times \dots \times U_{n+1})) \geq n$. Por lo tanto, $\dim(X_1 \times \dots \times X_{n+1}) \geq n + 1$. $\square$

²⁰ Hurewicz y Wallman, ver n. 4, D), pág. 22.

²¹ Nadler Jr, *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, ver n. 5, Teorema (20.1-3).

²² Hurewicz y Wallman, ver n. 4, Teorema III 1, pág. 26.

²³ Hurewicz y Wallman, ver n. 4, Teorema III 1, pág. 26.

El siguiente lema es consecuencia del Teorema 3.1.12. El Lema 3.1.14 se encuentra documentado en²⁴.

Lema 3.1.14. *Sean X un continuo, U un abierto de X y $x_1, \dots, x_n$ puntos diferentes en U . Entonces, existen $X_1, \dots, X_n$ subcontinuos disjuntos dos a dos, no degenerados contenido en U tales que $x_i \in X_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Demostración. Sean X un continuo, U un abierto de X y $x_1, \dots, x_n$ puntos diferentes en U . Como X es un espacio métrico, existen abiertos disjuntos dos a dos $U_1, \dots, U_n$ contenidos en U , tales que $x_i \in U_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Dado que X es métrico, por tanto, regular, y así existen abiertos W_i tales que $x_i \in W_i \subseteq \text{Cl}_X(W_i) \subseteq U_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. Sea X_i la componente de $\text{Cl}_X(W_i)$ tal que $x_i \in X_i$. Por el Teorema 3.1.12, tenemos que $\text{Fr}_X(W_i) \cap X_i \neq \emptyset$; es decir, X_i es un compacto, conexo, no degenerado de X . De la construcción se tiene que $X_1, \dots, X_n$ son subcontinuos disjuntos dos a dos tales que $x_i \in X_i$ para cada $i \in \{1, \dots, n\}$. $\square$

Una demostración similar del siguiente teorema se puede encontrar en²⁵.

Teorema 3.1.15. *Sea X un continuo tal que $\dim(X) \geq 1$. Entonces, todo abierto de $F(X)$ tiene dimensión infinita.*

Demostración. Sean $n \in \mathbb{N}$ y $\langle V_1, \dots, V_r \rangle \cap F(X)$ un abierto básico de $F(X)$ donde $V_1, \dots, V_r$ son abiertos no vacíos disjuntos dos a dos. Sea $A \in \langle V_1, \dots, V_r \rangle$ y supongamos que $A = \{x_1, \dots, x_m\}$. Del Lema 3.1.14, existen $K_1, \dots, K_n$ subcontinuos disjuntos dos a dos de $V_1 \setminus \{x_1\}$. Definamos $f: K_1 \times \dots \times K_n \rightarrow \langle V_1, \dots, V_r \rangle \cap F(X)$ como

$$f(k_1, \dots, k_n) = \{k_1, \dots, k_n\} \cup A.$$

La continuidad de f se sigue de manera similar a la continuidad de ϕ (ver 2.6) en 2.2.1. Veamos que f es inyectiva. Sean $(k_1, \dots, k_n) \neq (t_1, \dots, t_n)$, existe j tal que $k_j \neq t_j$. Como $A \cap \{k_1, \dots, k_n\} = A \cap \{t_1, \dots, t_n\} = \emptyset$ y $k_j \neq t_i$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$, entonces $k_j \in f(k_1, \dots, k_n) \setminus f(t_1, \dots, t_n)$. De lo cual, f es inyectiva. Dado que K_i son subcontinuos, tenemos que f es un encaje en $\langle V_1, \dots, V_r \rangle \cap F(K)$. Por tanto, $\dim(\langle V_1, \dots, V_r \rangle \cap F(X)) \geq n$

²⁴ R. M. García de la Rosa. El hiperespacio de los subconjuntos finitos de un continuo. Director: Alejandro Illanes. Tesis de Pregrado. Universidad Autónoma del Estado de México, 1995, Lema 2.8, pág.25.

²⁵ Rosa, ver n. 24, Teorema 2.10.

y como n y $\langle V_1, \dots, V_r \rangle \cap F(X)$ fueron arbitrarios, concluimos que todo abierto de $F(X)$ tiene dimensión infinita. $\square$

De la demostración anterior se deduce el siguiente corolario.

Corolario 3.1.16. *Sea X un espacio métrico compacto con $\dim(X) \geq 1$, entonces $F(X)$ tiene dimensión infinita.*

Demostración. Sea X un espacio métrico compacto. Por el Lema 3.1.10, existe un continuo $K \subseteq X$ no degenerado. Por el Teorema 3.1.15, $\dim(F(K)) = \infty$. Luego, $F(K) \subseteq F(X)$, entonces $\dim(F(X)) = \infty$. $\square$

J. J. Charatonik formuló en²⁶ la siguiente pregunta.

Problema 3.1.17. *Sea X un espacio métrico compacto. ¿Cuáles de los hiperespacios $\mathcal{K}(X)$, $F_n(X)$, $F(X)$, $C_n(X)$ o $C_\infty(X)$ pueden ser homeomorfos?*

En nuestro contexto podemos reformular la pregunta de la siguiente manera, ¿cuáles espacios $\mathcal{K}(X)$, $F(X)$, $C_n(X)$ o $C_\infty(X)$ son homeomorfos a $F_n(X)$? Parcialmente podemos responder esta pregunta en las siguientes circunstancias y proponer algunas:

1. Es conocido que $C([0, 1]) \cong [0, 1]^2$ (ver²⁷). Así, por el Ejemplo 2.3.1, $F_2([0, 1])$ es homeomorfo a $C([0, 1])$;
2. También se puede mostrar que $C(S^1) \cong [0, 1]^2$ (ver²⁸). Luego, por el Ejemplo 2.3.5, $F_2(S^1)$, que es una cinta de Möbius, no es homeomorfo a $C(S^1)$.
3. Suponga que X es un compacto no degenerado. Como $F_n(X)$ es compacto y, $F(X)$ y $\mathcal{K}(X)$ no lo son, ni $F(X)$ ni $\mathcal{K}(X)$ pueden ser homeomorfos a $F_n(X)$ para ningún $n \in \mathbb{N}$.
4. Si X es un métrico compacto tal que $1 \leq \dim(X) < \infty$, $F_n(X)$ es de dimensión finita, por el Teorema 3.1.7, mientras que $F(X)$ y $\mathcal{K}(X)$ tienen dimensión infinita (note que $F(X) \subseteq \mathcal{K}(X)$ y ver el Teorema 3.1.15);

²⁶ J. J. Charatonik. Recent research in hyperspace theory. En: *Extracta Math.* 18.2 (2003), págs. 235-262, Problema 2.7.

²⁷ Illanes y Nadler Jr, ver n. 2, Ejemplo 5.1.

²⁸ Illanes y Nadler Jr, ver n. 2, Ejemplo 5.2.

5. Si X es un continuo y $2 \leq \dim(X) < \infty$, entonces en²⁹ se demuestra que $\dim(C(X)) = \infty$, mientras que $F_n(X)$ es de dimensión finita. Luego, $C(X)$ tampoco puede ser homeomorfo a $F_n(X)$.

3.2. CONEXIDAD DE $F_n(X)$

En esta sección estudiaremos algunas de las nociones de conexidad en un espacio métrico compacto. Dado un espacio métrico compacto X , mostraremos cómo las nociones de conexidad sobre X , las conservan sus correspondientes productos simétricos $F_n(X)$, con $n \in \mathbb{N}$, y el espacio de conjuntos finitos $F(X)$. Primero, estudiaremos los conceptos básicos: conexidad y arcoconexidad. Posteriormente, la conexidad local y la conexidad en pequeño. Para la manera local seguiremos las ideas desarrolladas por A. ILLANES y J. J. CHARATONIK en³⁰. Finalmente, usaremos algunos resultados del estudio de espacios totalmente desconexos y puntos aislados para calcular el n -ésimo producto simétrico del espacio de Cantor.

3.2.1. Conexidad y arcoconexidad Observemos que si el espacio X es conexo, como $\phi: X^n \rightarrow F_n(X)$ es continua y sobreyectiva para cualquier entero positivo n (ver (2.6)), y X^n es conexo, puesto que la conexidad se preserva por funciones continuas, tenemos que $F_n(X)$ también es conexo. Ahora bien, falta responder la recíproca, para ello primero veamos el siguiente teorema. Este teorema es sencillo y ampliamente conocido; incluimos su demostración para comodidad del lector.

Teorema 3.2.1. *Sea X un espacio métrico compacto. Si el hiperespacio $\mathcal{K}(X)$ es conexo, entonces X también es conexo.*

Demostración. Sean U y V abiertos no vacíos de X tales que $X = U \cup V$. Notemos que $\mathcal{K}(X) = \langle X, U \rangle \cup \langle V \rangle$. Luego, por la conexidad de $\mathcal{K}(X)$, existe $C \in \langle X, U \rangle \cap \langle V \rangle$; es decir, $C \subseteq V$ y $C \cap U \neq \emptyset$, por tanto $U \cap V \neq \emptyset$. Con lo anterior concluimos que X es conexo. $\square$

Notemos que las hipótesis de ser métrico compacto no fueron usadas, es decir, este resultado es válido en general para espacios topológicos.

²⁹ Illanes y Nadler Jr, ver n. 2, Teoremas 72.5, 73.9.

³⁰ Charatonik e Illanes, ver n. 2.

Observemos que la siguiente prueba es exactamente igual a la presentada en el Teorema 3.2.1.

Teorema 3.2.2. *Sean X un espacio métrico compacto y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, X es conexo si, y solo si, $F_n(X)$ es conexo.*

Demostración. Por el comentario que hicimos empezando la sección, sabemos que si X es conexo, tenemos que $F_n(X)$ es conexo.

Recíprocamente, supongamos que $F_n(X)$ es conexo. Sean U y V abiertos diferentes del vacío de X tales que $X = U \cup V$. Notemos que

$$F_n(X) = (\langle X, U \rangle \cap F_n(X)) \cup (\langle V \rangle \cap F_n(X)).$$

Además, $\langle X, U \rangle \cap F_n(X) \neq \emptyset$ y $\langle V \rangle \cap F_n(X) \neq \emptyset$. Como $F_n(X)$ es conexo, existe $C \in (\langle X, U \rangle \cap F_n(X)) \cap (\langle V \rangle \cap F_n(X))$. Esto es, $C \cap U \neq \emptyset$ y $C \subseteq V$. De lo anterior concluimos que $U \cap V \neq \emptyset$ y X es conexo. $\square$

Antes de responder la pregunta sobre la arcoconexidad, necesitamos los siguientes dos lemas de topología general. La demostración del primero se encuentra en el Teorema 8.23 de³¹.

Lema 3.2.3. *Sea X un continuo. Si X es localmente conexo, entonces X es conexo por arcos.*

D. W. CURTIS y N. T. NHU demostraron en el Lema 2.2 de³² un resultado muy importante para la prueba de arcoconexidad que enunciamos a continuación.

Lema 3.2.4. *Sean X un espacio métrico compacto y $\mathcal{M} \subseteq F(X)$ un subconjunto cerrado y localmente conexo. Entonces, $\bigcup_{A \in \mathcal{M}} A$ es compacto y localmente conexo en X .*

La prueba del siguiente resultado se encuentra en³³.

Lema 3.2.5. *Sea X un espacio métrico compacto y $n \in \mathbb{N}$. Si $C \subseteq F_n(X)$ es un subconjunto conexo y $C \cap F_1(X) \neq \emptyset$, entonces $\bigcup C$ es conexo en X .*

³¹ Nadler Jr, *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, ver n. 5.

³² Curtis y Nhu, ver n. 9.

³³ Charatonik e Illanes, ver n. 2, Lema 2.1, pág. 818.

Demostración. Sea $C \subseteq F_n(X)$ subconjunto conexo tal que $C \cap F_1(X) \neq \emptyset$. Supongamos por contradicción que existen abiertos U, V de X tales que $\bigcup C \subseteq U \cup V$, $\bigcup C \cap U \neq \emptyset$, $\bigcup C \cap V \neq \emptyset$ y $U \cap V = \emptyset$. Dado que $C \cap F_1(X) \neq \emptyset$, existe $\{a\} \in C$. Sin pérdida de generalidad, suponga que $a \in U$. Consideremos los abiertos básicos $\langle U \rangle \cap F_n(X)$, $\langle X, V \rangle \cap F_n(X)$ y veamos que $C \subseteq (\langle U \rangle \cap F_n(X)) \cup (\langle X, V \rangle \cap F_n(X))$. Sea $A \in C$, entonces tenemos $A \subseteq \bigcup C$. Como $\bigcup C \subseteq U \cup V$ consideremos los siguientes casos. Si $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$ o $A \cap U = \emptyset$ y $A \cap V \neq \emptyset$, notemos que $A \in \langle X, V \rangle \cap F_n(X)$. Caso contrario, $A \cap U \neq \emptyset$ y $A \cap V = \emptyset$, notemos que $A \subseteq U$. Por tanto, $A \in \langle U \rangle \cap F_n(X)$. De lo anterior, $C \subseteq (\langle U \rangle \cap F_n(X)) \cup (\langle X, V \rangle \cap F_n(X))$. Como $\{a\} \subseteq U$ entonces $(\langle U \rangle \cap F_n(X)) \neq \emptyset$. Para ver que $\langle X, V \rangle \cap F_n(X)$ no es vacío, tomemos $p \in \bigcup C \cap V$. Luego existe $D \in C$ tal que $p \in D$, luego $D \in \langle U \rangle \cap F_n(X)$, puesto que, $p \notin U$. De la prueba del Teorema 3.2.2, se sigue que $\langle U \rangle \cap F_n(X)$ y $\langle X, V \rangle \cap F_n(X)$ son disjuntos. De lo cual, se sigue que C no es conexo. Contradicción. $\square$

En el Teorema 7.35 de³⁴ se demuestra que todo espacio métrico conexo por caminos, es arcoconexo. Así, para mostrar la arcoconexidad de un espacio métrico X , basta demostrar que para cada par de puntos $x, y \in X$, existe una función continua $f: [0, 1] \rightarrow X$ tal que $f(0) = x$ y $f(1) = y$. Con esto, es inmediato el siguiente resultado.

Proposición 3.2.6. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función continua y sobreyectiva entre espacios métricos. Si X es arcoconexo, entonces Y es arcoconexo.*

La demostración del siguiente teorema la tomamos de³⁵.

Teorema 3.2.7. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. X es arcoconexo;
2. $F_n(X)$ es arcoconexo para algún $n \in \mathbb{N}$;
3. $F_n(X)$ es arcoconexo para cada $n \in \mathbb{N}$.

³⁴ Camargo y Villamizar, ver n. 4.

³⁵ E. Castañeda-Alvarado y G. A. Reyes. Una mirada a los productos simétricos. En: *Ciencia Ergo Sum* 16.2 (2009), págs. 189-197, Teorema 6, pág. 190.

Demostración. Supongamos primero que X es arcoconexo. Sea $n \in \mathbb{N}$. Entonces, por³⁶, X^n también es arcoconexo. Como ϕ es continua y sobreyectiva (ver (2.6)), aplicando la Proposición 3.2.6, tenemos que $F_n(X)$ es arcoconexo. Como n lo tomamos de manera arbitraria, concluimos que 1 implica 3. Es claro que 3 implica 2.

Ahora, supongamos que $F_n(X)$ es arcoconexo, para algún $n \in \mathbb{N}$. Así, para cualesquiera $p, q \in X$, existe una función continua $\alpha: [0, 1] \rightarrow F_n(X)$ tal que $\alpha(0) = \{p\}$ y $\alpha(1) = \{q\}$. Como $[0, 1]$ es un continuo localmente conexo y $F_n(X)$ es un espacio métrico, se tiene que $\alpha([0, 1])$ es un continuo localmente conexo de $F_n(X)$ (³⁷). Aplicando el Lema 3.2.4, se concluye que $\bigcup \alpha([0, 1]) \subseteq X$ es compacto y localmente conexo. Además como $\{p\}, \{q\} \in \alpha([0, 1])$, entonces $\alpha([0, 1]) \cap F_1(X) \neq \emptyset$. Luego por el Lema 3.2.5 tenemos que $\bigcup \alpha([0, 1])$ es conexo en X . Finalmente, por el Lema 3.2.3, $\bigcup \alpha([0, 1])$ es arcoconexo, así como $p, q \in \bigcup \alpha([0, 1])$, existe un arco en $\bigcup \alpha([0, 1])$; es decir, en X , que une a p y q . De esta forma, X es arcoconexo. De esta manera concluimos la demostración. $\square$

Pasemos ahora al caso de $F(X)$. Si $F(X)$ es conexo, su clausura también lo será. Como $F(X)$ es denso en $\mathcal{K}(X)$ (ver Teorema 2.1.6), se sigue que $\mathcal{K}(X)$ es conexo. Luego, si queremos saber cuando la conexidad de $F(X)$ implica la conexidad de X , se reduce entonces a dar solución a la siguiente pregunta: ¿cuándo la conexidad de $\mathcal{K}(X)$ implica la conexidad de X ? Esto ya lo mencionamos en el Teorema 3.2.1, que como ya demostramos, para un espacio métrico compacto, si $\mathcal{K}(X)$ es conexo, entonces X es conexo. Esto nos proporciona las herramientas necesarias para la prueba del siguiente resultado.

Teorema 3.2.8. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, X es conexo si, y solo si, $F(X)$ es conexo.*

Demostración. Supongamos que X es conexo. Puesto que X es conexo, entonces $F_n(X)$ es conexo para cualquier $n \in \mathbb{N}$, por el Teorema 3.2.2. Además, como $F_1(X) \subseteq F_n(X)$ para todo entero positivo n , tenemos que $F(X)$ es la unión de una familia de conjuntos conexos cuya intersección es no vacía, y por tanto, $F(X)$ es conexo (ver³⁸). Recíprocamente, si $F(X)$ es conexo, como es denso, se sigue que $\mathcal{K}(X)$ es conexo³⁹, por tanto X también lo es, por el Teorema 3.2.1. $\square$

³⁶ Camargo y Villamizar, ver n. 4, 7.3.1 (3).

³⁷ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Proposición 6.15, pág. 199.

³⁸ M. Manetti. *Topology*. Springer, 2023, Lema 4.23, pág. 69.

³⁹ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Teorema 7.12, pág. 233.

De manera similar y usando el Lema 3.2.3 se tiene la arcoconexidad en $F(X)$.

Teorema 3.2.9. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, X es arcoconexo si, y solo si, $F(X)$ es arcoconexo.*

Demostración. Supongamos que X es arcoconexo. Sean A y B en $F(X)$. Sin pérdida de generalidad podemos suponer que $|A| \leq |B| = m$. Luego, A y B están en $F_m(X)$. Por el Teorema 3.2.7, $F_m(X)$ es arcoconexo. De esto, existe una función continua $\alpha: [0, 1] \rightarrow F_m(X)$ tal que $\alpha(0) = A$ y $\alpha(1) = B$. Como $F_m(X) \subseteq F(X)$, $F(X)$ es arcoconexo.

La prueba del recíproco es replicar exactamente la demostración del Teorema 3.2.7. Por tanto, si $F(X)$ es arcoconexo, entonces X es arcoconexo. Concluimos de esta manera la demostración. $\square$

Es importante resaltar que en⁴⁰, dado un continuo cualquiera X , el hiperespacio $\mathcal{K}(X)$ es siempre arcoconexo. De lo anterior, al contrario que $F_n(X)$ y $F(X)$, la arcoconexidad de $\mathcal{K}(X)$ no implica la arcoconexidad de X .

3.2.2. Conexidad Local La conexidad sobre un espacio métrico compacto también se puede definir de manera local y explorar diferentes variantes de este concepto. Recordemos estas definiciones.

Definición 3.2.10. Sean X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que X es *localmente conexo en x* si, para cada abierto U que contiene a x , existe un abierto conexo $V \subseteq U$ tal que $x \in V$. Además, diremos que X es *localmente conexo* si X es localmente conexo en x , para todo x en X .

Observemos que un espacio es localmente conexo si, y solo si, este tiene una base de abiertos conexos. De esta forma la recta real $\mathbb{R}$, o cualquier espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$ son ejemplos de espacios localmente conexos, ya que la familia de bolas abiertas $\{B(x; r) : x \in \mathbb{R}^n, r > 0\}$ es una base de abiertos conexos. Otros ejemplos son: el intervalo cerrado $[0, 1]$, la circunferencia unitaria $S^1 = \{z \in \mathbb{R}^2 : |z| = 1\}$, o una 2-celda $[0, 1]^2$.

Recordemos que un espacio X es un n -*odo*, si es la unión de n -arcos que se intersecan en un único punto. No es difícil ver que la unión finita de compactos localmente conexos es un compacto localmente conexo. Esto nos da pie al siguiente ejemplo.

⁴⁰ Illanes y Nadler Jr, ver n. 2, Teorema 14.9, pág. 113.

Ejemplo 3.2.11. Dado $n \in \mathbb{N}$, entonces cualquier n – *odo* es localmente conexo. Por ejemplo, para $n = 3$, el triodo simple se puede visualizar de la siguiente manera.

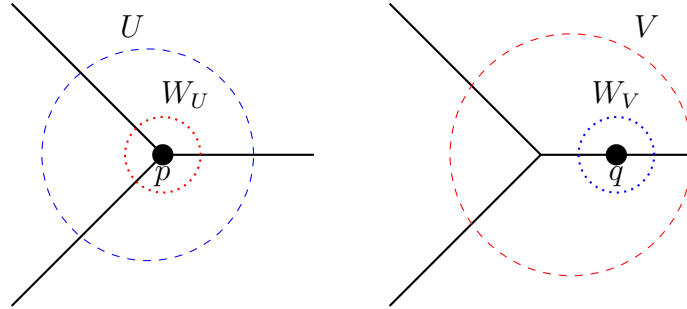


Figura 3.1: Triodo Simple es Localmente Conexa.

Las vecindades conexas que se construyen en los n – *odos* resultan ser arcoconexas, de lo cual surge una nueva forma de caracterizar conexidad local en ciertos espacios.

Definición 3.2.12. Sea X un espacio topológico y $x \in X$. Decimos que X es *localmente arcoconexo en x* si, para cada vecindad abierta U de x , existe un abierto $V \subseteq U$ tal que $x \in V$ y V es arcoconexo. Diremos que X es *localmente arcoconexo* si lo es en todo punto $x \in X$.

Esta nueva definición es más fuerte que ser localmente conexo. De hecho, si un espacio es localmente arcoconexo, entonces el espacio es localmente conexo. La recíproca en general, no es verdadera (ver⁴¹). Ahora bien, de manera puntual en espacio métricos compactos podemos encontrar ejemplos de espacios localmente conexos en un punto, pero no localmente arcoconexo.

Ejemplo 3.2.13. Sea $\gamma = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, 1]\}$. Definimos la *Curva del Topólogo* como $\text{Cl}(\gamma)$ y la denotamos como Γ . Consideremos la siguiente sucesión.

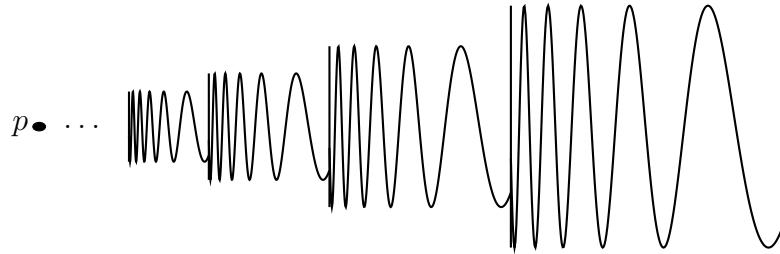


Figura 3.2: Sucesión de curvas del topólogo.

⁴¹ Lynn Arthur Steen y J. A. Seebach Jr. *Counterexamples in Topology*. Vol. 18. New York: Springer, 1978, Ejemplos 14, 17, 48.

Observe que aunque Γ no es localmente conexo, este es localmente conexo en p , donde no es localmente arcoconexo.

Ahora bien los conceptos localmente conexo y localmente arcoconexo son equivalentes de manera global. Esto es, si X es un espacio métrico, compacto y localmente conexo (en todo punto), entonces X es localmente arcoconexo (ver⁴²). Otro tipo de espacios que tienen relación con la conexidad local son los espacios conexos en pequeño, que se definen como sigue.

Definición 3.2.14. Sea X un espacio topológico. Decimos que X es *conexo en pequeño en p* si para todo abierto U que contiene a p , existe una vecindad conexa V de p , tal que $V \subseteq U$. Si X es conexo en pequeño en todos sus puntos, decimos que X es un *conexo pequeño*.

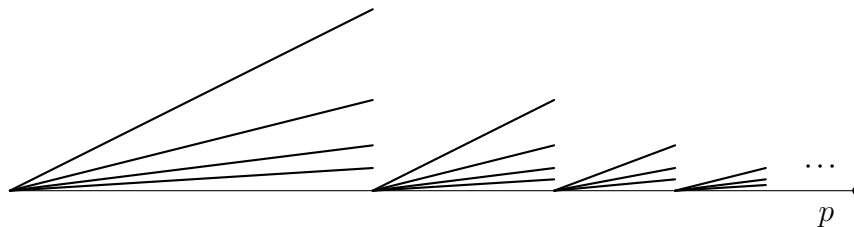
Notemos que en la definición de conexo en pequeño solo pedimos que exista una vecindad conexa, no necesariamente abierta. Como todo abierto es vecindad, entonces todo espacio localmente conexo es conexo en pequeño. El siguiente ejemplo muestra que existen espacios que son conexos en pequeño en un punto dado que no es localmente conexo en ese punto.

Ejemplo 3.2.15. Un continuo X se dice un *abanico armónico clásico* si es homeomorfo a un subconjunto $H \subset \mathbb{R}^2$ de la forma

$$H = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \overline{vp_n} \cup \overline{vp},$$

donde $v = (0, 0)$, $p_n = (1, 1/n)$ para $n \in \mathbb{N}$ y $p = (1, 0)$, y donde cada $\overline{vp_n}$ y $\overline{vp}$ denota el arco convexo que une v con p_n y v con p , respectivamente.

En⁴³ se demuestra que la sucesión de abanicos armónicos que mostramos en la Figura 1.11 es conexo en pequeño en p , pero no es localmente conexo en p .



⁴² S. B. Nadler Jr. *Continuum theory: an introduction*. CRC Press, 2017, Teorema 8.25, pág. 131.

⁴³ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Ejemplo 7.25.

Figura 3.3: Sucesión de abanicos.

En el contexto global ser conexo en pequeño y ser localmente conexo resultan ser equivalentes⁴⁴. A modo de recopilación tenemos el siguiente teorema que relaciona las tres definiciones anteriores.

Teorema 3.2.16. *Sea X un espacio métrico compacto. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

1. X es localmente conexo;
2. X es localmente arcoconexo;
3. X es conexo en pequeño.

Respecto a los productos simétricos, queremos ver cuándo conservan estas propiedades y bajo qué condiciones lo hacen. Una primera respuesta parcial es dada por la función ϕ . Es bien sabido que el producto finito de espacios localmente conexos es localmente conexo⁴⁵. Por el Lema 2.2.1 sabemos que la función ϕ definida en (2.6) es continua y sobreyectiva. Además, si X es un espacio métrico compacto, como $F_n(X)$ también es métrico compacto (Teorema 2.2.8) tenemos que ϕ es cerrada (ver⁴⁶). Luego por⁴⁷ se tiene el siguiente resultado.

Teorema 3.2.17. *Si X es un espacio métrico compacto y localmente conexo, entonces $F_n(X)$ es localmente conexo para todo $n \in \mathbb{N}$.*

Usando el Teorema 3.2.16, podemos reescribir el Teorema 3.2.17, de la siguiente manera.

Teorema 3.2.18. *Sea X un espacio métrico compacto y localmente conexo. Entonces, se tienen la siguientes afirmaciones:*

- $F_n(X)$ es localmente conexo para todo $n \in \mathbb{N}$;
- $F_n(X)$ es localmente arcoconexo para todo $n \in \mathbb{N}$;

⁴⁴ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Teorema 7.19.

⁴⁵ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Teorema 7.23.

⁴⁶ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Proposición 6.14.

⁴⁷ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Corolario 7.21.

- $F_n(X)$ es conexo en pequeño para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como dijimos anteriormente, esto proporciona una respuesta parcial. El teorema anterior nos garantiza la conexidad local de manera global. Entonces, es válido preguntarse qué pasa de manera puntual.

Primero tenemos que ver cómo podemos relacionar los conexos de $F_n(X)$ con los conexos de X y viceversa. En los Lemas 6.1 y 6.2 de⁴⁸, A. ILLANES y J. J. CHARATONIK dieron una forma de relacionarlos, que mostramos a continuación.

Lema 3.2.19. *Sea X un espacio métrico compacto, $n, r \in \mathbb{N}$ con $r \leq n$ y sea $A = \{a_1, \dots, a_r\} \in F_n(X)$, donde $a_1, \dots, a_r$ son diferentes. Sea $U_1, \dots, U_r$ abiertos disjuntos dos a dos de X tal que $a_i \in U_i$, para cada $i \in \{1, \dots, r\}$ y $\mathcal{C} \subseteq \langle U_1, \dots, U_r \rangle \cap F_n(X)$, tal que $A \in \mathcal{C}$. Entonces se tienen las siguientes implicaciones:*

1. *Si $\mathcal{C}$ es abierto en $F_n(X)$, entonces $\bigcup \mathcal{C}$ es abierto en X .*
2. *Si $\mathcal{C}$ es conexo, entonces $(\bigcup \mathcal{C}) \cap U_i$ es conexo en X para cada $i \in \{1, \dots, r\}$.*
3. *Si $\mathcal{C}$ es arcoconexo, entonces $(\bigcup \mathcal{C}) \cap U_i$ es arcoconexo en X para cada $i \in \{1, \dots, r\}$.*

De manera recíproca también tenemos el siguiente lema.

Lema 3.2.20. *Sea X un espacio métrico compacto, $n, r \in \mathbb{N}$ con $r \leq n$, y sea $A = \{a_1, \dots, a_r\} \in F_n(X)$, donde los puntos $a_1, \dots, a_r$ son distintos. Para cada $i \in \{1, \dots, r\}$, sean U_i y C_i tales que $a_i \in C_i \subset U_i$ y $U_1, \dots, U_r$ son abiertos y disjuntos dos a dos en X . Además, definamos*

$$\mathcal{C} = \{B \in F_n(X) : B \subset C_1 \cup \dots \cup C_r \text{ y } B \cap C_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, r\}\}.$$

Entonces, se cumplen las siguientes implicaciones:

1. *Si cada C_i es abierto en X , entonces $\mathcal{C}$ es abierto en $F_n(X)$.*
2. *Si cada C_i es conexo, entonces $\mathcal{C}$ es conexo en $F_n(X)$.*
3. *Si cada C_i es arcoconexo, entonces $\mathcal{C}$ es arcoconexo en $F_n(X)$.*

⁴⁸ Charatonik e Illanes, ver n. 2.

Con lo anterior, ya estamos listos para recrear la demostración de los resultados principales de esta sección, que se encuentran en los Teoremas 6.3 y 6.4 de⁴⁹.

Teorema 3.2.21. *Sea X un espacio métrico compacto y sean $r, n \in \mathbb{N}$. Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\} \in F_n(X)$ con $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Entonces:*

1. *X es localmente conexo en a_i para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ si, y solo si, $F_n(X)$ es localmente conexo en A .*
2. *X es localmente arcoconexo en a_i para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ si, y solo si, $F_n(X)$ es localmente arcoconexo en A .*
3. *X es conexo en pequeño en a_i para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ si, y solo si, $F_n(X)$ es conexo en pequeño en A .*

Demostración. La prueba de 1, 2 y 3 son similares, por tanto presentamos la prueba solo de 2. Supongamos que X es un espacio localmente arcoconexo en a_i para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ y queremos probar que $F_n(X)$ es localmente arcoconexo en $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\}$. Sea $W = \langle W_1, \dots, W_m \rangle \cap F_n(X)$, entonces existen U_i abiertos disjuntos dos a dos tales que $a_i \in U_i$ y $U = \langle U_1, \dots, U_r \rangle \cap F_n(X) \subseteq W$. Luego, como X es localmente arcoconexo en los a_i , existen $C_i \subseteq U_i$ tales que C_i es un abierto arcoconexo. Entonces considere

$$\mathcal{C} = \{B \in F_n(X) : B \subset C_1 \cup \dots \cup C_r \text{ y } B \cap C_i \neq \emptyset \text{ para cada } i \in \{1, \dots, r\}\}.$$

Por el Lema 3.2.20, partes 1 y 3, $\mathcal{C}$ es un abierto arcoconexo en $F_n(X)$ y además $A \in \mathcal{C} \subseteq U \subseteq W$. Por lo tanto, $F_n(X)$ es localmente arcoconexo en A .

Ahora, supongamos que $F_n(X)$ es localmente arcoconexo en A . Sean $U_1, \dots, U_r$ abiertos de X disjuntos dos a dos tales que $a_i \in U_i$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Sea W un abierto tal que $a_1 \in W$. De la hipótesis, existe $\mathcal{C} \subseteq \langle U_1 \cap W, \dots, U_r \rangle \cap F_n(X)$ tal que $\mathcal{C}$ es abierto y arcoconexo. Del Lema 3.2.19, partes 1 y 3, se tiene que

$$C = (\bigcup \mathcal{C}) \cap (U_i \cap W)$$

es un abierto arcoconexo y además, note que $C \subseteq W$. De lo cual se sigue que X es localmente arcoconexo en a_1 . El proceso es similar para el resto de elementos en A . Por

⁴⁹ Charatonik e Illanes, ver n. 2.

tanto, X es localmente arcoconexo en a_i , para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. $\square$

De lo anterior, podemos caracterizar los espacios localmente conexos observando sus productos simétricos.

Corolario 3.2.22. *Sea X un espacio métrico compacto $n \in \mathbb{N}$. Entonces, X es localmente conexo si, y solo si, $F_n(X)$ es localmente conexo.*

Demostración. Supongamos primero que X es localmente conexo. Sea $n \in \mathbb{N}$ cualquiera y tome $B \in F_n(X)$, con $B = \{b_1, b_2, \dots, b_k\}$ y $k \leq n$. Como X es localmente conexo, en particular lo es en cada punto b_i para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Por el Teorema 3.2.21, $F_n(X)$ también es localmente conexo en B . Dado que B fue arbitrario, se sigue que $F_n(X)$ es localmente conexo.

Recíprocamente, supongamos que $F_n(X)$ es localmente conexo. En particular, $F_n(X)$ es localmente conexo en $\{x\}$ para todo $x \in X$. Aplicando nuevamente el Teorema 3.2.21, concluimos que X es localmente conexo. $\square$

Por el Teorema 3.2.16, sabemos que si X es localmente conexo, necesariamente es localmente arcoconexo y conexo en pequeño. Por tanto, el Corolario anterior nos permite complementar lo dicho en el Teorema 3.2.18; es decir, X es localmente arcoconexo(conexo en pequeño) si, y solo si, $F_n(X)$ es localmente arcoconexo(conexo en pequeño) para todo $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 3.2.23. Note que S^1 , la circunferencia unitaria en $\mathbb{R}^2$, es localmente arcoconexa. Por el lema anterior, se tiene que $F_n(S^1)$ es localmente conexa por arcos. En particular, $F_2(S^1)$. Por el Ejemplo 2.3.5, sabemos que $F_2(S^1)$ es homeomorfo a la banda de Möbius. Por tanto, la banda de Möbius es localmente conexa por arcos.

Los Lemas 3.2.19 y 3.2.20, se pueden adaptar al caso $F(X)$, obteniendo como resultado el siguiente teorema.

Teorema 3.2.24. *Sean X un espacio métrico compacto y $r \in \mathbb{N}$. Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\} \in F(X)$ con $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Entonces:*

1. *X es localmente conexo en a_i para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ si, y solo si, $F(X)$ es localmente conexo en A .*
2. *X es localmente conexo por arcos en a_i para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ si, y solo si, $F(X)$ es localmente conexo por arcos en A .*

3. X es un conexo pequeño en a_i para todo $i \in \{1, 2, \dots, r\}$ si, y solo si, $F(X)$ es un conexo pequeño en A .

La demostración del teorema anterior usa los mismos argumentos a los expuestos en la prueba del Teorema 3.2.21.

Igual que los productos simétricos, podemos caracterizar propiedades como la conexidad local por arcos en los espacios X fijándonos en los subconjuntos finitos de X .

Corolario 3.2.25. Sean X un espacio métrico compacto y $r \in \mathbb{N}$. Sea $A = \{a_1, a_2, \dots, a_r\} \in F(X)$ con $a_i \neq a_j$ para $i \neq j$. Entonces:

1. X es localmente conexo si, y solo si, $F(X)$ es localmente conexo.
2. X es localmente conexo por arcos si, y solo si, $F(X)$ es localmente conexo por arcos.

3.2.3. El producto simétrico de $\mathcal{C}$ Recordemos que una de las propiedades del conjunto de Cantor (ver Ejemplo 3.1.9) es ser totalmente desconexo. Una caracterización de este tipo de conjuntos en espacios métricos compactos se encuentra en⁵⁰ en el cual se enuncia que todo espacio métrico compacto X tiene $\dim(X) = 0$ si, y solo si, es totalmente desconexo. Usando el teorema anterior, damos paso al primer resultado de esta sección.

Teorema 3.2.26. Sea X un espacio métrico compacto no vacío. Entonces, X es totalmente desconexo, si y solo si, $F_n(X)$ es totalmente desconexo para algún $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Dado que X es totalmente desconexo, $\dim(X) = 0$. Luego, por el Teorema 3.1.5, $\dim(F_n(X)) = 0$; es decir, $F_n(X)$ es totalmente desconexo (ver⁵¹).

Recíprocamente, supongamos que $F_n(X)$ es totalmente desconexo, para algún $n \geq 1$. Note que $X \cong F_1(X) \subseteq F_n(X)$. Como $\dim(F_n(X)) = 0$, se tiene que $\dim(X) = 0$. De esta forma, nuevamente por⁵², concluimos que X es totalmente desconexo. $\square$

Definición 3.2.27. Sean X un espacio topológico y $A \subseteq X$. Decimos que $p \in A$ es un punto aislado, si existe un abierto U de X tal que $U \cap A = \{p\}$.

⁵⁰ Hurewicz y Wallman, ver n. 4, D), pág. 22.

⁵¹ Hurewicz y Wallman, ver n. 4, D), pág. 22.

⁵² Hurewicz y Wallman, ver n. 4, D), pág. 22.

Algunos ejemplos de conjuntos con puntos aislados en la recta son cualquier conjunto finito, o conjunto de la forma $[a, b] \cup \{c\}$, donde $c \notin [a, b]$; notemos que existe una bola con radio $\delta > 0$, tal que $[a, b] \cup \{c\} \cap (c - \delta, c + \delta) = \{c\}$.

Los productos simétricos como se enuncia en el siguiente teorema, conservan y heredan los puntos aislados respecto a cualquier espacio inicial X .

Teorema 3.2.28. *Sea X un espacio métrico y $n \in \mathbb{N}$. Entonces, $a_1, \dots, a_r$ son puntos aislados de X si, y solo si, $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ es un punto aislado de $F_n(X)$.*

Demostración. Supongamos primero que $a_1, \dots, a_r$ son puntos aislados diferentes de X . Sean $U_1, \dots, U_r$ abiertos tales que $U_i \cap X = \{a_i\}$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Consideremos el abierto de $\mathcal{K}(X)$,

$$\mathcal{U} = \langle U_1, \dots, U_r \rangle.$$

Veamos que $\mathcal{U} \cap F_n(X) = \{A\}$. Si $C \in \mathcal{U} \cap F_n(X)$, entonces

$$C \cap U_i \neq \emptyset, \text{ para todo } i \in \{1, \dots, r\}.$$

Como $C \in F_n(X)$, tenemos que $C \cap U_i \subseteq X \cap U_i = \{a_i\}$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. De donde $C \cap U_i = \{a_i\}$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Por tanto $A \subseteq C$.

Si $C \setminus A \neq \emptyset$, entonces existe $p \in C \setminus A$ tal que $p \neq a_i$ para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. Como

$$C \subseteq \bigcup_{i=1}^r U_i,$$

existe U_k tal que $p \in U_k$. Note que, $p \neq a_k$ y $p \in X$. De esto, $X \cap U_k = \{p, a_k\}$, lo cual contradice la elección de U_k .

Recíprocamente, supongamos que A es un punto aislado de $F_n(X)$. Entonces, existen $V_1, \dots, V_r$ disjuntos dos a dos tales que $a_i \in V_i$ respectivamente y $\mathcal{V} = \langle V_1, \dots, V_r \rangle$ cumple que

$$\mathcal{V} \cap F_n(X) = \{A\}.$$

Queremos ver que $V_i \cap X = \{a_i\}$ para cada $i \in \{1, \dots, r\}$. Tomemos $a_1 \in V_1$ y supongamos que $V_1 \cap A \neq \{a_1\}$. Entonces, si $p \in V_1 \cap X$ con $p \neq a_1$, entonces consideremos $C = (A \setminus \{a_1\}) \cup \{p\}$. Note que, $C \in \mathcal{V} \cap F_n(X)$ y $C \neq A$, lo cual es una contradicción. Similarmente para el resto de puntos. Por tanto, $V_i \cap X = \{a_i\}$ y a_i son puntos aislados de X para todo $i \in \{1, \dots, r\}$. $\square$

De la definición de puntos aislados se derivan los siguientes tipos de espacios.

Definición 3.2.29. Sea X un espacio topológico y $C \subseteq X$. Decimos que C es perfecto si C es cerrado y no tiene puntos aislados.

Teorema 3.2.30. Sea X un espacio métrico. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. X es perfecto;
2. $F_n(X)$ es perfecto para algún $n \in \mathbb{N}$;
3. $F_n(X)$ es perfecto para todo $n \in \mathbb{N}$.

Demostración. Se sigue directamente de los Teoremas 2.2.4 y 3.2.28. □

El Conjunto de Cantor que denotaremos $\mathcal{C}$ es un espacio métrico compacto que cumple con ser totalmente desconexo y perfecto. Existe una manera de caracterizar los espacios que son homeomorfos al conjunto de Cantor, la cual usaremos para calcular el producto n -ésimo del conjunto de Cantor. La demostración del siguiente resultado se encuentra en⁵³.

Teorema 3.2.31. Si X es un espacio métrico, compacto, totalmente desconexo y perfecto, entonces X es homeomorfo al conjunto de Cantor $\mathcal{C}$.

De lo anterior, tenemos las siguientes equivalencias.

Teorema 3.2.32. Sea X un espacio topológico. Entonces, las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. $X \cong \mathcal{C}$;
2. $F_n(X) \cong \mathcal{C}$ para algún $n \in \mathbb{N}$;
3. $F_n(X) \cong \mathcal{C}$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

⁵³ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Teorema 9.40, pág. 2.89.

4. UNICOHERENCIA Y CONOS

La unicoherencia es una propiedad topológica que captura de manera intuitiva la ausencia de “huecos” en un espacio: formalmente, un continuo es unicoherente si para toda escritura del espacio como unión de dos subcontinuos, la intersección de dichos subcontinuos es conexa. Esta propiedad ha sido ampliamente estudiada tanto en teoría de continuos como en hiperespacios. En este capítulo final analizamos su comportamiento en los productos simétricos.

Por otro lado, dado un espacio topológico X , su cono $\text{Cono}(X)$ constituye una construcción natural que extiende a X a un nuevo espacio topológico conexo por caminos que contiene una copia homeomorfa de X . Concluiremos el trabajo caracterizando aquellos productos simétricos que son homeomorfos al cono de algún compacto.

4.1. UNICOHERENCIA

Decimos que un continuo X es *unicoherente* si para cualesquiera dos subcontinuos de X cuya unión sea todo X , su intersección resulta ser conexa. En relación con esta propiedad, en 1931 K. BORSUK y S. ULAM formularon la siguiente pregunta: si X es un continuo localmente conexo y unicoherente y $n \in \mathbb{N}$, ¿se sigue que $F_n(X)$ también es unicoherente? Esta cuestión fue resuelta afirmativamente por T. GANEA en 1954¹, demostró que si X es un espacio de Hausdorff, conexo, localmente conexo y unicoherente, entonces $F_n(X)$ es unicoherente para todo $n \in \mathbb{N}$. Más adelante, en², A. ILLANES amplió este resultado probando que si X es un espacio de Hausdorff, localmente conexo y conexo por arcos, entonces $F_n(X)$ es unicoherente para todo $n \geq 3$. Posteriormente, S. MACÍAS en 1999³ obtuvo una generalización aún más fuerte al demostrar que si X es un continuo, entonces $F_n(X)$ es unicoherente para todo $n \geq 3$. En esta sección nos centraremos en los resultados obtenidos por S. MACÍAS y A. ILLANES para $F_n(X)$ y $F(X)$, respectivamente. Para ello, utilizaremos algunos resultados de *límites inversos*, los cuales permitirán recuperar y comprender algunos de estos resultados desde una perspectiva estructural.

¹ T. Ganea. Symmetrische Potenzen topologischer Räume. En: *Math. Nachr.* 11 (1954), págs. 305-316.

² A. Illanes. Multicoherence of symmetric products. En: *An. Inst. Univ. Nac. Autónoma Mexico.* 25 (1985), págs. 11-24.

³ S. Macías. On symmetric products of continua. En: *Topology Appl.* 92.2 (1999), págs. 173-182.

Algunos espacios unicoherentes conocidos son el intervalo $[0, 1]$, cuyos subcontinuos son intervalos cerrados contenidos en él. Otro ejemplo clásico es la *curva del topólogo* (ver Ejemplo 3.2.13). En efecto, puede demostrarse que si A y B son subcontinuos, entonces tienen la forma $A = \overline{\{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, s)\}}$ y $B = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in (0, t]\}$, donde $t \leq s$, y por tanto $A \cap B = \{(x, \sin(\frac{1}{x})) \in \mathbb{R}^2 : x \in [s, t]\}$, el cual es un conjunto conexo. Por otro lado, un continuo que no es unicoherente es la circunferencia S^1 , ya que existen $A = \{e^{i\theta} : 0 \leq \theta \leq \pi\}$ y $B = \{e^{i\theta} : \pi \leq \theta \leq 2\pi\}$, los cuales son continuos (cerrados y conexos) y $A \cap B = \{(1, 0), (-1, 0)\}$, que no es conexo.

4.1.1. Límites inversos Los límites inversos constituyen una herramienta fundamental que permite construir, a partir de espacios topológicos “simples”, nuevos espacios con propiedades topológicas notables (ver por ejemplo la construcción de continuos indescomponibles o los continuos encadenables presentada en⁴). Como veremos en esta sección, desempeñan además un papel central en el estudio de la unicoherencia en continuos.

Definición 4.1.1. Una *sucesión inversa* es una doble sucesión (X_n, f_n^{n+1}) de espacios X_n y funciones continuas $f_n^{n+1} : X_{n+1} \rightarrow X_n$. Los espacios X_n son llamados *espacios coordinados* y las funciones f_n^{n+1} se conocen como *funciones de ligadura*. Dada una sucesión inversa (X_n, f_n^{n+1}) , su límite inverso, denotado $\varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ o X_∞ , se define como

$$\varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}} = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \mid f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \text{ para cada } n \in \mathbb{N} \right\}.$$

Empezaremos mostrando en el Teorema 4.1.3 que el límite inverso de continuos es un continuo. Antes, un lema previo.

Lema 4.1.2. Sea $(X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión inversa de espacios métricos compactos y, para cada $k \in \mathbb{N}$, consideremos

$$A_k = \left\{ (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \mid f_n^{n+1}(x_{n+1}) = x_n, \text{ para cada } n \leq k \right\}.$$

Entonces:

⁴ Nadler Jr, *Continuum theory: an introduction*, ver n. 42, Capítulo II.

(i) A_k es homeomorfo a $\prod_{n=k+1}^{\infty} X_n$, y por tanto A_k es compacto y diferente de vacío, para cada $k \in \mathbb{N}$.

(ii) $A_{k+1} \subseteq A_k$, para cada $k \in \mathbb{N}$.

(iii) $\varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$.

Además, como consecuencia de lo anterior $\varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ es compacto y no vacío.

No realizaremos una prueba del lema anterior. Los detalles se pueden ver en⁵. Sin embargo, destacaremos los puntos más relevantes. Notemos que para cada $k \in \mathbb{N}$, podemos definir $\lambda_k: A_k \rightarrow \prod_{n=k+1}^{\infty} X_n$, de la siguiente manera

$$\lambda_k((x_n)_{n \in \mathbb{N}}) = (x_n)_{n=k+1}^{\infty}.$$

No es difícil ver que λ_k es un homeomorfismo⁶. De lo anterior, (ii) es una consecuencia directa. Además por la definición de límite inverso se puede deducir de manera clara (iii). Por último, tenemos que $\varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ es compacto y no vacío por ser intersección encajada de compactos no vacíos⁷.

Teorema 4.1.3. Sean (X_n, f_n^{n+1}) una sucesión inversa, tal que X_n es un continuo para cada $n \in \mathbb{N}$. Entonces $X_{\infty} = \varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ es un continuo.

Demostración. Del Lema 4.1.2 se sigue la compacidad. Veamos que X_{∞} es conexo. Por el Lema 4.1.2, sabemos que $X_{\infty} = \bigcap_{k \in \mathbb{N}} A_k$, donde $A_{k+1} \subseteq A_k$ y A_k es un continuo para cada $k \in \mathbb{N}$. Supongamos que $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq U \cup V$, donde U, V son abiertos. Luego, existe $N \in \mathbb{N}$ tal que $A_N \subseteq U \cup V$ ⁸. Dado que A_N es conexo, $A_N \subseteq U$ o $A_N \subseteq V$ (⁹). Supongamos sin pérdida de generalidad $A_N \subseteq U$. Así, $A_m \subseteq U$ para todo $m \geq N$. Por tanto, $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \subseteq U$ y $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} A_n \cap V = \emptyset$. Así, X_{∞} es conexo y por tanto, un continuo. $\square$

⁵ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Lema 10.15.

⁶ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Ejercicio 1, pág. 306.

⁷ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Ejercicio 11, pág. 202.

⁸ Manetti, ver n. 38, Ejercicio 4.26, pág. 76.

⁹ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Lema 7.6.

Dado que el limite inverso X_∞ de una sucesión inversa, es un subconjunto del espacio producto, las proyecciones $\pi_k: \prod_{n \in \mathbb{N}} X_n \rightarrow X_k$ las podemos restringir a X_∞ y trabajar con ellas. En esta sección, cuando no haya riesgo de confusión denotaremos π_k como la proyección k -ésima restringida a X_∞ .

Lema 4.1.4. *Sean $(X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión inversa de continuos y $X_\infty = \varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$. Sea A un subconjunto cerrado de X_∞ . Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos $\pi_n: X_\infty \rightarrow X_n$ como la proyección n -ésima. Entonces $(\pi_n(A), f_n^{n+1}|_{\pi_{n+1}(A)})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión inversa con funciones de ligadura sobreyectivas. Además,*

$$\varprojlim (\pi_n(A), f_n^{n+1}|_{\pi_{n+1}(A)}) = A = \left(\prod_{n=1}^{\infty} \pi_n(A) \right) \cap X_\infty.$$

Los detalles de la prueba del teorema anterior se pueden encontrar en¹⁰. Nuestro objetivo es demostrar que el limite inverso de continuos unicoherentes es también un continuo unicoherente. Para ello, probamos el siguiente lema, cuya demostración se realiza de manera similar a la prueba de¹¹.

Lema 4.1.5. *Sea $(X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión inversa con límite inverso X_∞ . Sean A y B compactos de X_∞ y $C = A \cap B$. Para cada $n \in \mathbb{N}$ denotamos $\pi_n: X_\infty \rightarrow X_n$ como la proyección n -ésima y definimos $C_n = \pi_n(A) \cap \pi_n(B)$. Entonces, $(C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión inversa con funciones de ligadura sobreyectivas y $C = \varprojlim (C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}$.*

Demostración. Sean $X_\infty = \varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ y $A, B \subseteq X_\infty$ compactos. Primero veamos que $(C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}$, es una sucesión inversa. Observemos que $f_n^{n+1} \circ \pi_{n+1} = \pi_n$. Tomemos $c_{n+1} \in C_n$. Por definición $c_{n+1} \in \pi_{n+1}(A) \cap \pi_{n+1}(B)$, luego, de la proyección, tenemos que

$$f_n^{n+1}|_{\pi_{n+1}(A)}(c_{n+1}) = c_n \in \pi_n(A) \quad \text{y} \quad f_n^{n+1}|_{\pi_{n+1}(B)}(c_{n+1}) = c_n \in \pi_n(B).$$

Por tanto, $c_n \in \pi_n(A) \cap \pi_n(B)$ y $(C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión inversa. Como $f_n^{n+1} \circ \pi_{n+1} = \pi_n$, las funciones $f_n^{n+1}|_{C_{n+1}}$ van a ser sobreyectivas. Para probar que $C =$

¹⁰ Nadler Jr, *Continuum theory: an introduction*, ver n. 42, Lema 2.6, pág. 20.

¹¹ Nadler Jr, *Continuum theory: an introduction*, ver n. 42, Lema 2.6, pág. 20.

$\varprojlim (C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}$, notemos que

$$\varprojlim (C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}})_{n \in \mathbb{N}} = \left[\prod_{n \in \mathbb{N}} \pi_n(A) \cap \pi_n(B) \right] \cap X_\infty,$$

y además

$$C \subseteq \left[\prod_{n \in \mathbb{N}} \pi_n(A) \cap \pi_n(B) \right] \cap X_\infty.$$

Falta probar $\left[\prod_{n \in \mathbb{N}} \pi_n(A) \cap \pi_n(B) \right] \cap X_\infty \subseteq C$. Sea $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y definamos $K_j = C \cap \pi_j^{-1}(y_j)$. Note que

$$\pi_j^{-1}(y_j) = \left[\prod_{i=1}^j \{y_i\} \times \prod_{i=j+1}^{\infty} X_i \right] \cap X_\infty.$$

Por tanto $K_j \neq \emptyset$, $K_{j+1} \subseteq K_j$ y cada K_j es compacto. Luego, $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} K_j \neq \emptyset$ y $\bigcap_{j \in \mathbb{N}} K_j \subseteq C$. Sea $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \bigcap_{j \in \mathbb{N}} K_j$. Note que, para todo $m \in \mathbb{N}$, se tiene que $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} \in K_m$, es decir, $p_m = y_m$. Por tanto, $(p_n)_{n \in \mathbb{N}} = (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, de lo cual se sigue, $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in C$. $\square$

De lo anterior, tenemos uno de los resultados principales de esta sección.

Teorema 4.1.6. *Sea $(X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión inversa de continuos. Si X_n es unicoherente para $n \in \mathbb{N}$, entonces su límite inverso $X_\infty = \varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ es un continuo unicoherente.*

Demostración. Sea $(X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión inversa de continuos unicoherentes. Sean A y B subcontinuos de X_∞ tales que $X_\infty = A \cup B$. Veamos que $A \cap B$ es un continuo. Del Lema 4.1.5, tenemos que $C = A \cap B$, lo podemos escribir como

$$C = \varprojlim (C_n, f_n^{n+1}|_{C_{n+1}})_{n \in \mathbb{N}},$$

donde $C_n = \pi_n(A) \cap \pi_n(B)$. Note que $\pi_n(A) \cup \pi_n(B) = X_n$ y $\pi_n(A)$ y $\pi_n(B)$ son subcontinuos de X_n por la continuidad de las proyecciones π_n . Luego, como X_n es unicoherente, C_n es un continuo. Del Teorema 4.1.3, C es un continuo. Por tanto, X_∞ es unicoherente. $\square$

Dados X y Y continuos, $G(X)$ alguno de los siguientes hiperespacios $F_n(X)$, $C(X)$ o $\mathcal{K}(X)$, y $f: X \rightarrow Y$ una función continua, se define la función inducida $G(f): G(X) \rightarrow G(Y)$ por $G(f)(A) = f(A)$ para cada $A \in G(X)$. En¹² se muestra que $G(f)$ es en efecto una

¹² Illanes y Nadler Jr, ver n. 2, pág. 188.

función continua. De esta manera, si $X = \varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, podemos considerar el límite inverso $\varprojlim (G(X_n), G(f_n^{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ y preguntarnos: ¿Es $G(X) \cong \varprojlim (G(X_n), G(f_n^{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$? En¹³ se muestra una respuesta afirmativa cuando $G(X) \in \{C(X), \mathcal{K}(X)\}$. A continuación, manteniendo las mismas ideas, mostraremos que $F_m(X_\infty) \cong \varprojlim (F_m(X_n), F_m(f_n^{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$ para todo $m \in \mathbb{N}$. Antes, mostraremos un par de lemas.

Lema 4.1.7. *Sea $(X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión inversa de espacios discretos. Si*

$$X_\infty = \varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}},$$

entonces X_∞ es totalmente desconexo.

Demostración. Para mostrar que X_∞ es totalmente desconexo, basta ver que dados dos puntos distintos $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de X_∞ , existe un subconjunto abierto y cerrado V de X_∞ tal que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V$ y $(y_n)_{n \in \mathbb{N}} \notin V$. Como $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \neq (y_n)_{n \in \mathbb{N}}$, existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $x_m \neq y_m$. Entonces $V = \pi_m^{-1}(\{x_m\})$ es un subconjunto abierto y cerrado de X_∞ que contiene a $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ y no contiene a $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$. Por lo tanto, X_∞ es totalmente desconexo. $\square$

S. B. NADLER JR. relacionó las componentes de una sucesión inversa con las componentes de su límite inverso en¹⁴ de la siguiente manera.

Lema 4.1.8. *Sea $X = \varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ donde cada X_n es un espacio de métrico compacto. Si existe $l \in \mathbb{N}$ tal que X_n tiene a lo sumo l componentes para cada $n \in \mathbb{N}$, entonces X tiene a lo sumo l componentes.*

Siguiendo los lemas anteriores y los resultados para $C(X)$ y $\mathcal{K}(X)$ en¹⁵, damos un esbozo de la demostración para $F_n(X)$, que se encuentra en¹⁶.

Teorema 4.1.9. *Sea X un continuo tal que $X = \varprojlim (X_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$, donde cada espacio X_n es un continuo. Para cada $m \in \mathbb{N}$, sea $F_m^\infty(X) = \varprojlim (F_m(X_n), F_m(f_n^{n+1}))_{n \in \mathbb{N}}$. Entonces $F_m^\infty(X)$ es homeomorfo a $F_m(X)$, para todo $m \in \mathbb{N}$.*

¹³ Nadler Jr, *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, ver n. 5, (1.169).

¹⁴ S. B. Nadler. Multicoherence techniques applied to inverse limits. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 157 (1971), págs. 227-234, Lema 1, pág. 227.

¹⁵ Nadler Jr, *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, ver n. 5, (1.169).

¹⁶ Macías, ver n. 3, Corolario 6, pág. 177.

Demostración. Dado un elemento $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F_m^\infty(X)$, definimos

$$h((A_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \varprojlim (A_n, f_n^{n+1}|_{A_{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}.$$

La continuidad e inyectividad de h se encuentran en¹⁷. Veamos que h está bien definida. Sea $m \in \mathbb{N}$. Si $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in F_m^\infty(X)$, entonces $(A_n, f_n^{n+1}|_{A_{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión inversa de espacios discretos con a lo sumo m puntos. Por el Lema 4.1.7, $\varprojlim (A_n, f_n^{n+1}|_{A_{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}$ es un espacio totalmente desconexo y, por el Lema 4.1.8, $\varprojlim (A_n, f_n^{n+1}|_{A_{n+1}})_{n \in \mathbb{N}}$ tiene a lo sumo m puntos. Por lo tanto,

$$h((A_n)_{n \in \mathbb{N}}) = \varprojlim (A_n, f_n^{n+1}|_{A_{n+1}})_{n \in \mathbb{N}} \in F_m(X).$$

Si $A \in F_m(X)$, entonces por el Lema 4.1.4 se tiene que

$$A = \varprojlim (\pi_n(A), f_n^{n+1}|_{\pi_{n+1}(A)})_{n \in \mathbb{N}}.$$

Así, $(\pi_n(A))_{n \in \mathbb{N}} \in F_m^\infty(X)$ y $h((\pi_n(A))_{n \in \mathbb{N}}) = A$. Por lo tanto, $h(F_m^\infty(X)) = F_m(X)$ y en consecuencia, por tratarse de una función entre espacios métricos compactos, $F_m^\infty(X)$ es homeomorfo a $F_m(X)$. $\square$

Nuestro fin no es profundizar en propiedades relacionadas con la topología algebraica, por tanto no damos la definición de un poliedro. El lector interesado puede consultar¹⁸. La siguiente prueba se puede encontrar¹⁹.

Teorema 4.1.10. *Sea X un continuo. Entonces X es homeomorfo al límite inverso $\varprojlim (P_n, f_n^{n+1})_{n \in \mathbb{N}}$ donde los espacios P_n son poliedros (un poliedro en particular es un continuo localmente conexo).*

4.1.2. Resultados sobre unicoherencia En²⁰ A. ILLANES, probó lo siguiente.

¹⁷ Nadler Jr, *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*, ver n. 5, (1.169).

¹⁸ A. H. Wallace. *Algebraic Topology: Homology and Cohomology*. Dover Publications, 2007.

¹⁹ H Freudenthal. *Entwicklungen von Raumen und ihren Gruppen*, Compositio Mathematica. En: (1936), pág. 183.

²⁰ Illanes, Multicoherence of symmetric products, ver n. 2, Teorema 2.6.

Lema 4.1.11. *Sea X un continuo localmente conexo. Entonces, $F_n(X)$ es unicoherente para $n \geq 3$.*

De lo cual, ya estamos listos para probar la unicoherencia de $F_n(X)$. En²¹ el profesor S. MACÍAS realiza la prueba que presentamos a continuación.

Teorema 4.1.12. *Si X es un continuo, entonces $F_n(X)$ es unicoherente para $n \geq 3$.*

Demostración. Sea X un continuo y $n \geq 3$. Por el Teorema 4.1.10, $X = \varprojlim (P_m, f_m^{m+1})_{m \in \mathbb{N}}$, donde los P_m son poliedros; en particular, son continuos localmente conexos. Del Teorema 4.1.9, $F_n(X) \cong \varprojlim (F_n(P_m), F_n(f_m^{m+1}))_{m \in \mathbb{N}}$. Note que, $F_n(P_m)$ son continuos localmente conexos, luego del Lema 4.1.11, se tiene que para $n \geq 3$, $F_n(P_m)$ es unicoherente. Luego $F_n(X)$ es el límite inverso de continuos unicoherentes. Por tanto, del Teorema 4.1.6, $F_n(X)$ es unicoherente para $n \geq 3$. $\square$

De lo anterior, notemos que si $F_n(X)$ es unicoherente, X , no necesariamente es unicoherente. Basta con tomar $X = S^1$, es bien sabido que no es unicoherente pero por el Teorema 4.1.12 sabemos que $F_3(X)$ es unicoherente.

A. Illanes también probó que para todo continuo localmente conexo, $F(X)$ es unicoherente. La prueba de este resultado se encuentra en²².

Teorema 4.1.13. *Sea X un continuo localmente conexo, entonces $F(X)$ es unicoherente.*

El resultado anterior tiene algunas variantes para espacios no necesariamente métricos compactos. Por ejemplo, en²³ se enuncia que para todo espacio conexo, localmente conexo, unicoherente y de Hausdorff, sus productos simétricos son unicoherentes para todo $n \in \mathbb{N}$. De lo cual, surge preguntarnos si el Teorema 4.1.12 es válido para $n = 2$.

E. CASTAÑEDA en²⁴ dio un ejemplo donde se responde de manera negativa a esta conjetura.

²¹ Macías, ver n. 3, Teorema 8, pág 177.

²² A. Illanes. Monotone and open Whitney maps defined in 2^X . En: *Topology Appl.* 53.3 (1993), págs. 271-288, Lema 1.3, pág. 274.

²³ E. Castañeda. A unicoherent continuum whose second symmetric product is not unicoherent. En: *Topology Proc.* 23 (1998), págs. 61-67, Teorema 1.1, pág. 62.

²⁴ Castañeda, ver n. 23, Ejemplo 2.1, pág. 63.

Ejemplo 4.1.14. Existe un continuo X en el plano tal que $F_2(X)$ no es unicoherente. Definamos

$$S_1 = \{e^{it} : t \in \mathbb{R}\}, \quad S_2 = \{3e^{it} : t \in \mathbb{R}\} \text{ y } Y = \left\{ \left(\frac{t}{1+|t|} + 2 \right) e^{it} : t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Sea $X = S_1 \cup Y \cup S_2$; es decir, X es la unión de dos circunferencias y una espiral que las rodea asintóticamente como en la Figura 4.1.

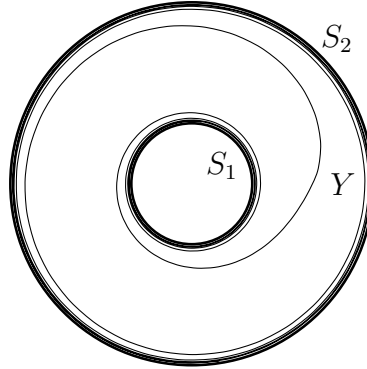


Figura 4.1: $F_2(X)$ no es unicoherente

Observemos que X es un continuo unicoherente (ver²⁵) y $F_2(X)$ no es unicoherente. Puesto que, si definimos $\mathcal{A} = \{\{z, w\} \in F_2(X) : \text{Im}(zw) \geq 0\}$ y $\mathcal{B} = \{\{z, w\} \in F_2(X) : \text{Im}(zw) \leq 0\}$, donde $\text{Im}(zw)$ denota la parte imaginaria del número complejo zw . En²⁶ se prueba que $\mathcal{A}$ y $\mathcal{B}$ son continuos, $\mathcal{A} \cup \mathcal{B} = F_2(X)$ y que la intersección $\mathcal{A} \cap \mathcal{B} = \mathcal{H} \cup \mathcal{L}$, donde

$$\mathcal{H} = \{\{z, w\} : zw \in \mathbb{R} \text{ y } zw \geq 0\} \text{ y } \mathcal{L} = \{\{z, w\} : zw \in \mathbb{R} \text{ y } zw \leq 0\}.$$

Ambos cerrados disjuntos de $F_2(X)$. Por tanto, $\mathcal{A} \cap \mathcal{B}$ no es conexo y $F_2(X)$ no es unicoherente.

4.2. PRODUCTOS SIMÉTRICOS COMO CONOS

Una de las preguntas interesantes en el estudio de los hiperespacios es determinar cuándo estos pueden ser reconocidos como el cono sobre algún métrico compacto. Esta pregunta

²⁵ Castañeda, ver n. 23, Ejemplo 2.1, pág. 61.

²⁶ Castañeda, ver n. 23, Ejemplo 2.1, pág. 61.

cobra importancia debido a que los conos son objetos cuya estructura topológica está ampliamente caracterizada, lo que permite trasladar preguntas sobre $F_n(X)$ a un marco donde las herramientas disponibles son más precisas.

Definición 4.2.1. El *cono* sobre un espacio métrico compacto X , denotado por $\text{Cono}(X)$, es el espacio cociente

$$(X \times [0, 1]) / (X \times \{1\})$$

obtenido del producto cartesiano $X \times [0, 1]$ identificando todos los puntos de $X \times \{1\}$ a un punto v , llamado el *vértice* del cono; v denota siempre el vértice de un cono. La *base* de $\text{Cono}(X)$ es

$$B(X) = \{(x, 0) \mid x \in X\}.$$

De la definición de $\text{Cono}(X)$, no es difícil ver que $X \times [0, 1] \cong \text{Cono}(X) \setminus \{v\}$. Para simplificar notación, denotamos los puntos del cono diferentes del vértice como (x, t) .

Observación 4.2.2. Si X es un continuo generado por un cono; es decir, $X = \text{Cono}(Z)$, para algún espacio topológico Z , siempre podemos asumir que Z es un espacio métrico compacto. Por²⁷ sabemos que la función cociente $p: Z \times [0, 1] \rightarrow \text{Cono}(Z)$ es cerrada. Notemos que $p(Z \times \{0\}) = B(Z)$, por tanto, $B(Z)$ es un compacto en $\text{Cono}(Z)$. Además, $p|_{Z \times \{0\}}$ es un encaje en $B(Z)$, luego, $Z \cong Z \times \{0\}$ es compacto.

Tomemos $[0, 1]^{\mathbb{N}}$ con la topología producto, más conocido como el *cubo de Hilbert*. Sean $X \subseteq [0, 1]^{\mathbb{N}}$ y $p \in [0, 1]^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ fijo. Definimos el *cono geométrico* de X como todas las combinaciones convexas entre puntos de $X \times \{0\}$ con p (ver²⁸). Denotamos el cono geométrico de X como $\text{GCono}(X)$.

Recordemos que cualquier espacio métrico compacto puede ser encajado en el cubo de Hilbert²⁹. Luego, para todo espacio métrico compacto se tiene la noción de cono geométrico.

En nuestro contexto, usualmente resulta más cómodo trabajar con la noción de cono geométrico, por eso enunciamos el siguiente teorema.

Teorema 4.2.3. *Dado X un espacio métrico compacto. Entonces $\text{Cono}(X) \cong \text{GCono}(X)$.*

²⁷ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Teorema 3.51 II).

²⁸ Nadler Jr, *Continuum theory: an introduction*, ver n. 42, Ejercicio 3.28, pág. 47.

²⁹ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Teorema 9.1.

Demostración. Sea X un espacio métrico compacto. Sin pérdida de generalidad, supongamos que $X \subseteq [0, 1]^{\mathbb{N}}$. Sea v el vértice de $\text{Cono}(X)$ y $p \in [0, 1]^{\mathbb{N}} \times [0, 1]$ fijo. Definamos $h: \text{Cono}(X) \rightarrow \text{GCono}(X)$ de la siguiente manera: $h(v) = p$ y $h((z, t)) = z(1-t) + pt$ para todo $(z, t) \in \text{Cono}(X) \setminus \{v\}$. No es difícil ver que h es una función continua y biyectiva entre espacios métricos compactos. Luego, h es un homeomorfismo. $\square$

Dependiendo del contexto, usaremos las notaciones de $\text{Cono}(X)$ o $\text{GCono}(X)$ como sea conveniente, siempre que X sea un espacio métrico compacto.

Ejemplo 4.2.4. Sea $\mathcal{C}$ el conjunto de Cantor (ver Ejemplo 3.1.9), llamamos *abanico de Cantor* al $\text{Cono}(\mathcal{C})$ y lo podemos representar como mostramos en la Figura 4.2.

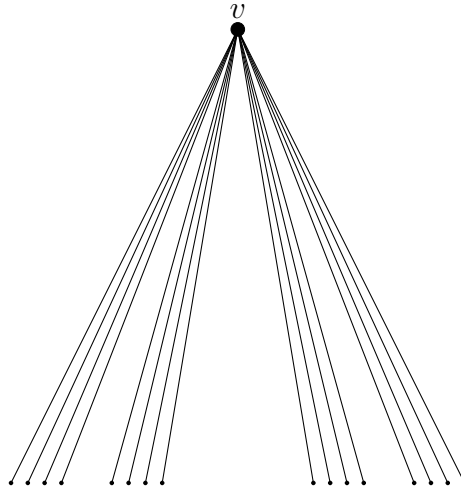


Figura 4.2: Abanico de Cantor.

A partir de la definición de dimensión dada en 3.1.1, no es difícil probar el siguiente lema.

Lema 4.2.5. *Sea X un espacio métrico compacto tal que $\dim(X) = 0$. Para cada $x \in X$, existe una base local de abiertos tal que cada elemento es un abierto cerrado en X .*

Demostración. Sea $x \in X$ y $U \subseteq X$ abierto de X tal que $x \in U$. De la Definición 3.1.1, existe un abierto $B \subseteq U$ tal que $\dim(\text{Fr}(B)) = -1$. Note que $\text{Fr}(B) = \text{Cl}(B) \setminus B$. Como $\dim \text{Fr}(B) = -1$, entonces $\text{Fr}(B) = \emptyset$. Por lo tanto, $\text{Cl}(B) = B$ y B es abierto cerrado.

Recíprocamente, sean $x \in X$ y $U \subseteq X$ tal que $x \in U$. Como x tiene una base local de abiertos cerrados, existe un abierto cerrado $B \subseteq U$ tal que $x \in B$. Como B es abierto cerrado, $\text{Fr}(B) = \emptyset$, por tanto, $\dim(\text{Fr}(B)) = -1$. De lo anterior, $\dim(B) = 0$. $\square$

Un teorema importante para la identificación de los espacios cocientes es el *Lema de Transgresión*, que enunciamos para hacer uso de él en la siguiente demostración. Para el lector interesado, la siguiente demostración se encuentra en³⁰.

Lema 4.2.6. *Sea $f: X \rightarrow Y$ una función cociente y $g: Z \rightarrow Y$ una función continua. Si $g|_{f^{-1}(y)}$ es constante para cada $y \in Y$, entonces $g \circ f^{-1}: Y \rightarrow Z$ es continua.*

Podemos caracterizar los productos simétricos como conos bajo ciertas condiciones en espacios de dimensión finita. Esto fue mostrado por S. MACÍAS y S. NADLER en³¹.

Teorema 4.2.7. *Sea X un continuo de dimensión finita. Si $n > 1$ y X es el cono sobre un compacto totalmente desconexo con más de tres puntos, entonces $F_n(X)$ es un cono sobre algún continuo.*

Demostración. Notemos que X se puede encajar en el abanico de Cantor (definido en el Ejemplo 4.2.4), pues todo compacto totalmente desconexo se puede encajar en el espacio de Cantor³². Luego, sin pérdida de generalidad podemos suponer que X está encajado en $\mathbb{R}^2$, que $v = (0, 0)$ es el vértice de X , y que los arcos de X son arcos convexos de longitud 1. Dados dos puntos a y b de $\mathbb{R}^2$, denotamos por $\overline{ab}$ el arco convexo en $\mathbb{R}^2$ cuyos extremos son a y b , y por $\|a\|$ la norma de a en $\mathbb{R}^2$. Dado un elemento A de $F_n(X)$ y $r \geq 0$, definimos $rA = \{ra \mid a \in A\}$. Observemos que para $r = 0$, $0A = \{(0, 0)\} = \{v\}$.

Sea $E(X) = \{e_\lambda\}_{\lambda \in \Lambda}$ la colección de puntos de X en Cantor; esto es, $X = \text{Cono}(E(X))$. Definamos

$$\mathcal{B} = \bigcup \{ \{A \in F_n(X) \mid e_\lambda \in A\} \mid \lambda \in \Lambda \}.$$

y consideremos $\gamma: \mathcal{B} \times [0, 1] \rightarrow F_n(X)$ dada por $\gamma((A, t)) = (1 - t)A$. Claramente, γ está bien definida. Observemos que si $t \in [0, 1]$ y $A \in \mathcal{B}$, entonces

$$v \in \gamma(A, t) \text{ si, y solo si, } v \in A. \quad (4.1)$$

Veamos que γ es continua. Sea $\varepsilon > 0$ y tomemos $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$. Sean $A, B \in F_n(X)$ y $t, s \in [0, 1]$ tales que $\mathcal{H}(A, B) < \delta$ y $|t - s| < \delta$. Sea $a \in A$. Entonces existe $b \in B$ tal que $\|a - b\| < \delta$.

³⁰ Camargo y Villamizar, ver n. 4, Teorema 3.4.

³¹ S. Macías y S. B. Nadler Jr. n -fold hyperspaces, cones and products. En: *Topology Proc.* 26 (2001), págs. 255-270.

³² Willard, ver n. 8, (30A-3), pág. 218.

Nótese que

$$\begin{aligned}
\|(1-t)a - (1-s)b\| &\leq \|(1-t)a - (1-t)b\| + \|(1-t)b - (1-s)b\| \\
&\leq (1-t)\|a - b\| + |s-t|\|b\| \\
&\leq \|a - b\| + |s-t| \\
&< 2\delta = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Así, $\gamma((A, t)) \subseteq \mathcal{N}(\gamma((B, s)), \varepsilon)$. Similarmente, $\gamma((B, s)) \subseteq \mathcal{N}(\gamma((A, t)), \varepsilon)$. Por lo tanto, $\mathcal{H}(\gamma((A, t)), \gamma((B, s))) < \varepsilon$ y γ es continua.

Ahora probemos que γ es inyectiva en $\mathcal{B} \times [0, 1)$. Sean $t, s \in [0, 1)$ y $A, B \in \mathcal{B}$. Supongamos que $\gamma((A, t)) = \gamma((B, s))$. Como $A, B \in \mathcal{B}$, existen $e_{\lambda A}, e_{\lambda B} \in E(X)$ tales que $e_{\lambda A} \in A$ y $e_{\lambda B} \in B$.

Caso 1. $v \notin A$. Observemos que por (4.1), $v \notin B$. Sea $e_{\lambda A} \in A$ y $e_{\lambda B} \in B$. Como $\gamma((A, t)) = \gamma((B, s))$, existen $a_{\lambda B} \in B$ y $b_{\lambda A} \in B$ tales que

$$(1-t)e_{\lambda A} = (1-s)b_{\lambda A} \quad (4.2)$$

y

$$(1-t)a_{\lambda B} = (1-s)e_{\lambda A}. \quad (4.3)$$

Notemos que por (4.2), $\|(1-t)e_{\lambda A}\| = \|(1-s)b_{\lambda A}\|$, luego $1-t = (1-s)\|b_{\lambda A}\| \leq 1-s$. Además, por (4.3), $\|(1-t)a_{\lambda B}\| = \|(1-s)e_{\lambda A}\|$, luego $1-s = (1-t)\|a_{\lambda B}\| \leq 1-t$. Por tanto, $t = s$ y $A = B$.

Caso 2. $v \in A$. Notemos que $v \in B$. Así, basta tomar $A' = A \setminus \{v\}$ y $B' = B \setminus \{v\}$, y repetimos la prueba en el caso 1 para los puntos A' y B' . Obteniendo así que $t = s$ y $A' = B'$. De esta manera, $A = B$.

Nos falta probar que γ es sobreyectiva. Sea $B \in F_n(X)$. Si $B = \{v\}$, entonces $\gamma((A, 1)) = \{v\}$ para cualquier $A \in \mathcal{B}$. Así, supongamos $B \neq \{v\}$. Si $B \cap E(F) \neq \emptyset$, entonces $\gamma((B, 0)) = B$. Por último, supongamos $B \cap E(F) = \emptyset$. Sea

$$t = \inf\{\|b - e_\lambda\| \mid b \in B \text{ y } e_\lambda \in E(F)\}.$$

Como $B \neq \{v\}$, se tiene $t \neq 1$. Entonces, existe $\lambda_0 \in \Lambda$ tal que $\|b_{\lambda_0} - e_{\lambda_0}\| = t$, donde $b_{\lambda_0} \in B \cap \overline{ve_{\lambda_0}}$. Sea $A = \frac{1}{1-t}B$. Notemos que para λ_0 , se tiene que $\frac{1}{1-t}b_{\lambda_0} \in A \cap \overline{ve_{\lambda_0}}$. Como

$\frac{1}{1-t}b_{\lambda_0} = e_{\lambda_0}$, tenemos que $e_{\lambda_0} \in A$. Luego, $A \in \mathcal{B}$ y

$$\gamma((A, t)) = (1-t) \cdot \frac{1}{1-t}B = B.$$

Por el Lema de Transgresión 4.2.6, aplicado a $\gamma : \mathcal{B} \times [0, 1] \rightarrow F_n(X)$ y la función cociente $g : \mathcal{B} \times [0, 1] \rightarrow \text{Cono}(\mathcal{B})$, el hiperespacio $F_n(X)$ es homeomorfo a $\text{Cono}(\mathcal{B})$. Veamos que $\mathcal{B}$ es conexo. Más aún, veamos que $\mathcal{B}$ es arcoconexo. Sean $A, B \in \mathcal{B}$, por el Teorema 3.2.7 sabemos que $F_n(X)$ es arcoconexo. Luego existe un arco $\alpha' : [0, 1] \rightarrow F_n(X)$ tal que $\alpha'(0) = A$ y $\alpha'(1) = B$. Sean $e_{\lambda A}$ y $e_{\lambda B}$ los puntos finales que están en A y B respectivamente, y $\alpha_{e_{\lambda A}}, \alpha_{e_{\lambda B}} : [0, 1] \rightarrow X$, dadas por

$$\alpha_{e_{\lambda A}}(t) = \begin{cases} \alpha'_{e_{\lambda A}}(t), & \text{si } t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ e_{\lambda B}, & \text{si } t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

y

$$\alpha_{e_{\lambda B}}(t) = \begin{cases} e_{\lambda A}, & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \alpha'_{e_{\lambda B}}(t), & t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

donde $\alpha'_{e_{\lambda A}} : [0, \frac{1}{2}] \rightarrow X$, $\alpha'_{e_{\lambda B}} : [\frac{1}{2}, 1] \rightarrow X$ son arcos en X , tales que $\alpha'_{e_{\lambda A}}(0) = e_{\lambda A}$, $\alpha'_{e_{\lambda A}}(\frac{1}{2}) = e_{\lambda B}$ y $\alpha'_{e_{\lambda B}}(\frac{1}{2}) = e_{\lambda A}$, $\alpha'_{e_{\lambda B}}(1) = e_{\lambda B}$.

Note que $\alpha_{e_{\lambda A}}$ y $\alpha_{e_{\lambda B}}$, por su definición, también son arcos. Definamos $\alpha : [0, 1] \rightarrow \mathcal{B}$ como

$$\alpha(t) = \begin{cases} \alpha'(t) \cup \{e_{\lambda A}, \alpha_{e_{\lambda A}}(t)\}, & t \in [0, \frac{1}{2}]; \\ \alpha'(t) \cup \{e_{\lambda B}, \alpha_{e_{\lambda B}}(t)\}, & t \in (\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

Notemos que $\alpha(0) = A$, $\alpha(1) = B$ y es continua. Luego, $\mathcal{B}$ es conexo por caminos y, al ser métrico, arcoconexo.

□

Note que en el teorema anterior asumimos que X era el cono de un totalmente desconexo con más de tres puntos. Observemos que si X es el cono de un conjunto con 1 o 2 puntos, X es homeomorfo a $[0, 1]$. La construcción de $\mathcal{B}$ del teorema anterior sigue siendo válida para $F_n(X)$. Por tanto, el teorema anterior es válido para el cono de cualquier compacto totalmente desconexo.

En particular, para $n = 2$, en el Ejemplo 2.3.1 sabemos que $F_2([0, 1])$ y (por la definición de cono geométrico) $\text{Cono}([0, 1])$ se ven como en la Figura 4.3.

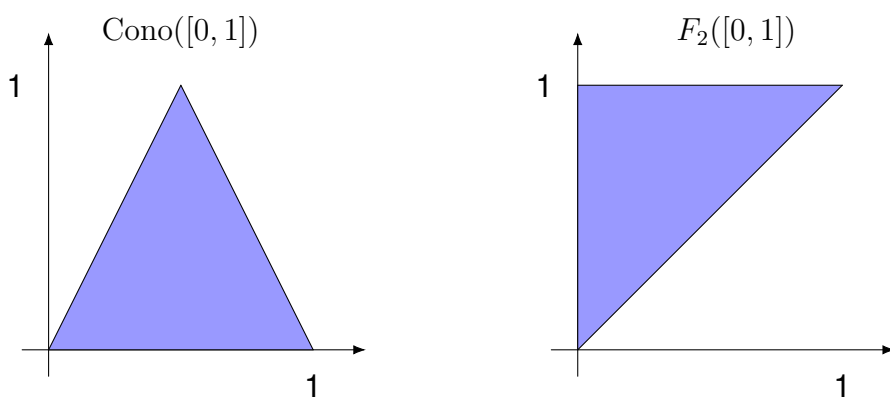


Figura 4.3: $F_2([0, 1])$ como un cono.

De lo anterior $\text{Cono}([0, 1]) \cong F_2([0, 1])$.

BIBLIOGRAFÍA

- Andersen, R. N., M. M. Marjanović y R. M. Schori. Symmetric products and higher-dimensional dunce hats. En: *Topology Proc.* 18 (1993), págs. 7-17 (vid. pág. 23).
- Borsuk, K. y S. Ulam. On symmetric products of topological spaces. En: *Fund. Math.* (1931), págs. 875-882 (vid. págs. 9, 12, 17, 21-23, 28).
- Borsuk, Karol. On the third symmetric potency of the circumference. En: *Fundamenta Mathematicae* 36 (1949), págs. 236-244 (vid. pág. 21).
- Bott, R. On the third symmetric potency of S^1 . En: *Fund. Math.* 39 (1952), págs. 264-268 (vid. pág. 21).
- Camargo, J. y E. Villamizar. *Topología General*. Universidad Industrial de Santander, 2019 (vid. págs. 16, 17, 19, 20, 29, 30, 39, 40, 43, 44, 50, 53, 60, 62).
- Castañeda, E. A unicoherent continuum whose second symmetric product is not unicoherent. En: *Topology Proc.* 23 (1998), págs. 61-67 (vid. págs. 58, 59).
- Castañeda-Alvarado, E. y G. A. Reyes. Una mirada a los productos simétricos. En: *Ciencia Ergo Sum* 16.2 (2009), págs. 189-197 (vid. pág. 39).
- Charatonik, J. J. Recent research in hyperspace theory. En: *Extracta Math.* 18.2 (2003), págs. 235-262 (vid. pág. 36).
- Charatonik, J. J. y A. Illanes. Local connectedness in hyperspaces. En: *Rocky Mountain J. Math.* 36.3 (2006), págs. 811-856 (vid. págs. 28, 37, 38, 45, 46).
- Curtis, D. y N. T. Nhu. Hyperspaces of finite subsets which are homeomorphic to $\aleph_0$ -dimensional linear metric spaces. En: *Topology Appl.* 19.3 (1985), págs. 251-260 (vid. págs. 31, 38).
- Engelking, R. *Dimension Theory*. Amsterdam: North-Holland, 1978 (vid. págs. 29, 31, 32).

- Engelking, R. *General Topology*. Vol. 60. Monografie Matematyczne. Warszawa: PWN, 1977 (vid. pág. 17).
- Escobar, P. I. V. Los hiperespacios de continuos desde el punto de vista de sus modelos geométricos. Director: Enrique Castañeda. Tesis de Pregrado. Universidad Autónoma del Estado de México, 2009 (vid. pág. 25).
- Freudenthal, H. Entwicklungen von Raumen und ihren Gruppen, Compositio Mathematica. En: (1936) (vid. pág. 57).
- Ganea, T. Symmetrische Potenzen topologischer Räume. En: *Math. Nachr.* 11 (1954), págs. 305-316 (vid. pág. 51).
- Hurewicz, W. y H. Wallman. *Dimension Theory*. Princeton University Press, 1941 (vid. págs. 29-34, 48).
- Illanes, A. Monotone and open Whitney maps defined in 2^X . En: *Topology Appl.* 53.3 (1993), págs. 271-288 (vid. pág. 58).
- Multicoherence of symmetric products. En: *An. Inst. Univ. Nac. Autónoma Mexico*. 25 (1985), págs. 11-24 (vid. págs. 51, 57).
- Illanes, A. y S.B. Nadler Jr. *Hyperspaces: Fundamentals and Recent Advances*. Vol. 216. Monographs and Textbooks in Pure and Applied Mathematics. New York y Basel: Marcel Dekker, Inc., 1999 (vid. págs. 13, 15, 32, 36, 37, 41, 55).
- Macías, S. On symmetric products of continua. En: *Topology Appl.* 92.2 (1999), págs. 173-182 (vid. págs. 51, 56, 58).
- Macías, S. y S. B. Nadler Jr. n -fold hyperspaces, cones and products. En: *Topology Proc.* 26 (2001), págs. 255-270 (vid. pág. 62).
- Manetti, M. *Topology*. Springer, 2023 (vid. págs. 40, 53).
- Nadler, S. B. Multicoherence techniques applied to inverse limits. En: *Transactions of the American Mathematical Society* 157 (1971), págs. 227-234 (vid. pág. 56).

Nadler Jr, S. B. *Continuum theory: an introduction*. CRC Press, 2017 (vid. págs. 43, 52, 54, 60).

– *Hyperspaces of Sets: A Text with Research Questions*. Marcel Dekker, 1978 (vid. págs. 16, 34, 38, 56, 57).

Rosa, R. M. García de la. El hiperespacio de los subconjuntos finitos de un continuo. Director: Alejandro Illanes. Tesis de Pregrado. Universidad Autónoma del Estado de México, 1995 (vid. pág. 35).

Steen, Lynn Arthur y J. A. Seebach Jr. *Counterexamples in Topology*. Vol. 18. New York: Springer, 1978 (vid. pág. 42).

Wallace, A. H. *Algebraic Topology: Homology and Cohomology*. Dover Publications, 2007 (vid. pág. 57).

Willard, S. *General Topology*. Dover Publications, 2012 (vid. págs. 17, 62).