

**FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DE WAVELETS E IMPLEMENTACIÓN DE UNA
TOOLBOX BÁSICA EN UN PROCESADOR DIGITAL DE SEÑAL**

**CARLOS ANDRES NIÑO NIÑO
OSCAR JAVIER OLARTE RODRÍGUEZ**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA
2004**

**FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DE WAVELETS E IMPLEMENTACIÓN DE UNA
TOOLBOX BÁSICA EN UN PROCESADOR DIGITAL DE SEÑAL**

**CARLOS ANDRES NIÑO NIÑO
OSCAR JAVIER OLARTE RODRÍGUEZ**

Este proyecto es requisito para optar al título de Ingeniero Electrónico

Director:

Daniel Alfonso Sierra Bueno
Ingeniero Electricista y Electrónico

Codirector:

César Antonio Duarte Gualdrón
Magíster en Potencia Eléctrica

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍAS ELÉCTRICA, ELECTRÓNICA Y DE
TELECOMUNICACIONES
BUCARAMANGA
2004**

A mis padres Pablo y Concepción por el apoyo diario durante toda mi carrera. A mis hermanos Gustavo Adolfo y Mónica Liliana por el respaldo hacia mi; a Juan Esteban por alegrar nuestras vidas, a Helga por su apoyo incondicional y a Laura por estar junto a mi durante el desarrollo del proyecto.

Carlos Andrés Niño

A mi padre Oscar por ser mi gran ejemplo. A mi mamá Maria por mostrarme día a día el valor de las cosas. A mis hermanos Imslian Andrea y Julian Camilo por la inmensa confianza y a mi sobrino Julian Esteban por cada sonrisa.

Oscar Javier Olarte Rodríguez

AGRADECIMIENTOS

Los autores expresan sus agradecimientos a:

Ingeniero Daniel Alfonso Sierra Bueno: director de la investigación por sus orientaciones oportunas y el tiempo dedicado a este trabajo.

Magíster Cesar Duarte Gualdrón: codirector de la investigación por sus indicaciones permanentes y colaboración.

La Escuela de Ingenierías Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones de la Universidad Industrial de Santander, por la formación académica y por facilitar los elementos para la realización del proyecto.

Facultad de salud, de la Universidad Industrial de Santander por permitir el desarrollo del trabajo en sus instalaciones y motivar el desarrollo del trabajo.

A nuestros amigos Carlos Julio, Camilo, Cesar, Carlos Arturo, por el apoyo e interés mostrado al desarrollo del proyecto.

TABLA DE CONTENIDO

	Pág
INTRODUCCION	17
1. FUNDAMENTOS DE WAVELETS Y LOCALIZACIÓN TIEMPO FRECUENCIA	20
1.1 MODELADO Y SEGMENTACION	21
1.2 RESOLUCION TIEMPO-FRECUENCIA	21
1.3 LOCALIZACIÓN TIEMPO – FRECUENCIA	22
1.4 ANCHO DE BANDA RMS	22
1.5 LA TRANSFORMADA DE FOURIER	25
1.6 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CORTO (STFT)	26
1.7 TRANSFORMADA CONTINUA DE WAVELET (CWT) / TRANSFORMADA INTEGRAL DE WAVELET (IWT)	28
2. ANÁLISIS MULTIRESOLUCION	33
2.1 ESPACIO DE SEÑALES CON ANCHO DE BANDA FINITA	33
2.2 SECUENCIA DE ANIDAMIENTO P_k	40
2.3 ANÁLISIS MULTIRESOLUCIÓN	44
2.4 SPLINES CARDINALES	52
3. WAVELET ORTONORMALES	59
3.1 ESPACIOS WAVELET ORTOGONALES	60
3.2 WAVELETS ORTONORMALES	67
3.2.1 Wavelet Haar	67
3.2.2 Wavelet Shanon	68
3.2.3 Wavelet Meyer	71
3.2.4 Wavelet Spline Battle – Lemarié	76
3.2.5 Wavelet Daubechie	80
4. WAVELETS BIORTOGONALES	85
4.1 LA NECESIDAD DE LAS DUALES	87
4.2 WAVELETS DE SOPORTE COMPACTO	95
4.3 WAVELETS SPLINE DE SOPORTE COMPACTO	100
4.4 PRINCIPIO DE DUALIDAD	103

	Pág
5. IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS	113
5.1 IMPLEMENTACIÓN DE FAMILIAS WAVELETS EN MATLAB	113
5.1.1 Funciones B-spline	113
5.1.2 Generación de las Formas de Onda a Partir de la Secuencia Doble Escala	115
5.1.3 Funciones Wavelet	118
5.1.3.1 Wavelets Ortonormales	118
5.1.3.2 Wavelets Biortogonales	131
5.2 ENLACE MATLAB – CODE COMPOSER STUDIO	138
5.3 IMPLEMENTACIÓN Y CÁLCULO DE ERRORES EN LA TARJETA PARA DSP TMS320C6711 DE TEXAS INSTRUMENTS	140
5.3.1 Algoritmo rápido y Banco de Filtros	141
5.3.1.1 Múltiples Niveles de Descomposición	144
5.3.1.2 Numero de Niveles	145
5.3.1.3 Tratamiento Frontera	146
5.3.2 Resultados	147
5.3.2.1 Resultados e Reconstrucción y Calculo de Errores	147
5.3.2.2 Resultados Localización Tiempo frecuencia	151
5.3.2.3 Resultados de Dualidad	155
5.3.3 Medida de desempeño de la Herramienta	155
CONCLUSIONES	158
RECOMENDACIONES	160
BIBLIOGRAFÍA	161
ANEXOS	162

LISTA DE TABLAS

	Pág
Tabla 1. Propiedades de los espacios de aproximación y espacios de detalle.	49
TABLA 2. Coeficientes Shannon	120
TABLA 3. Coeficientes Secuencia Doble Escala W . Meyer 0	123
TABLA 4. Coeficientes Secuencia Doble Escala W . Meyer 3	124
TABLA 5. Coeficientes Doble Escala W . Battle-Lemarie 2	125
TABLA 6. Coeficientes Secuencia Doble escala W . Daubechies 2	130
TABLA 7. Coeficientes Secuencia Doble Escala W . Daubechies 4	130
TABLA 8. Coeficientes Secuencia Doble Escala W . Daubechies 6	131
TABLA 9. Coeficientes Secuencia Doble Escala W . Daubechies 9	131
TABLA 10. Coeficientes Secuencia Doble Escala p_k W . Biorotogonales Spline de Orden 2	136
TABLA 11 Coeficientes Secuencia Doble Escala q_k W . Biorotogonales Spline de Orden 2	136
TABLA 12. Coeficientes Secuencia Doble Escala a_k W . Biorotogonales Duales Spline de Orden 2	136
TABLA 13. Coeficientes Secuencia Doble Escala b_k W . Biorotogonales Duales Spline de Orden 2.	136
TABLA 14. Coeficientes Secuencia Doble Escala p_k W . Biorotogonales Spline de Orden 4	136
TABLA 15. Coeficientes Secuencia Doble Escala q_k W . Biorotogonales Spline de Orden 4	137
TABLA 16. Coeficientes Secuencia Doble Escala a_k W . Biorotogonales Duales Spline de Orden 4.	137
TABLA 17. Coeficientes Secuencia Doble Escala b_k W . Biorotogonales Duales Spline de Orden 4.	137
Tabla 18. Error Cuadrático Medio Para Una Función Cuadrada con Ciclo de trabajo de 50% con Amplitud Entre -1y 1 con 256 Puntos	150
TABLA 19. Medida del desempeño del sistema en ciclos de máquina	156
TABLA 20. Medida del desempeño del sistema en ciclos de máquina	157

LISTA DE FIGURAS

	Pág
Figura 1. Esquema del cambio producido en la ventana tiempo-frecuencia.	31
Figura 2. Proyección Ortogonal.	37
Figura 3. Correspondencia en frecuencia de la relación doble escala.	42
Figura 4. Función cuadrada en tiempo $M_1(t)$.	43
Figura 5. Función $N_1(t)$	43
Figura 6. Representación gráfica de la relación doble escala para la función Haar.	44
Figura 7. Representación de los espacios anidados V .	45
Figura 8. Spline de primer orden.	56
Figura 9. Spline de segundo orden.	57
Figura 10. Spline de tercer orden.	58
Figura 11. Interpretación grafica de la descomposición ortogonal (3.7)	61
Figura 12. Interpretación grafica de la ecuación (3.19).	65
Figura 13. Interpretación grafica de la ecuación (3.18).	65
Figura 14. Función de Escala Haar $N_1^\perp(t) = N_1(t)$ y Wavelet Haar $\psi_H(t)$ y sus características en frecuencia.	68
Figura 15. Relación de descomposición para la función Haar.	68
Figura 16. Función de escala y Wavelet Shannon y sus características en frecuencia.	70
Figura 17. Características de los filtros $\phi_s(2t)$, $\phi_s(t)$ y de $\psi_s(t)$	70
Figura 18. Comparación de $\phi_s(t)$ con $\hat{\phi}_{M,N}(\omega)$.	71
Figura 19. Función de suavizado de esquina $S_0(x)$.	72
Figura 20. Función de suavizado de esquina $S_1(x)$.	72
Figura 21. Interpretación grafica de la ecuación (3.40)	74
Figura 22. Interpretación gráfica de la relación de los filtros $\hat{\phi}_{M,N}(\omega)$ y $\hat{\psi}_{M,N}(\omega)$.	76
Figura 23. Función de Escala Y Wavelet Meyer, con polinomio de suavizado $S_3(x)$, y sus características en frecuencia.	76
Figura 24. Función de Escala y Wavelet Spline Battle – Lemarié y sus características en frecuencia.	79

	Pág
Figura 25. Función de Escala y Wavelet Daubechies (4) y sus características en frecuencia.	84
Figura 26. Localización tiempo-escala de la IWT.	85
Figura 27. Interpretación grafica de las ecuaciones (4.5) y (4.6).	88
Figura 28. Función Biortogonal Spline 3	102
Figura 29. funciones duales de orden 3	112
Figura 30. Spline cardinal de primer orden $N_1(t)$	114
Figura 31. Diagrama de flujo para generación de las funciones de escala B-spline.	114
Figura 32. Diagrama de flujo para el desarrollo de la secuencia p_k B-spline	115
Figura 33. Diagrama de flujo para la función tiempo.	116
Figura 34. Diagrama de flujo para tiempo q_k	117
Figura 35. Diagrama de flujo de la función cus.	118
Figura 36. Diagrama de flujo para la wavelet Shannon	120
Figura 37. Curva de suavizado $S_0(x)$	121
Figura 38. curva de suavizado $S_1(x)$	121
Figura 39. curva de suavizado $S_2(x)$	122
Figura 40. curva de suavizado $S_3(x)$	122
Figura 41. Diagrama de flujo wavelet Meyer	123
Figura 42. Diagrama de flujo para el desarrollo de los coeficientes p_k de la W. Daubechies.	130
Figura 43. Diagrama de flujo de las Wavelets Biortogonales.	132
Figura 44. Diagrama de flujo para el polinomio de EFL	134
Figura 45. Diagrama de flujo para generar las secuencias duales a_k y b_k	135
Figura 46. Esquema general de dispositivos de la herramienta	138
Figura 47. Enlace Matlab-C.C.S. para funciones Biortogonales (En_bior)	140
Figura 48. Enlace Matlab-C.C.S. para funciones Ortonormales (En_ort)	140
Figura 49. Descomposición Wavelet.	143
Figura 50. Reconstrucción Wavelet.	144
Figura 51. Esquema desarrollado para la plataforma de DSP.	145
Figura 52. Análisis de la señal ventana de 50 puntos mediante la wavelet Haar.	148
Figura 53. Análisis de la señal ventana de 100 puntos mediante la wavelet Shannon.	149
Figura 54. Señal de entrada y sus componentes de frecuencia	151

	Pág
Figura 55. Primea descomposición y sus componentes de frecuencia.	152
Figura 56. Tercera descomposición y sus componentes de frecuencia.	152
Figura 57. Señal reconstruida. Error cuadrático medio 2.9598e-004.	153
Figura 58. Señal de entrada y sus componentes de frecuencia	153
Figura 59. Primera descomposición Wavelet.	154
Figura 60. Señal reconstruida y Watch Window. Error cuadrático medio 8.32512e-007.	154
Figura 61. Principio de Dualidad.	155
Figura A.1 Funciones de escala y Wavelet Biortogonales generadas por medio del comando <code>[p,q,at,bt] = bior (3,24)</code>	170
Figura A.2. Funciones de escala y Wavelet Biortogonales Duales generadas por medio del comando <code>[p,q,at,bt] = bior (3,24)</code>	171
Figura A.3 Procedimiento para cargar el espacio de trabajo.	175
Figura A.4. Procedimiento para cargar el programa hacia la tarjeta de desarrollo.	176
Figura A.5 Interpretación de la variable Watch window.	177
Figura A.6. Almacenamiento de la variable <code>rta</code> .	177
Figura A.7. Presentación del espacio de trabajo	178

LISTA DE ANEXOS

	Pág
Anexo A. MANUAL DE USO DE LA TOOLBOX DE TRANSFORMADA WAVELET	161
Anexo B. SISTEMA DE DESARROLLO	177
Anexo C. CONCEPTOS MATEMATICOS	182

TITULO:

FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA DE WAVELETS E IMPLEMENTACIÓN DE UNA TOOLBOX BÁSICA EN UN PROCESADOR DIGITAL DE SEÑAL.

AUTORES:

CARLOS ANDRES NIÑO NIÑO
OSCAR JAVIER OLARTE RODRIGUEZ ¹

PALABRAS CLAVES:

Multirresolución, Tiempo-frecuencia, Wavelet, DSP, Banco de Filtros, Daubechies, Transformada, DWT.

RESUMEN:

El presente estudio trata la fundamentación teórica de la transformada wavelet junto con el diseño e implementación de algoritmos eficientes, con el fin de diseñar una herramienta útil para el análisis de señales mediante esta transformada; pretendiendo generar un conjunto de utilidades, que además de servir para el desarrollo de proyectos sobre la plataforma para DSP TMS320C6711 de *Texas Instruments*, sirvan como herramienta académica para el aprendizaje de los conceptos teóricos de esta transformada. La base teórica se presenta como una adaptación de la temática planteada por Charles Chui en su libro *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Processing*, resaltando e interpretando los conceptos fundamentales.

El texto describe las características de la localización tiempo-frecuencia. Paso seguido se presenta el Análisis multirresolución y continua con las funciones Spline, las cuales presentan propiedades que permiten conjuntamente la localización tiempo-frecuencia y el análisis multirresolución. Con estos conceptos se esta en posibilidad de referir las características fundamentales de las wavelets por medio de las Wavelets Ortonormales y Biortonormales. Se implementan mediante *Matlab* las formas de onda de las funciones Spline, Las formas wavelet de las wavelets Ortonormales: Haar, Shannon, Meyer, Battle-Lemarie y Daubechies y Wavelets Biortonormales Spline. Para la realización y cálculo de la transformada wavelet discreta se emplea el algoritmo de banco de filtros programado bajo lenguaje ANSI C y en el *Code composer Studio*. Junto con esta implementación se analizan conceptos como: múltiples niveles de descomposición, tratamiento frontera y dualidad de la transformada.

Dentro de los resultados se observa el buen comportamiento de la *Toolbox* elaborada y sus posibilidades de uso en múltiples aplicaciones. Además la herramienta se presenta como un software abierto para ser ampliado y mejorado mediante la implementación de otras familias wavelets y/o para análisis multidimensionales.

¹ Facultad de Ingenierías Fisicomecánicas.
Escuela de Ingeniería Eléctrica, Electrónica y de Telecomunicaciones.
Director: Ing. Daniel Alfonso Sierra Bueno.
Codirector: Mgs César Antonio Duarte Gualdrón.

WAVELETS THEORETICAL FOUNDATION AND BASIC TOOLBOX PROGRAMMING IN A SIGNAL DIGITAL PROCESSING

AUTHORS:

CARLOS ANDRÉS NIÑO NIÑO*
OSCAR JAVIER OLARTE RODRÍGUEZ*

KEYWORDS:

Multiresolution, Time-frequency, Wavelet, DSP, Filter bank, Daubechies, Transform, DWT.

ABSTRACT:

The present study treats the wavelets theoretical foundation transformed together with the design and introduction of efficient algorithms in order to design an useful tool for the analysis of marks by means of this transformed; pretending to generate an utilities set that besides of serving for the projects development about the platform for DSP TMS320C6711 of Texas Instruments, they serve as academic tool for the theoretical concepts of this transformed. The theoretical base appears as an adaptation of the topic expounded by Charles Chui in his book Wavelets: A Mathematical tool for signal Processing, rebounding and interpreting the fundamental concepts.

The text describes the characteristics of time-frequency localization. Next, it presents the multiresolution analysis and continues with the Spline functions which present properties that let the time-frequency localization and the multiresolution analysis. These concepts make possible to refer the wavelets fundamental characteristics by means of the waves form, the wavelet form of the orthonormal wavelets: Haar, Shannon, Meyer, Battle-Lemarie and Daubechies and Spline Biorthogonal wavelets are programmed through Matlab. For the fulfilment and calculation of the discreet wavelet transformed, the algorithms and filter bank are used and programmed in ANSI C language and Code Composer Studio. Together with this programming, concepts like: multiple levels of disagreement, treatment "border" and duality of transformed are analyzed.

As result, the good behavior of the elaborated toolbox and its feasible uses in multiple applications is observed. Besides the tool is presented as an opened software to be increased from the programming of other wavelets families and/or for multidimensional analysis.

* Physical mechanic Engineering Faculty.
Electrical, Electronic and Telecommunication Engineering School.
Director: Eng. Daniel Alfonso Sierra Bueno.
Coodirector: MSG César Antonio Duarte Gualdrón.

INTRODUCCIÓN

El análisis de señales exige, a medida que las aplicaciones lo requieren, de ciertas herramientas que las transformadas clásicas no cubren; este es el caso de las señales no estacionarias, para las cuales la Transformada de Fourier es inadecuada. Es necesario entonces diseñar nuevas estrategias y algoritmos que permitan estudiar de manera óptima diferentes tipos de señales.

El presente estudio trata la fundamentación teórica de la transformada wavelet junto con el diseño e implementación de algoritmos eficientes, con el fin de diseñar una herramienta útil para el análisis de señales mediante esta transformada; pretendiendo generar un conjunto de utilidades, que además de servir para el desarrollo de proyectos sobre la plataforma para DSP TMS320C6711 de Texas Instruments, sirvan como herramienta académica para el aprendizaje de los conceptos teóricos de la transformada Wavelet.

La base teórica se presenta como una adaptación de la temática planteada por Charles k. Chui en su libro *Wavelets: A Mathematical Tool for Signal Processing*, resaltando e interpretando los conceptos fundamentales de la transformada Wavelet, pretendiendo ofrecer una guía para su estudio.

Inicialmente el texto presenta una breve descripción de las funciones wavelets e igualmente plantea una de sus cualidades mas importantes, la localización tiempo frecuencia.

Con este fin en el segundo capítulo se expone el análisis multirresolución, el cual permite describir una señal mediante sus bandas de frecuencia; se define la función de escala $\phi(t)$ que cumple con dos condiciones fundamentales, generar una base de Riesz y cumplir la relación doble escala.

En el tercer y cuarto capítulo se estudian las diferentes wavelet tratadas en el libro de Charles Chui, ya que presentan disímiles cualidades. Lo que permite contar con una extensa base de funciones wavelet para el desarrollo de la herramienta, y además como material académico y recurso en el desarrollo de diferentes proyectos.

Un grupo importante de wavelets consideradas en estos dos capítulos son las que se conocen como ortonormales. Esta clase de wavelets tienen especiales condiciones que hacen que el cálculo de las wavelets de análisis y de síntesis se generen a partir de una misma secuencia doble escala p_k . Otro tipo de wavelets son las biortogonales, las cuales para su construcción requieren de conceptos como la semiortogonalidad y el teorema de dualidad; con esto es posible llegar a una estructura de análisis y síntesis completa, es decir, contar con funciones para descomposición y reconstrucción, que aprovechando el teorema de dualidad puedan ser utilizadas indistintamente.

El capítulo final muestra cómo se implementan los anteriores tipos de wavelets, y de este modo presenta el proceso de construcción de las wavelets ortonormales: Haar, Shannon, Meyer, Battle-Lemarie y Daubechies y las wavelet biortogonales Spline, utilizando el *software* de desarrollo Matlab.

Además se hace uso de conceptos matemáticos descritos a lo largo del texto para la ejecución de la transformada digital de wavelet (TDW), que finalmente se implementa en la tarjeta de desarrollo para DSP TMS320C6711 de Texas Instruments utilizando un algoritmo de banco de filtros. Tal implementación se sirve del *software* "code composer studio" propio de la tarjeta de desarrollo, el cual cuenta con instrumentos para visualizar y modificar el proceso paso a paso.

Para la ejecución de la transformada wavelet es de consideración especial el tratamiento de la señal en las fronteras. Por tanto en el capítulo final se presentan tres métodos para el análisis de estas zonas: extensión por ceros, extensión simétrica y extensión periódica.

Finalmente en los anexos del libro, se presenta documentación importante que amplía los conceptos expuestos a lo largo del texto y a su vez se encuentra la guía del usuario, que permite el correcto manejo de la herramienta presentada.

1. FUNDAMENTOS DE WAVELETS Y LOCALIZACIÓN TIEMPO FRECUENCIA

Este texto estudia una herramienta relativamente nueva para el análisis de señales, la Transformada Wavelet, la cual es utilizada en la actualidad en diversas aplicaciones como biomedicina, sonido, compresión, tratamiento de imágenes, entre otras.

En la construcción de la teoría de la transformada Wavelet han aportado varios matemáticos. El primero es tal vez Karl Weierstrass, quien en 1873 describió una familia de funciones que son construidas por superposición de copias escaladas de una función base. Alfred Haar en 1909 construyó el primer sistema ortonormal de funciones con soporte compacto llamado base Haar, el cual sirve aún para la moderna Teoría Wavelet.

Un avance importante se dio en 1946 con Dennis Gabor quien describió una base no ortogonal, la cual realiza el análisis de señales por medio de enventanado, (transformada corta de Fourier). En 1982, Morlet muestra como estas bases no ortogonales pueden ser utilizadas para estudiar ondas sísmicas. Posteriormente, Grossman y Morlet concluyen cómo cualquier señal puede ser analizada en términos de escalamientos y traslaciones de una función Wavelet. Yves Meyer y Stephane Mallat complementaron esta última teoría con el análisis multirresolución.

Otro aporte significativo se presenta con la publicación de las Wavelet Daubechies, diseñadas por Ingrid Daubechies, las cuales presentan condiciones de soporte compacto y específicos momentos desvanecientes.

El término WAVELET, cuyo significado literal es “pequeñas ondas” se refiere al hecho que son localizadas en tiempo y ofrecen buena localización en frecuencia. En general las WAVELET tienen diversas aplicaciones pero pueden ser consideradas como una herramienta matemática para la representación de formas de onda, análisis tiempo-frecuencia y algoritmos sencillos de implementación.

1.1 MODELADO Y SEGMENTACIÓN

En General el “*modelado*” de señales tiene como fin la representación de estas a partir de funciones base conocidas. En Fourier, este modelado se efectúa utilizando señales senoidales, sin embargo existen otros tipos de funciones base que dependiendo de la aplicación y de la señal a modelar presentan mejor desempeño.

La *segmentación*, se define como el proceso de división o descomposición de una señal dada, esta se ejecuta en espacios de funciones generados a partir de la señal con la cual se ha de realizar el modelado.

Los espacios de funciones V_j y W_j son generados a partir de las funciones base $\phi(t)$ y $\psi(t)$ a través de combinaciones, escalamientos y traslaciones de estas; esto se define por (1.1).

$$V_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} \phi(2^j t - k) = \langle \phi(2^j t - k) \mid k \in \mathbb{Z} \rangle \quad j \in \mathbb{Z} \quad \text{con base } \phi(2^j t) \quad (1.1)$$

$$W_j = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi(2^j t - k) = \langle \psi(2^j t - k) \mid k \in \mathbb{Z} \rangle \quad j \in \mathbb{Z} \quad \text{con base } \psi(2^j t)$$

1.2 RESOLUCIÓN TIEMPO-FRECUENCIA

De los espacios de funciones definidos en (1.1) podemos observar que el término 2^j hace más o menos rápido el cambio de las funciones $\phi(t)$ y $\psi(t)$, por tanto este término tendrá un efecto similar en los espacios que estas funciones generan. Es decir, los espacios V y W tendrán un ancho de banda tal como el término 2^j lo determine (Se explicará que en general el espacio V corresponde a bajas frecuencias y el espacio W a las altas frecuencias, debido a las propiedades que $\phi(t)$ y $\psi(t)$ presentan). Por otro lado, el término k indica en qué posición temporal está centrada la función base. Es así que la combinación de los términos 2^j y k presenta información simultánea de tiempo y frecuencia.

1.3 LOCALIZACIÓN TIEMPO – FRECUENCIA

La localización tiempo-frecuencia es el proceso de situar una señal en los espacios de tiempo y de frecuencia, y por ende definir el estado de la señal con precisión en ellos. Este proceso de localización se denomina ventaneo y utiliza señales denominadas ventanas.

Una función $h(t)$, será llamada *función ventana* y el producto interno de esta con una función $f(t)$ será llamado *proceso de ventaneo*. La integral de transformación (1.2) permite enmarcar o resaltar a la señal $f(t)$ “alrededor de $t=b$ ”, por tanto,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{h(t-b)} dt \quad (1.2)$$

1.4 ANCHO DE BANDA RMS

Para tener mayor claridad en el concepto de ventaneo (1.2) se definen el centro y el ancho de una función ventana. Si $h(t)$ es una función con decaimiento suficientemente rápido hacia el infinito tal que las integrales, en (1.3) y (1.4) son finitas, entonces el centro de $h(t)$ está definido por:

$$t^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} t |h(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt} \quad (1.3)$$

y el radio de $h(t)$ es dado por:

$$\Delta_h = \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (t-t^*)^2 |h(t)|^2 dt}{\int_{-\infty}^{\infty} |h(t)|^2 dt} \right\}^{1/2} \quad (1.4)$$

El centro se puede equiparar al centro temporal de la señal y el radio al tiempo desde el centro que contiene información valiosa de la señal.

El ancho de la función ventana es $2\Delta_h$, correspondiente a su duración eficaz o efectiva, RMS de $h(t)$. De forma similar, si la transformada de Fourier $\hat{h}(w)$ de $h(t)$ tiene decaimiento suficientemente rápido al infinito tal que los valores

$$w^* = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} w |h(w)|^2 dw}{\int_{-\infty}^{\infty} |h(w)|^2 dw} \quad (1.5)$$

y

$$\Delta_{\hat{h}} = \left\{ \frac{\int_{-\infty}^{\infty} (w - w^*)^2 |\hat{h}(w)|^2 dw}{\int_{-\infty}^{\infty} |\hat{h}(w)|^2 dw} \right\}^{1/2} \quad (1.6)$$

son finitos, entonces el centro y el ancho de $\hat{h}(w)$ están dados por w^* y $2\Delta_{\hat{h}}$ respectivamente. Donde el valor $2\Delta_{\hat{h}}$ es usualmente llamado *ancho de banda* RMS de la función ventana $h(t)$. Ahora bien si $\Delta_{\hat{h}}$ es finita, $\hat{h}(w)$ es una ventana en frecuencia. Similarmente, si Δ_h es finita, la función $h(t)$ es una ventana en tiempo. Por lo cual, si ambas Δ_h y $\Delta_{\hat{h}}$ fueran finitas, $h(t)$ generaría una ventana tiempo-frecuencia.

Si en el proceso de ventaneo se elige $h(t)$ como un filtro pasa bajas con frecuencia de corte w_0 , este mapea o enmarca la señal dentro de su ancho de banda. Ahora, si el filtro es un filtro ideal se tiene que el ancho de banda RMS es finito, lo que hace que tenga una excelente ubicación en frecuencia, pero no permite la localización en el tiempo ya que la duración RMS del filtro (en el tiempo) es infinita. Este compromiso entre la duración y el ancho de banda se resume en el *principio de incertidumbre*, el cual indica que cualquier ventana tiempo-frecuencia $h(t)$ debe satisfacer la inecuación

$$\Delta_h \Delta_{\hat{h}} \geq 1/2 \quad (1.7)$$

donde la igualdad solo es válida para la función *Gausiana*.

Definido el proceso de ventaneo, el centro, el radio en el tiempo y en frecuencia se procede a explicar por qué $h(t)$ es llamada una función tiempo-frecuencia. Recordando la *identidad de Parseval* :

$$\langle f, g \rangle = \frac{1}{2\pi} \langle \hat{f}, \hat{g} \rangle \quad (1.8)$$

o explícitamente

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{h(t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) \overline{\hat{g}(w)} dw \quad (1.9)$$

y aplicándola al proceso de ventaneo (1.2)

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(t) \overline{h(t-b)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{-j b w} \overline{\hat{h}(w)} dw \quad (1.10)$$

Se observa que la función $h(t-b)$, a la izquierda en (1.10), localiza la señal $f(t)$ “cerca de $t=b$ ”, es decir la ventana en tiempo esta definida por

$$[b + t^* - \Delta_h, b + t^* + \Delta_h] \quad (1.11)$$

Similarmente, el término $\frac{1}{2\pi} e^{-j b w} \hat{h}(w)$ del lado derecho de (1.10) localiza el espectro

$\hat{f}(w)$ de la señal con ventana en frecuencia dada por

$$[w^* - \Delta_{\hat{h}}, w^* + \Delta_{\hat{h}}] \quad (1.12)$$

En aplicaciones se eligen funciones ventana de valor real tal que $|\hat{h}(\omega)|$ sea una función par y por tanto el centro se localiza en $\omega=0$. La última ecuación se reduce a:

$$[-\Delta_{\hat{h}}, \Delta_{\hat{h}}] \quad (1.13)$$

Con esto se puede observar que el proceso de ventaneo (1.2) mapea una señal de energía finita $f(t)$ sobre una señal con ancho de banda RMS $2\Delta_{\hat{h}}$, es decir se tiene información sobre ubicación temporal pero sólo un rango de representación en frecuencia.

1.5 LA TRANSFORMADA DE FOURIER

La transformada de Fourier (TF) descompone una señal $f(t)$ en senoides de diferentes frecuencias, cuya suma corresponde a la señal original, es decir, es capaz de distinguir las diferentes componentes de frecuencia de la señal y sus amplitudes.

Se define la TF como:

$$F(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{j\omega t} dt \quad (1.14)$$

donde una interpretación sencilla de esta ecuación es observar que se presentan dos términos: la señal $f(t)$ y el término complejo en función de la frecuencia ω . Además la ecuación genera la multiplicación de la señal $f(t)$ con el término complejo a la frecuencia ω , para finalmente sumar todos estos productos. Si el resultado a la frecuencia ω es alto, entonces la señal $f(t)$ tiene una componente espectral dominante en esta frecuencia. Es decir, la señal $f(t)$ en su mayoría está compuesta de la frecuencia ω . Ahora bien, si el resultado de las sumatorias muestran un valor bajo, se dice que la señal no presenta mayor componente de frecuencia ω . Finalmente si la integral es cero, entonces la señal $f(t)$ no contiene la frecuencia ω .

Se ve con esta interpretación que la TF indica cuáles componentes de frecuencia existen o no; pero no da información de los instantes de tiempo en que estas frecuencias aparecen. Es decir esta transformada es óptima para señales estacionarias, ya que las frecuencias presentes están a lo largo de toda la señal.

En las señales no estacionarias, señales que varían sus componentes de frecuencia a través del tiempo, la TF no es adecuada ya que informa que las frecuencias existentes en la señal están presentes a cada instante, siendo esto erróneo, ya que una frecuencia determinada puede aparecer sólo en un momento de la señal y desaparecer al siguiente.

1.6 LA TRANSFORMADA DE FOURIER DE TIEMPO CORTO (STFT)

La TF es inadecuada para señales no estacionarias, pero podemos considerar a estas señales como estacionarias en intervalos cortos de tiempo. Es decir se pueden tomar recortes de la señal (ventanas) y analizar sus componentes en cada intervalo. La operación de tomar partes de la señal es el denominado proceso de ventaneo definido en (1.2), con el cual obtenemos las ventanas de tiempo y frecuencia descritas en (1.11) y (1.13). Las cuales son rescritas para conveniencia del lector.

$$[b + t^* - \Delta_h, b + t^* + \Delta_h]$$

$$[-\Delta_{\hat{h}}, \Delta_{\hat{h}}]$$

Donde se observa que variando el termino b la ventana recorrerá toda la señal en el eje del tiempo. Pero (1.13) solo contiene términos constantes, por tanto no se está recorriendo el espectro de la señal.

Ahora bien, una traslación en el tiempo corresponde a un cambio de fase en el dominio de la frecuencia. Similarmente un cambio de fase en el tiempo corresponde a una traslación en frecuencia. De aquí si queremos recorrer la señal en el eje de frecuencia,

todo lo que se debe hacer es incorporar un corrimiento de fase en el proceso de ventaneo. Lo cual nos lleva a la noción de STFT.

DEFINICIÓN 1 : Sea $\phi(t)$ es una función de valor real con $\phi(t), |t|^{1/2}\phi(t)$, y $t\phi(t)$ en l^2 tal que $\hat{\phi}(0) = 1$. Entonces la STFT con función ventana $\phi(t)$ esta definida por:

$$(G_{\phi}f)(b, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\xi t}\phi(t-b)dt \quad f \in l^2 \quad (1.15)$$

Aplicando Parseval a esta definición

$$(G_{\phi}f)(b, \xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-j\xi t}\phi(t-b)dt = \frac{e^{-j\xi b}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega)e^{j\omega b}\overline{\hat{\phi}(\omega - \xi)}d\omega \quad (1.16)$$

Se puede ver que el termino $e^{j\xi t}\phi(t-b)$ localiza la función cerca de $t=b$ y el termino $\frac{e^{j\xi t}}{2\pi}e^{-j\omega b}\hat{\phi}(\omega - \xi)$ localiza el espectro alrededor de $\omega=\xi$. Por tanto la ventana tiempo-frecuencia en la STFT se comporta como:

$$[b - \Delta_{\phi}; b + \Delta_{\phi}] \quad (1.17)$$

$$[\xi - \Delta_{\hat{\phi}}; \xi + \Delta_{\hat{\phi}}] \quad (1.18)$$

Donde las variables b y ξ controlan la ubicación en los ejes de tiempo y frecuencia respectivamente.

De (1.17) y (1.18) se deduce que las medidas de las ventanas tiempo-frecuencia son $2\Delta_{\phi}$ para el eje tiempo y $2\Delta_{\hat{\phi}}$ para el eje de frecuencia. Por tanto cada ventana tendrá un área de $4\Delta_{\phi}\Delta_{\hat{\phi}}$.

1.7 TRANSFORMADA CONTINUA DE WAVELET (CWT) / TRANSFORMADA INTEGRAL DE WAVELET (IWT)

De lo expuesto hasta el momento, se tiene que la STFT permite deslizarse en el eje del tiempo y de la frecuencia para un tamaño de ventana fijo. Es decir, el tamaño de la ventana se mantiene en el estudio de altas y/o bajas frecuencias. Esto es claramente una desventaja de la STFT ya que por ejemplo, para un cambio abrupto de la señal no es necesaria una ventana muy ancha y para el estudio de las bajas frecuencias una ventana de corta duración podría no reconocer la frecuencia en cuestión. En La noción de IWT/CWT se genera una ventana tiempo-frecuencia flexible para solucionar tales inconvenientes.

En la STFT se introdujo al proceso de ventaneo el cambio de fase para permitir el deslizamiento en el eje de frecuencias; para la formulación de la IWT, se introduce un parámetro de escalamiento para ajustar el ancho de la ventana tiempo-frecuencia y este mismo parámetro permitirá el deslizamiento en el eje de frecuencias.

Más precisamente:

$$\int f(t)\overline{\psi\left(\frac{t-b}{a}\right)}dt \quad (1.19)$$

donde se ha usado $\psi(t)$ en lugar de $h(t)$ para enfatizar en requerimientos sobre la función ventana, $\psi(t)$ será asumida como una respuesta asociada a un filtro pasa-banda, $\hat{\psi}(0) = 0$, además será de valor real y por lo tanto $|\hat{\psi}(\omega)|$ es par. Esto trae a consideración un nuevo centro y ancho para esta señal.

DEFINICIÓN 2: con $\psi(t)$ una función de valor real, tal que $\psi(t), |t|^{1/2}\psi(t)$ y $t\psi(t)$ están en L^2 y $\hat{\psi}(0) = 0$ (pasa-bandas). Por tanto el centro de uno de los lados de $\hat{\psi}(\omega)$, considerado como una función sobre $[0, \infty)$, es definido por

$$\omega_+^* := \frac{\int_0^{\infty} \omega |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega} \quad (1.20)$$

Y el radio de uno de los lados de $\hat{\psi}(\omega)$ esta dado por

$$\Delta_{\hat{\psi}}^+ := \left(\frac{\int_0^{\infty} (\omega - \omega^*)^2 |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega}{\int_0^{\infty} |\hat{\psi}(\omega)|^2 d\omega} \right) \quad (1.21)$$

Con esto la transformada continua de Wavelet se define de la siguiente forma:

DEFINICIÓN 3: con $\psi(t)$, una función de valor real que satisface las propiedades establecidas en la definición anterior. Entonces la IWT o CWT, con función ventana $\psi(t)$, esta dada por:

$$(\omega_{\psi} f)_{(b,a)} = \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \quad f \in L^2 \quad (1.22)$$

en el cual $a > 0$. La función ventana pasa-bandas en (1.22) es llamada Wavelet de análisis de la IWT (Transformada Integral de Wavelet).

En la IWT la ventana de tiempo es proporcionada por el termino $\frac{1}{\sqrt{a}} \psi\left(\frac{t-b}{a}\right)$ donde la variable a hace más rápida o más lenta a $\psi(t)$, y por tanto su centro y radio varían proporcionalmente. Los límites de la ventana en el tiempo son:

$$\left[b + at^* - a\Delta_{\psi}; b + at^* + a\Delta_{\psi} \right] \quad (1.23)$$

Ahora, para establecer los límites de la ventana en frecuencia se aplica Parseval a la definición de IWT (1.22)

$$\begin{aligned}
(\omega_{\psi} f)(b, a) &= \frac{1}{\sqrt{a}} \int_{-\infty}^{\infty} f(t) \psi\left(\frac{t-b}{a}\right) dt \\
&= \frac{\sqrt{a}}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-jb\omega} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} d\omega \\
&= \frac{\sqrt{a}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-jb\omega} \overline{\hat{\psi}(a\omega)} d\omega \\
&= \frac{\sqrt{a}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-jb\omega} \eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega_+^*}{a}\right)\right) d\omega
\end{aligned} \tag{1.24}$$

Para toda $f \in L^2_{\mathbb{R}}$, donde se hace uso de la notación $\eta(\omega) := \hat{\psi}(\omega + \omega_+^*)$.

En principio la IWT es una transformada tiempo-escala, pero puede ser llevada a tiempo-frecuencia mediante la constante $c > 0$, conocida como *constante de calibración* dada en términos de frecuencia Hz.

$$a \longrightarrow \xi = \frac{c}{a} \tag{1.25}$$

Con lo anterior, la IWT, que localiza una señal $f(t)$ en el dominio del tiempo, también localiza simultáneamente su espectro $\hat{f}(\omega)$ en el dominio de la frecuencia, así:

$$(\omega_{\psi} f)(b, \xi) = \frac{\sqrt{a}}{\pi} \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \hat{f}(\omega) e^{-jb\omega} \eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega_+^*}{c}\xi\right)\right) d\omega \tag{1.26}$$

El término $\eta\left(a\left(\omega - \frac{\omega_+^*}{c}\xi\right)\right)$ es la función ventana en frecuencia y nuevamente la variable

a determina los accidentes de velocidad de esta. Lo cual conlleva a que la ventana en frecuencia sea:

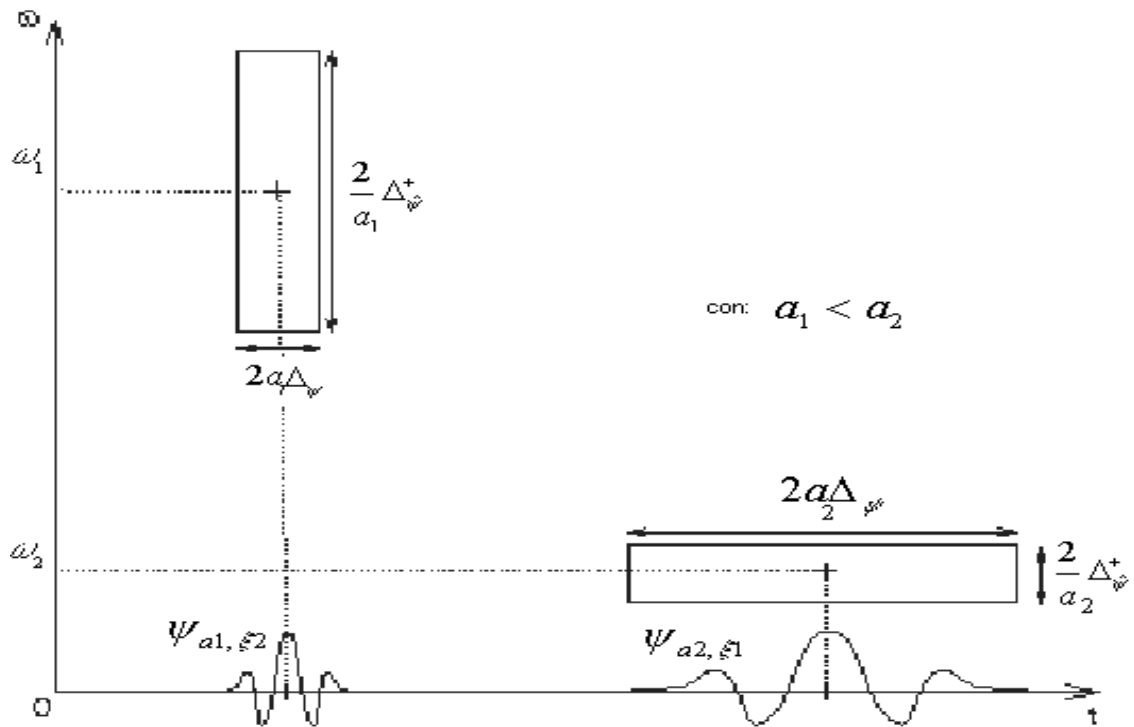
$$\left[\frac{\omega_+^*}{c}\xi - \frac{1}{a}\Delta_{\psi}^+; \frac{\omega_+^*}{c}\xi + \frac{1}{a}\Delta_{\psi}^+ \right] = \left[\frac{1}{a}(\omega_+^* - \Delta_{\psi}^+); \frac{1}{a}(\omega_+^* + \Delta_{\psi}^+) \right] \tag{1.7.9}$$

De (1.23) y (1.27) es posible determinar los anchos de las ventanas de tiempo y frecuencia, los cuales son $2a\Delta_\psi$ y $\frac{2}{a}\Delta_\psi^+$ respectivamente. Donde para las altas frecuencias (valores altos de ξ o valores bajos de escalamiento a), el ancho de la ventana en el tiempo ($2a\Delta_\psi$) disminuye y el ancho de la ventana en frecuencia ($\frac{2}{a}\Delta_\psi^+$) aumenta. Ahora bien, si las dimensiones de la ventana tiempo-frecuencia se alteran, el área de la ventana permanece constante y determinada por

$$(2a\Delta_\psi)\left(\frac{2}{a}\Delta_\psi^+\right) = 4\Delta_\psi\Delta_\psi^+ \quad (1.28)$$

Estas observaciones se pueden esquematizar mediante la Figura 1.

Figura 1. Esquema del cambio producido en la ventana tiempo-frecuencia.



En conclusión la IWT soluciona el inconveniente presente en la STFT, ya que a altas frecuencias la ventana tendrá corta duración, lo que permite tener buena resolución en tiempo. A bajas frecuencias, la ventana tendrá un ancho considerable para el estudio de las mismas y por tanto, generará buena resolución en frecuencia. Estas dos características son deseadas en el análisis de señales no estacionarias.

2. ANÁLISIS MULTIRESOLUCIÓN

En este capítulo se describe cómo una señal de energía finita es representada en el espacio V_ϕ en términos de superposiciones y corrimientos de la función $\phi(t)$, cuidando que se cumpla una condición de estabilidad para finalmente estudiar las funciones de escala *Splines*.

Para localizar señales en tiempo y en frecuencia son usadas dos tipos de transformadas, la transformada corta de Fourier (STFT), la cual opera mediante un filtro pasa bajos $\phi(t)$ y la transformada integral Wavelet (IWT) que emplea un filtro pasa bandas $\psi(t)$. Por tanto, para una adecuada localización tiempo-frecuencia se deben escoger estos filtros de forma que el producto de sus anchos de banda y de duración sea de valor finito.

$$\Delta_\phi \Delta_{\hat{\phi}} < \infty \quad \Delta_\psi \Delta_{\hat{\psi}} < \infty \quad (2.1)$$

Es así que $\phi(t)$ y $\psi(t)$ deben tener ancho de banda RMS finito, lo cual indica que su energía no está dispersa y así la señal no se ve alterada por el análisis.

En primera instancia se busca representar una señal de energía finita sobre un espacio V_ϕ generado por la función ventana pasa bajos $\phi(t)$, donde para facilidad de cómputo e implementación, el filtro pasa bajos debe satisfacer la “*relación doble escala*”; esto es, $\phi(t)$ debe ser una “*función de escala*” en el sentido de la definición 6, la cual genera análisis multiresolución (AMR).

2.1 ESPACIO DE SEÑALES CON ANCHO DE BANDA FINITA

Toda señal con ancho de banda limitado se puede recuperar a partir de sus muestras si el periodo de muestreo es lo suficientemente pequeño. Es decir, se debe cumplir con el

teorema de Nyquist el cual indica que la frecuencia de muestreo debe ser mayor a por lo menos 2 veces la frecuencia más alta de la señal, llamada frecuencia Nyquist (Ω_N).

$$\Omega_s = \frac{2 * \pi}{a} \geq 2 * \Omega_N \quad \text{donde } a \text{ es el periodo de muestreo.}$$

$$0 < a \leq \frac{\pi}{\Omega_N} \quad (2.2)$$

De esta manera la señal quedara adecuadamente representada por sus muestras digitales,

$$f(ka) \quad k=0, \pm 1, \pm 2, \pm 3... \quad (2.3)$$

Para recuperar la señal a partir de sus muestras se podría utilizar la función Shanon, la cual realiza la interpolación de las muestras (filtrado pasa bajos),

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(ka) \phi_{s;a}(t - ka) \quad (2.4)$$

Donde

$$\phi_{s;a}(t) = \phi_s\left(\frac{t}{a}\right) \quad (2.5)$$

denota función de muestreo de Shannon

$$\phi_s(t) = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}, \quad (2.6)$$

la cual tiene buena resolución en frecuencia pero no en tiempo, ya que en este dominio tiene duración RMS infinita. Por este motivo se debe definir otro filtro pasa bajos $\phi(t)$ cuya relación de anchos $\Delta_\phi \Delta_{\hat{\phi}}$ sea finito y además conserve las propiedades del teorema de muestreo.

Para representar las señales en un espacio V_ϕ generado por $\phi(t)$, de la forma,

$$f(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_k \phi(t - ka) \quad (2.7)$$

se debe estudiar la estabilidad de esta representación, donde C_k son constantes arbitrarias y a el periodo de muestreo; entendiendo por estabilidad que una distorsión de los coeficientes C_k debe generar de igual modo una variación en la señal representada y viceversa.

Para evaluar la estabilidad se hará uso de la norma de la energía

$$\|f\| = \left(\int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt \right)^{1/2} \quad (2.8)$$

y de la norma de la energía discreta

$$\|\{c_k\}\|_{l^2} = \left\{ \sum_k |c_k|^2 \right\}^{1/2} \quad (2.9)$$

Con estas definiciones y volviendo a la representación de $f(t)$ en (2.7), la consideración de estabilidad es comparar las cantidades

$$\left\| \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k \phi(t - ka) \right\| \text{ y } \|\{c_k\}\| \quad (2.10)$$

Para lo cual se introduce el concepto de *base estable* (o *de Riesz*). Por conveniencia se simplifica considerando $a=1$.

DEFINICION 4: $\phi(t)$ genera una base estable (o Riesz) del espacio

$$V_\phi = \langle \phi(t - k) : k \in Z \rangle \quad (2.11)$$

si existen dos constantes positivas A y B llamadas *fronteras Riesz* tal que,

$$A \|\{c_k\}\|^2 \leq \left\| \sum_k c_k \phi(t - ka) \right\|^2 \leq B \|\{c_k\}\|^2 \quad (2.12)$$

si $\phi(t)$ cumple (2.12), esta es llamada una función estable.

Lo cual indica que la representación de la señal debe estar limitada en energía. Es decir, si se usan bases Riesz los coeficientes de representación C_k son finitos y por tanto generan una secuencia de energía finita.

Si en la representación descrita se eligen como c_k a las muestras enteras de la señal ($f(ka)$) y como filtro $\phi(t)$ a la función shannon ($\phi_s(t)$), entonces la ecuación (2.7) representa a la señal $f(t)$ en el espacio V_{ϕ_s} , lo que se describe por:

$$(V_a^s f)(t) = \sum_k f(ka) \phi(t - ka) = \sum_k f(ka) \phi\left(\frac{t}{a} - k\right) \quad (2.13)$$

Esta representación es la mas optima, ya que $\phi_s(t)$ es un filtro pasa bajos máximamente plano, además si $f(t)$ es de banda limitada se puede decir que,

$$(V_a^s f)(t) \equiv f(t) \quad \text{para } a \leq \frac{\pi}{\Omega_N} \quad (2.14)$$

Ahora bien, si se elige un filtro pasa-bajos arbitrario $\phi(t)$ y a los C_k nuevamente como muestras enteras de la señal, la operación

$$(V_a f)(t) = \sum_k f(ka) \phi(t - ka) \quad (2.15)$$

no produce una buena representación de $f(t)$ en L^2 aún si el periodo de muestreo es muy pequeño. Por tanto, el mapeo utilizando un filtro arbitrario no es la forma óptima para representar una señal en el espacio deseado.

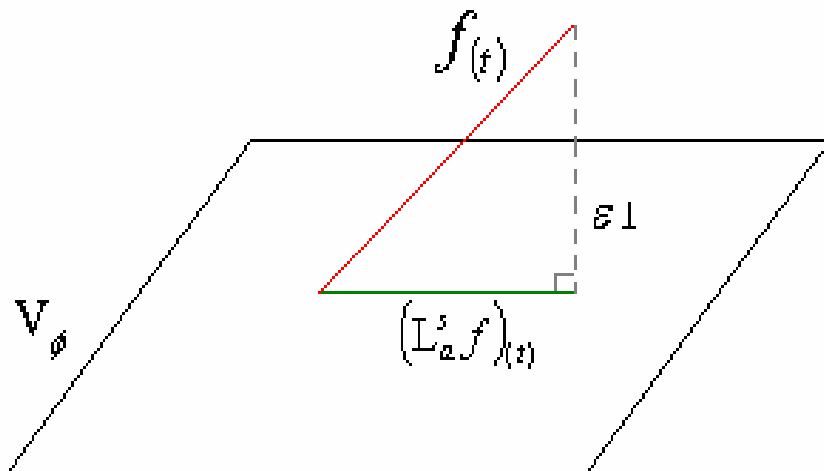
Para encontrar una mejor representación de la señal se desarrolla la *proyección ortogonal* $(L_a f)(t)$ sobre el espacio $V_{\phi, a}$. Donde el error de esta representación será ortogonal a todo el espacio $V_{\phi, a}$, (Figura 2), de aquí que la formulación matemática de la proyección este dada por

$$(L_a f)(t) = \sum_{kq} c_k \phi(t - ka) \quad \text{tal que} \quad (2.16)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \{f(t) - (L_a f)(t)\} \phi(t - ka) dt = 0 \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

es decir, los coeficientes C_k que definen la proyección ortogonal solo están determinados por la condición de ortogonalidad (El error y el espacio de representación son ortogonales) presentada en (2.16).

Figura 2. Proyección Ortogonal.



CHARLES K. Chui. Wavelets: A mathematical Tool for Signal Processing. Philadelphia: SIAM, 1997. p.43.

Para el cálculo de los C_k se debe resolver el sistema matricial,

$$Mc=b \quad (2.17)$$

Donde M es el producto interno de las funciones de la base, C los coeficientes que representan la señal y b la convolución de la señal $f(t)$ con la ventana pasa bajos $\phi(t)$, es decir la función filtrada.

$$M_{k,l} = \left[\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-ka)\phi(t-la)dt \right]_{-\infty < k < \infty}$$

$$c = \begin{bmatrix} \cdot \\ \cdot \\ c_k \\ c_{k+1} \\ \cdot \end{bmatrix}$$

$$b_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t-ka)dt \quad (2.18)$$

Si M es una matriz identidad, (los productos cruzados $\phi(t-ka)\phi(t-la)$ son cero y solo cuando $k=l$ el producto es uno), se simplifica el cálculo de los coeficientes de representación de la señal C_k y el sistema matricial (2.17) se reduce a $c=b$,

$$c_k = \int_{-\infty}^{\infty} f(t)\phi(t-ka)dt, \quad k = 0, \pm 1, \dots \quad (2.19)$$

Para que M sea matriz identidad el conjunto $\phi(t-ka)$ debe ser una familia ortonormal, definida por:

DEFINICION 5: una función $\phi(t) \in L^2$ genera una familia ortonormal sobre el conjunto de muestras $\{ka: k=0, \pm 1, \dots\}$ si $\phi(t-ka)$ satisface

$$\int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-ka)\phi(t-la)dt = \delta_{k,l} \quad k, l \in Z \quad (2.20)$$

Donde de aquí en adelante $\delta_{k,l}$ denota el *delta de Kronecker*.

$$\delta_{k,l} = \begin{cases} 1 & \text{si } k=l \\ 0 & \text{en otro lugar} \end{cases} \quad (2.21)$$

Es importante observar que para cualquier base ortonormal (como se ha supuesto para M) se cumple que es una *base Riesz* con *fronteras Riesz* $A=B=1$.

Hasta este punto se han mostrado dos formas de representar una señal $f(t)$ en el espacio de funciones V_ϕ , *mapeo* $(V_a f)(t)$ y *proyección ortogonal* $(L_a f)(t)$. Se observo que para el *mapeo*, tomar muestras de la señal es suficiente para generar la representación deseada, siempre y cuando la señal $f(t)$ sea de banda limitada y la base que genera el espacio de funciones sea la función *shannon* $\phi_s(t)$.

Es importante representar funciones en espacios más generales que para la función de shannon, por tanto se presenta la *proyección ortogonal*, en donde si se quiere simplificar la operación (sistema de ecuaciones 2.17) se eligen espacios de funciones V_ϕ generados por funciones ortogonales $\phi(t)$. Ahora bien, si en la *proyección ortogonal* se eligen como elementos C_k a muestras de la señal ($f(ka)$ $k=0, \pm 1, \dots$) el mapeo y la proyección ortogonal se relacionan por:

$$(L_a f)(t) = \sum_k f(ka)\phi(t-ka) = (V_a f)(t) \quad (2.22)$$

Es así que para funciones con pequeño ancho de banda y filtros de magnitud uno y máximamente planos, por lo menos en la banda de frecuencias de $f(t)$ las muestras de la señal generan buena representación en el espacio V_ϕ generado por $\phi(t)$.

2.2 SECUENCIA DE ANIDAMIENTO P_k

La ecuación para recuperar la señal de banda limitada (2.7), como se explico en el numeral anterior, no es eficiente para señales con ancho de banda grande, no se puede esperar buenos resultados en la representación de la señal utilizando cualquier ventana pasa-bajas $\phi(t)$. Por tanto es importante encontrar un esquema computacional eficiente que represente óptimamente la señal, no sólo utilizando la *función Shannon*, sino cualquier filtro pasa-bajos que genere buena representación en tiempo como en frecuencia.

Dados dos filtros $\phi(t)$ de diferente rapidez

$$\phi\left(\frac{t}{a_1}\right), \phi\left(\frac{t}{a_2}\right)$$

es decir, filtros pasa-bajos con diferente valor de escala a , (los valores de escala a se toman como potencias enteras de 2 con el fin de facilitar la obtención del algoritmo), se necesita relacionarlos por medio de la secuencia doble escala P_k . Para lo cual se hace uso del hecho, que una señal $\phi\left(\frac{t}{2}\right)$ puede ser expresada como superposición de traslaciones enteras de $\phi(t)$ mediante

$$\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \phi(t-k) \quad \text{para todo } t \text{ y } k \in Z \quad (2.23)$$

o igualmente

$$\phi\left(\frac{t}{2}\right) = \phi(t) * \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k \delta(t-k) \quad (2.24)$$

donde la secuencia p_k , es la encargada de relacionar tales funciones.

Ahora es importante introducir la siguiente definición:

DEFINICION 6: Si una función $\phi(t)$ en L^2 satisface (2.23) y es estable, entonces $\phi(t)$ es llamada *función de escala* y la secuencia p_k en (2.23) es llamada su correspondiente *secuencia doble escala*. La identidad (2.23) en si misma es llamada *relación doble escala* de $\phi(t)$.

La ecuación (2.23) implica que una función de escala siempre se podrá armar como combinaciones de sí misma comprimida por un factor 2.

Aplicando la transformada de Fourier a ambos lados de (2.24) se tiene

$$2\hat{\phi}(2w) = (\hat{\phi}(w)) \left(\sum_k p_k e^{-jwk} \right) \quad (2.25)$$

por el cambio de variable $2w = \omega$ se obtiene

$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \left(\frac{1}{2} \sum_k p_k e^{-\frac{j\omega k}{2}} \right) \quad (2.26)$$

lo que lleva a que la *relación doble escala* tiene como equivalente en frecuencia

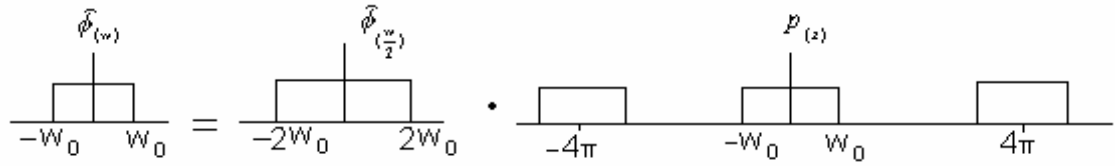
$$\hat{\phi}(\omega) = P(e^{-j\omega/2}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad \text{para todo } \omega \quad (2.27)$$

donde se define

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_k p_k z^k \quad \text{con} \quad z = e^{-\frac{j\omega}{2}} \quad (2.28)$$

que es llamado *símbolo doble escala* de la secuencia p_k . Es importante observar que la relación doble escala (2.27) permite representar una señal lenta mediante una rápida, es así que el comportamiento de la secuencia doble escala (p_k) es el de un filtro pasa bajos como muestra la figura 3. Es decir una función puede ser representada por funciones de transiciones lentas y rápidas.

Figura 3. Correspondencia en frecuencia de la relación doble escala.



Con los conceptos mostrados hasta el momento se analiza la función Shannon, $\phi_s(t)$, donde la secuencia doble escala p_k esta dada por su serie de Fourier $P(e^{-j\omega/2})$ que satisface a (2.27) :

$$p_{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{para } k = 0 \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{2}{k\pi} & \text{para } k \text{ impares} \\ 0 & \text{otrovalor} \end{cases} \quad (2.29)$$

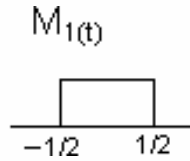
Ahora se probará la ortonormalidad de la función Shannon aplicando la condición de ortonormalidad, ecuación (2.20), y la identidad de *Parseval*.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \phi_s(t-k) \overline{\phi_s(t-l)} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}_s(w)|^2 e^{-j(k-l)w} dw \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-j(k-l)w} dw = \delta_{k,l} \end{aligned} \quad (2.30)$$

De donde se concluye que la función Shannon es ortonormal y cumple con la condición de estabilidad de Riesz. Además, ya que la función Shannon cumple (2.23), se dice que esta función es una función de escala, como indica la definición. Finalmente se tiene el inconveniente que la función Shannon presenta buena localización en frecuencia pero no en tiempo.

Debido a la mala localización en tiempo se intenta el análisis que se aplicó a la función Shannon en sentido contrario, es decir, con una buena localización en tiempo pero pobre en frecuencia, para lo cual se define la ventana cuadrada en tiempo $M_l(t)$ mediante la Figura 4.

Figura 4. Función cuadrada en tiempo $M_1(t)$.

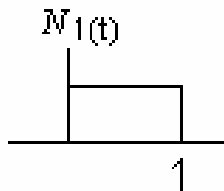


Esta función genera una mala representación de la señal $f(t)$ en comparación con la ventana Shannon, ya que $M_1(t)$ realiza una interpolación constante. El mérito de la representación por medio de esta función está en la facilidad de cómputo y de implementación. Pero otro gran inconveniente presente, es que no cumple con la relación doble escala ya que los desplazamientos de la función $M_1(t)$ rápida para obtener la función lenta $M_1(t/2)$ son de $k=1/2$, cuando k debe ser de valor entero como indica (2.23).

Para hacer que esta función, *ventana en tiempo*, cumpla con la relación doble escala se aplica a su definición un desplazamiento de $1/2$ a la derecha generando una nueva función $N_1(t)$.

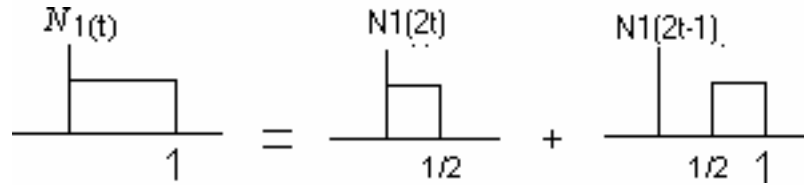
$$N_1(t) = M_1\left(t - \frac{1}{2}\right) \quad (2.31)$$

Figura 5. función $N_1(t)$.



Conocida como *función Haar*, la cual cumple con la relación doble escala como muestra la figura 6. En adelante esta función toma el nombre de *B-Cardinal Spline de primer orden*.

Figura 6. Representación gráfica de la *relación doble escala* para la *función Haar*.



2.3 ANÁLISIS MULTIREVOLUCIÓN

Se ha visto que una función puede ser concebida como una composición de funciones de transiciones lentas o aproximación de la señal y otro con transiciones fuertes o detalles. Las diferencias entre estos esta determinada por la **resolución** – la escala bajo la cual los detalles pueden ser discernidos – (el termino 2^j en la ecuación (1.1) rescrita aquí por conveniencia).

$$\begin{aligned}
 V_j &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} C_{j,k} \phi(2^j t - k) = \langle \phi(2^j t - k) \mid k \in \mathbb{Z} \rangle \quad j \in \mathbb{Z} \quad \text{con base } \phi(2^j t) \\
 W_j &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi(2^j t - k) = \langle \psi(2^j t - k) \mid k \in \mathbb{Z} \rangle \quad j \in \mathbb{Z} \quad \text{con base } \psi(2^j t)
 \end{aligned}
 \tag{2.32}$$

A una resolución dada, una señal es aproximada ignorando todas las fluctuaciones a mayores resoluciones. Ahora si la resolución tiende a infinito, entonces la señal representada es exactamente la señal original.

Sea $f(t)$ una función $L^2_{(R)}$, entonces a la resolución $j = n$ en el espacio generado por $\langle \phi(2^n t - k) \rangle$, V_n , su representación es $f_n(t)$. Para modelar esta misma señal en el nivel de resolución mayor $j = n+1$, en el correspondiente espacio generado por $\langle \phi(2^{n+1} t - k) \rangle$, V_{n+1} , se pueden tomar dos caminos:

- a. Partir de la señal original y modelarla directamente en el espacio V_{n+1} .

En general la aproximación de $f_j(t)$ en el nivel de resolución mayor V_{n+1} es:

$$f_{j+1}(t) = f_j(t) + d_j(t) \quad (2.33)$$

Que muestra la forma de descomponer la señal en detalles y aproximaciones. En términos del espacio de funciones definido por (2.32) se tiene.

$$L^2_{(R)} = V_j + W_k \quad (2.34)$$

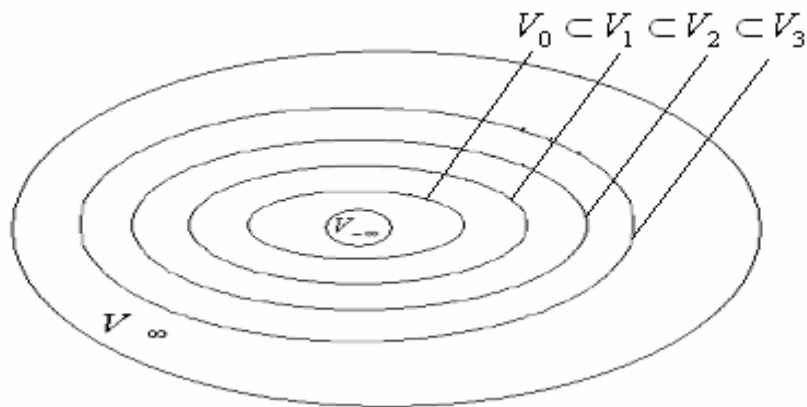
- b. Partir del modelo V_n y añadir los detalles W_j faltantes en este nivel, los cuales están presentes en el nivel mayor $n+1$, V_{n+1} .

El segundo camino del modelado, partir de un nivel inferior a uno superior, muestra el concepto de anidamiento, es decir, el espacio V_j esta contenido en todos los espacios mayores. Lo cual podemos representar mediante:

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \dots \subset V_j \quad (2.35)$$

Conocido como *espacios anidados*, ya que uno esta contenido en otro como muestra la figura 7.

Figura 7. Representación de los espacios anidados V .



Ahora, si la resolución tiende a infinito ($V_{j \rightarrow \infty}$) se pueden representar todas las señales de energía finita.

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \dots \subset V_j \dots \subset L^2_{(R)} \quad (2.36)$$

En este punto, con el concepto de anidamiento, las características de los espacios V_j , el término de escala 2^j , los desplazamientos k y con la función $\phi_{(t)}$ se define el *análisis multiresolución* en 5 requerimientos:

1. El análisis multiresolución requiere que el espacio V_j este contenido en todos los espacios mayores.

$$V_j \subset V_{j+1} \quad \forall j \quad (2.37)$$

Donde la diferencia entre estos dos espacios son los detalles d_j y están dados por la diferencia entre las dos aproximaciones f .

$$d_j(t) = f_{j+1}(t) - f_j(t) \quad (2.38)$$

o lo que es lo mismo $f_{j+1}(t) = f_j(t) + d_j(t)$

Es decir los detalles en el nivel j , $d_j(t)$, no pertenecen ni están contenidos en la aproximación del mismo nivel $f_j(t)$.

Con esto y con espacios definidos se tiene que V_{j+1} se puede descomponer en

$$V_{j+1} = V_j \oplus W_j \quad (2.39)$$

Donde \oplus indica suma ortogonal; sin embargo en general no se requiere que W_n sea ortogonal a V_n como se indica en el capítulo cinco, pero se toma en primera instancia esta idea para facilitar el contenido. Entonces, ya que V_n es ortogonal a W_n denotado por

$$V_n \perp W_k \quad (2.40)$$

aplicado a V_j en (2.39), V_j se amplía a:

$$V_j = V_{j-1} \oplus W_{j-1} \quad (2.41)$$

de donde se observa que los espacios de detalles W_j son mutuamente ortogonales y por tanto,

$$W_n \perp W_k \quad n \neq k \quad (2.42)$$

2. Todas las funciones de cuadrado integrable están incluidas en la más alta resolución y sólo el nivel cero está en la más baja.

3. Invarianza a la dilatación:

Todos los espacios V_j son versiones escaladas del espacio V_0 . Si $f(t)$ está completamente en V_j , (es decir sus aproximaciones y detalles se representan en V_j), entonces $f(2t)$, obtenida por compresión de $f(t)$, está completamente contenida en V_{j+1} .

4. Invarianza al corrimiento:

Si $f(2^j t)$ pertenece a V_j entonces traslaciones enteras de esta $f(2^j t - k)$ también pertenecen al espacio V_j .

5. Existe una función $\phi(t)$ llamada función de escala que por traslaciones enteras forma una base ortogonal V_0 así:

$$V_0 = \langle \phi(t - k) \rangle \quad (2.43)$$

y en general forma la base ortogonal V_j ,

$$V_j = \langle \phi(2^j t - k) \rangle \quad (2.44)$$

En resumen se ha hablado hasta este punto de espacios de aproximación, espacios de detalle, de funciones $\phi(t)$ (funciones de escala) y funciones $\psi(t)$ (funciones Wavelet). En adelante se estudia cómo se relacionan estos conceptos y las características que presentan en un análisis multirresolución.

La función de escala $\phi(t)$ genera bases de funciones ortogonales para cada espacio V_j mediante escalamientos y traslaciones $(\phi(2^j t - k))$ y en general forma una base *ortonormal* si se normaliza tal función, es decir, se incluye un término que mantenga la energía de la función para los diferentes escalamientos, este término corresponde al factor $2^{j/2}$. Por tanto $\phi(t)$ genera bases ortonormales mediante $\phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$.

Como $V_0 \subset V_1$, cualquier función en V_0 se puede expresar en términos de V_1 . Para la función de escalado en particular se tiene,

$$\phi(t) = \sum_k P_k \phi(2t - k) \quad (2.45)$$

Conocida como ecuación doble-escala y a los p_k secuencia doble escala.

Los espacios de detalle tienen también sus bases ortogonales correspondientes generadas por $\psi(t)$ (y bases *ortonormales* a partir de $\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$), conocida como Wavelet madre. Ahora, como $\psi(t)$ esta en W_0 y $W_0 \subset V_1$, como se observa de las ecuaciones (2.39) y (2.40). $\psi(t)$ puede ser escrita como una superposición de la función base de V_1 , es decir ,

$$\psi(t) = \sum_k q_k \phi(2t - k) \quad (2.46)$$

Donde se puede plantear que las funciones Wavelet también constituyen una clase de funciones base para $L^2_{(R)}$, tema que se amplía en el capítulo siguiente.

En resumen el presente numeral ha planteado los conceptos y definiciones de la tabla 1.

Tabla 1. Propiedades de los espacios de aproximación y espacios de detalle.

Espacios de aproximación $(V)_j$	Espacios de detalle $(W)_j$
<ul style="list-style-type: none"> • $V_j \subset V_{j+1}$ • función base $\phi(t)$ • Ecuación doble escala para $\phi(t)$ $\phi(t) = \sum_k P_k \phi(2t - k)$ <ul style="list-style-type: none"> • Base ortogonal de V_j mediante el conjunto de corrimientos y traslaciones de: $\phi_{j,k} = 2^{j/2} \phi(2^j t - k)$	<ul style="list-style-type: none"> • $W_j \perp W_k$ • función base $\psi(t)$ • Ecuación Wavelet $\psi(t) = \sum_k q_k \phi(2t - k)$ <ul style="list-style-type: none"> • Base ortonormal de W_j mediante el conjunto de corrimientos y traslaciones de: $\psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k)$

En este punto ya definidas las bases de los espacios se puede representar una señal $f(t)$ en el espacio V_j , lo cual se realiza por medio de combinaciones lineales de la base V_j . Para $j=n$ se tiene,

$$f_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n,k} \phi(2^n t - k) \quad (2.47)$$

Ahora bien en el espacio $j=n+1$

$$f_{n+1}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n+1,k} \phi(2^{n+1} t - k) \quad (2.48)$$

que por medio (2.38) se explica que la representación f_{n+1} de V_{n+1} contiene detalles que no están presentes en f_n de V_n además, como $V_n \subset V_{n+1}$ toda función V_n tendrá una representación en V_{n+1} . En general $f_n(t)$ es representable en el espacio V_{n+1} de la siguiente manera,

$$f_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n+1,k} \phi(2^{n+1}t - k) \quad (2.49)$$

Es decir, una función de un espacio menor es representable completamente en un espacio mayor; la interpretación contraria no es del todo cierta (todo modelado en un espacio mayor es representable en un espacio menor), y solo se cumple esta sentencia cuando la señal en el espacio mayor no presenta mayores detalles que los posibles presentes en el espacio menor.

En el espacio de funciones W_n (espacio de detalle) sea $g_n(t)$ los detalles representables en este espacio, Entonces como en (2.39)

el modelo de $f(t)$ es :

$$f_{n+1}(t) = f_n(t) + g_n(t) \quad (2.50)$$

Donde

$$f_{n+1}(t) = f_n(t) \quad (2.51)$$

Si y solo si $g_n(t)$ es cero. Es decir si los detalles que diferencian a $f_{n+1}(t)$, y , $f_n(t)$ son cero o mejor, no existen. En conclusión, un modelado en un espacio menor que es llevado a un espacio mayor presenta la misma aproximación aun cuando la resolución de este nuevo espacio sea mayor.

Se puede ver que en cada espacio de funciones el conjunto de coeficientes C_n y C_{n+1} en (2.47) y (2.48) modelan la misma función $f_n(t)$ en los espacios V_n y V_{n+1} respectivamente. Además los espacios V_n y V_{n+1} se relacionan por medio de sus bases, mediante la relación doble escala así:

$$\phi_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} P_k \phi(2^{n+1}t - k) \quad (2.52)$$

estas relaciones que presentan las bases, los espacios y sus representaciones dan lugar al siguiente teorema.

Teorema 1:

Sea $\phi(t)$ una función de escalamiento con secuencia doble escala P_n como en (2.52)

y con $f_n(t) \in V_n$ dada en (2.47), entonces $f_n(t) \in V_{n+1}$ y la secuencia de coeficientes, C_n y C_{n+1} de la misma señal,

$$f_n(t) = \sum_k c_{n,k} \phi(2^n t - k) = \sum_k c_{n+1,k} \phi(2^{n+1} t - k) \quad (2.53)$$

en V_n y V_{n+1} , respectivamente satisface,

$$c_{n+1,k} = \sum_l P_{k-2l} c_{n,l} \quad (2.54)$$

De (2.54) se observa que los coeficientes P_k son los encargados de llevar la representación de un nivel de resolución a otro. El cálculo de los coeficientes de representación de la señal de orden mayor a partir de los coeficientes de orden menor se realiza eficientemente si la secuencia P_k es finita.

Las funciones de escala hasta el momento estudiadas, $\phi_s(t)$ y $N_1(t)$, cumplen con las condiciones para generar un análisis Multiresolución, sin embargo no presentan las condiciones necesarias para la localización tiempo-frecuencia ya que

$$\Delta_{\phi_s} \Delta_{\hat{\phi}_s} = \Delta_{N_1} \Delta_{\hat{N}_1} = \infty \quad (2.55)$$

Por otro lado la función Gaussiana presenta $\Delta_{\hat{h}_\alpha} \Delta_{\tilde{h}_\alpha} = \frac{1}{2}$, cumpliendo las condiciones para localización tiempo-frecuencia pero no para análisis multiresolución; debido a que esta función no cumple la relación doble escala y por tanto tampoco con la propiedad de anidamiento.

Para lograr simultáneamente Análisis Multirresolución y localización tiempo–frecuencia Se necesita un tipo de funciones con propiedades intermedias que lo permitan. Se trata en la siguiente sección de hallar una función con tales características (el comportamiento excelente como ventana tiempo-frecuencia de la gaussiana y el análisis multirresolución que generan la función Shannon y Haar), para ello se tiene en cuenta el hecho que si una función se convoluciona iterativa mente con ella misma el resultado tiende hacia la función de Gauss.

2.4 SPLINES CARDINALES

A lo largo de las anteriores secciones se ha mostrado en qué consiste la localización tiempo frecuencia y el análisis multirresolución. En la localización tiempo-frecuencia es importante resaltar que la principal propiedad que debe cumplir la función ventana es el principio de incertidumbre. Es decir, la función ventana debe acercarse lo más posible a la frontera de $1/2 \left(\Delta h \Delta \hat{h} \geq \frac{1}{2} \right)$. Entre tanto, en el AMR habla de la función de escala la cual debe cumplir con la relación doble escala.

Ya que el objetivo es generar localización tiempo-frecuencia y análisis multirresolución, la tarea consiste en encontrar una función o un grupo de funciones que lo permitan. Para lo cual se generaliza la B-spline cardinal de primer orden $N_1(t)$, ya que satisface la relación doble escala, generando una familia de funciones con características similares.

Partiendo de la función doble-escala para $N_1(t)$,

$$N_1(t) = N_1(2t) + N_1(2t-1) \quad (2.56)$$

y tomando su transformada de Fourier ,

$$N_1(w) = N_1\left(\frac{w}{2}\right)\frac{1}{2} + N_1\left(\frac{w}{2}\right)\frac{\ell^{-j\frac{w}{2}}}{2}$$

$$N_1(w) = N_1\left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{1 + \ell^{-j\frac{w}{2}}}{2}\right) \quad (2.57)$$

Con $Z = \ell^{-j\frac{w}{2}}$

elevando a la m-ésima potencia se introduce la *B-spline de N_{esimo} orden*,

$$N_m(w) = \widehat{N}_m\left(\frac{w}{2}\right)\left(\frac{1 + \ell^{-j\frac{w}{2}}}{2}\right)^m \quad (2.58)$$

Como una multiplicación en frecuencia ocasiona una convolución en tiempo entonces la B-spline cardinal de m_{esimo} orden, $N^m(t)$, para $m \geq 2$ se define como la convolución recursiva de $N_1(t)$, es decir:

$$N_m(t) = (N_{m-1} * N_1) = \int_{-\infty}^{\infty} N_{m-1}(t-x)N_1(x)dx$$

$$= \int_0^1 N_{m-1}(t-x)dx \quad (2.59)$$

Y se obtiene

$$\widehat{N}_m(\omega) = \widehat{N}_{m-1}(\omega) * \widehat{N}_1(\omega) = \widehat{N}_{m-2}(\omega) * \widehat{N}_1^2(\omega)$$

$$= \widehat{N}_1^m(\omega) \quad (2.60)$$

que en el dominio del tiempo conserva la relación doble escala dada por,

$$N_m(t) = \sum_{k=0}^m 2^{-m+1} \binom{m}{k} N_m(2t-k) \quad (2.61)$$

por tanto, la B-spline cardinal de m_{esimo} orden es una función de escalado.

Desarrollando $\hat{N}_1(\omega)$

$$\hat{N}_1(\omega) = \int_0^1 e^{-j\omega t} dt = \frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega} \quad (2.62)$$

Aplicando (2.61)

$$\hat{N}_m(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega} \right)^m \quad (2.63)$$

se obtiene

$$|\hat{N}_m(\omega)| = \left| \frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}} \right|^m \quad (2.64)$$

Para la función $\left(\frac{\sin(\frac{\omega}{2})}{\frac{\omega}{2}} \right)^m$ el lóbulo principal es localizado en el intervalo $|\omega| \leq \pi$, donde

el máximo de la función es uno, mientras los lóbulos vecinos están en $\pi < |\omega| \leq 2\pi$.

A continuación se lista las propiedades de $N_m(t)$

Teorema 2: Para cada $m \geq 2$ la B-spline cardinal de m_{esimo} orden $N_m(t)$, como se define en (2.59), tiene las siguientes propiedades:

- i) La spline cardinal de m_{esimo} orden $N_m(t)$, pertenece a las funciones derivables continuas $m-2$ veces, $N_m(t) \in C^{m-2}$

ii) La spline cardinal de m -ésimo orden, $N_m(t)$, en el intervalo de duración 1,

$[k, k+1]$ pertenece a los polinomios de grado $m-1$

$$N_m|_{[k, k+1]} \in \Pi_{m-1} \quad k = 0, \pm 1, \dots$$

iii) El soporte, intervalo donde está definido la spline cardinal de orden m es el intervalo $[0, m]$ y se denota por

$$\text{Supp } N_m(t) = [0, m]$$

iv) En su respectivo soporte el spline cardinal es positivo,

$$N_m(t) > 0 \quad \text{para } 0 < t < m$$

v) La sumatoria de las muestras en los puntos enteros de la spline es uno

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} N_m(t-k) = 1 \quad \text{para todo } t$$

vi) El área bajo la curva de la spline es 1

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_m(x) dx = 1$$

vii) $N'_m(t) = N_{m-1}(t) - N_{m-1}(t-1)$ (donde $N'_m(t)$ denota derivada).

viii) $N_m(t)$ puede ser computada de $N_{m-1}(t)$ usando la identidad

$$N_m(t) = \frac{t}{m-1} N_{m-1}(t) - \frac{m-t}{m-1} N_{m-1}(t-1)$$

ix) $N_m(t)$ es simétrico relativo a su centro

$$t_m^* = \frac{m}{2}$$

x) $N_m(t)$ es una función de escalamiento, con relación doble escala dada por (2.61) que genera un AMR V_n^m de L^2

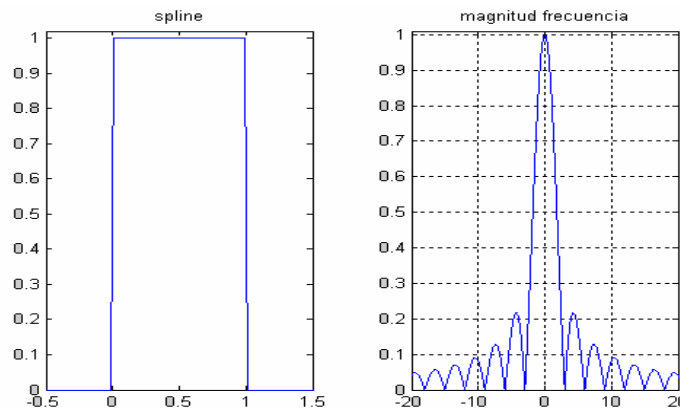
$$V_n^m = \langle N_m(2^n t - k) : k \in Z \rangle$$

A continuación se aplica la definición y el teorema para la construcción de las B-Spline cardinales de orden 1, 2 y 3:

La cardinal de primer orden ya definida es,

$$N_1(t) = \begin{cases} 1 & 0 \leq t \leq 1 \\ 0 & \text{otro} \end{cases}$$

Figura 8. Spline de primer orden.



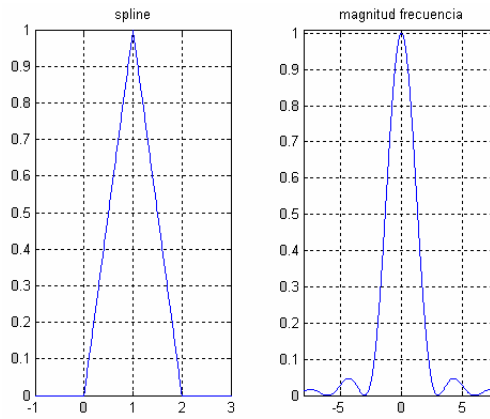
Para $N_2(t)$ se puede usar el numeral viii del teorema,

$$N_2(t) = \frac{t}{2-1} N_{2-1}(t) - \frac{2-t}{2-1} N_{2-1}(t-1)$$

$$= tN_1(t) - (2-t)N_1(t-1) \quad N_2(t) = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t & 0 \leq t < 1 \\ 2-t & 1 \leq t \leq 2 \\ 0 & t > 2 \end{cases}$$

O mediante la definición (2.59) $N_2(t) = (N_1 * N_1)(t)$

Figura 9. Spline de segundo orden.



Que lleva al mismo resultado. Los coeficientes de la secuencia doble escala se determinan por la ecuación (2.61) y son:

$$P_k = \left\{ \frac{1}{2}, +1, +\frac{1}{2} \right\}$$

Para $m=3$ $N_3(t)$

$$N_3(t) = \frac{t}{2} N_2(t) - \frac{(3-t)}{2} N_2(t-1)$$

Para el intervalo $0 < t < 1$

$$N_2(t-1) = 0 \quad N_2(t) = t$$

$$N_3(t) = \frac{t^2}{2}$$

Para $1 < t < 2$

$$\begin{aligned} N_3(t) &= \frac{t}{2}(2-t) + \frac{(3-t)}{2}(t-1) \\ &= \frac{1}{2}[6t - 2t^2 - 3] \end{aligned}$$

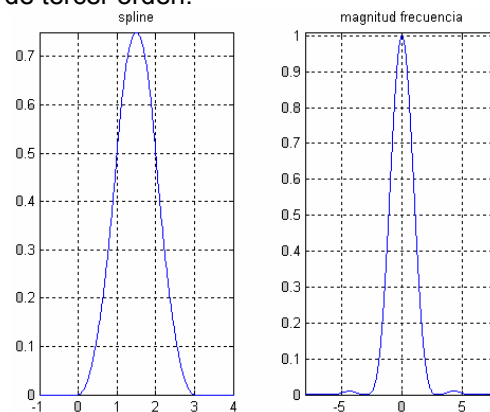
Para $2 < t < 3$

$$\begin{aligned} N_3(t) &= \frac{t}{2}N_2(t) - \frac{(3-t)}{2}N_2(2-(t-1)) \\ N_3(t) &= \frac{(3-t)^2}{2} \end{aligned}$$

Cuyos coeficientes P_k se obtienen mediante la ecuación (2.61).

$$P_k = \left\{ \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{4} \right\}$$

Figura 10. Spline de tercer orden.



3. WAVELETS ORTONORMALES

En el capítulo uno, FUNDAMENTOS DE WAVELETS y LOCALIZACION TIEMPO FRECUENCIA, se muestra que la transformada corta de Fourier (STFT por sus siglas en inglés) usa un filtro pasa-bajos con ancho de banda constante para realizar análisis tiempo-frecuencia; Sin embargo, la ventana no es adecuada en el análisis de frecuencias extremas. Para solucionar este problema, la transformada continua Wavelet (CWT) hace uso de un filtro pasa-banda e incluye un parámetro de escalamiento, el cual ajusta el ancho de la nueva ventana a lo largo del análisis.

En el capítulo dos se modela el análisis multiresolución a partir del filtro pasa bajos y se presentan generalidades acerca de cómo el filtro pasa banda forma un espacio complementario. Esta noción de complementariedad es ampliada en el presente numeral para espacios ortogonales, junto con la presentación de Wavelets ortonormales bien conocidas basadas en análisis multiresolución y estructuras ortogonales.

Para el análisis de señales, la función wavelet $\psi(t)$ es considerada una ventana pasa-bajos, que elimina al menos la frecuencia cero. Así se optimiza el análisis de frecuencia de detalles de la señal.

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = \hat{\psi}(0) = 0 \quad (3.1)$$

Si $\psi(t)$ tiene momentos desvanecientes de alto orden, como se indica en (3.2), será una función uniforme que quitará las frecuencias bajas permitiendo que la IWT revele de mejor forma los detalles de la señal sobre cada octava banda de frecuencia, considerando diferentes escalas a (ver la definición 3).

$$\int_{-\infty}^{\infty} t^k \psi(t) dt = 0 \quad k = 0, \dots, m-1 \quad (3.2)$$

La condición (3.2) es equivalente a que $\psi(t)$ tiene un máximo de $(m-1)$ derivadas iguales a cero, es decir, tiene respuesta máximamente plana para frecuencias cercanas a cero.

$$\left. \frac{d^k \phi(t)}{dt} \right|_{\omega=0} = 0 \quad k = 0, \dots, m-1 \quad (3.3)$$

En la construcción de las Wavelets se parte del hecho que $\phi(t)$ genera un análisis multirresolución como se describe en el capítulo 2. Así $\psi(t)$ se construye para ser ortogonal a todas las traslaciones enteras de $\phi(t)$, entonces, en cada n ésima octava banda de frecuencia la Wavelet $\psi(2^n t - k)$ es ortogonal a V_n . Es decir, se construye $\psi(t)$ ortogonal al espacio V_n .

3.1 ESPACIOS WAVELET ORTOGONALES

Como se analiza en el capítulo 2. $\phi(t)$ genera un AMR en L^2 (como indica (2.36) del capítulo 2 y repetida por conveniencia), tal que

$$0 \leftarrow \dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \dots \subset V_j \dots \rightarrow L^2_{(R)} \quad (3.4)$$

donde para cada entero n , V_{n-1} es un sub-espacio propio de V_n . Ahora, existe W_{n-1} y es un sub-espacio ortogonal no trivial complementario a V_{n-1} tal que $W_{n-1} \subset V_n$ y

$$V_n = V_{n-1} + W_{n-1}, \quad W_{n-1} \perp V_{n-1} \quad (3.5)$$

o por notación del capítulo anterior

$$V_n = V_{n-1} \oplus W_{n-1} \quad (3.6)$$

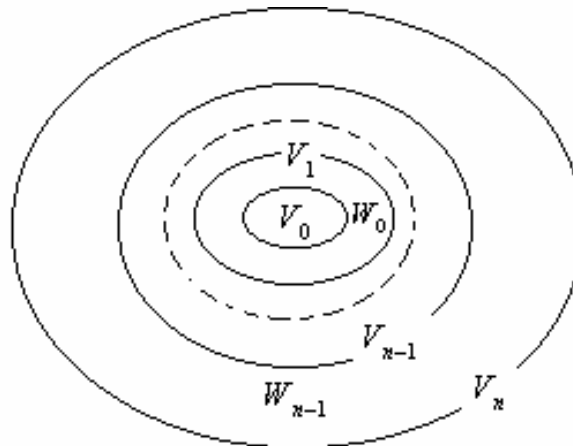
nuevamente se observa que $W_n \perp W_k$ para $n \neq k$.

Por aplicación repetida de (3.6) para toda $n \in \mathbb{Z}$ y $M < n$,

$$\begin{aligned} V_n &= V_{n-1} \oplus W_{n-1} = (V_{n-2} \oplus W_{n-2}) \oplus W_{n-1} \\ &= \dots = V_{n-M} \oplus (W_{n-M} \oplus \dots \oplus W_{n-1}) \quad n \in \mathbb{Z} \quad M \end{aligned} \quad (3.7)$$

que gráficamente se puede interpretar como en la Figura 11.

Figura 11. Interpretación grafica de la descomposición ortogonal (3.7)



P. FAUDEZ y FUENTES Álvaro. Procesamiento Digital de Señales Acusticas.

Teniendo en cuenta (3.4) y (3.7), el espacio de señales de energía finita L^2 puede ser descompuesto como una suma ortogonal de sub-espacios W_n , es decir,

$$L^2 = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} W_n, \quad (3.8)$$

esta sumatoria es llamada descomposición wavelet en L^2 ; sin embargo se prefiere la descomposición finita en (3.7), la cual es llamada descomposición wavelet en n-octavas junto con la componente gruesa (DC), V_{n-M} .

Ahora, si la función $\psi(t) \in L^2$, es un pasa bandas con decaimiento rápido al infinito, genera los diferentes espacios octales así:

$$W_n = \langle \psi(2^n t - k) | k \in \mathbb{Z} \rangle \quad n \in \mathbb{Z} \quad (3.9)$$

En vista que $W_n \perp V_n$, cada octava de la señal representada en W_n revela los detalles de la señal en la correspondiente banda de frecuencia.

Para generar el un AMR V_n de L^2 la función de escalamiento $\phi(t)$ debe ser estable, es decir debe satisfacer la condición de Riesz,

$$A \| \{c_k\} \|^2 \leq \left\| \sum_k c_k \phi(t - ka) \right\|^2 \leq B \| \{c_k\} \|^2 \quad \text{para todo } c_k \in l^2 \quad (3.10)$$

donde $0 < A \leq B < \infty$. (ver definición 4). Esta condición puede ser llevada a su equivalente en frecuencia aplicando la identidad de Parseval, teniendo en cuenta que el termino del centro de la desigualdad anterior es una convolución de una secuencia discreta C_k con la función continua $\phi(t)$. Lo que conduce a que el espectro de la función $\phi(t)$ es periódico con periodo 2π . Por tanto la condición de estabilidad puede ser rescrita:

$$A \| C_{(\omega)} \|_{l_2}^2 \leq \left\| \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |C_{(\omega)}|^2 \sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 d\omega \right\|^2 \leq B \| C_{(\omega)} \|^2 \quad (3.11)$$

de donde se concluye que para generar un AMR de señales de energía finita se debe cumplir:

$$A \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 \leq B \quad (3.12)$$

Se utilizan (3.10) y (3.12) indistintamente para ortonormalizar una base Riesz. En particular, se aplica (3.12) para realizar este proceso, para lo cual se requiere el siguiente criterio de ortonormalidad.

TEOREMA 3. Una función $\eta(t) \in L^2$ es ortonormal en el sentido que,

$$\langle \eta(t-k), \eta(t-l) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t-k) \overline{\eta(t-l)} dt = \delta_{k,l} \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad (3.13)$$

si y sólo si su transformada $\hat{\eta}(\omega)$ satisface,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{\eta}(\omega + 2\pi n)|^2 = 1 \quad (3.14)$$

Este teorema se puede comprobar resolviendo la integral (3.13) por medio de la identidad de parseval,

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \eta(t-k) \overline{\eta(t-l)} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{\eta}(\omega)|^2 e^{-j(k-l)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi n}^{2\pi(n+1)} |\hat{\eta}(\omega)|^2 e^{-j(k-l)\omega} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{\eta}(\omega + 2\pi n)|^2 \right\} e^{-j(k-l)\omega} d\omega \end{aligned} \quad (3.15)$$

que muestra que (3.13) y (3.14) son equivalentes ya que el término dentro de las llaves debe ser uno.

Ahora si $\phi(t)$ genera una base Riesz es decir, si esta función satisface la condición (3.14), el *proceso de ortonormalización* en frecuencia se realiza como:

$$\hat{\phi}^\perp(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 \right)^{\frac{1}{2}}} \quad (3.16)$$

Por el teorema 1 se ve que las funciones de la familia $\{\phi^\perp(t-k) : k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ son ortonormales. Ahora bien, ya que $\phi(t)$ genera un AMR, $\phi^\perp(t)$ genera el mismo AMR; tomando como base su secuencia doble escala p_k ; esto es $\phi^\perp(t)$ satisface la identidad

$$\phi^\perp(t) = \sum_k p_k \phi^\perp(2t-k) \quad (3.17)$$

Estas funciones de escala ortonormalizadas $\phi^\perp(t)$ generaran un espacio ortogonal complementario W_n , en el sentido de (3.5), el cual tendrá como funciones base a $\psi(t)$.

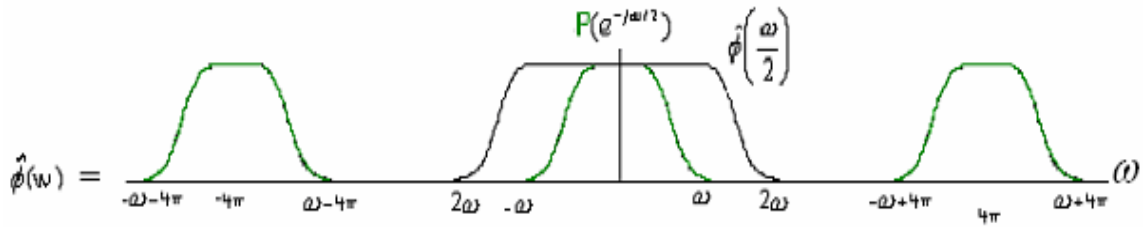
$$\psi(t) = \sum_k (-1)^k p_{1-k} \phi^\perp(2t-k) \quad (3.18)$$

Considerando únicamente valores reales para la función de escala $\phi(t)$, $\phi^\perp(t)$ es también de valor real, de aquí que los coeficientes p_k serán constantes reales. Si se compara la ecuación que genera a $\psi(t)$ (3.18) con la que genera a $\phi^\perp(t)$ (3.17) se puede ver que la diferencia se presenta en la relación doble escala de cada una de ellas. Donde la secuencia doble escala para $\phi^\perp(t)$ es p_k y para la función wavelet $\psi(t)$ es $(-1)^k p_{1-k}$, Lo cual produce un desplazamiento de π radianes en el espectro. Retomando del capítulo anterior la relación doble escala de $\phi(t)$ en frecuencia

$$\hat{\phi}(\omega) = P(e^{-j\omega/2}) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.19)$$

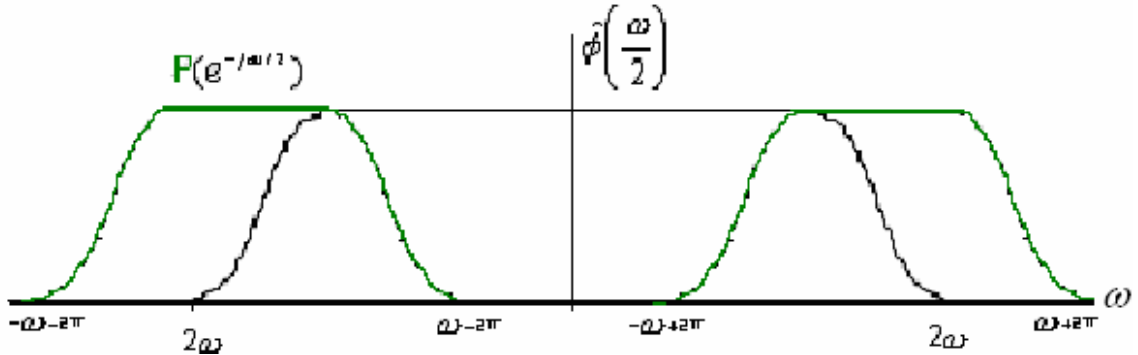
y mediante la interpretación grafica de la Figura 12. se aprecia que la secuencia p_k es un filtro pasa-bajas.

Figura 12. Interpretación grafica de la ecuación (3.19).



Ahora, teniendo en cuenta la relación que existe entre las secuencias doble escala de (3.17) y (3.18), el espectro de la secuencia doble escala que genera la función Wavelet es el espectro $P(e^{-j\omega/2})$ corrido 2π .

Figura 13. Interpretación grafica de la ecuación (3.18).



Se observa en la Figura 13. que la wavelet $\psi(t)$ es un filtro complementario ortogonal a las funciones de escala $\phi(t)$. Para comprobar esta ortogonalidad se verifica mediante el producto interno de estas funciones, denotado por $\langle \cdot, \cdot \rangle$, para cada $l \in Z$,

$$\begin{aligned}
\langle \phi(t-l), \psi(t) \rangle &= \sum_{k,n} (-1)^n p_k p_{1-n} \langle \phi(2t-2l-k), \phi^\perp(2t-n) \rangle \\
&= \frac{1}{2} \sum_{k,n} (-1)^n p_k p_{1-n} \delta_{2l+k,n} \\
&= \frac{1}{2} \sum_k (-1)^{2l+k} p_k p_{1-2l-k} \\
&= \frac{1}{2} \sum_k (-1)^{2l+k-1} p_{1-2l-k} p_k
\end{aligned} \tag{3.20}$$

Donde, si se desarrolla la sumatoria se puede ver que los diferentes productos se anulan entre si, dando cero el producto punto, luego $\psi(t)$ es ortogonal a cualquier traslación de $\phi(t)$. Dado que $\psi(t)$ genera todo el espacio W_0 se puede escribir la *descomposición ortogonal* como $V_1 = V_0 \oplus W_0$,

$$\phi(2t-l) = \sum_k \left\{ \frac{1}{2} p_{l-2k} \phi(t-k) + \frac{1}{2} (-1)^l p_{2k-l+1} \psi(t-k) \right\} \tag{3.21}$$

que se puede generalizar para $V_n = V_{n-1} \oplus W_{n-1}$.

Las propiedades presentadas hasta el momento para $\psi(t)$ Se pueden resumir en el siguiente teorema.

TEOREMA 4: Si $\phi(t)$ es una función de escala que genera un MRA V_n de L^2 , y con $\phi^\perp(t)$ su ortonormalización como se define en (3.16). También con p_k la secuencia doble escala de $\phi^\perp(t)$ y $\psi(t)$ como se define en (3.18) usando $\phi^\perp(t)$ y p_k . Entonces $\Psi(t)$ genera el sub-espacio complementario ortogonal W_n relativo al AMR V_n en el sentido de (3.6). Por tanto la familia

$$\psi_{j,k}(t) = 2^{j/2} \psi(2^j t - k) \quad j, k \in \mathbb{Z} \tag{3.22}$$

es una base ortonormal del espacio de energía finita L^2 .

El factor $2^{j/2}$ es la normalización de la familia respectiva, que asegura que la norma de la función $\psi(t)$ es independiente del nivel de descomposición en que se encuentre,

$$\|\psi_{j,k}\| = \|\psi\| \quad \text{para toda } j,k \in Z \quad (3.23)$$

De aquí que las funciones $\psi(t)$ se consideren ortonormales.

3.2 WAVELETS ORTONORMALES

Para enfatizar en la importancia del Teorema 4 se da la siguiente definición formal de *wavelets Ortonormales*.

DEFINICIÓN 7. Una función $\psi(t) \in L^2$ es llamada wavelet ortonormal si la colección de funciones $\psi_{j,k}(t)$ $j,k \in Z$ definida en (3.3) es una base ortonormal de L^2 .

A partir del Teorema 4 se pueden construir wavelets ortonormales, dada cualquier función de escalamiento que genere un AMR de L^2 .

3.2.1 Wavelet Haar

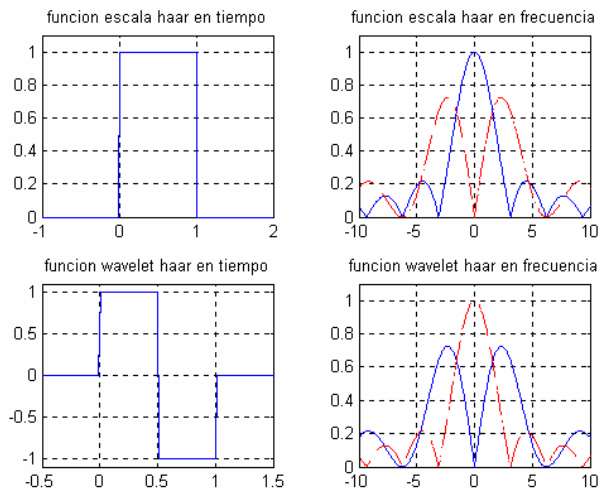
La función de escala ventana cuadrada en tiempo, se conoce como función Haar y es la B-Spline de orden 1 (soporte1), la cual es ortonormal en el sentido de la Definición 5 por tanto, aplicando el proceso de Ortonormalización (3.16) junto con el Teorema 3 se obtiene que $N_1^\perp(t) = N_1(t)$ y es claro que $N_1(t)$ satisface la relación doble escala $N_1(t) = N_1(2t) + N_1(2t-1)$ cuyos coeficientes p_k son:

$$p_0 = p_1 = 1 \quad \text{y} \quad p_k = 0 \quad \text{para } k \neq 0,1 \quad (3.24)$$

que aplicados a (3.18) se halla la *wavelet ortonormal Haar*, graficada en la Figura 14.

$$\psi_H(t) = N_1(2t) - N_1(2t-1) \quad (3.25)$$

Figura 14. Función de Escala Haar $N_1^\perp(t) = N_1(t)$ y Wavelet Haar $\psi_H(t)$ y sus características en frecuencia.



Finalmente se aplica la *Relación de Descomposición* (3.21) la cual es útil para “subir” de nivel, es decir pasar de un subespacio V_0 a un subespacio V_1 , se desarrolla como sigue,

Figura 15. Relación de descomposición para la función Haar.

$$N_1(2t) = \frac{1}{2}N_1(t) + \frac{1}{2}\psi_H(t) \quad \begin{array}{c} 1 \\ \text{---} \\ 0 \quad 1/2 \end{array} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{---} \\ 0 \quad 1 \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{---} \\ 0 \quad 1 \\ \text{---} \\ -1/2 \end{array} \rightarrow t$$

$$N_1(2t-1) = \frac{1}{2}N_1(t) - \frac{1}{2}\psi_H(t) \quad \begin{array}{c} \text{---} \\ 1/2 \quad 1 \end{array} = \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{---} \\ 0 \quad 1 \end{array} - \frac{1}{2} \begin{array}{c} \text{---} \\ 0 \quad 1 \\ \text{---} \\ -1/2 \end{array} \rightarrow t$$

3.2.2 Wavelet Shanon

La función de muestreo Shanon $\phi_s(t)$ definida en el capítulo dos es una función ortonormal. Por lo que al aplicar al proceso de ortonormalización (3.16) se llega a que $\phi_s^\perp(t) = \phi_s(t)$, por tanto la secuencia doble escala para generar la Wavelet $\psi_s(t)$ mediante

(3.18) es la misma secuencia definida en (2.29). Partiendo de la relación doble escala para $\phi_S(t)$,

$$\phi_{S(t)} = \phi_{S(2t)} + \sum (-1)^k \frac{2}{(2k+1)\pi} \phi_{S(2t-2k-1)} \quad (3.26)$$

aplicando (3.18) se tiene,

$$\psi_{S(t)} = -\phi_{S(2t-1)} + \sum_k (-1)^k \frac{2}{(2k+1)\pi} \phi_{S(2t-2k-2)} \quad (3.27)$$

despejando la sumatoria en (3.26)

$$\phi_S(t) - \phi_S(2t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{(2k+1)\pi} \phi_S(2t-2k-1) \quad (3.28)$$

reemplazando t por $t-1/2$,

$$\phi_S(t-1/2) - \phi_S(2t-1) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k \frac{2}{(2k+1)\pi} \phi_S(2t-2k-2) \quad (3.29)$$

y finalmente (3.29) en (3.27)

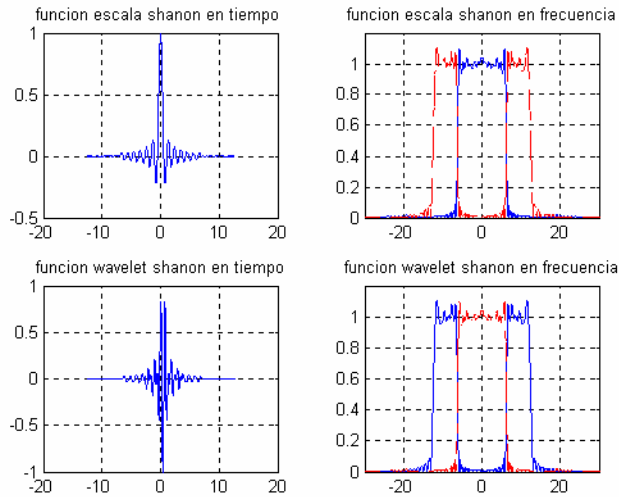
$$\psi_S(t) = \phi_S(t-1/2) - 2\phi_S(2t-1) \quad (3.30)$$

recordando la definición de la función Shannon, $\phi_{S(t)} = \frac{\sin(\pi t)}{\pi t}$, se obtiene que la Wavelet

Shannon, $\psi_S(t)$ esta dada por:

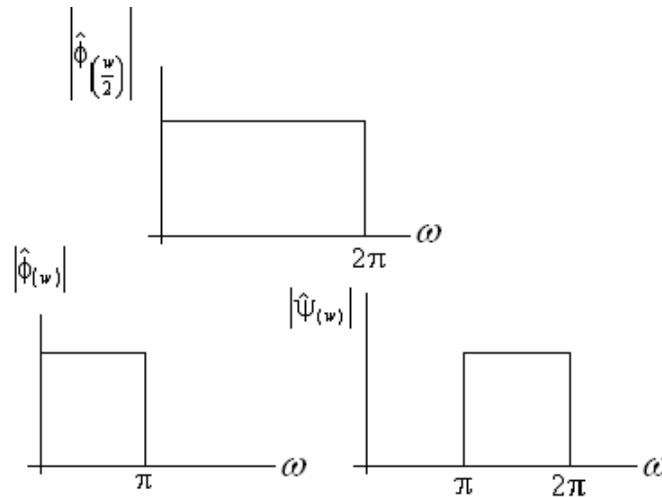
$$\psi_S(t) = \frac{\sin(2\pi t) - \cos(\pi t)}{\pi \left(t - \frac{1}{2}\right)} \quad (3.31)$$

Figura 16. Función de escala y Wavelet Shannon y sus características en frecuencia.



Analizando la respuesta en frecuencia de las funciones $\phi_s(2t)$, $\phi_s(t)$ y de $\psi_s(t)$, se puede apreciar el significado de multirresolución al ver como las dos últimas funciones ($\phi_s(t)$ y de $\psi_s(t)$) se complementan ortogonalmente para reunir las frecuencias que se encuentran en el siguiente nivel de resolución.

Figura 17. Características de los filtros $\phi_s(2t)$, $\phi_s(t)$ y de $\psi_s(t)$



CHARLES K. Chui. Wavelets: A mathematical Tool for Signal Processing. Philadelphia: SIAM, 1997. p.66.

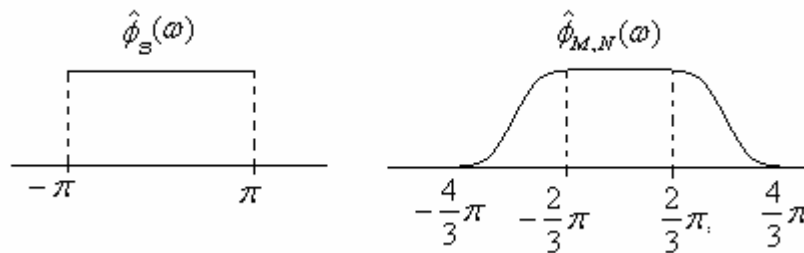
3.2.3 Wavelet Meyer

Ya que la transformada de Wavelet busca buena localización en tiempo y en frecuencia, es necesario que los valores RMS de ancho de banda y duración sean finitos. La función Shannon vista en el apartado anterior presenta saltos discontinuos a $\omega=\pm\pi$ razón por la cual su decaimiento hacia el infinito es lento. Es decir, debido a las discontinuidades la duración RMS es infinita. Para resolver este inconveniente, es necesario suavizar los saltos presentes permitiendo la existencia de una banda de transición en el filtro ideal de Shannon. Para este propósito se define la siguiente banda de transición,

$$\left[-\frac{4}{3}\pi, -\frac{2}{3}\pi\right] \cup \left[\frac{2}{3}\pi, \frac{4}{3}\pi\right] \quad (3.32)$$

Como resultado de aplicar la banda de transición al filtro pasa-bajos ideal se obtiene una función de escala ortonormal conocida como *Función de Escala de N_{esimo} orden Ortonormal de Meyer* ($\hat{\phi}_{M,N}(\omega)$). En la figura 18. se aprecian las diferencias entre la función Shannon y Meyer.

Figura 18. Comparación de $\hat{\phi}_S(\omega)$ con $\hat{\phi}_{M,N}(\omega)$.



CHARLES K. Chui. Wavelets: A mathematical Tool for Signal Processing. Philadelphia: SIAM, 1997. p.67.

El comportamiento al decaer de la función Meyer en la banda de transición depende del polinomio que se utilice para este proceso. Por tanto se define la *función de suavizado de esquinas* $S_N(x) \in C^N$ (C^N denota funciones continuas diferenciables n-veces).

$$\begin{cases} S_N(x) = 0 & x \leq 0 \\ S_N(x) + S_N(1-x) = 1 & 0 \leq x \leq 1 \\ S_N(x) = 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (3.33)$$

$S_N(x)$ así definido, tiene la cualidad que al sumarse con su reflejado y corrido una unidad hacia la izquierda presenta como resultado una función constante de valor uno en el intervalo $[0,1]$. Como ejemplos se presenta $S_N(x)$ para $N=0$, en la Figura 19, y $N=1$, en la Figura 20. Donde se aprecia que en el intervalo de $[0,1]$ la suma de la función tiene como resultado uno, es decir,

$$S_N(x) + S_N(1-x) = 1 \quad (3.34)$$

Figura 19. Función de suavizado de esquina $S_0(x)$.

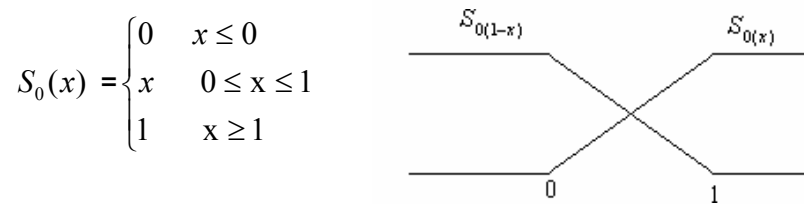
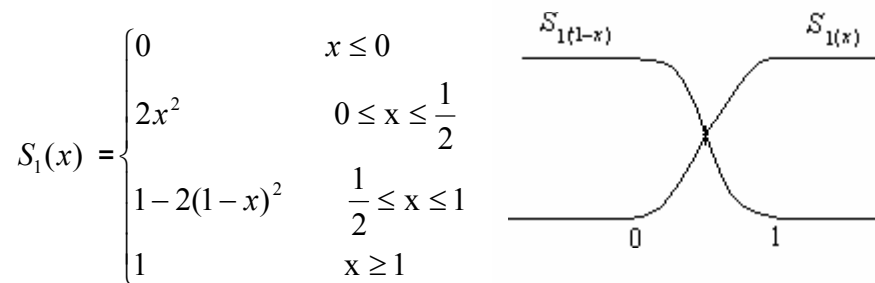


Figura 20. Función de suavizado de esquina $S_1(x)$.



Se ha definido la banda de transición en (3.32) y el polinomio de suavizado de esquinas en (3.33). Para llenar la banda de transición y completar la grafica de la función Meyer $\hat{\phi}_{M,N}(\omega)$ (Figura 18.) se introduce la función

$$\cos\left(\frac{\pi}{2} S_N\left(\frac{3}{2\pi}|\omega|-1\right)\right) \quad (3.35)$$

Con todo lo anterior la *Función de Escala de N_{esimo} orden Ortonormal de Meyer* es definida como la transformada de fourier inversa de

$$\hat{\phi}_{M,N}(\omega) = \begin{cases} 0 & |\omega| \geq \frac{4\pi}{3} \\ \cos\left(\frac{\pi}{2} S_N\left(\frac{3}{2\pi}|\omega|-1\right)\right) & \frac{2\pi}{3} \leq |\omega| \leq \frac{4\pi}{3} \\ 1 & |\omega| \leq \frac{2\pi}{3} \end{cases} \quad (3.36)$$

donde $S_N(x)$ y $\hat{\phi}_{M,N}(\omega)$ pertenecen a las funciones continuas diferenciables n-veces. Se toma a $S_N(x)$ en función de un coseno en la ecuación (3.36) para hacer que la función Meyer cumpla la condición, que al desplazarla 2π la suma de sus magnitudes al cuadrado sea uno a lo largo de todas las frecuencias.

Para mostrar que la función meyer es ortonormal se necesita probar el teorema 3.

Partiendo que $\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}_{M,N}(\omega + 2\pi n) \right|^2$ se solapa solamente en las regiones $[k2\pi/3, k4\pi/3]$

sólo es necesario mostrar:

$$\left| \hat{\phi}_{M,N}(\omega) \right|^2 + \left| \hat{\phi}_{M,N}(\omega + 2\pi) \right|^2 = 1 \quad (3.37)$$

Para la banda de transición $\frac{2\pi}{3} \leq \omega \leq \frac{4\pi}{3}$ se tiene

$$\left| \cos\left(\frac{\pi}{2} S_N\left(\frac{3}{2\pi}|w|-1\right)\right) \right|^2 + \left| \cos\left(\frac{\pi}{2} S_N\left(\frac{3}{2\pi}|w-2\pi|-1\right)\right) \right|^2 = 1 \quad (3.38)$$

desarrollando el segundo termino del lado izquierdo de la igualdad

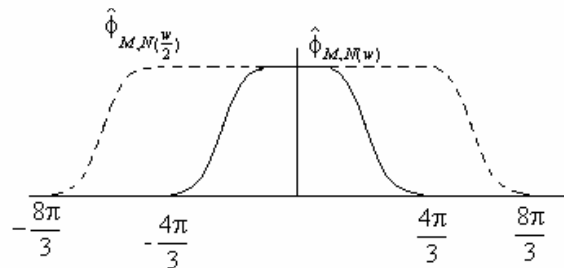
$$\begin{aligned} \cos^2\left(\frac{\pi}{2} S_N\left(-\frac{3}{2\pi}(w-2\pi)-1\right)\right) &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} S_N\left(-\frac{3}{2\pi}w+2\right)\right) = \\ &= \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} S_N\left(\frac{3}{2\pi}w-1\right)\right) \quad (3.39) \\ &= \sin^2\left(\frac{\pi}{2} S_N\left(\frac{3}{2\pi}w-1\right)\right) \end{aligned}$$

por tanto se cumple (3.38). Generalizando para corrimientos $k2\pi$ la función Meyer cumple el teorema el teorema 3 y la familia $\phi_{M,N}(t-k)$ para $k=0,\pm 1,\pm 2\dots$ es ortonormal.

Para hallar la relación doble escala p_k , se puede observar

$$\hat{\phi}_{M,N}(\omega) = \hat{\phi}_{M,N}\left(\frac{\omega}{2}\right) \hat{\phi}_{M,N}(\omega) \quad (3.40)$$

Figura 21. Interpretación grafica de la ecuación (3.40)



ya que $\hat{\phi}_{M,N}\left(\frac{\omega}{2}\right) = 1$ para el soporte de $\hat{\phi}_{M,N}(\omega)$ como se aprecia en la grafica, contrastándolo con la relación doble escala, $\hat{\phi}_M(\omega) = P(e^{-j\omega/2})\hat{\phi}_M(\omega/2)$ se tiene que $P\left(e^{-j\frac{\omega}{2}}\right)$ es igual a $\hat{\phi}_M(\omega)$,

$$\frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} p_k e^{-jn\frac{\omega}{2}} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{\phi}_{M,N}(\omega + 4\pi k) \quad (3.41)$$

que resolviendo para p_k en la región de transición definida se obtiene

$$p_k = \frac{2}{3} \frac{\sin\left(\frac{k\pi}{3}\right)}{\frac{k\pi}{3}} + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{4\pi}{3}} \cos\left(\frac{k}{2}w\right) \cos\left(\frac{\pi}{2}S_N\left(\frac{3}{2\pi}|w|-1\right)\right) dw \quad (3.42)$$

Por el teorema 4, la Wavelet *ortonormal Meyer de Nésimo-orden* $\psi_{M,N}(t)$ se puede obtener reemplazando los p_k dados por la ecuación (3.42) en la ecuación (3.18).

$$\psi_{M,N}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^k p_{1-k} \phi_{M,N}(2t-k) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} (-1)^{k+1} p_k \phi_{M,N}(2t+k-1) \quad (3.43)$$

Un análisis en el dominio de la frecuencia muestra como los filtros $\hat{\phi}_{M,N}(\omega)$ y $\hat{\psi}_{M,N}(\omega)$ son complementarios y como se relacionan en (3.43). Si la función $\hat{\phi}_{M,N}(\omega)$ de la Figura 21. es desplazada 2π genera el filtro $\hat{\psi}_{M,N}(\omega)$ como se muestra en la Figura 22.

Figura 22. Interpretación gráfica de la relación de los filtros $\hat{\phi}_{M,N}(\omega)$ y $\hat{\psi}_{M,N}(\omega)$.

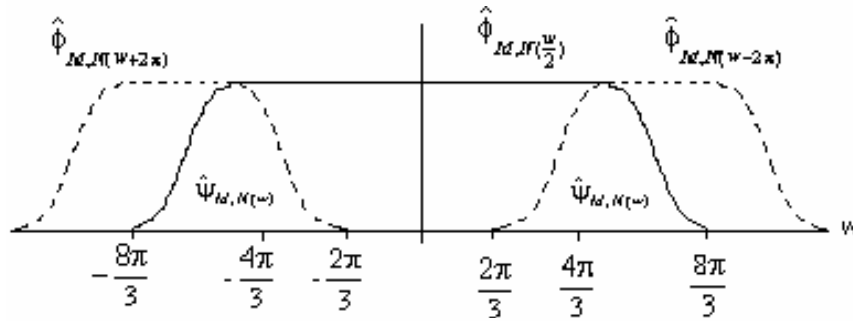
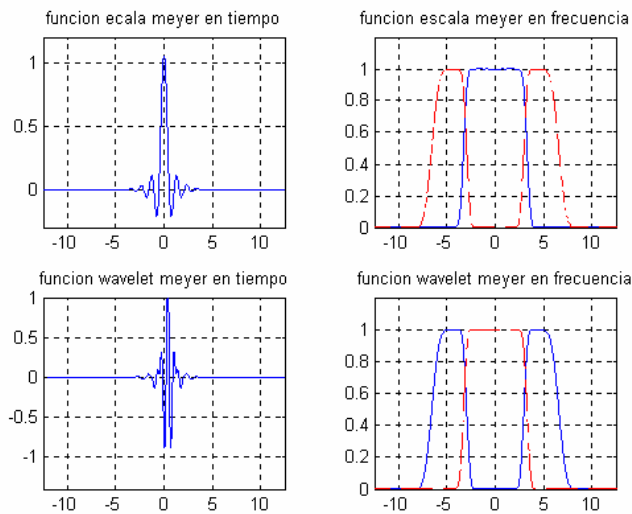


Figura 23. Función de Escala Y Wavelet Meyer, con polinomio de suavizado $S_3(x)$, y sus características en frecuencia.



3.2.4 Wavelet Spline Battle – Lemarié

Las funciones de escalamiento $N_i(t)$, $\Phi_s(t)$ y $\Phi_{M,N}(t)$ para la construcción de las Wavelets Haar, Shannon y Meyer respectivamente son ortonormales, por tanto el proceso de ortonormalización (3.16) no es necesario. Cuando las *B-Spline cardinales* $N_m(t)$, con $m \geq 2$ son usadas como funciones de escalamiento, sus traslaciones enteras no son

ortogonales, por tanto, es necesario aplicar el proceso de ortonormalización, como se indica en el Teorema 4.

Antes de aplicar el proceso de ortonormalización es posible simplificar el denominador de (3.16) como sigue. Teniendo en cuenta que la función Spline presenta simetría par respecto a su centro, al girarla se llega a la misma función, y realizar la autocorrelación se obtiene la función Spline de orden $2m$ centrada,

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_m(x) \overline{N_m(x-t)} dt = N_{2m}(m+t) \quad (3.44)$$

aplicando la identidad de Parseval

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} N_m(x) \overline{N_m(x-t)} dt &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(\omega)|^2 e^{j\omega t} d\omega \\ &= \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{2\pi k}^{2\pi(k+1)} |\hat{N}_m(\omega)|^2 e^{j\omega t} d\omega \quad (3.45) \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(\omega + 2\pi k)|^2 \right\} e^{j\omega t} d\omega \end{aligned}$$

dado que es una función con simetría par:

$$\int_{-\infty}^{\infty} N_m(x) \overline{N_m(x-t)} dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(\omega + 2\pi k)|^2 \right\} e^{-j\omega t} d\omega \quad (3.46)$$

Igualando (3.2.4.3) y (3.2.4.1) para $t=n \in \mathbb{Z}$, se tiene que el n -th coeficiente de Fourier de la función 2π periódica $\sum_k |\hat{N}_m(\omega + 2\pi k)|^2$ esta dado por $N_{2m}(m+n)$. Es decir

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} N_{2m}(m+n) e^{jn\omega} \quad (3.47)$$

por la simetría y el soporte de la Spline centrada en el origen, $N_{2m}(m+t)$, se llega a:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{N}_m(\omega + 2\pi k)|^2 = \sum_{n=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+n)e^{-jn\omega} \quad (3.48)$$

Ahora, se define el *polinomio de Euler-Frobenius Laurent* como

$$E_m(z) = \sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k)z^k \quad (3.49)$$

Finalmente el proceso de ortonormalización (3.16) se reduce a

$$\hat{N}_m^\perp(\omega) = \frac{\hat{N}_m(\omega)}{\{E_m(e^{-j\omega})\}^{\frac{1}{2}}} \quad (3.50)$$

De aquí, junto con la relación doble escala y la respuesta en frecuencia de la Spline de m^{th} orden (ecuaciones 2.26 y 2.62 reescritas acá por conveniencia)

$$\hat{\phi}(\omega) = \left(\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right) \left(\frac{1}{2} \sum_k p_k e^{-\frac{j\omega k}{2}} \right) \quad (3.51)$$

$$\hat{N}_m(\omega) = \left(\frac{1 - e^{-j\omega}}{j\omega} \right)^m \quad (3.52)$$

el símbolo doble escala de la función de escalamiento ortonormal $N_m^\perp(t)$ es dado por

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \sum_k p_k e^{-jk\omega/2} &= \frac{\hat{N}_m^\perp(\omega)}{\hat{N}_m^\perp(\omega/2)} \\ &= \frac{\hat{N}_m(\omega)}{\hat{N}_m(\omega/2)} \left\{ \frac{E_m(e^{-j\frac{\omega}{2}})}{E_m(e^{-j\omega})} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left(\frac{1 + e^{-j\frac{\omega}{2}}}{2} \right)^m \left\{ \frac{E_m(e^{-j\frac{\omega}{2}})}{E_m(e^{-j\omega})} \right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned} \quad (3.53)$$

Si se define el polinomio $C_m(z)$ como

$$C_m(z) = \frac{1}{E_m(z)} \quad (3.54)$$

con $z=e^{j\omega/2}$, la secuencia p_k es :

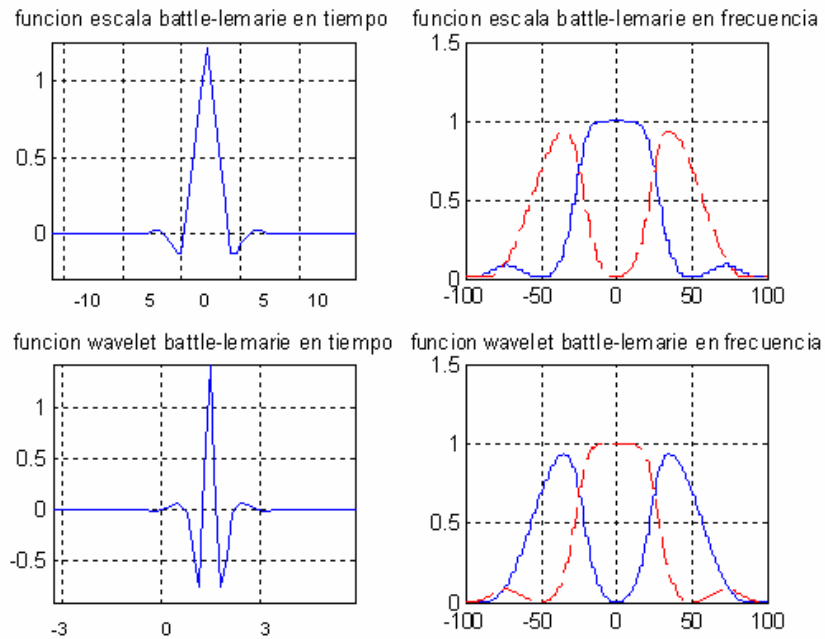
$$\sum_k p_k e^{-jk\omega/2} = 2 \left(\frac{1+z}{2} \right)^m \{E_m(z)C_m(z^2)\}^{\frac{1}{2}} \quad (3.55)$$

Y mediante (3.18) se construye la Wavelet Battle-Lemarié ortonormal de m_{esimo} orden,

$\psi_{BL;m}(t)$,

$$\psi_{BL;m}(t) = \sum_k (-1)^k p_{1-k} N_m^\perp(2t - k) \quad (3.56)$$

Figura 24. Función de Escala y Wavelet Spline Battle – Lemarié y sus características en frecuencia.



3.2.5 Wavelet Daubechie

El proceso de ortogonalización usualmente ofrece wavelets sin soporte compacto. Por tanto, parece que no es posible encontrar una familia diferente a la Haar que cumpla esta propiedad. Sin embargo, I. Daubechies construye una familia de wavelets ortogonales con soporte compacto y específico número de momentos desvanecientes.

El procedimiento de construcción inicia resolviendo los coeficientes p_k , tal que su transformada de Fourier satisfaga las condiciones de ortogonalidad y momentos.

Las funciones Daubechies generan un nuevo análisis multirresolución (MRA) de L^2 , a partir de funciones de escalamiento con soporte compacto ortonormales, donde sus símbolos de doble escala son una generalización de los símbolos doble escala de las B-splines de m_{esimo} orden, los cuales presentan la siguiente forma:

$$\left(\frac{1+z}{2}\right)^m \quad (3.57)$$

Tal generalización consiste en introducir un factor $S(z)$ que permita alcanzar la ortonormalidad, es decir, se considera al símbolo doble escala para la Daubechies con la siguiente forma:

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^N p_n z^n = \left(\frac{1+z}{2}\right)^m S(z) \quad (3.58)$$

Con:

$S(z)$ perteneciente a los polinomios de orden $N-m$.

$S(1)=1$. Esto es $S(z)$ es un filtro pasa bajos y asegura que todo el conjunto $P(1)=1$.

$S(-1) \neq 0$, evita aumentar la multiplicidad de la raíz en -1 .

En general, para las Daubechies, la relación doble escala es:

$$\phi_{D;m}(t) = \sum_{k=0}^N p_k \phi_{D;m}(2t - k) \quad (3.59)$$

y la correspondiente wavelet daubechie esta dada por, (aplicando (3.1.14))

$$\psi_{D;m}(t) = \sum_{k=-N+1}^1 (-1)^k p_{1-k} \phi_{D;m}(2t - k) \quad (3.60)$$

Entonces, conociendo $P(z)$, podemos obtener $\phi_{D;m}(t)$ y $\psi_{D;m}(t)$, la dificultad está en determinar el factor $S(z)$.

Partiendo de la relación de doble escala y llevándola al espacio de Fourier, se tiene:

$$\hat{\phi}_{D;m}(\omega) = P(z) \hat{\phi}_{D;m}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad (3.61) \quad \text{con: } z = e^{-j\omega/2}$$

Como $\phi_{D;m}(t)$ es una función de escalamiento ortonormal, esta debe cumplir que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}_{D;m}(\omega - 2\pi k) \right|^2 = 1 \quad \forall \omega \quad (3.62)$$

(Ver el teorema 3).

Esta condición de ortonormalidad, (sobre ϕ), es posible llevarla a los $P(z)$ de la siguiente forma: Aplicando la condición de ortonormalidad (3.62) a la relación doble escala (3.61) se tiene

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}_{D;m}(\omega - 2\pi k) \right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| P((-1)^k z) \right|^2 \left| \hat{\phi}_{D;m}\left(\frac{\omega}{2} + \pi k\right) \right|^2 \quad (3.63)$$

donde la sumatoria de la derecha se separa para los índices k pares e impares

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}_{D;m}(\omega - 2\pi k) \right|^2 = |P(z)|^2 \sum_{k_par} \left| \hat{\phi}_{D;m}\left(\frac{\omega}{2} + \pi k\right) \right|^2 + |P(-z)|^2 \sum_{k_impar} \left| \hat{\phi}_{D;m}\left(\frac{\omega}{2} + \pi k\right) \right|^2 \quad (3.64)$$

con la condición de ortonormalidad, las sumatorias son uno y la condición (3.62) sobre ϕ pasa a $P(z)$, es decir, el *símbolo doble escala* $P(z)$ debe satisfacer:

$$|P(z)|^2 + |P(-z)|^2 = 1 \quad \forall |z| = 1 \quad (3.65)$$

para que la función de escalamiento sea ortonormal.

En este punto, la condición de ortonormalidad (3.62) ha pasado al símbolo doble escala $P(z)$, pero como el objetivo es encontrar el polinomio $S(z)$, es necesario llevar la condición a este último polinomio, para así resolver (3.58).

Para que la condición de ortonormalidad llegue directamente al polinomio $S(z)$ se considera el cambio de variables,

$$x := \frac{1 - \cos(\omega/2)}{2} = \text{sen}^2(\omega/4) \quad (3.66)$$

e introduciendo que:

$$f(x) := |S(e^{-j\omega/2})|^2 \quad (3.67)$$

con esto y la ecuación (3.58) en la (3.65)

$$\left| \left(\frac{1+z}{2} \right)^m \right|^2 |s(z)|^2 + \left| \left(\frac{1-z}{2} \right)^m \right|^2 |s(-z)|^2 = 1 \quad (3.68)$$

con (3.2.5.10) y (3.2.5.11) en esta última ecuación se tiene:

$$(1-x)^m f(x) + x^m f(1-x) = 1 \quad (3.69)$$

o despejando para $f(x)$

$$f(x) = (1-x)^{-m} \{1 - x^m f(1-x)\} \quad (3.70)$$

por tanto como muestra (3.67) la función $f(x)$ refleja el desarrollo para $S(z)$.

Para resolver $f(x)$ se debe tener en cuenta que la ecuación (3.70) se puede ampliar por medio del teorema del binomio a:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{m+k-1}{k} x^k \{1 - x^m f(1-x)\} \quad (3.71)$$

o igualmente

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+k-1}{k} x^k + \text{términos de alto orden} \quad (3.72)$$

Donde el polinomio

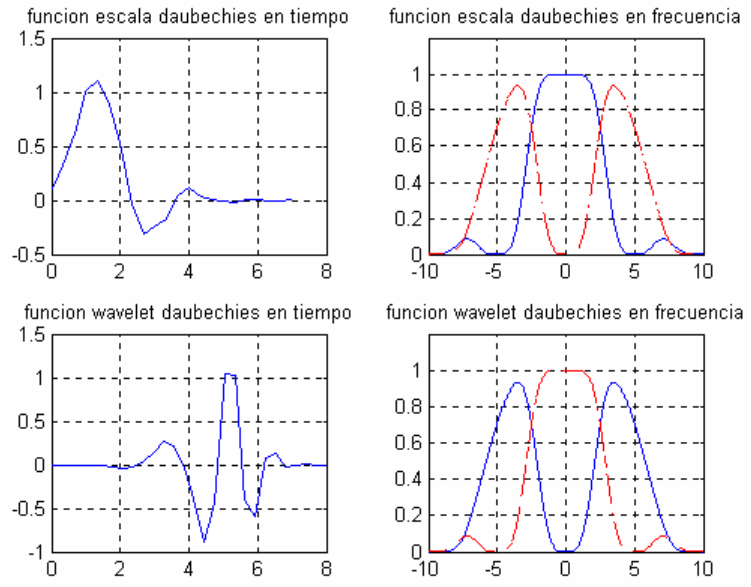
$$f_0(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+k-1}{k} x^k \quad (3.73)$$

satisface la ecuación (3.69), por tanto, ubicando (3.66) en (3.73)

$$|S(e^{-j\omega/2})|^2 = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+k-1}{k} \text{sen}^{2k} \left(\frac{\omega}{4} \right) \quad (3.74)$$

Esta ecuación presenta el desarrollo para $|S(e^{-j\omega/2})|^2$, de donde es posible encontrar $S(e^{-j\omega/2})$ y así finalmente mediante la ecuación (3.58) determinar el símbolo doble escala que identifica a las wavelets Daubechies.

Figura 25. Función de Escala y Wavelet Daubechies (4) y sus características en frecuencia.



4. WAVELETS BIORTOGONALES

En el capítulo anterior se estudiaron funciones wavelets $\psi(t)$ que proveen una base ortonormal del espacio L^2 . Al contar con esta propiedad cualquier señal $f(t) \in L^2$ se puede representar como,

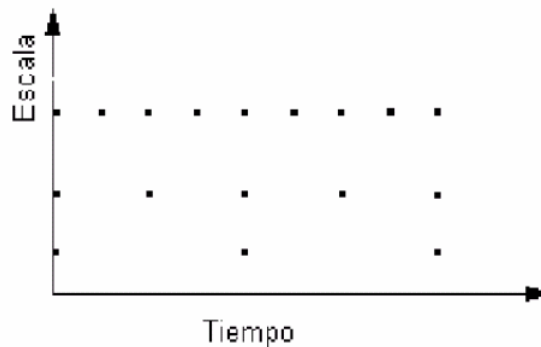
$$f(t) = \sum_{j,k} \hat{d}_{j,k} \psi_{j,k}(t) \text{ donde } \psi_{j,k} = 2^{j/2} \psi(2^j t - k). \quad (4.1)$$

La importancia de la representación de la señal $f(t)$, radica en que los coeficientes de la expansión algebraica tendrán información de la señal en tiempo y en frecuencia, así:

$$\hat{d}_{j,k} = \int f(t) \overline{\psi_{j,k}(t)} dt = (w_\psi f) \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right) \quad (4.2)$$

Donde se aprecia que los coeficientes de representación $\hat{d}_{j,k}$ se calculan a partir de la IWT para cada valor de j y k con la $\psi(t)$ ortonormal propia como wavelet de análisis.

Figura 26. Localización tiempo-escala de la IWT.



CHARLES K. Chui. Wavelets: A mathematical Tool for Signal Processing. Philadelphia: SIAM, 1997. p.90.

En la figura 26, se esquematiza como opera la localización tiempo-escala de la IWT para cada octava banda de frecuencia, $(b, a) = \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right)$. la fila superior muestra el mapeo de la transformada wavelet para niveles de resolución altos ($j \rightarrow \infty$), que corresponde a una función Wavelet comprimida en tiempo, por lo que en esta zona del mapa se analizan altas frecuencias. Mientras que la fila inferior muestra el mapeo de la transformada wavelet para niveles de resolución bajos ($j \rightarrow \infty$), que corresponde a una función Wavelet dilatada en tiempo, por tanto en esta zona del mapa se analizan bajas frecuencias.

Adviértase además, que la secuencia de coeficientes $\hat{d}_{j,k}$ se presenta sobre un conjunto de muestras y no sobre todo el plano de tiempo-escala. Hay que añadir que este conjunto de muestras es suficiente para determinar la señal de manera única. Y en efecto, esta representación puede ser usada para recuperar completamente a la señal $f(t)$. De aquí la importancia de la función $\psi(t)$, la cual siendo wavelet ortonormal, juega dos papeles importantes:

1. Es usada como wavelet de análisis para suministrar información tiempo-frecuencia.
2. Es empleada para dar la forma de onda para los diferentes niveles de resolución. (bandas octales de frecuencias). Por ejemplo la j th octava $g_j(t)$ de $f(t)$ es dada por:

$$g_j(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \hat{d}_{j,k} \psi_{j,k}(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} d_{j,k} \psi_{j,k}(2^j t - k) \quad \text{con } d_{j,k} = 2^{j/2} \hat{d}_{j,k}. \quad (4.3)$$

Hasta el momento sólo ha sido necesaria la secuencia P_k para la generación de las wavelet, debido a que se han escogido estas funciones $\psi(t)$ de forma tal que cumplen con la propiedad de ortonormalidad y por tanto la descomposición y reconstrucción se realiza por medio de una sola función wavelet .

Se generalizara la suma de descomposición presentada en el capítulo dos para espacios no ortonormales. Para esto se requieren el par de wavelets duales $\psi(t)$ y $\tilde{\psi}(t)$, ($\tilde{\psi}(t)$ indica Wavelet dual) las cuales realizan el proceso de descomposición y reconstrucción mencionado anteriormente. Para este fin, una de las funciones Wavelet es usada como

wavelet de análisis y la otra, su dual, es utilizada para obtener la representación de la señal en sus diferentes bandas octales de frecuencia (wavelet de síntesis).

Además, este capítulo analiza cómo las wavelets de análisis y síntesis pueden emplearse indistintamente, Es decir:

$$f(t) = \sum_{j,k} \hat{d}_{j,k} \psi_{j,k}(t) = \sum_{j,k} \tilde{d}_{j,k} \tilde{\psi}_{j,k}(t) \quad (4.4)$$

donde $\hat{d}_{j,k} = (w_{\tilde{\psi}} f) \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right)$ y $\tilde{d}_{j,k} = (w_{\psi} f) \left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j} \right)$.

para lo cual es utilizado el *principio de dualidad*.

4.1 LA NECESIDAD DE LAS DUALES

Se ha visto que $\phi(t)$ genera AMR V_n de L^2 y de igual modo se ha presentado la descomposición del espacio,

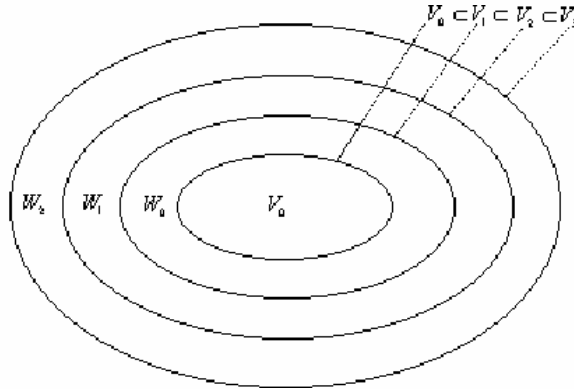
$$V_n = V_{n-1} + W_{n-1} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.5)$$

En general no se requiere que W_n sea ortogonal a V_n para generar AMR. La única condición que se debe cumplir es

$$V_{n-1} \cap W_{n-1} = \{0\} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.6)$$

como se muestra en la Figura 27.

Figura 27. Interpretación gráfica de las ecuaciones (4.5) y (4.6).



P. FAUDEZ y FUENTES Álvaro. Procesamiento Digital de Señales Acusticas.

El hecho que no exista ortonormalidad entre los espacios trae consigo la necesidad que las funciones de análisis y de síntesis sean diferentes. En lo que sigue se presenta el desarrollo matemático necesario para elaborar el esquema wavelet completo, es decir contar con una wavelet de análisis y una wavelet de síntesis que puedan ser usadas indistintamente.

Suponiendo que $\psi(t)$ tiene efectivamente una dual, definida por

$$\tilde{\psi}(t) := 2^{l/2} \tilde{\psi}(2^l t - m) \quad (4.7)$$

se debe cumplir que el producto interno entre ellas sea:

$$\langle \psi_{j,k}(t), \tilde{\psi}_{l,m}(t) \rangle = \delta_{j,l} \delta_{k,m} \quad j, k, l, m \in \mathbb{Z} \quad (4.8)$$

lo que significa que el resultado es diferente de cero cuando la función wavelet y su dual coincidan en escalamiento y desplazamiento.

También se requiere que la dual $\tilde{\psi}(t)$ sea ortogonal a las traslaciones enteras de la función de escalamiento $\phi(t)$ la cual genera el espacio V_n . Por tanto, definiendo el espacio \tilde{W}_n generado por $\tilde{\psi}(t)$ como

$$\tilde{W}_n := \langle \tilde{\psi}_{n,k}(t) : k \in \mathbb{Z} \rangle \quad (4.9)$$

se tiene:

$$\tilde{W}_n \perp V_n \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.10)$$

Definido el espacio \tilde{W}_n es conveniente considerar otro AMR \tilde{V}_n de L^2 que contenga a $\tilde{\psi}(t)$ como wavelet generadora. Es decir, se requiere una función de escalamiento $\tilde{\phi}(t)$ que genere a \tilde{V}_n así: $\tilde{V}_n := \langle \tilde{\phi}_{n,k}(t) : k \in \mathbb{Z} \rangle$ $n \in \mathbb{Z}$ con $\tilde{\phi}(t) := 2^{n/2} \tilde{\phi}(2^n t - k)$ tal que:

$$\tilde{V}_n = \tilde{V}_{n-1} + \tilde{W}_{n-1} \quad (4.11)$$

Donde por analogía a (4.6),

$$\tilde{V}_{n-1} \cap \tilde{W}_{n-1} = \{0\} \quad (4.12)$$

Con este nuevo esquema, es posible presentar una nueva condición para la construcción de $\psi(t)$ y $\tilde{\psi}(t)$ basado en la ortogonalidad de \tilde{V}_n con W_n . Es decir, se requiere que:

$$W_n \perp \tilde{V}_n \quad (4.13)$$

Con las anteriores definiciones y condiciones sobre los espacios V_n, \tilde{V}_n, W_n y \tilde{W}_n , sea $f(t)$ una señal de energía finita que se representa en el espacio V_n por $f_n(t)$ como:

$$f(t) \rightarrow f_n(t) = \sum_k C_{n,k} \phi(2^n t - k) \quad (4.14)$$

y aplicando repetidamente la suma de descomposición mostrada en (4.5); en terminos de representación $f_n(t)$ y $g_n(t)$, se tiene:

$$f_n(t) = g_{n-1}(t) + \dots + g_{n-M}(t) + f_{n-M}(t) \quad (4.15)$$

donde la representación de cada octava banda de frecuencia se discrimina: en altas frecuencias como

$$g_j(t) = \sum_k d_{j,k} \psi_{j,k}(2^j t - k) \quad j = n - M, \dots, n - 1 \quad (4.16)$$

y en bajas frecuencias como

$$f_{n-M}(t) = \sum_k C_{n-M,k} \phi_{(2^{n-M} t - k)} \quad (4.17)$$

Con esta segmentación junto con el principio de dualidad presentado en (4.8) los $d_{j,k}$ de $g_j(t)$ están dados por:

$$d_{j,k} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} g_j(t) \tilde{\psi}(2^j t - k) dt \quad (4.18)$$

y sabiendo que,

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_l(t) \tilde{\psi}(2^l t - k) dt = 0 \quad (4.19)$$

ya que (4.8) es cero para $l \neq j$ (para todo $k \in \mathbb{Z}$.)

Ahora bien, teniendo en cuenta la ecuación (4.10) donde se muestra que el espacio generado por $\phi(t)$ y el espacio generado por $\tilde{\psi}(t)$ son ortogonales y además como $V_{n-M} \subset V_j$ para $j \geq n-M$, entonces,

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_{n-M}(t) \tilde{\psi}(2^j t - k) dt = 0 \quad (4.20)$$

por tanto de las ecuaciones (4.18), (4.19) y (4.20) los coeficientes de cada octava banda de frecuencia de la señal $d_{j,k}$, se pueden hallar directamente de la representación $f_n(t)$.

$$d_{j,k} = 2^j \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \tilde{\psi}(2^j t - k) dt \quad (4.21)$$

En conclusión, de (4.16) y (4.21) $\psi(t)$ es usada para generar las formas de onda de las octavas de la señal, $g_j(t)$. Mientras que su dual $\tilde{\psi}(t)$ es usada para analizar a $f_n(t)$. Por tal razón, se llama a $\tilde{\psi}(t)$ “wavelet de análisis” y a $\psi(t)$ “wavelet de síntesis”. En general estas funciones no pueden ser intercambiadas ya que el espacio \tilde{V}_n es diferente al espacio V_n . Para usar a $\tilde{\psi}(t)$ como wavelet de síntesis, se necesita representar la señal $f(t)$ en \tilde{V}_n , es decir usar $\tilde{\phi}(t)$ en lugar de $\phi(t)$ en la ecuación de modelado o representación (4.14). Para hacer intercambiables $\psi(t)$ y $\tilde{\psi}(t)$ sin pasar por la nueva representación se requiere que $V_n = \tilde{V}_n$. Si esto se cumple, de la ecuación (4.13) se tiene que:

$$W_n \perp V_n \quad (4.22)$$

Por tanto es conveniente que $\tilde{\phi}(t)$ sea la dual de $\phi(t)$ en el sentido de (para el caso particular $j=0$)

$$\tilde{\phi}(t) \in V_o \left\langle \phi(t-k), \tilde{\phi}(t-l) \right\rangle = \delta_{k,l} \quad k, l \in \mathbb{Z} \quad (4.23)$$

que indica la ortogonalidad a corrimientos enteros entre las funciones de escala.

De (4.23) $\tilde{\phi}(t)$ es única, y para probar la unicidad de $\tilde{\phi}(t)$ considérese que existe más de una dual y que $\eta(t)$ es la resta de dos de estas funciones. Entonces, por la linealidad de

la integración $\langle \phi(t-k), \eta(t) \rangle = 0$, para cumplir esta igualdad, $\eta(t)$ debe ser ortogonal a todo V_o , pero como $\eta(t) \in V_o$ la función escala $\tilde{\phi}(t)$ es única; ya que solo existe una función que pertenece al espacio V_o y es ortogonal a él mismo la cual es la función cero.

Modificando el proceso de ortonormalización mostrado por la ecuación (4.16) del capítulo tres, la transformada de Fourier de la dual $\tilde{\phi}(t)$ de $\phi(t)$ es:

$$\hat{\tilde{\phi}}(\omega) = \frac{\hat{\phi}(\omega)}{\sum_k |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2} \quad (4.24)$$

Donde el denominador es una generalización del polinomio de E-F-L, definido en el capítulo anterior para el caso particular de las Spline. Es decir ahora se tiene que:

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 = E_{\phi}(e^{-j\omega}) \quad (4.25)$$

Además a partir de la ecuación de Riesz, en frecuencia, el polinomio de E-F-L cumple

$$0 < A \leq E_{\phi}(z) \leq B < \infty \quad |z| = 1 \quad (4.26)$$

por tanto $E_{\phi}(z)$ es diferente de cero para $|z|=1$. Entonces se puede plantear que:

$$\frac{1}{E_{\phi}(z)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad (4.27)$$

que junto con (4.24) y (4.25) se llega a:

$$\tilde{\phi}(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \phi(t-n) \quad (4.28)$$

Además si se plantea,

$$E_{\phi}(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n z^n \quad (4.29)$$

nuevamente con (4.24) y (4.25) se obtiene:

$$\phi(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n \tilde{\phi}(t-n) \quad (4.30)$$

Para llegar a las ecuaciones (4.28) y (4.30), se han retomado las ecuaciones (4.24) y (4.25), además se recurre al hecho que la multiplicación en el dominio de la frecuencia corresponde a una convolución en el dominio del tiempo.

Ahora bien, al analizar las ecuaciones (4.28) y (4.30) se concluye que la función $\phi(t)$ y su dual $\tilde{\phi}(t)$ se pueden generar una a partir de la otra. Por tanto, generarán el mismo espacio de funciones, es decir $V_n = \tilde{V}_n$. A partir de este hecho, la representación $f_n(t)$ de $f(t)$ puede ser lograda usando, ya sea, la función $\phi(t)$ o su dual $\tilde{\phi}(t)$ de la siguiente forma

$$f_n(t) = \sum_k c_{n,k} \phi(2^n t - k) = \sum_k \tilde{c}_{n,k} \tilde{\phi}(2^n t - k) \quad (4.31)$$

Por la propiedad de dualidad (4.23) se tiene:

$$c_{n,k} = 2^n \langle f_n(t), \tilde{\phi}(2^n t - k) \rangle = 2^n \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \tilde{\phi}(2^n t - k) dt \quad (4.32)$$

$$\tilde{c}_{n,k} = 2^n \langle f_n(t), \phi(2^n t - k) \rangle = 2^n \int_{-\infty}^{\infty} f_n(t) \phi(2^n t - k) dt$$

Lo que significa que los coeficientes $c_{n,k}$ y $\tilde{c}_{n,k}$ son las salidas de filtrar la señal $f_n(t)$ con un filtro pasa bajos $2^n \tilde{\phi}(2^n t - k)$ y $2^n \phi(2^n t - k)$, respectivamente.

Retomando la descomposición ortogonal $V_{j+1} = V_j + W_j$ con $V_j \perp W_j$, y teniendo en cuenta la propiedad de anidamiento del AMR se tiene la descomposición ortogonal de L^2 como:

$$L^2 = \bigoplus_{n=-\infty}^{\infty} W_n \quad W_j \perp W_l \quad (4.33)$$

Recuerde que no es necesario que $\psi_{j,k}$ sea una base ortonormal para construir una descomposición ortogonal, es decir, solo se requiere que

$$W_j \perp W_l \Leftrightarrow \langle \psi_{j,k}(t), \psi_{l,m}(t) \rangle = 0 \quad \text{para todo } k, m \in \mathbb{Z} \quad (4.34)$$

para $j \neq l$, lo que muestra que es ortogonal entre niveles de diferentes resolución pero no hay indicación de ortogonalidad en niveles de la misma resolución, es decir para $j=l$. Esta cualidad se denomina semiortogonalidad, concepto que se aclara en la siguiente definición.

DEFINICION 8.

Una función $\psi(t) \in L^2$ es llamada una wavelet semiortogonal si esta es estable en el sentido que, existen unas constantes A y B, $0 < A \leq B < \infty$, tal que

$$A \leq \sum_k |\hat{\psi}(\omega + 2\pi k)|^2 \leq B \quad (4.35)$$

Y si los espacios W_j , $j \in \mathbb{Z}$, que esta genera dan una descomposición ortogonal de el espacio de energía finita L^2 como indica la ecuación (4.33).

De manera análoga a la ecuación (4.24), la dual $\tilde{\psi}(t)$ de una wavelet semiortogonal se determinada por medio de su TF.

$$\hat{\psi}(w) = \frac{\psi(\omega)}{\sum_k |\psi(\omega + 2\pi k)|^2} \quad (4.36)$$

Ahora si $A=B=1$ en (4.35), entonces $\{\psi(t-k) : k \in \mathbb{Z}\}$ es ortonormal (teorema 3 del capítulo 3) y por la ecuación (4.36) se llega a que los espacios $\tilde{\psi}(t) = \psi(t)$. Lo que indica que una wavelet ortonormal es una wavelet semiortogonal donde su dual es ella misma.

4.2 WAVELETS DE SOPORTE COMPACTO

El objetivo de esta sección es describir un método para la construcción de funciones wavelet de soporte mínimo semiortogonales a una función de escalamiento $\phi(t)$ con soporte compacto.

Se asume que el soporte de $\phi(t)$ es $[0, M]$, tal que M pertenece a los enteros positivos, la relación doble escala puede ser escrita como:

$$\phi(t) = \sum_{k=0}^M p_k \phi(2t - k) \quad p_0 p_M \neq 0 \quad (4.37)$$

Es importante presentar la generalización del polinomio de EFL ya que este se utiliza para lograr que la wavelet tenga soporte de longitud mínima.

como $\phi(t) \in R$, la función de auto-correlación $\Phi(t)$ se puede escribir como:

$$\Phi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x-t) \overline{\phi(x)} dx = \int \phi(x-t) \phi(x) dx, \text{ que tiene como resultado una función par cuyo soporte es } [-M, M].$$

Si se define a n_ϕ como el mayor entero para el cual $\phi(n_\phi) \neq 0$ entonces, como $\phi(t)$ es continua $\phi(M) = 0$ tal que

$$0 \leq n_\phi \leq M - 1 \quad (4.38)$$

y recordando de la ecuación (30)

$$\sum |\hat{\phi}(\omega + 2\pi k)|^2 = E_\phi(e^{-j\omega}) \quad (4.39)$$

$$E_\phi(z) = \sum_{k=-n_\phi}^{n_\phi} \phi(k) z^k$$

Ya que la función wavelet $\psi(t)$ pertenece al espacio W_0 y sabiendo que $W_0 \subset V_1$ se puede escribir,

$$\psi(t) = \sum r_k \phi(2t - k) \quad \{r_k\} \in l^2 \quad (4.40)$$

donde el símbolo doble escala esta dado por:

$$R(z) = 1/2 \sum_k r_k z^k \quad (4.41)$$

La relación doble escala de la wavelet en el dominio de la frecuencia es,

$$\hat{\psi}(\omega) = R(z) \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \quad z = e^{-j\omega/2} \quad (4.42)$$

Análogamente la relación doble escala de $\phi(t)$, como se mostró en capítulo dos,

$$\hat{\phi}(\omega) = P(z) \hat{\phi}(\omega/2) \quad z = e^{-j\omega/2} \quad (4.43)$$

donde,

$$P(z) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^M P_k z^k \quad (4.44)$$

Del desarrollo matemático presentado anteriormente se llega directamente a las condiciones necesarias para que el símbolo doble escala $R(z)$ de la función wavelet tenga el mínimo soporte. Lo que conduce a que la wavelet $\psi(t)$ presente soporte mínimo.

Para esto se realiza el producto interno entre las funciones $\phi(t)$ y $\psi(t)$. En el desarrollo algebraico se debe tener en cuenta la periodicidad de $z = e^{-j\omega/2}$, la ecuación (39) y el hecho que $e^{-j(\omega-2\pi)/2} = -e^{-j\omega/2} = -z$. Para cualquier entero n

$$\begin{aligned}
\langle \phi(t-n), \psi(t) \rangle &:= \int_{-\infty}^{\infty} \phi(t-n) \overline{\psi(t)} dt \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \hat{\phi}(\omega) e^{-j\omega n} \overline{\hat{\psi}(\omega)} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) \right|^2 P(z) \overline{R(z)} e^{-j\omega n} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} \left\{ \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2} + 2\pi k\right) \right|^2 \right\} P(z) \overline{R(z)} e^{-j\omega n} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{4\pi} E_{\phi}(z) P(z) \overline{R(z)} e^{-j\omega n} d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left\{ E_{\phi}(z) P(z) \overline{R(z)} + E_{\phi}(-z) P(-z) \overline{R(-z)} \right\} e^{-j\omega n} d\omega
\end{aligned} \tag{4.45}$$

Como $\psi(t)$ esta en W_0 esta debe ser ortogonal a $\phi(t-n) \forall n \in \mathbb{Z}$. Lo que hace que la cantidad dentro del paréntesis de (4.45) deba ser idéntica a cero; por lo tanto, la función símbolo $R(z)$ en la ecuación (4.41) debe satisfacer:

$$E_{\phi}(z) P(z) \overline{R(z)} + E_{\phi}(-z) P(-z) \overline{R(-z)} = 0 \quad |z|=1 \tag{4.46}$$

Cuya solución esta dada por,

$$R(z) = zK(z^2)P\left(-\frac{1}{z}\right)E_{\phi}(-z) \quad |z|=1 \quad \text{para cualquier } K(z) \in L^2 \tag{4.47}$$

En esta formulación se asume que los coeficientes p_k del polinomio $P(z)$ son reales y que la función de autocorrelación presenta simetría par es decir $\Phi(-k) = \Phi(k)$, lo que implica que $E_\phi(z^{-1}) = E_\phi(z)$.

En la ecuación (4.47) el soporte de los coeficientes $R(z)$ es el más pequeño si se escoge al polinomio $K(z)$ como monomio, por lo que se formula el siguiente teorema.

TEOREMA 5

Ya que la función de escala $\phi(t)$, es una función de escalamiento con soporte compacto y con relación doble escala como se muestra en (4.37), la correspondiente wavelet con soporte compacto semiortogonal $\psi(t)$ con mínimo soporte está gobernada por la relación doble-escala

$$\psi(t) = \sum_k q_k \phi(2t - k), \quad (4.48)$$

o equivalentemente,

$$\hat{\psi}(w) = Q(z) \hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \quad z = e^{j\frac{w}{2}} \quad (4.49)$$

con,

$$Q(z) = \frac{1}{2} \sum_k q_k z^k = cz^{2N+1} P\left(-\frac{1}{z}\right) E_\phi(-z) \quad (4.50)$$

Donde N es cualquier entero y c cualquier constante diferente de cero. En particular, considerando el mayor o mas grande entero,

$$N := \left[\frac{M + n_\phi}{2} \right] \quad (4.51)$$

no excediendo $\frac{M + n_\phi}{2}$, $Q(z)$ se hace un polinomio algebraico en z y la ecuación (4.49) puede ser rescrita más precisamente como,

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{M+2n_\phi} q_k \phi(2t - k) \quad (4.52)$$

Para analizar el soporte de la wavelet en detalle observe de, $Q(z) := cz^{2N+1} P\left(-\frac{1}{z}\right) E_\phi(-z)$;

que el grado del polinomio $P\left(-\frac{1}{z}\right)$ varía de 0 a $-M$ como indica (4.44), que el orden del polinomio $E_\phi(-z)$, está entre $-n_\phi$ y n_ϕ como se ve en la ecuación (4.39) y que el grado del termino z es $2N+1$.

Al estudiar el grado mínimo de todo el polinomio se llega al orden mínimo de $Q(z)$ como sigue,

$$2N + 1 - M - n_\phi = 0$$

de aquí que $N = \frac{M + n_\phi - 1}{2}$ cuyo mayor entero es $N := \left[\frac{M + n_\phi}{2} \right]$

Ahora bien, el máximo orden para el polinomio $Q(z)$ está dado por:

$$2N + 1 + n_\phi$$

De estas relaciones se puede obtener el soporte dado de la wavelet que se presenta en la ecuación (4.52).

Para el caso particular de funciones de escalamiento ortonormales $\phi^\perp(t)$, su función de autocorrelación $\Phi(k) = \delta_{k,0}$ por lo que $n_\phi = 0$, lo cual indica que $E_\phi(z) = 1$ ya que la transformación del impulso es la constante uno.

Para obtener el símbolo doble escala con mínimo soporte de la función wavelet $\psi(t)$, semiortogonal a la función de escala ortonormal, en la ecuación (4.47) se escoge $K(z) = -1$.

$$\begin{aligned}
 R(z) &= -zP\left(-\frac{1}{z}\right) = \frac{1}{2} \sum_k -zp_k \left(-\frac{1}{z}\right)^z \\
 &= \frac{1}{2} \sum_k p_k (-z)^{-k+1} = \frac{1}{2} \sum_k (-1)^k p_{1-k} z^k
 \end{aligned}
 \tag{4.53}$$

Dada la ecuación (4.42) se tiene,

$$r_k = (-1)^k p_{1-k} \tag{4.54}$$

y de la ecuación (4.41)

$$\psi(t) = \sum_k (-1)^k p_{1-k} \phi(2t - k).$$

La cual es la relación doble escala de una wavelet ortonormal como se formuló en el capítulo anterior.

4.3 WAVELETS SPLINES DE SOPORTE COMPACTO

Retomando las funciones de escala B-spline de orden m , $N_m(t)$, $m \geq 1$, se construirá en este numeral la wavelet correspondiente semiortogonal a ella, $\psi_m(t)$. Para lo cual se recurre al método señalado anteriormente.

La autocorrelación de estas funciones son las B-spline centradas de orden $2m$, $N_{2m}(t+m)$, las cuales tienen soporte $[-m,m]$. De aquí, que $n_\phi = m-1$ y

$$E_m(z) = \sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k)z^k,$$

Lo cual concuerda con el polinomio de *E-F-L*, definido en el capítulo tres.

Para las funciones B-Spline se tiene que $M = m$ y $n_\phi = m-1$, donde por la ecuación (4.51) $N = m-1$.

Si en la ecuación (50) $c = -1$ y recordando que la secuencia doble escala $P(z)$ de las B-Spline esta dada por $\left(\frac{1+z}{2}\right)^m$ se tiene que,

$$\begin{aligned} Q(z) &= -z^{2m-1}P\left(-\frac{1}{z}\right)E(-z) \\ &= -z^{2m-1}\left(\frac{z-1}{2z}\right)^m \sum_{n=-m+1}^{m-1} (-1)^n N_{2m}(m+n)z^n \quad (4.55) \\ &= \left(\frac{1-z}{2}\right)^m \sum_{k=0}^{2m-2} (-1)^k N_{2m}(k+1)z^k = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{3m-2} q_k z^k \end{aligned}$$

por lo tanto para cada m (entero positivo) la wavelet cardinal básica de m -ésimo orden esta dada por,

$$\psi(t) = \sum_{k=0}^{3m-2} q_k N_m(2t-k) \quad \text{supp}[0,2M-1] \quad (4.56)$$

donde al tener en cuenta la respuesta en tiempo de la de la secuencia doble escala de las B-spline se llega a la respuesta en tiempo de la secuencia doble escala $Q(z)$,

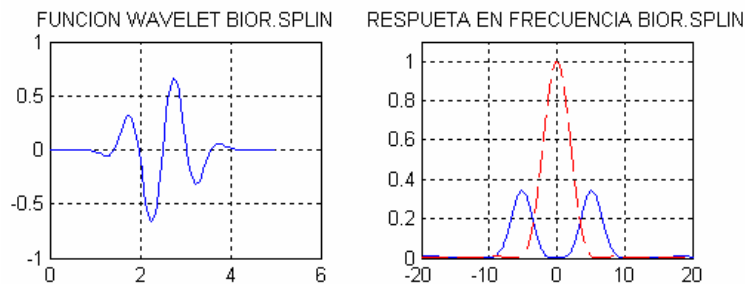
$$q_k = \frac{(-1)^k}{2^{m-1}} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} N_{2m}(k-l+1) \quad k = 0, \dots, 3m-2 \quad (4.57)$$

El soporte de $\psi_m(t)$ es de 0 a $2m-1$, el cual difiere del soporte de los q_k ya que el soporte de la wavelet se compone conjuntamente de los dos soportes, es decir con el soporte de la B-spline comprimida el cual es $[0, m/2]$ y el soporte de la secuencia $q_k [0, 3m-2]$. La función $\psi_m(t)$ es simétrica para m pares y antisimétrica para m impares, su centro está dado por,

$$t_m^* := \frac{2m-1}{2}$$

por tanto, el filtrado pasa bandas $\psi_m(t)$ es de fase lineal generalizada.

Figura 28. Función Biortogonal Spline 3



Recuerde que es deseable que el módulo de la respuesta en frecuencia sea aproximadamente constante y la fase valga cero en la banda de paso. Para sistemas causales no es posible conseguir fase cero, por tanto se debe permitir una cierta distorsión de fase.

El efecto de la fase lineal de pendiente entera es simplemente un desplazamiento temporal. Por otra parte, una fase no lineal tendría un efecto importante en la forma de la señal.

4.4 PRINCIPIO DE DUALIDAD

Si $\psi(t)$ y $\tilde{\psi}(t)$ son wavelets duales en el sentido que se indica en (4.3), entonces toda señal de energía finita $f(t) \in L^2$ tiene 2 representaciones,

$$f(t) = \sum_{j,k} \hat{d}_{j,k} \psi_{j,k}(t) = \sum_{j,k} \tilde{d}_{j,k} \tilde{\psi}_{j,k}(t) \quad (4.58)$$

Donde la secuencia de coeficientes esta dada por los valores de IWT (como se explica en la primera parte del capitulo).

$$\begin{cases} \hat{d}_{j,k} = (W_{\tilde{\psi}} f)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right) \\ \tilde{d}_{j,k} = (W_{\psi} f)\left(\frac{k}{2^j}, \frac{1}{2^j}\right) \end{cases} \quad j, k \in \mathbb{Z} \quad (4.59)$$

Como se puede observar según el tipo de representación escogida, las funciones ψ y $\tilde{\psi}$ pueden ser intercambiadas.

En la práctica, primero la señal $f(t)$ se representa en una señal de banda limitada,

$$f_n(t) = \sum_k c_n \phi(2nt - k) \quad (4.60)$$

Pero ahora $f_n(t) \in V_n$, por lo tanto las funciones de $\psi(t)$ y $\tilde{\psi}(t)$ no pueden ser intercambiados a menos que $\tilde{V}_n = V_n$, o en forma equivalente $\psi(t)$ sea una wavelet semiortogonal como se indico en las ecuaciones (4.33) y (4.34).

Teniendo a $\phi(t)$ función de escalamiento de soporte compacto, y $\psi(t)$ su Wavelet semiortogonal complementaria de mínimo soporte, se llega a las relaciones doble escala en el dominio de la frecuencia las cuales dadas por:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(w) &= P(z)\phi\left(\frac{w}{2}\right) \\ \hat{\psi}(w) &= Q(z)\phi\left(\frac{w}{2}\right) \quad z = e^{-j\frac{w}{2}}\end{aligned}\quad (4.61)$$

Con,

$$Q(z) = -z^{2N+1}P\left(-\frac{1}{z}\right)E_\phi(-z) \quad (4.62)$$

como se vio en el teorema 5 con $c = -1$.

Como el objetivo es estudiar las duales $\tilde{\phi}(t)$ y $\tilde{\psi}(t)$ considere, recordando las ecuaciones (4.24) y (4.25), la transformada de Fourier de la dual $\tilde{\phi}(t)$ la cual esta dada por:

$$\hat{\tilde{\phi}}(w) = \frac{1}{E_\phi(z^2)}\hat{\phi}(w) \quad z = e^{-j\frac{w}{2}} \quad (4.63)$$

Se observa de la ecuacion (4.30), que $\tilde{\phi}(t)$ genera el mismo AMR en el espacio V_j que $\phi(t)$, análogamente del hecho que $\tilde{\psi}(t)$ sea semiortogonal, este generara el mismo subespacio complementario ortogonal w_j que $\psi(t)$.

Se hace necesario el estudio de las relaciones doble escala de las funciones duales $\tilde{\psi}(t)$ y $\tilde{\phi}(t)$. Ahora se presentan las relaciones doble-escala de las duales con a_k y b_k denotando las secuencias doble-escala junto con sus correspondientes símbolos doble-escala:

$$\begin{aligned}A(z) &:= \frac{1}{2} \sum_k a_k z^k \\ B(z) &:= \frac{1}{2} \sum_k b_k z^k\end{aligned}\quad (4.64)$$

y en analogía a la ecuación (4.61), las relaciones doble escala en el dominio de la frecuencia para las duales están dadas por:

$$\begin{aligned}\hat{\phi}(w) &= A(z)\hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \\ \hat{\psi}(w) &= B(z)\hat{\phi}\left(\frac{w}{2}\right) \quad z = e^{-j\frac{w}{2}}\end{aligned}\quad (4.65)$$

Para determinar $A(z)$ y $B(z)$ se necesitan las identidades presentadas en el siguiente teorema.

TEOREMA 6

Permitiendo que $P(z)$ y $Q(z)$ sean los símbolos doble escala de una función de escalamiento de soporte compacto $\phi(t)$ y su correspondiente wavelet minimamente soportada $\psi(t)$ y junto con el polinomio de E-F-L $E_\phi(z)$, el cual esta asociada a $\phi(t)$, entonces:

$$E_\phi(z^2) = |P(z)|^2 E_\phi(z) + |P(-z)|^2 E_\phi(-z) \quad z = e^{-j\frac{w}{2}} \quad (4.66)$$

y,

$$\begin{aligned}\sum_k |\hat{\psi}(w + 2\pi k)|^2 &= |Q(z)|^2 E_\phi(z) + |Q(-z)|^2 E_\phi(-z) \\ &= E_\phi(z)E_\phi(-z)E_\phi(z^2)\end{aligned}\quad (4.67)$$

Retomando la relación de dualidad que se presenta en la ecuación (4.36) esta puede ser reformulada aplicando la ecuación (4.67) junto con el teorema 6 como sigue:

$$\hat{\psi}(w) = \frac{1}{E_\phi(z)E_\phi(-z)E_\phi(z^2)} \hat{\psi}(w) \quad (4.68)$$

y con ayuda de las ecuaciones (4.61) y (4.62) se llega a la fórmula ,

$$\hat{\psi}(w) = \frac{-z^{2N+1}P(-\frac{1}{z})}{E_{\phi}(z)E_{\phi}(z^2)} \hat{\phi}(\frac{w}{2}) \quad (4.69)$$

Aplicando las ecuaciones (4.63) con (4.69) y las relaciones doble escala mostradas en las ecuaciones (4.61) y (4.65), es posible calcular las secuencias doble escala a_k y b_k de la función de escalamiento dual $\tilde{\phi}(t)$ y la Wavelet dual $\tilde{\psi}(t)$ como se indica en el siguiente teorema.

TEOREMA 7

Los símbolos doble-escala $A(z)$ y $B(z)$ en las ecuaciones (4.64) y (4.65) están dados por,

$$A(z) = \frac{E_{\phi}(z)}{E_{\phi}(z^2)} P(z) \quad (4.70)$$

$$B(z) = \frac{-z^{2N+1}}{E_{\phi}(z^2)} P(-\frac{1}{z}) \quad (4.71)$$

Con N definida en el teorema 5

Existe una relación de dualidad entre los pares de símbolos doble escala $P(z)$, $Q(z)$ y los duales $A(z)$, $B(z)$. Esta relación puede ser llevada a las secuencias p_k , q_k con a_k , b_k .

Este vínculo se establece usando la identidad (4.66) del teorema 6 y se muestra por medio del siguiente teorema:

TEOREMA 8

Las relaciones doble-escala de $\phi(t)$ y su Wavelet semiortogonal $\psi(t)$ y las relaciones doble-escala de sus duales $\tilde{\phi}(t)$ y $\tilde{\psi}(t)$ son gobernadas por la identidad de dualidad,

$$P(z)\bar{A}(z) + Q(z)\bar{B}(z) = 1 \quad |z| = 1 \quad (4.72)$$

o equivalentemente,

$$\sum_{k=0}^M p_k a_{k-n} + \sum_{k=0}^{M+2n_\phi} q_k b_{k-n} = 4\delta_{n,0} \quad n \in \mathbb{Z} \quad (4.73)$$

Donde se ha asumido a p_k y q_k de valor real.

Se puede verificar que los símbolos doble-escala satisfacen la identidad:

$$P(z)\bar{A}(-z) + Q(z)\bar{B}(-z) = 0 \quad |z| = 1 \quad (4.74)$$

La importancia común característica de (4.72) y (4.74) es que son simétricas en el sentido que los pares, $P(z)$, $Q(z)$ y $A(z)$, $B(z)$ pueden ser intercambiadas.

El primer par describe las relaciones doble-escala de $\phi(t)$ y $\psi(t)$, el segundo par gobierna la relación de descomposición como sigue.

TEOREMA 9

La relación de descomposición de $\phi(t)$ y su wavelet semiortogonal $\psi(t)$ esta dada por:

$$\phi(2t-l) = \sum_k \{a_{l-2k} \phi(t-k) + b_{l-2k} \psi(t-k)\} \quad l \in z \quad (4.75)$$

Para ver de una mejor manera esta relación se transpone al dominio de la frecuencia,

$$\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right)z^n = \left(\sum_k a_{n-2k} z^{2k}\right)\hat{\phi}(\omega) + \left(\sum_k b_{n-2k} z^{2k}\right)\hat{\psi}(\omega) \quad , z = e^{\frac{-j\omega}{2}} \quad (4.76)$$

De un mejor modo teniendo en cuenta las ecuaciones (4.72) y (4.74), y partiendo de las relaciones doble escala señaladas por (4.61), se tiene:

$$\hat{\phi}\left(\frac{\omega}{2}\right) = (\bar{A}(z) \pm \bar{A}(-z))\hat{\phi}(\omega) + (\bar{B}(z) \pm \bar{B}(-z))\hat{\psi}(\omega) \quad , z = e^{\frac{-j\omega}{2}} \quad (4.77)$$

De esta ecuación se ve cómo se puede pasar de un nivel mayor de resolución de frecuencia (ancho de banda $w/2$) a una representación de menor resolución (ancho de banda w).

Ahora bien, el porqué las secuencias en la ecuación (4.75) son llamadas secuencias de descomposición, se explica de mejor modo con el siguiente teorema:

Teorema 10

Con la representación:

$$f_n(t) = \sum c_{n,k} \phi(2^n t - k) \quad (4.78)$$

que en el espacio V_n se escribe como,

$$f_n(t) = f_{n-1}(t) + g_{n-1}(t)$$

donde $f_{n-1}(t) \in V_{n-1}$ y $g_{n-1}(t) \in W_{n-1}$. Los coeficientes $\{c_{n-1,k} : k \in z\}$ y $\{d_{n-1,k} : k \in z\}$ correspondientes a los componentes descompuestos $f_{n-1}(t)$, $g_{n-1}(t)$,

$$\begin{aligned}
f_{n-1}(t) &= \sum_k c_{n-1,k} \phi(2^n t - k) \\
g_{n-1}(t) &= \sum_k d_{n-1,k} \psi(2^n t - k)
\end{aligned} \tag{4.79}$$

pueden ser computados aplicando el algoritmo de descomposición,

$$\begin{aligned}
c_{n-1,k} &= \sum_l a_{l-2k} c_{n,l} \\
d_{n-1,k} &= \sum_l b_{l-2k} c_{n,l}
\end{aligned} \tag{4.80}$$

Por otro lado las secuencias doble-escala p_k y q_k son también llamadas secuencias de reconstrucción como se ilustra en el siguiente teorema.

TEOREMA 11

Con $f_n(t) \in V_n$ dado por,

$$f_n(t) = f_{n-1}(t) + g_{n-1}(t) \tag{4.81}$$

donde $f_{n-1}(t) \in V_{n-1}(t)$ y $g_{n-1}(t) \in W_{n-1}$ y se escribe,

$$\begin{aligned}
f_{n-1}(t) &= \sum_k c_{n-1,k} \phi(2^{n-1} t - k) \\
g_{n-1}(t) &= \sum_k d_{n-1,k} \psi(2^{n-1} t - k)
\end{aligned} \tag{4.82}$$

La secuencia de los coeficientes $\{c_{n,k} : k \in \mathbb{Z}\}$ de la señal,

$$f_n(t) = \sum_k c_{n,k} \phi(2^n t - k)$$

reconstruida de sus componentes $f_{n-1}(t)$ y $g_{n-1}(t)$ como en (4.81), puede ser computada por aplicación del siguiente “algoritmo de reconstrucción”.

$$c_{n,k} = \sum_l \{p_{k-2l} c_{n-1,l} + q_{k-2l} d_{n-1,l}\} \quad (4.83)$$

Debido a que las secuencias p_k y q_k en (4.83) son finitas, este proceso es simplemente la suma de dos respuestas al impulso finitas. Por supuesto las secuencias $\{c_{n-1,k} : k \in z\}$ y $\{d_{n-1,k} : k \in z\}$ deben ser primero “sobre-muestreadas” antes de aplicar los filtros FIR.

Sin embargo, las secuencias de descomposición a_k , b_k en (4.80) tienen decaimiento exponencial, son secuencias infinitas, por tanto requiere truncamiento o implementación de un filtro de respuesta al impulso infinita (IIR). Afortunadamente con la relación de dualidad (Teorema 8), se pueden usar las secuencias finitas p_{-k} , q_{-k} , para la descomposición en lugar de a_k y b_k , a esto es lo que se le llama principio de dualidad.

TEOREMA 12

Con $f_n(t) \in V_n$ dado por,

$$f_n(t) = \sum_k \tilde{c}_{n,k} \tilde{\phi}(2^n t - k) = \sum_k \tilde{c}_{n-1,k} \tilde{\phi}(2^{n-1} t - k) + \sum_k \tilde{d}_{n-1,k} \tilde{\psi}(2^{n-1} t - k) \quad (4.84)$$

Las secuencias $\{c_{n-1,k} : k \in z\}$ y $\{d_{n-1,k} : k \in z\}$ pueden ser computadas aplicando el algoritmo de descomposición,

$$\begin{aligned} \tilde{c}_{j-1,k} &= \sum_l p_{2k-l} \tilde{c}_{j,l} \\ \tilde{d}_{j-1,k} &= \sum_l q_{2k-l} \tilde{c}_{j,l} \end{aligned} \quad (4.85)$$

Si la función de escalamiento $\phi(t)$ es ortonormal, la Wavelet semiortogonal se hace ortonormal de aquí que las secuencias de reconstrucción y descomposición se reducen a:

$$\begin{cases} q_k = (-1)^k p_{1-k} \\ a_k = \frac{1}{2} p_{-k} \\ b_k = \frac{1}{2} q_{-k} = \frac{1}{2} (-1)^k p_{1+k} \end{cases} \quad (4.86)$$

Wavelets Duales a las Biortogonales

Este numeral pretende obtener las relaciones doble escala a_k y b_k para las B-Spline de m -th-orden, $N_m(t)$ para $m \geq 1$.

Para tal objeto se tiene en cuenta la relación mostrada por (4.63), la cual, particularmente para las B-Spline, es:

$$\hat{N}_m(w) = \left(\sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k) \ell^{-jkw} \right) \tilde{N}_m(w) \quad (4.87)$$

Lo que en tiempo se representa como:

$$N_m(t) = \sum_{n=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+n) \tilde{N}_m(t-n) \quad (4.88)$$

Es importante recordar del capítulo uno la secuencia doble escala para la función escala de las B-Spline, $N_m(t)$, así como la secuencia doble escala de su respectiva wavelet semiortogonal a ella:

$$p_k = 2^{-m+1} \binom{m}{k} \quad k = 0, \dots, m$$

$$q_k = \frac{(-1)^k}{2^{m-1}} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} N_{2m}(k-l+1) \quad k = 0, \dots, 3m-2$$

Para obtener las secuencias doble escala duales a las secuencia p_k y q_k se debe invertir la ecuación (88) como se muestra a continuación,

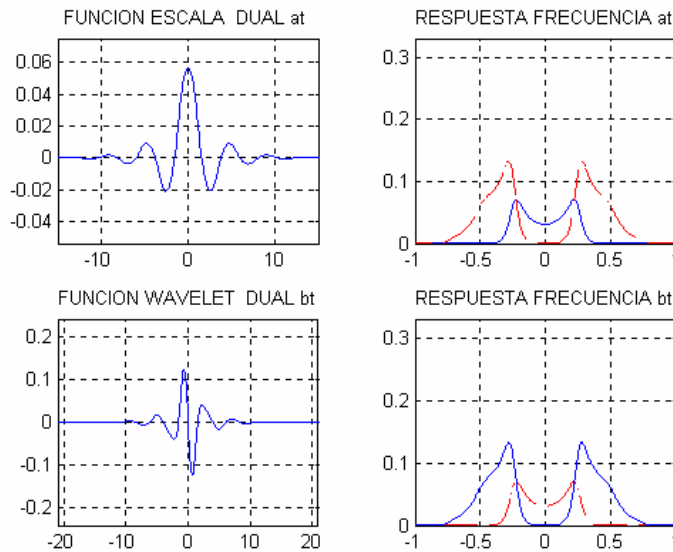
$$\tilde{N}_m(t) = \sum_n g_n z^n := \frac{1}{E_\phi(z)} = \frac{1}{\sum_{n=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+n)z^n} \quad (4.89)$$

Para así por medio de las ecuaciones (70) , (71) y (89) obtener finalmente las secuencias a_k y b_k duales a las secuencias p_k y q_k y de esta forma tener el sistema wavelet de análisis completo es decir wavelets de análisis y de síntesis que pueden ser usadas indistintamente.

$$a_n = 2^{-m} \sum_n \binom{m}{l} \sum_{p,q} N_{2m}(m+n-2k-l) g_k \quad (4.90)$$

$$b_n = (-1)^{n+1} 2^{-m} \sum_{2k=n-2m}^{n-m} \binom{m}{n-2k-m} g_k \cdot \quad (4.91)$$

Figura 29. Funciones duales Bioirtogonales Spline de orden 3.



5. IMPLEMENTACIÓN Y RESULTADOS

Este capítulo ilustra cómo se implementaron las diferentes funciones utilizadas para la construcción de las funciones de escala $\phi(t)$ y las funciones wavelets $\psi(t)$ por medio de la herramienta Matlab; así mismo con el algoritmo efectuado mediante banco de filtros para realizar la transformada wavelet, el cual se programó en lenguaje C utilizando el *Code Composer Studio* de la tarjeta de desarrollo para DSP TMS320C6711 de Texas Instruments.

5.1 IMPLEMENTACIÓN DE FAMILIAS WAVELETS EN MATLAB

A continuación se presentan los algoritmos seguidos para efectuar la teoría de la Transformada Wavelet que se presentó en los anteriores capítulos.

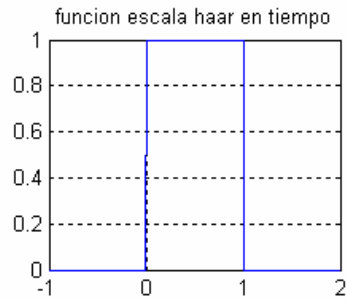
5.1.1 Funciones B-spline. Las funciones B-spline presentan soporte compacto en tiempo $[0,m]$, y en frecuencia exhiben decaimiento rápido al infinito, cualidad que hace posible buena localización tanto en tiempo como en frecuencia.

De las propiedades que se presentan en el capítulo dos para estas funciones B-spline (teorema 2), se implementa el inciso viii donde se afirma que $N_m(t)$ puede ser computada a partir de $N_{m-1}(t)$ usando la siguiente identidad:

$$N_m(t) = \frac{t}{m-1} N_{m-1}(t) - \frac{m-t}{m-1} N_{m-1}(t-1) \quad (5.1)$$

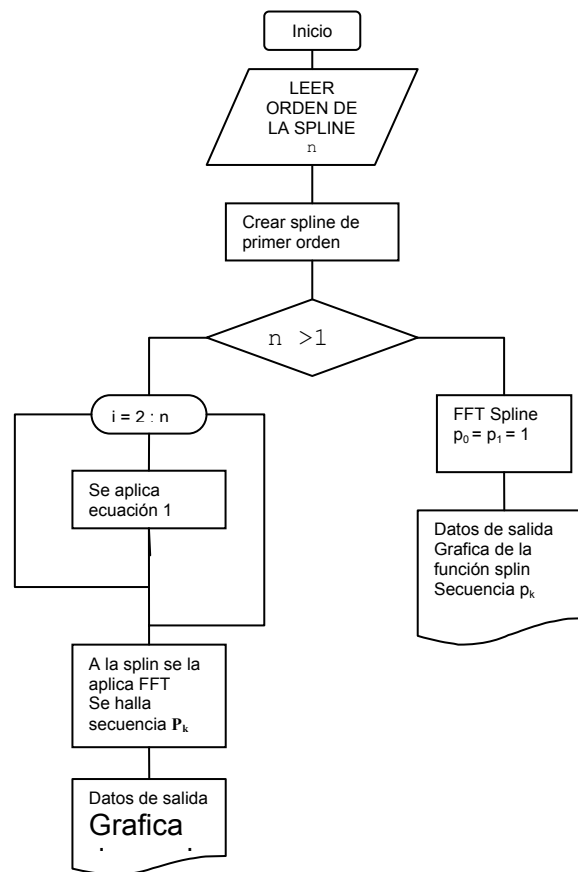
donde es necesario definir la función $N_1(t)$ para iniciar con la recursividad. La definición de la función $N_1(t)$ se introduce en el capítulo 2 y puede verse en la figura 30.

Figura 30. Spline cardinal de primer orden $N_1(t)$



El algoritmo implementado en Matlab para la generación de las funciones de escala B-spline se representa mediante el diagrama de flujo de la figura 31.

Figura 31. Diagrama de flujo para generación de las funciones de escala B-spline.



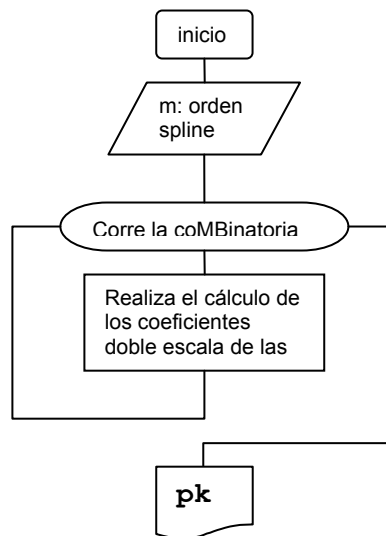
Este algoritmo se presenta bajo la función declarada en Matlab $[y, p, s]=splin(n)$, tiene como salidas, su espectro, y , las muestras enteras de las B-spline, p , y la función en tiempo, s . Su única entrada, n , es el orden de función B-spline.

Para hallar la secuencia doble escala de estas funciones se aplica la ecuación 2.58,

$$p_k = 2^{-m+1} \binom{m}{k} \quad k = 0, \dots, m \quad (5.2)$$

La figura 32. muestra los aspectos generales que se tienen en cuenta al programar esta secuencia.

Figura 32. Diagrama de flujo para el desarrollo de la secuencia p_k B-spline



5.1.2 Generación de las Formas de Onda a Partir de la Secuencia Doble Escala.

La *relación doble escala* (ecuación (5.3)) presenta la conexión existente entre la función y los coeficientes p_k , es así que a partir de estos coeficientes puede ser generada la función y por tanto su forma.

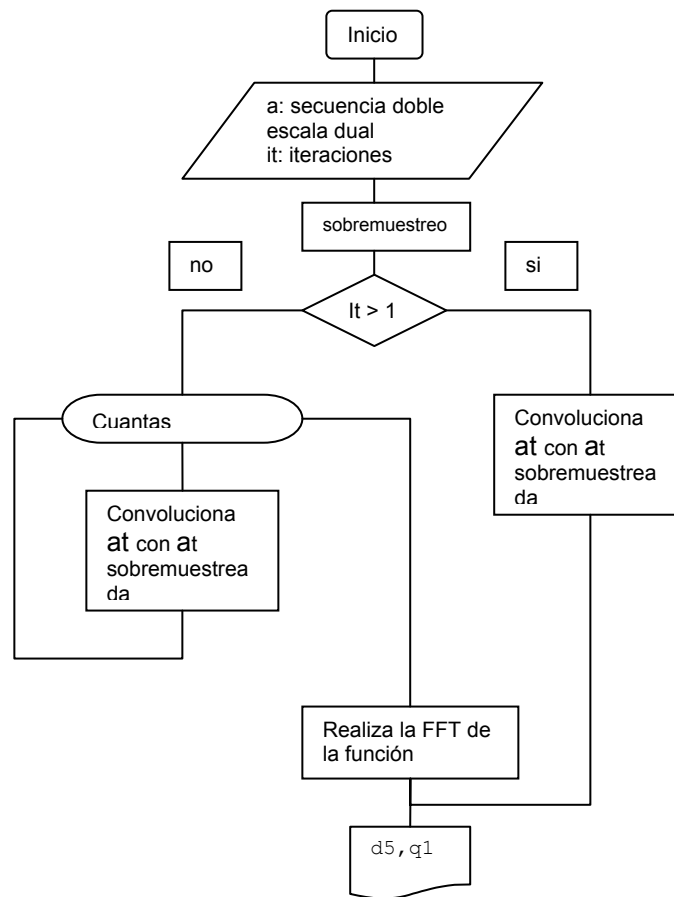
$$\phi(t) = \sum_{k=0}^M p_k \phi(2t - k) \quad (5.3)$$

El esquema que se plantea para la generar las formas de onda de las funciones wavelet esta basado en la aplicación iterativa de convoluciones y sobremuestreo. Es así, que el

método implica la inserción de ceros en medio de cada muestra de la secuencia p_k para luego realizar la convolución de esta nueva secuencia con la secuencia original. Al hacer este proceso iterativamente se consigue una excelente aproximación de la forma de la función.

La función implementada en Matlab `[d5,q1]=tiemp(a,it)` la cual tiene como parámetros de entrada la secuencia a a representar en tiempo a y el número de veces que se realiza el proceso, it . Como parámetros de salida se tienen: la función en tiempo $d5$ y su espectro $q1$. La figura 33. muestra el diagrama de flujo de la función `tiemp` implementada.

Figura 33. Diagrama de flujo para la función `tiemp`.

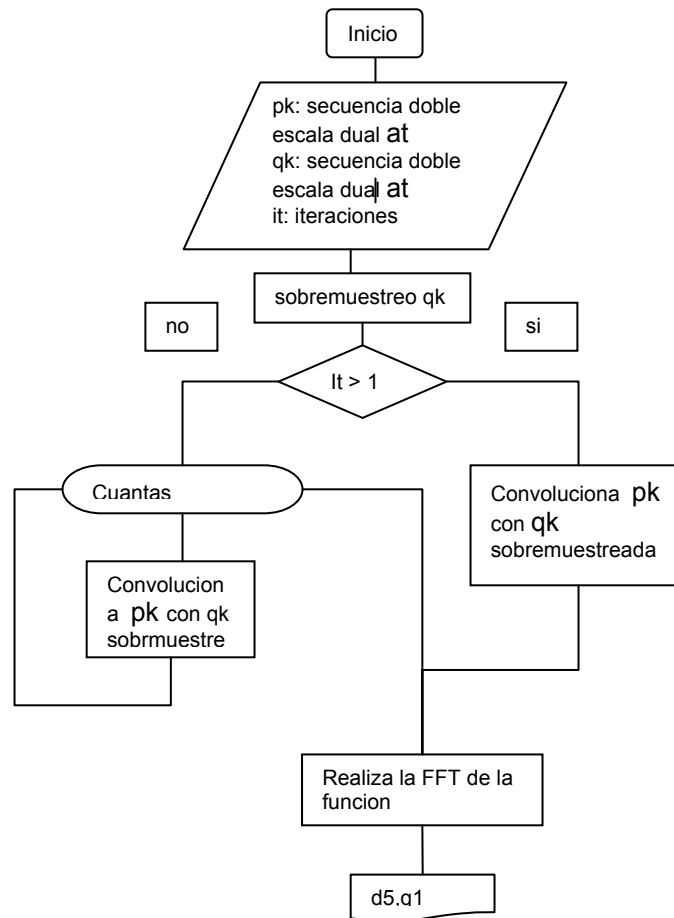


La función wavelet $\psi(t)$ se relaciona con la función de escala por medio de la secuencia q_k como sigue,

$$\psi(t) = \sum_k q_k \phi(2t - k). \quad (5.4)$$

Para obtener $\psi(t)$ en tiempo, el proceso es análogo al anterior. Se convoluciona la secuencia q_k con la secuencia p_k sobremuestreada, proceso que se realiza de manera iterativa. La figura 34. esquematiza el código de la función `[d5, q1]=tiemp2(pk, qk, it)` la cual realiza este proceso.

Figura 34. Diagrama de flujo para tiempo q_k



Para ejecutar `[d5, q1]=tiemp2(pk, qk, it)` en Matlab se requiere de tres parámetros entrada: p_k secuencia propia de la función de escala, q_k secuencia doble escala de la

función wavelet y i el número de veces que se ejecuta el proceso. Las salidas son la función en tiempo $d5$ y su respuesta en frecuencia $q1$.

5.1.3 Funciones Wavelet. Se ha estudiado dos tipos de wavelets, las ortonormales y las biortogonales. En este numeral se ilustra la implementación de cada una de estas familias mediante Matlab.

5.1.3.1 Wavelet Ortonormales

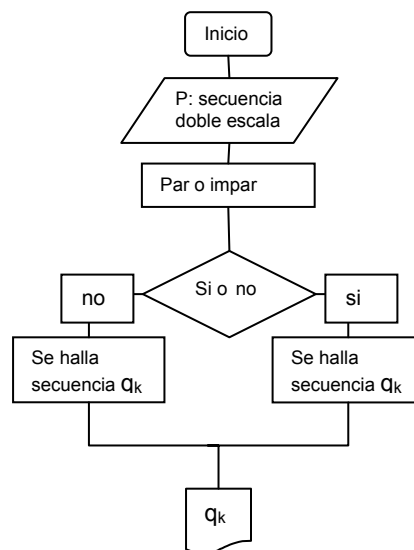
Secuencia Doble Escala.

Para las wavelets ortonormales la secuencia doble escala de la función $\phi(t)$ se relaciona fácilmente con la secuencia doble escala de función wavelet $\psi(t)$ mediante la siguiente ecuación

$$q_k = (-1)^k p_{1-k} \quad (5.5)$$

Nótese que para obtener la secuencia q_k simplemente se aplica reflexión y corrimiento a la secuencia p_k . Para esta rutina se implementó la función en Matlab `cus` como indica el diagrama de flujo de la figura 35.

Figura 35. Diagrama de flujo de la función `cus`.



La función $q=cus(p)$, tiene como parámetro de entrada la secuencia p_k y salida la secuencia q_k correspondiente a la secuencia doble escala de la función wavelet.

Wavelet Haar

La función Haar es de fácil implementación ya que los coeficientes de la secuencia doble escala como se muestran en la ecuación (3.24) son:

$$p_0 = p_1 = 1 \quad \text{y} \quad p_k = 0 \quad \text{para} \quad k \neq 0,1 \quad (5.6)$$

que aplicando el algoritmo para obtener las funciones en tiempo se determina la función $\phi(t)$ y $\psi(t)$ tanto en tiempo y en frecuencia, como se vio en el capítulo tres.

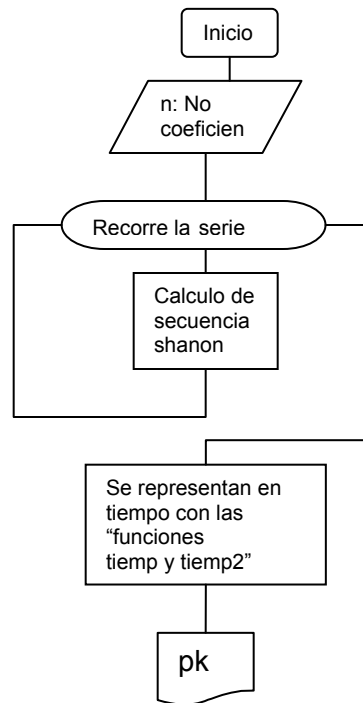
Wavelet Shanon

La secuencia doble escala de esta wavelet se obtiene a partir de la extensión en series de fourier de la función ventana rectangular en frecuencia como se muestra en la siguiente ecuación:

$$p_{(k)} = \begin{cases} 1 & \text{para } k = 0 \\ (-1)^{\frac{k-1}{2}} \frac{2}{k\pi} & \text{para } k \text{ impares} \\ 0 & \text{otro valor} \end{cases} \quad (5.7)$$

Esta función wavelet se programó como muestra el diagrama de flujo de la figura 36.

Figura 36. Diagrama de flujo para la wavelet Shannon



La función implementada $p_k = \text{shanon}(n)$ tiene como parámetro de salida la secuencia P_b y entrada el numero de coeficientes deseados. La TABLA 2 presenta algunos de los coeficientes doble escala obtenidos con la función `Shanon`.

TABLA 2. Coeficientes Shannon

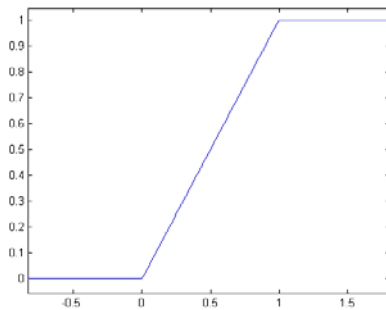
k	p_k	k	p_k
0	1	9	0.07073553026306
1	0.63661977236758	10	0
2	0	11	-0.05787452476069
3	-0.2122065907891	12	0
4	0	13	0.04897075172058
5	0.12732395447352	14	0
6	0	15	-0.04244131815784
7	-0.0909456817668	16	0
8	0	17	0.03744822190398

Wavelet Meyer

Esta función como indica su definición, requiere las curvas de suavizado $S(x)$ las cuales se programaron teniendo en cuenta la ecuación (3.33). Se generan para Matlab cuatro funciones de suavizado, las cuales se ilustran en las graficas 5.8 – 5.11.

Curva 0:

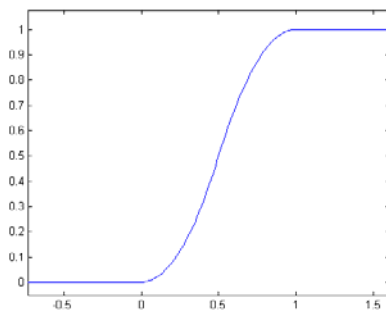
Figura 37. Curva de Suavizado $S_0(x)$



$$S_0(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (5.8)$$

Curva 1

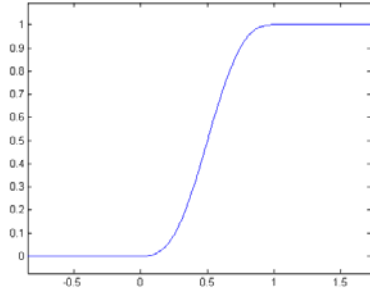
Figura 38. Curva de Suavizado $S_1(x)$



$$S_1(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 2x^2 & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 2(1-x)^2 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (5.9)$$

Curva 2

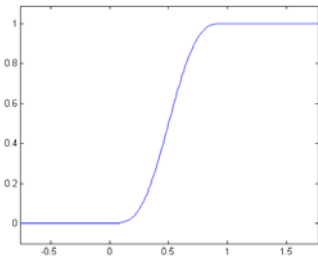
Figura 39. Curva de suavizado $S_2(x)$



$$S_2(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ 8(x^3 - x^4) & 0 \leq x \leq \frac{1}{2} \\ 1 - 8(1-x)^3 & \frac{1}{2} \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (5.10)$$

Curva 3

Figura 40. Curva de Suavizado $S_3(x)$

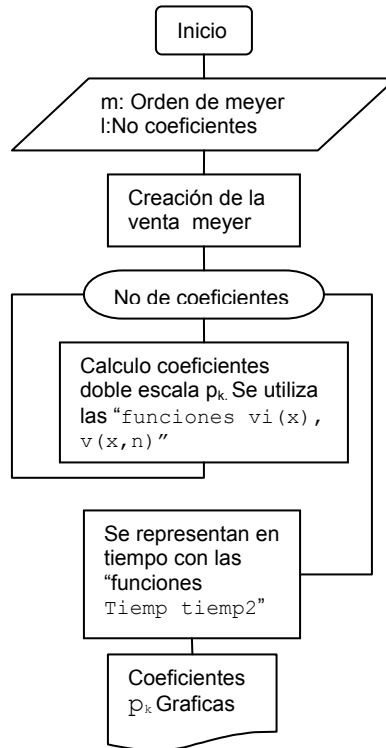


$$S_3(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ x^4(35 - 84x + 70x^2 - 20x^3) & 0 \leq x \leq 1 \\ 1 & x \geq 1 \end{cases} \quad (5.11)$$

Estas curvas se encuentran disponibles en la función $y_d = v_meyer(x, n)$, la cual tiene como parámetro de entrada el rango de valores para realizar el cálculo, x y el orden de la curva deseada, n . La salida es la curva en tiempo, y_d .

Con estas curvas se puede aplicar el proceso para la generación de la wavelet ortonormal Meyer, para la cual se calcula la secuencia doble escala por medio de una integración numérica. Proceso que se realiza siguiendo el diagrama mostrado en la figura 41.

Figura 41. Diagrama de flujo wavelet Meyer



La función generada es $[p_{my}] = \text{meyer}(m, l)$ la cual tiene dos argumentos de entrada. l , numero de coeficientes requeridos y m , meyer escogida, $0, 1, 2$ o 3 según la curva de suavizado. Su salida son los coeficientes doble escala propios de esta función, p_{my} . Las tablas 3 y 4 presentan algunos resultados obtenidos con la función `meyer`.

TABLA 3 .Coeficientes Secuencia Doble Escala W. Meyer 0

K	Pk=P-k	K	Pk=P-k	k	Pk=P-k
0	1.09107984734238	7	0.00642252020777	14	0.00200700143829
1	0.61042014984716	8	0.00522111433086	15	-0.00428701992
2	-0.081588667936	9	-0.0121260918931	16	0.00218717586738
3	-0.1414710610127	10	0.00615361195798	17	0.00191955183286
4	0.05727907713170	11	0.00497042088510	18	-0.0029679142105
5	0.03189288393619	12	-0.0067367313514	19	0.00114893906617
6	-0.0282942962126	13	0.00229110767837	20	0.00104445398137

TABLA 4. Coeficientes Secuencia Doble Escala W. Meyer 3

K	Pk=P-k	K	Pk=P-k	k	Pk=P-k
0	1.0518219488	7	-0.045387780	14	-0.003821454
1	0.6280446744	8	0.0246130788	15	-0.000817683
2	-0.049565743	9	0.0215679632	16	0.0012145042
3	-0.187661179	10	-0.015619473	17	0.0002279990
4	0.0433049518	11	-0.009032197	18	-0.000132239
5	0.0900390522	12	0.0085496312	19	-0.000197854
6	-0.034396228	13	0.0031038711	20	-0.000106925

Wavelet Battle-Lemarie

Para el cálculo de esta función wavelet se emplea el proceso de ortonormalización que se describe en el numeral correspondiente a wavelet Battle-Lemarie en el capítulo tres.

La función se creó en el dominio de la frecuencia teniendo en cuenta que el espectro ortonormalizado de la B-spline es:

$$\hat{N}_m^\perp(\omega) = \frac{\hat{N}_m(\omega)}{\{E_m(e^{-j\omega})\}_2^{\frac{1}{2}}} \quad (5.12)$$

lo cual hace necesario el cálculo numérico del polinomio de EFL

$$E_m(Z) = \sum_{n=-m+1}^{m-1} N_{2m(m+k)} Z^k \quad (5.13)$$

El cual, como muestra su definición se forma a partir de las funciones B-spline. El polinomio de EFL es calculado por la función generada para Matlab $[E1, Ev, w, y] = efl(1)$. El desarrollo del polinomio EFL permite el desarrollo de la ecuación (5.12). Por tanto, al tener el espectro ortonormalizado de la señal B-spline se aplica la transformada inversa de Fourier. En el momento de tener la función en tiempo se prosigue a tomar los valores mitad de muestra para obtener la secuencia doble escala P_b , propia de la función wavelet BATTLE-LEMARIE

La función que realiza el cálculo numérico para Matlab es:

$[b_L] = Btle_Lm(or, n_coef)$, donde *or* es el orden de la función y *n_coef* es el número de coeficientes deseados. La tabla

TABLA 5. Coeficientes Doble Escala W. Battle-Lemarie 2

k	P _k =P _{2-k}	K	P _k =P _{2-k}	k	P _k =P _{2-k}
1	1.156249828	8	-0.0030607656	15	-0.000026367
2	0.561845397	9	0.0012804362	16	0.0000609509
3	-0.09764215	10	0.0006795851	17	0.0000125684
4	-0.07343075	11	-0.0003110269	18	-0.000006998
5	0.023937875	12	-0.0001364638	19	-0.000007694
6	0.014084789	13	0.0000808064	20	0.0000044227
7	-0.00545239	14	0.0000162405	21	0.0000049540

Wavelet Daubechies

En el capítulo tres se plantea el desarrollo del polinomio $S(e^{-j\omega/2})$ con el objetivo de alcanzar ortonormalidad en la generalización de los símbolos doble escala de las B-Spline. En el presente proceso se calcula el polinomio $|S(e^{-j\omega/2})|^2$ de donde es posible hallar su “raíz cuadrada” y finalmente determinar las secuencias doble escala características de la Wavelet Daubechies.

En el desarrollo del polinomio $s(z)$ son necesarios dos conceptos: *factorización espectral* y *filtrado de fase mínima*. Estos conceptos se muestran a grandes rasgos para el desarrollo particular de las Wavelets Daubechies.

Factorización Espectral

El problema anterior puede ser planteado de la siguiente forma: dado un polinomio trigonométrico no negativo $A(\omega)$, extraer un polinomio $B(\omega)$ tal que $|B(\omega)|^2 = A(\omega)$. Entonces, para determinar $B(\omega)$ es necesario tomar la “raíz cuadrada” del sistema, lo que es llamado factorización espectral.

Con el desarrollo trazado en el capítulo tres y a partir de las definiciones de x y $f(x)$,

$$x := \frac{1 - \cos(\omega/2)}{2} = \text{sen}^2(\omega/4) \quad f(x) := |S(e^{-j\omega/2})|^2 \text{ es posible plantear:}$$

$$A(\omega) = f\left(\frac{1 - \cos(\omega/2)}{2}\right) = \alpha \prod_{j=0}^{m-1} (c - c_j) \quad (5.14)$$

donde f es un polinomio de grado $m-1$ en $\cos(\omega/2)$ que puede ser expresado en términos de sus raíces c_j donde α es una constante. Si el polinomio tiene coeficientes reales las raíces c_j ocurren en pares conjugados. En términos de z se escribe:

$$A(\omega) = \alpha \prod_{j=0}^{m-1} \left(\frac{z+z^{-1}}{2} - c_j \right) = f \left(\frac{1 - \frac{z+z^{-1}}{2}}{2} \right) = f(z) \quad (5.15)$$

donde: $\frac{1 - \cos(\omega/2)}{2} = \frac{1 - \frac{z+z^{-1}}{2}}{2}$. Los ceros de $f(z)$ aparecen en cuádruples $z_j, \bar{z}_j, z_j^{-1}, \bar{z}_j^{-1}$ si z_j es complejo y en pares r_j, r_j^{-1} si son reales. Por tanto es posible escribir:

$$f(z) = \alpha \prod_{j=0}^{m-1} \left(\frac{z^2 - 2c_j z + 1}{2z} \right) = \alpha z^{-(m-1)} \prod_{j=0}^{m-1} \left(\frac{z^2}{2} - c_j z + \frac{1}{2} \right) \quad (5.16)$$

$$f(z) = \alpha z^{-(m-1)} \prod_j (z - z_j)(z - \bar{z}_j)(z - z_j^{-1})(z - \bar{z}_j^{-1}) \prod_k (z - z_k)^2 (z - \bar{z}_k)^2 \prod_l (z - r_l)(z - r_l^{-1}) \quad (5.17)$$

Donde se han separado los casos para ceros complejos, reales y sobre el círculo unitario. El polinomio puede ser escrito:

$$f(z) = \text{const} \prod_j \left| (z - z_j)(z - \bar{z}_j) \right|^2 \prod_k \left| (z - e^{i\alpha_k})(z - e^{-i\alpha_k}) \right|^2 \prod_l \left| z - r_l \right|^2 \quad (5.18)$$

Donde para tomar la "raíz cuadrada" de $f(z)$ se selecciona la mitad de los ceros de $f(z)$.

Filtros de Fase Extrema

Presentada la factorización espectral se esta en posición de establecer $S(z)$ y así determinar el símbolo doble escala, $P(z)$, para las Wavelets Daubechies.

Para determinar la factorización espectral de $f(x) := |S(e^{-j\omega/2})|^2$ se necesita hallar los ceros de:

$$z^{(m-1)} f \left(\frac{1 - \frac{z + z^{-1}}{2}}{\frac{2}{2}} \right) \quad (5.19)$$

donde el termino z^{m-1} está para eliminar el denominador de $f(z)$ y así obtener una secuencia causal. Los ceros en (5.19) se encuentran en cuádruples de raíces complejas, en pares $\{z_j\}, \{\bar{z}_j\}$ o $\{z^{-1}\}, \{\bar{z}^{-1}\}$ que corresponden a pares de ceros cayendo dentro o fuera del círculo unitario en el plano complejo z .

Con esta geometría de ceros, se pueden escoger de seis formas diferentes dos pares de ceros. Pero cualquier combinación no lleva a una factorización con coeficientes reales. Para cada par de ceros se elige uno, sea dentro o fuera del círculo unitario. De esta forma se alcanza la factorización espectral, “raíz cuadrada” del polinomio $F(z)$. Por tanto, $P(z)$, símbolo doble escala para las w. Daubechies, esta dado por:

$$P(z) = const * \left(\frac{1+z}{2} \right)^m \prod_{j=1}^{m-1} (z - z_j) \quad (5.20)$$

Donde j corre a través de los índices de los ceros seleccionados. De $P(z)$ se observa que es de grado $2m-1$ en z y los coeficientes del filtro deseado p_k son los coeficientes de z^j . Ahora bien, si en el momento de seleccionar los ceros se toman los que se encuentran dentro del círculo de radio uno, la operación corresponde con el “filtrado digital de fase mínima”.

Ejemplo:

Se presenta el calculo de los coeficientes $h_k = p_k / \sqrt{2}$ para la Wavelet Daubechie de orden 3 ($m=3$.)

Se calcula el polinomio $F(z)$ como indica $|S(e^{-j\omega/2})|^2$ teniendo en cuenta la definición de x

$$f(z) = \sum_{k=0}^{m-1} \binom{m+k-1}{k} \left(\frac{1 - \frac{z+1/z}{2}}{2} \right)^k = \sum_{k=0}^2 \binom{2+k}{k} \left(\frac{1 - \frac{z+1/z}{2}}{2} \right)^k$$

$$f(z) = 1 + 3 \left(\frac{1 - \frac{z+1/z}{2}}{2} \right) + 6 \left(\frac{1 - \frac{z+1/z}{2}}{2} \right)^2$$

Calculado P(z), (más específicamente $f\left(\frac{1 - \frac{z+1/z}{2}}{2}\right)$ por (2)), se debe calcular los ceros

de $z^{(m-1)}f(z)$ como indica (5.19). Evaluando algebraicamente $z^{(m-1)}f(z)$ e igualando a cero se obtiene:

$$\frac{3}{8}z^4 - \frac{9}{4}z^3 + \frac{19}{4}z^2 - \frac{9}{4}z + \frac{3}{8} = 0$$

cuya solución son el par de raíces

$$(2.71275323 \pm j 1.443887)$$

$$(0.287251378044 \pm j 0.152892333882)$$

Que son complejas y se presentan en pares $\{z_j\}, \{\bar{z}_j\}$; $\{z^{-1}\}, \{\bar{z}^{-1}\}$

Se aplica la factorización espectral tomando las raíces dentro del círculo unitario. Lo cual garantiza el filtrado de fase mínima.

Se calcula el polinomio $(1+z)^m \prod_{j=1}^{m-1} (z-z_j)$, polinomio $p(z)$ indicado en (5.20), en donde el

denominador de $\left(\frac{1+z}{2}\right)^m$ se añadió a la constante.

Se evalúa $(1+z)^3(z-(0.2873+j0.1529))(z-(0.2873-j0.1529))$ y se encuentra:

$$z^5+2.4254972439z^4+1.3823811516z^3-0.4058400084z^2-.25683449624z+0.10588941944$$

En este punto del desarrollo solo hace falta determinar la constante numérica de

$P(z) = const * (1+z)^m \prod_{j=1}^{m-1} (z-z_j)$, lo cual se logra retomando las condiciones dadas en el

planteamiento de el símbolo doble escala para las Daubechies. Teniendo en cuenta que

$$h_k := \frac{1}{\sqrt{2}} p_k, \text{ entonces tenemos la siguiente condición de normalización } \sum_k h_k = \sqrt{2} .$$

$$\text{Por tanto: } const = \frac{\sqrt{2}}{\sum \text{coeficientes}} = 0.332670553$$

y los h_k , que son los coeficientes de $P(z)$ son:

$$h_{3,0}=0.332670553$$

$$h_{3,1}=0.806899151$$

$$h_{3,2}=0.4598775$$

$$h_{3,3}=-1.35011020010$$

$$h_{3,4}=-0.08544127$$

$$h_{3,5}=0.035226291$$

El desarrollo realizado de manera particular en el ejemplo puede ser generalizado para el proceso de cálculo de la familia de Wavelets Daubechies. El diagrama de flujo presente en la figura 42. muestra tal generalidad y por tanto es el sistema implementado en software. Las tablas 6 a 9 muestran algunos de los resultados obtenidos con la herramienta desarrollada.

Figura 42. Diagrama de flujo para el desarrollo de los coeficientes p_k de la W. Daubechies

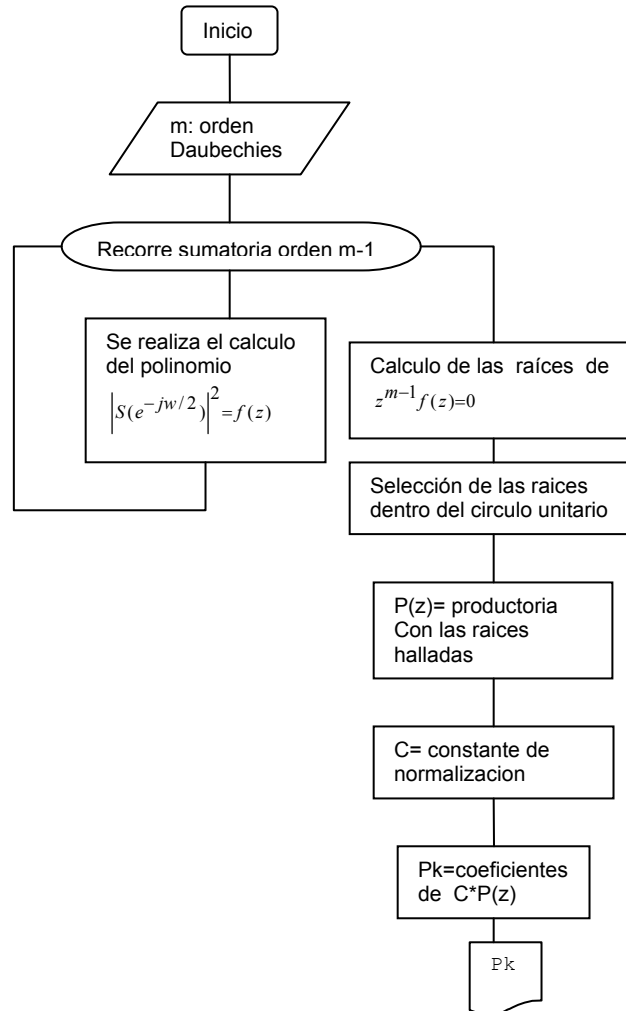


TABLA 6. Coeficientes Secuencia Doble escala W. Daubechies 2

K	p_k	k	p_k
0	0.683012701892	2	0.316987298107
1	1.183012701892	3	-0.18301270189

TABLA 7. Coeficientes Secuencia Doble Escala W. Daubechies 4

K	p_k	k	p_k
0	0.32580342805130	4	-0.264507167369
1	1.01094571509183	5	0.0436163004741
2	0.89220013824676	6	0.0465036010709
3	-0.0395750262356	7	-0.014986989330

TABLA 8. Coeficientes Secuencia Doble Escala W. Daubechies 6

K	P _k	K	P _k
0	0.15774243200291	6	0.13788809297475
1	0.69950381407526	7	0.03892320970833
2	1.06226375988176	8	-0.04466374833019
3	0.44583132293003	9	0.00078325115230
4	-0.31998659889216	10	0.00675606236293
5	-0.1835180640603	11	-0.0015235338056

TABLA 9. Coeficientes Secuencia Doble Escala W. Daubechies 9

K	p _k	k	p _k
0	0.05385034958940	9	-0.09564726412038
1	0.34483430381444	10	0.00035489281322
2	0.85534906436059	11	0.03162416585255
3	0.92954571436747	12	-0.00667962022628
4	0.18836954950624	13	-0.00605496057510
5	-0.41475176180315	14	0.00261296728050
6	-0.1369535490257	15	0.00032581467135
7	0.21006834227878	16	-0.00035632975902
8	0.04345267546107	17	0.00005564551403

5.1.3.2 Wavelets Biortogonales

Wavelets Biortogonales Spline

Esta familia de wavelets se desarrolla en base a las funciones B-spline y son conocidas con el nombre wavelets biortogonales Spline.

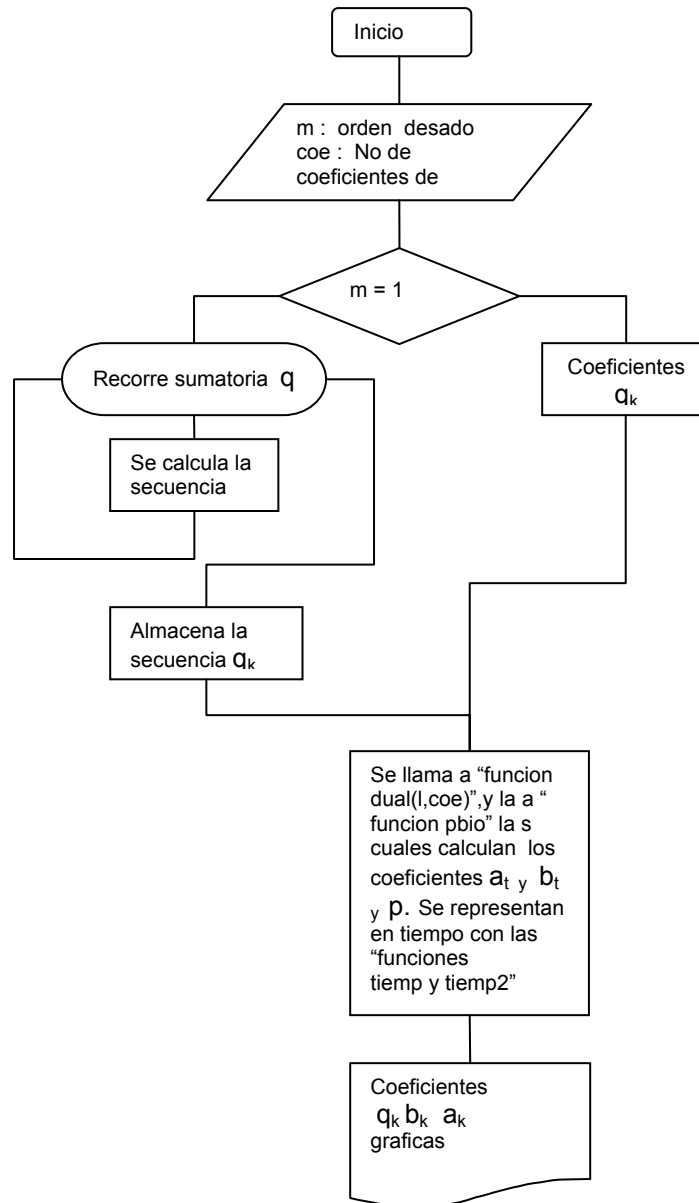
El cálculo de la secuencia q_k para las wavelets Biortogonales no es sencillo como se presenta para las funciones ortonormales, ya que requieren el concepto de semiortogonalidad, el cual se trata en el capítulo cuatro.

Desarrollando la matemática necesaria para obtener una wavelet semiortogonal que presente soporte mínimo se llega a la ecuación que cumple con estos requerimientos,

$$q_k = \frac{(-1)^k}{2^{m-1}} \sum_{l=0}^m \binom{m}{l} N_{2m}(k-l+1) \quad k = 0, \dots, 3m-2 \quad (5.21)$$

Para ilustrar el desarrollo de esta ecuación se presenta en la figura 43. el diagrama de flujo del desarrollo de la función para Matlab `[p,q,at,bt]=bior(m,coe)`. Esta función presenta como parámetros: m el orden de la función Biortogonal y coe el número de coeficientes utilizados para el desarrollo de las duales.

Figura 43. Diagrama de flujo de las Wavelets Biortogonales.



Funciones Duales Hasta este momento se han desarrollado las funciones wavelets de síntesis, por lo tanto se hace necesario un algoritmo que desarrolle las wavelet de descomposición (wavelet de análisis).

Se desea que las wavelets de síntesis y de análisis se puedan emplear indistintamente, con este fin se presenta el principio de dualidad en el capítulo cuatro. Con ayuda de este principio se llega a las secuencias doble escala a_k y b_k duales a las secuencias p_k y q_k .

Para el caso particular de las wavelet ortonormales se tiene que el cálculo de las secuencias duales a_k y b_k esta dado por:

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{1}{2} p_{-k} \\ b_k &= \frac{1}{2} (-1)^k p_{1+k} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Para implementar las funciones duales de las funciones biortogonales el cálculo es más complejo, debido a que se requiere el inverso del polinomio de EFL.

En el caso particular de las B.spline el polinomio de EFL se define como:

$$E_m(z) = \sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k)z^k \quad (5.23)$$

De aquí que su inverso sea

$$G_m(z) = \frac{1}{\sum_{k=-m+1}^{m-1} N_{2m}(m+k)z^k} \quad (5.24)$$

Para el desarrollo matemático de esta ecuación se debe tener en cuenta que el denominador es de orden mayor, por lo que se debe realizar una expansión en fracciones parciales. De este modo, aplicar a cada término la expansión de Laurent para llegar a la secuencia en tiempo del polinomio inverso de EFL.

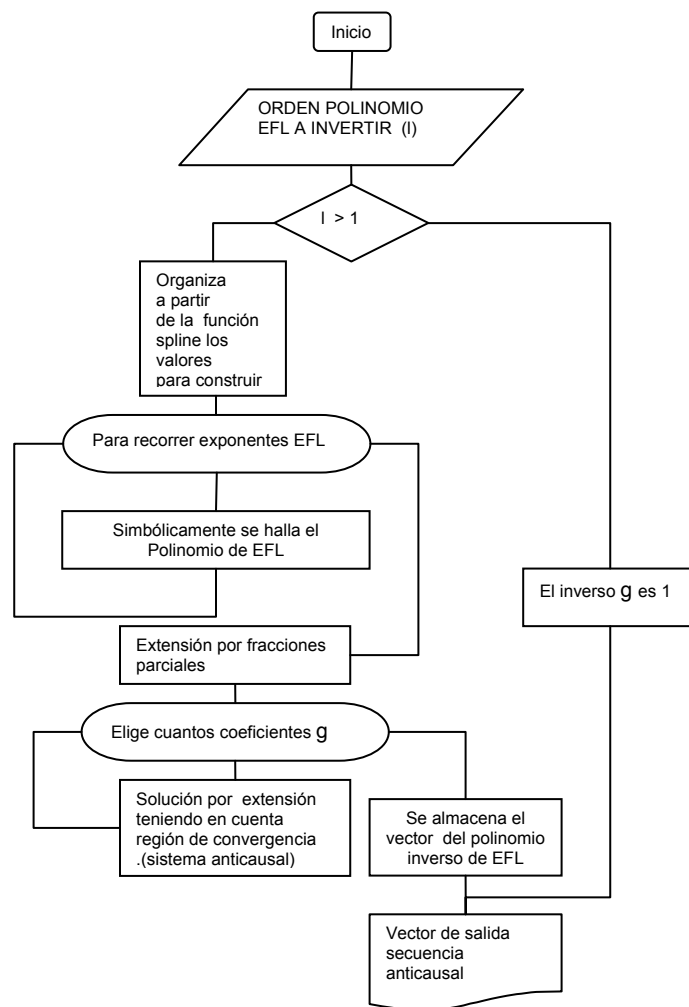
Para aplicar la expansión de Laurent se tiene en cuenta la ubicación de los polos y ceros en cada término resultante del desarrollo en fracciones parciales. Lo que conduce al estudio de la región de convergencia de todo el sistema.

Dado que el sistema presenta simetría se necesita únicamente los polos que están dentro o fuera del círculo unitario para tener la secuencia del polinomio inverso de EFL. Para efectuar la expansión de Laurent, como solución particular se eligen los polos que están

fuera del círculo de radio uno. Se debe resaltar que de esta forma se llega a la secuencia anticausal del sistema.

Para realizar el cálculo matemático del inverso del polinomio de EFL se implementa la función $g = inve(l)$, la cual presenta como parámetro de entrada el orden del polinomio a invertir l ; su salida es el polinomio inverso g . Por medio de la figura 44. se ilustra cómo se implementa esta función.

Figura 44. Diagrama de flujo para el polinomio de EFL



Con el desarrollo matemático necesario para la construcción de las funciones duales presentado en el anterior capítulo y al contar numéricamente con el polinomio inverso de

EFL se pueden obtener las secuencias a_k y b_k propias de las funciones duales, en este caso, biortogonales B-spline.

Se describen las ecuaciones que permiten el cálculo de los coeficientes a_k y b_k :

$$a_n = 2^{-m} \sum_n \binom{m}{l} \sum_{p,q} N_{2m}(m+n-2k-l) g_k \quad (5.25)$$

$$b_n = (-1)^{n+1} 2^{-m} \sum_{2k=n-2m}^{n-m} \binom{m}{n-2k-m} g_k \quad (5.26)$$

La figura 45. esquematiza el código necesario para el desarrollo de las funciones duales biortogonales. Los coeficientes se hallan en Matlab ejecutando la función "[at, bt]=dual(l,n)", la cual tiene como entradas el numero de coeficientes "n", el orden de la función "l" y como salidas, las secuencias duales biortogonales a_k y b_k .

Figura 45. Diagrama de flujo para generar las secuencias duales a_k y b_k

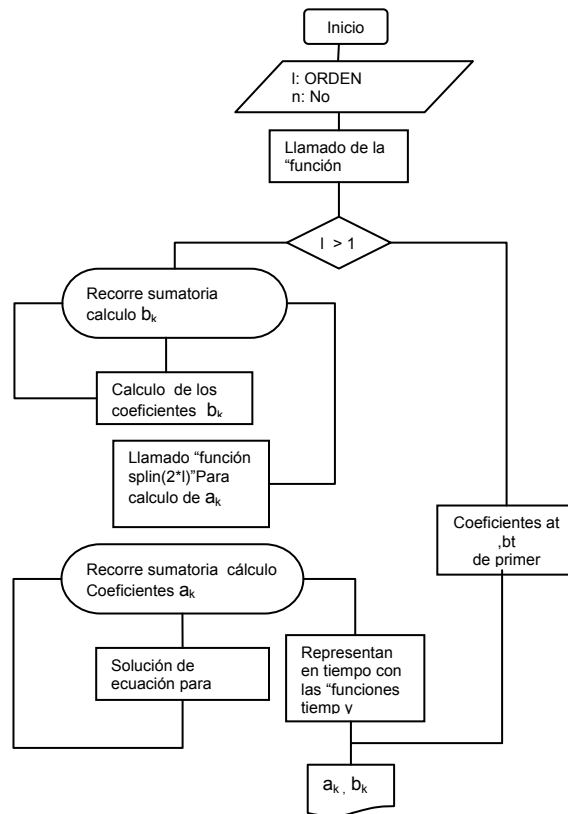


TABLA 10. Coeficientes Secuencia Doble Escala p_k W. Biortogonales Spline de Orden 2

k	p_k
0	0.5
1	1
2	0.5

TABLA 11. Coeficientes Secuencia Doble Escala q_k W. Biortogonales Spline de Orden 2

K	q_k
0	0.08333333
1	-0.5000000
2	0.83333333
3	-0.5000000
4	0.08333333

TABLA 12. Coeficientes Secuencia Doble Escala a_k W. Biortogonales Duales Spline de Orden 2.

K	a_k	K	a_k	k	a_k
1	0.68301270189	7	-0.008330249	13	0.0001602563
2	0.31698729810	8	-0.006098165	14	0.0001173158
3	-0.1160254037	9	0.0022320835	15	-0.000042940
4	-0.0849364905	10	0.0016339985	16	-0.000031434
5	0.03108891324	11	-0.000598084	17	0.0000115058
6	0.02275866404	12	-0.000437828	18	0.0000084228

TABLA 13. Coeficientes Secuencia Doble Escala b_k W. Biortogonales Duales Spline de Orden 2.

k	b_{k+2}	k	b_{k+2}	k	b_{k+2}
1	0.866025403	7	-0.016660498	13	0.00032051277
2	-0.316987298	8	0.0060981656	14	-0.0001173158
3	-0.232050807	9	0.0044641670	15	-0.0000858811
4	0.084936490	10	-0.001633998	16	0.00003143467
5	0.062177826	11	-0.001196169	17	0.00002301178
6	-0.022758664	12	0.0004378285	18	-0.0000084228

TABLA 14. Coeficientes Secuencia Doble Escala p_k W. Biortogonales Spline de Orden 4.

k	p_k
0	0.125000
1	0.500000
2	0.750000
3	0.500000
4	0.125000

TABLA 15. Coeficientes Secuencia Doble Escala q_k W. Biortogonales Spline de Orden 4.

K	q_k
0	0.00002480158730
1	-0.00307539682540
2	0.04159226190476
3	-0.19603174603175
4	0.45838293650794
5	-0.60178571428571
6	0.45838293650794
7	-0.19603174603175
8	0.04159226190476
9	-0.00307539682540
10	0.00002480158730

TABLA 16. Coeficientes Secuencia Doble Escala a_k W. Biortogonales Duales Spline de Orden 4.

K	a_{k+1}	K	a_{k+1}	k	a_{k+1}
1	0.89316285631404	9	0.03522610167448	17	0.00288397947796
2	0.40068082546727	10	0.03637358698882	18	0.00298678462542
3	-0.2822118708112	11	-0.0188156866209	19	-0.001543728718
4	-0.2329246261335	12	-0.0194732693559	20	-0.0015987680828
5	0.12908357121808	13	0.01006674751954	21	0.00082632666331
6	0.12645744635594	14	0.01042405218653	22	0.00085578935662
7	-0.0664208373870	15	-0.0053879298185	23	-0.0004423163562
8	-0.0679036084985	16	-0.0055798392080		-0.0004580873063

TABLA 17. Coeficientes Secuencia Doble Escala b_k W. Biortogonales Duales Spline de Orden 4.

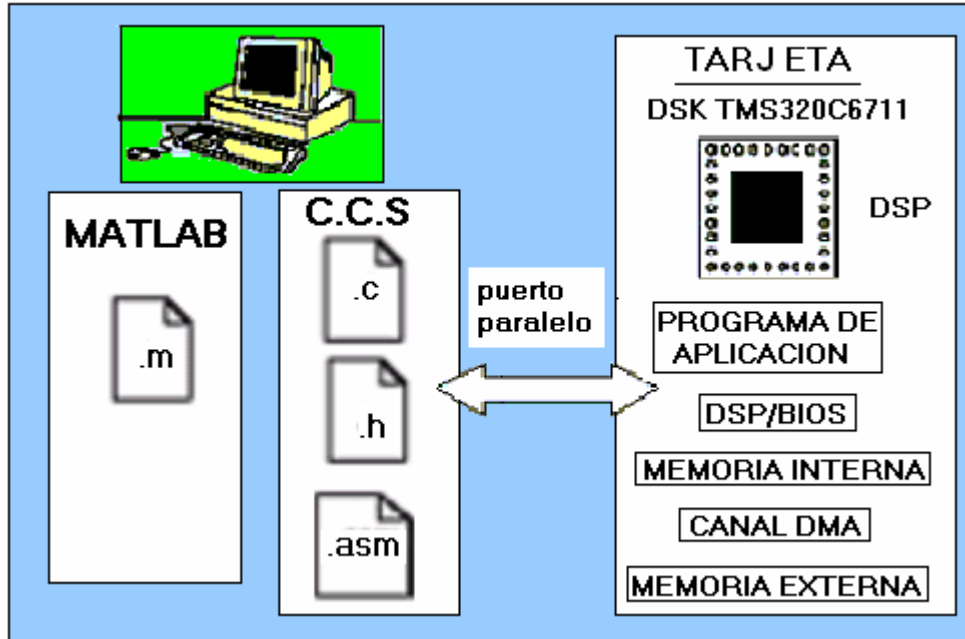
k	b_{k+4}	k	b_{k+4}	k	b_{k+4}
1	-1.4753945198919	9	-0.11105844071	17	-0.0091147451381
2	0.46842259663308	10	0.05733095225430	18	0.00471095703373
3	0.74209769847781	11	0.05943338839036	19	0.00487894154100
4	-0.3457708907749	12	-0.0307097008714	20	-0.0025216879751
5	-0.3897455807997	13	-0.0318118113183	21	-0.0026116015422
6	0.19679427730442	14	0.01644094468651	22	0.00134981082183
7	0.20769083838000	15	0.01702802946613	23	0.00139793915109
8	-0.1067758033725	16	-0.0088008398387	24	-0.0007225273912

5.2 ENLACE *MATLAB* - *CODE COMPOSER STUDIO*

Hecho el diseño de las wavelets en Matlab, se deben llevar estos datos a la tarjeta DSK para DSP TMS320C6711 de Texas Instruments, lo cual se hace por intermedio del *CODE COMPOSER STUDIO (C.C.S)*.

La figura 46. muestra a gran escala los componentes de la herramienta en conjunto (*Matlab*, *Code Composer Studio* y la DSK).

Figura 46. Esquema general de dispositivos de la herramienta



Los datos que se envían al *code composer studio* son: la señal a analizar, la secuencia doble escala propia a cada familia wavelet, y el número de descomposiciones posibles que el usuario requiera.

Estos datos antes de ser enviados deben ser preprocesados, relacionando los tamaños de filtros con el tamaño de la señal que se estudia, además la longitud de los filtros se acondiciona a un tamaño fijo, proceso que se lleva a cabo adicionando ceros.

El código de envío al efectuar el preprocesado calcula el número máximo de descomposiciones que se permiten hacer en el análisis en estudio, y además permite al usuario elegir entre un número de descomposiciones dentro del rango señalado.

Las funciones que efectúan el envío de los datos son:

Para wavelets ortonormales $En_ort(pk, s, T_senal, N_desc)$, donde pk es la secuencia doble escala propia a cada familia wavelet, s es la señal que se estudia; para definir el tamaño del buffer en la tarjeta se utiliza T_senal ; N_desc es el número de descomposiciones deseadas.

Para las wavelets biortogonales $En_bior(s, pk, qk, ak, bk, T_senal, N_desc)$, la entrada s es la señal a estudiar, pk es la secuencia doble escala de la función escala B-spline, qk la secuencia doble escala de la wavelet semiortogonal B-spline, ak y bk son las secuencias duales; Al igual que para las wavelets ortonormales, T_senal define el tamaño de del buffer y N_desc es el número de descomposiciones que se quiere.

Los datos generados por En_ort y En_bior son exportados al C.C.S en forma de archivos de *cabecera para lenguaje C*, los cuales son usados por la herramienta generada para el DSP como datos de entrada. Los diagramas de las figura 47 y 48 esquematizan el algoritmo implementado en Matlab para exportar datos de éste al C.C.S.

Figura 47. Enlace Matlab-C.C.S para funciones Biorotogonales (En_bior)

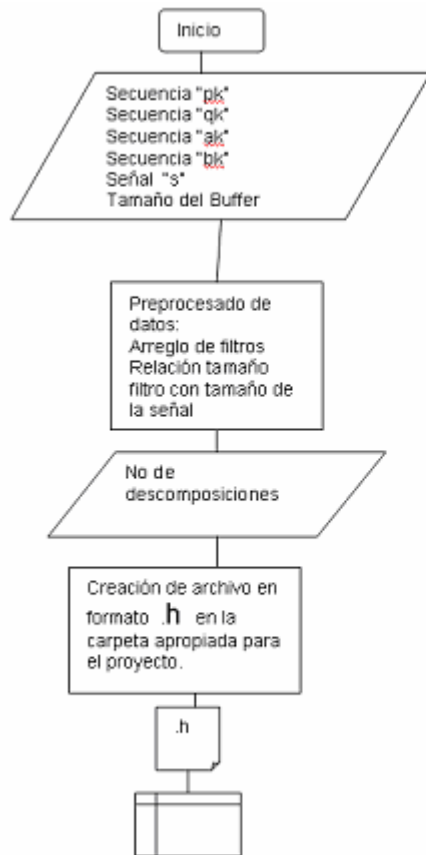
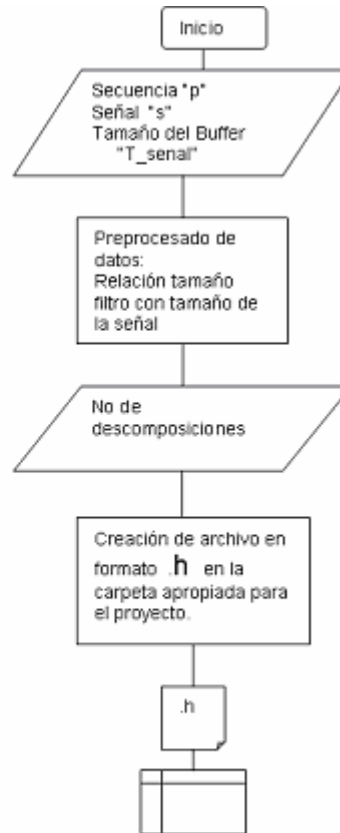


Figura 48. Enlace Matlab-C.C.S para funciones Ortonormales (En_ort)



5.3 IMPLEMENTACION Y CÁLCULO DE ERRORES EN LA TARJETA PARA DSP TMS320C6711 DE TEXAS INSTRUMENTS

A lo largo de los capítulos de este trabajo se han mostrado, a grandes rasgos, las implicaciones, propiedades, condiciones de implementación y ventajas de la Transformada wavelet. Es así que es posible plantear que la transformada digital de wavelet (DWT) no solo es importante por ofrecer información tiempo frecuencia de señales de energía finita, sino también por su correspondiente algoritmo rápido para propósitos computacionales y de implementación.

Los objetivos planteados para esta sección son: en primera instancia, presentar cómo trabaja el algoritmo rápido, dar a conocer los detalles más relevantes en la implementación y presentar los resultados correspondientes del desarrollo realizado en la tarjeta para DSP TMS320C6711 de Texas Instruments.

La implementación de la Transformada de Wavelet se realizó en el sistema de desarrollo (DSK) para DSPs de Texas Instruments TMS320C6711 utilizando el lenguaje de programación ANSI C y el software de la DSK CODE COMPOSER STUDIO (C.C.S).

En el DSP se han programado los algoritmos de descomposición y reconstrucción de señales utilizando las wavelets presentadas en los capítulos tres y cuatro. La herramienta implementada permite al usuario elegir la familia Wavelet a utilizar y el número de descomposiciones a realizar. El sistema calcula los coeficientes de aproximación y de detalle de cada nivel de descomposición, permitiendo visualizar y modificar el proceso paso a paso, utilizando las herramientas de visualización y manejo de información que ofrece el C.C.S.

Luego de realizar las descomposiciones especificadas, el programa desarrollado recupera la señal a partir de los coeficientes de aproximación y de detalle. En esta reconstrucción el usuario puede modificar los coeficientes utilizados y de esta forma realizar análisis diversos sobre las diferentes componentes de la señal.

La operación en tiempo real del DSP se ha simulado mediante un canal DMA entre el procesador y la memoria externa del dispositivo, de esta manera es posible analizar señales sintetizadas o adquiridas.

5.3.1 Algoritmo rápido y Banco de Filtros. Sea $f(t)$ una señal análoga de energía finita como señal a analizar. El primer paso es representarla por una nueva función en el espacio V_n denotada por $f_n(t)$. Es decir, se limita la señal $f(t)$ a un espacio V_n en el análisis multiresolución. Por tal motivo se analiza a la señal $f_n(t)$ en lugar de $f(t)$.

El modelado de $f(t)$ por $f_n(t)$ requiere cierto cuidado, para no perder información importante. Por tanto la elección adecuada de la función de escalamiento $\phi(t)$ depende de la forma $f(t)$ como se muestra en el capítulo uno. Sea entonces el modelo $f_n(t)$ dado por,

$$f_n(t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_{n,k} \phi(2^n t - k) \quad (5.27)$$

El algoritmo rápido será aplicado a la secuencia de coeficientes $c_{n,k}$, $k \in Z$. De aquí que la secuencia c_n se escoge tal que $f_n(t)$ es un modelo deseable de la señal original.

Para describir el algoritmo se parte de la estructura anidada, descrita en el análisis multirresolución,

$$\dots \subset V_{-1} \subset V_0 \subset V_1 \subset V_2 \rightarrow L^2, \quad (5.28)$$

generada a partir de la función de escala $\phi(t)$, y de los sub-espacios complementarios W_j , tales que

$$V_{j+1} = V_j + W_j \quad (5.29)$$

$$V_j \cap W_j = \{0\} \quad (5.30)$$

generados por $\psi(t)$. La única descomposición en (5.29) es gobernada a partir de la secuencia a_k, b_k en la forma:

$$\phi(2^{j+1}t - l) = \sum_k \{a_{l-2k} \phi(2^j t - k) + b_{l-2k} \psi(2^j t - k)\} \quad (5.31)$$

Ahora, con la estructura de sub-espacios $V_j \subset V_{j+1}$, $W_j \subset W_{j+1}$, $j \in Z$, que está gobernada a partir de las secuencias p_k, q_k

$$\begin{aligned} \phi(2^j t) &= \sum_k P_k \phi(2^{j+1} t - k) \\ \psi(2^j t) &= \sum_k q_k \phi(2^{j+1} t - k) \end{aligned} \quad (5.32)$$

El modelado de $f_n(t)$ puede ser descrito como:

$$f_{n(t)} = f_{n-1(t)} + g_{n-1(t)} \quad (5.33)$$

Con $f_{n-1}(t) \in V_{n-1}$ y $g_{n-1}(t) \in W_{n-1}$ y se representan por:

$$\begin{aligned} f_{n-1}(t) &= \sum_k C_{n-1,k} \phi(2^{n-1}t - k) \\ g_{n-1}(t) &= \sum_k d_{n-1,k} \psi(2^{n-1}t - k) \end{aligned} \quad (5.34)$$

En este punto se tienen las secuencias $c_n, c_{n-1}, d_{n-1}, a_k, b_k, p_k$ y q_k con las cuales se presenta el algoritmo de descomposición y reconstrucción por medio de banco de filtros.

A. Algoritmos de descomposición

Para hallar $f_{n-1}(t), y, g_{n-1}(t)$, es decir la señal descompuesta en aproximaciones y detalles respectivamente, se necesitan hallar las secuencias c_{n-1} y d_{n-1} calculadas a partir de:

$$\begin{aligned} C_{n-1,k} &= \sum_l a_{l-2k} C_{n,l} \\ d_{n-1,k} &= \sum_l b_{l-2k} C_{n,l} \end{aligned} \quad (5.35)$$

Las relaciones anteriores muestran que la secuencia c_n es convolucionada con las secuencias a_k y b_k pero con la diferencia que solo las muestras de salida de índice par son tomadas en cuenta. Esta operación da como resultado una serie de datos c_{n-1}, d_{n-1} con la mitad de datos de la secuencia original c_n . La operación que descarta la mitad de datos se denomina sub-muestreo y es denotado por $2 \downarrow$. La Figura 49. muestra de manera esquemática la operación descrita en (5.35).

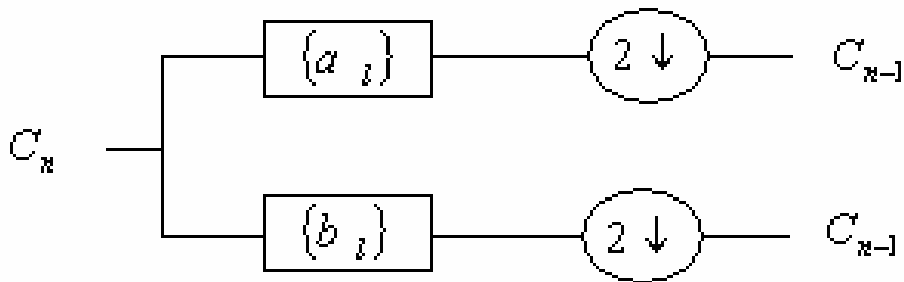


Figura 49. Descomposición Wavelet.

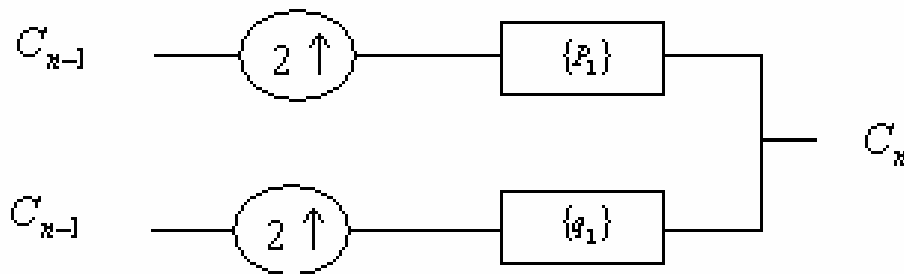
B. Algoritmo de reconstrucción.

Para reconstruir $f_n(t)$ a partir de $f_{n-1}(t), y, g_{n-1}(t)$ se debe calcular

$$C_{n,k} = \sum_l \{p_{k-2l} C_{n-1,l} + q_{k-2l} d_{n-1,l}\}, \quad (5.36)$$

donde para generar la secuencia completa c_n es necesario introducir ceros para completar las muestras faltantes a las secuencias c_{n-1}, d_{n-1} . La adición de estos ceros a las secuencias es conocida como sobre-muestreo y se denota por $2 \uparrow$. La Figura 50. muestra a manera de esquema la operación descrita en (5.36).

Figura 50. Reconstrucción Wavelet.

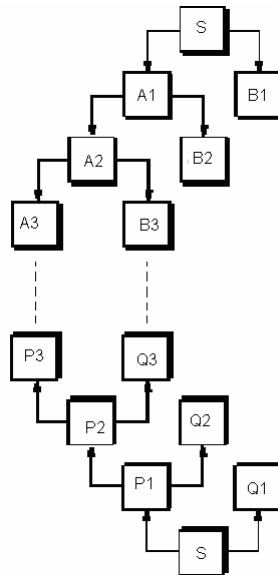


CHARLES K. Chui. Wavelets: Amathematical Tool for Signal Processing. Philadelphia: SIAM, 1997. p.20.

5.3.1.1 Múltiples niveles de descomposición

El proceso de descomposición visto puede hacerse repetitivo aplicándolo sucesivamente a cada nuevo nivel de descomposición. En particular, en el desarrollo de la herramienta para DSP TMS320C6711 de Texas Instruments, el proceso repetitivo se aplicó sobre los niveles de aproximación, debido a que generalmente son las bajas frecuencias de la señal las que contienen información relevante de la misma. La figura 51. muestra el esquema desarrollado para la plataforma de DSP.

Figura 51. Esquema desarrollado para la plataforma de DSP.



5.3.1.2 Número de niveles.

Como el proceso es iterativo, en teoría puede ser aplicado indefinidamente, pero en realidad la descomposición solo se aplica hasta alcanzar como resultado una única muestra para las aproximaciones y detalles.

Cada nivel de descomposición debe generar una secuencia d_{n-m} , c_{n-m} con la mitad de muestras del nivel inmediato anterior, debido al submuestreo que implica el filtrado mostrado en (5.35). Un punto que se debe nombrar sobre el sistema implementado, es que al ser un método digital, el filtrado (convolución) descrito en (5.35), luego de ser aplicado no ofrece por respuesta la mitad de muestras, sino un valor mayor a este. Por tanto no es posible alcanzar una única muestra como resultado de las descomposiciones sucesivas.

Por lo anterior, se necesita un nuevo criterio para delimitar el número de descomposiciones permitidas. Por tanto se ha tomado como razón, el tamaño del filtro utilizado. Mas específicamente, cuando la convolución y sub-muestreo de por resultado una cantidad de datos menor que los coeficientes del filtro se detiene el proceso iterativo.

5.3.1.3 Tratamiento Frontera

Clásicamente, la DWT es definida para secuencias cuya duración es alguna potencia de dos, pero en general es necesario extender el número de muestras a otros tamaños.

El algoritmo básico de la DWT, esquema simple de convoluciones y sub-muestreo, no está limitado a longitudes diádicas (potencias de dos). Como es usual, cuando una convolución se desarrolla sobre señales de longitud finita, la distorsión en los bordes aparece. Para tratar esto, los bordes pueden ser procesados de forma diferente que los otros puntos de la señal.

Varios métodos están disponibles para tratar este problema y existen Wavelets específicas para los bordes. Estas interesantes construcciones son efectivas en teoría, pero no son enteramente satisfactorias desde un punto de vista práctico. A menudo es preferible usar esquemas simples basados en extensión de la señal sobre las fronteras, así esto conlleva al cómputo de algunos coeficientes extra en cada estado de descomposición. Algunos de los métodos utilizados son:

Extensión de cero:

Este método asume que la señal es cero fuera de del soporte original. La desventaja es que añade discontinuidades artificiales en los bordes.

Simetrización:

Asume que la señal puede ser recuperada fuera del soporte original por replica simétrica del valor frontera. Este método tiene la desventaja que añade discontinuidades artificiales en la primera derivada del borde.

Extensión periódica:

Extiende la señal en forma periódica.

5.3.2 Resultados.

En esta parte del trabajo se exponen las metas alcanzadas con la herramienta desarrollada en la tarjeta para DSP TMS320C6711 de Texas Instruments divididas en cuatro etapas:

- Resultados de reconstrucción y cálculo de errores.
- Resultados localización tiempo-frecuencia.
- Resultados de Dualidad.
- Medidas de desempeño de la herramienta.

5.3.2.1 Resultados de reconstrucción y cálculo de errores.

Ejemplos de reconstrucción

A continuación se presentan algunos ejemplos de la capacidad de la herramienta introduciendo varias señales para ser analizadas con las deferentes Wavelets implementadas. Se aplican los distintos métodos de tratamiento frontera y se muestran además, algunas de las descomposiciones y la señal reconstruida.

Ejemplo 1.

Señal de entrada: señal cuadrada de 50 puntos con amplitud entre -1 y 1 y ciclo de trabajo de 50%.

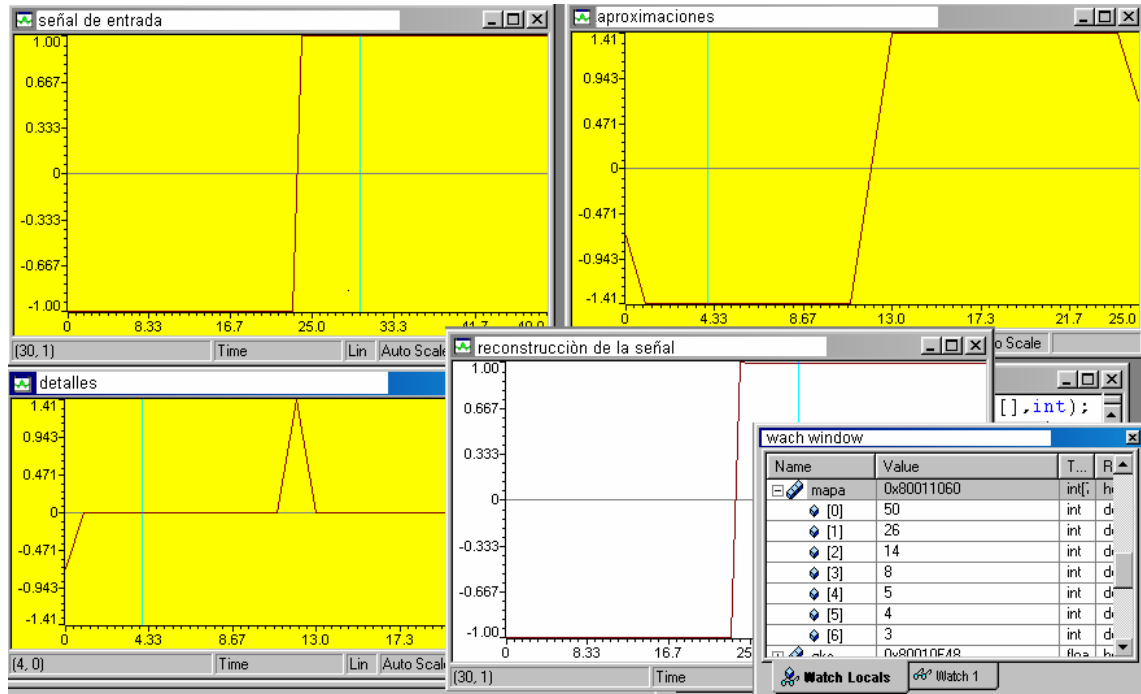
Tratamiento frontera: extensión de cero.

Niveles de descomposición: 6.

Wavelet empleada: Wavelet Haar.

La figura 52. presenta 5 gráficas las cuales son: señal de entrada; aproximaciones y detalles muestran la primera aproximación y detalle respectivamente, calculados a partir de la Wavelet Haar; reconstrucción de la señal (de fondo blanco) presenta la reconstrucción de la señal de entrada. Finalmente la ventana Wach Window resume los niveles de descomposición y la cantidad de coeficientes respectivos por nivel de descomposición.

Figura 52. Análisis de la señal ventana de 50 puntos mediante la wavelet Haar.



El calculo del error en la reconstrucción, mediante error cuadrático medio en el presente ejemplo es de 6.6809e-005.

Ejemplo 2.

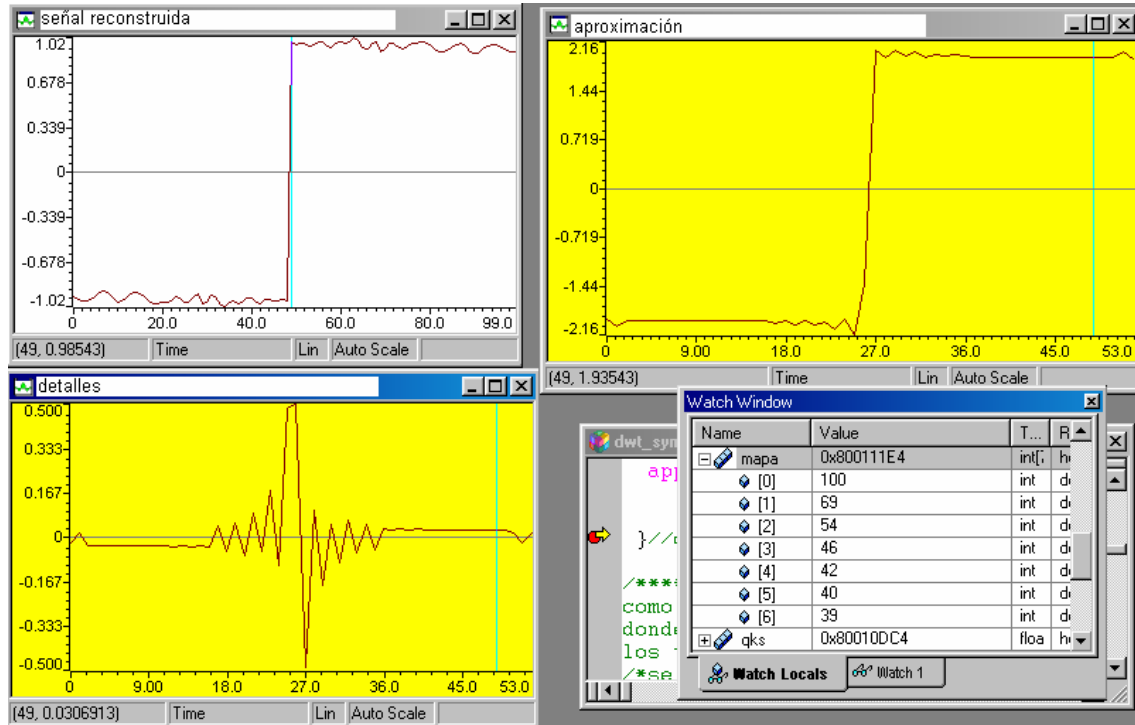
Señal de entrada: señal cuadrada de 100 puntos con amplitud entre -1 y 1 y ciclo de trabajo de 50%.

Tratamiento frontera: simetrización.

Niveles de descomposición: 6.

Wavelet empleada: Wavelet Shannon con 20 coeficientes.

Figura 53. Análisis de la señal ventana de 100 puntos mediante la wavelet Shannon.



La figura 53. muestra 4 graficas las cuales son: Las gráficas de aproximaciones y detalles muestran la segunda aproximación y el segundo detalle respectivamente, calculados a partir de la Wavelet Shannon. La grafica Señal reconstruida (de fondo blanco) presenta la reconstrucción de la señal de entrada. Finalmente la ventana Wach

Window resume los niveles de descomposición y la cantidad de coeficientes respectivos por nivel. Como se observa la reconstrucción no es excelente, y es debido a que la wavelet Shannon al presentar soporte infinito, debe ser truncada. Lo cual trae consigo errores significativos. El calculo del error en la reconstrucción, mediante error cuadrático medio en el presente ejemplo es de 0.016.

Cálculo de errores

En la implementación de la DWT en la tarjeta para DSP TMS3206711 de Texas Instruments, mediante el algoritmo de filtrado y banco de filtros, es necesario realizar varias aproximaciones debido a la naturaleza de los datos. Dos de los de los principales

obstáculos; ambos relacionados con la señal de entrada, se presenta solución en los numerales correspondientes a *Múltiples Niveles de Descomposición y Tratamiento Frontera*.

Una tercera aproximación de importancia es debido a la naturaleza misma de las Wavelets estudiadas, las cuales en el esquema implementado funcionan como filtros digitales. Por tanto es posible clasificarlas en filtros FIR (Wavelets Haar, Daubechie y las Biortogonales Spline p,q) y en filtros IIR (Wavelets Shannon, Meyer, Spline Battle-Lemarié y las Biortogonales Spline a,b). Las Wavelets tipo IIR deben ser truncadas en el desarrollo para poder elaborar el sistema, lo cual trae consigo errores numéricos, que pueden ser importantes dependiendo de la aplicación particular en desarrollo.

La Tabla 18. muestra los resultados obtenidos teniendo como entrada una señal con duración de 256 puntos, de tipo cuadrada, ciclo de trabajo 50% y con amplitud entre -1 y 1. Se observa un excelente comportamiento en la reconstrucción ya que el cálculo del error, mediante error cuadrático medio, es reducido.

Tabla 18. Error Cuadrático Medio Para Una Función Cuadrada con Ciclo de trabajo de 50% con Amplitud Entre -1y 1 con 256 Puntos.

Wavelet	Coef. Usados	Wavelet	Trato Frontera	Error Cuadrático Medio
Biortogonal Spline 2	15		Ceros	0.00312
Biortogonal Spline 2	15		Periódico	6.8809e-005
Biortogonal Spline 2	15		Simétrico	7.9973e-005
Biortogonal Spline 2	30		Ceros	6.2495e-008
Biortogonal Spline 2	30		Periodico	3.1865e-007
Biortogonal Spline 2	30		Simétrico	1.6535e-007
Biortogonal Spline 3	15		Ceros	0.0013164
Biortogonal Spline 3	15		Periodico	0.0021215
Biortogonal Spline 3	15		Simétrico	0.00246264
Biortogonal Spline 3	30		Ceros	4.0519e-006
Biortogonal Spline 3	30		Periódico	9.2102e-006
Biortogonal Spline 3	30		Simétrico	7.0328e-006
Ortonormal Meyer 2	15		Ceros	3.1023e-004
Ortonormal Meyer 2	15		Periódico	0.0010079
Ortonormal Meyer 2	15		Simétrico	2.63896e-004
Ortonor. Daubechies 4	--		Ceros	7.34208e-007
Ortonor. Daubechies 4	--		Periódico	8.70524e-007
Ortonor. Daubechies 4	--		Simétrico	7.75604e-007

5.3.2.2 Resultados localización tiempo frecuencia

La principal propiedad de la transformada Wavelet es su capacidad de localización tiempo frecuencia, por lo tanto se dedica esta sección a mostrar el comportamiento de la herramienta en este contexto, para lo cual se presentan dos ejemplos de ilustración:

Ejemplo 1.

En este ejemplo se enfatiza principalmente en las componentes de frecuencia de la señal y se observa cómo estas van desapareciendo a lo largo de las descomposiciones, para finalmente ser recuperadas.

Señal de entrada: suma de señales senoidales a frecuencias 5Hz, 10 Hz, 20 Hz y 30Hz.

Tratamiento frontera: simetrización.

Niveles de descomposición: 8.

Wavelet empleada: Wavelet Meyer con 25 coeficientes y con polinomio de interpolación de orden dos.

Figura 54. Señal de entrada y sus componentes de frecuencia

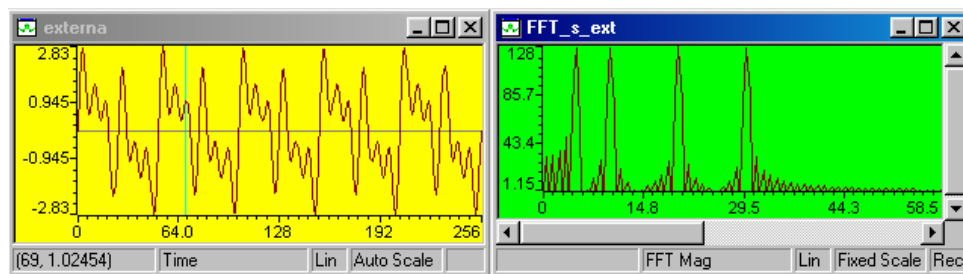
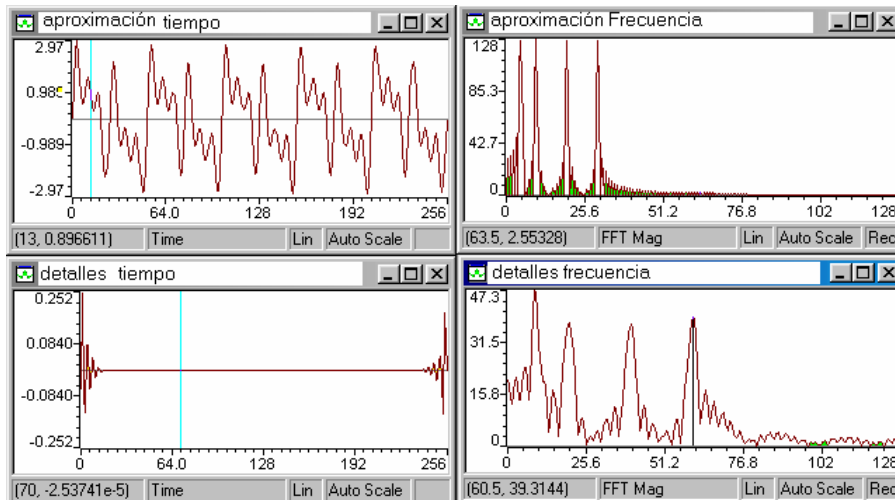


Figura 55. Primera descomposición y sus componentes de frecuencia.



La figura 54. muestra la señal de entrada y sus componentes de frecuencia; la figura 55. muestra la primera descomposición y permite apreciar los errores inducidos por el tratamiento frontera de simetrización; En la figura 56. es importante destacar cómo las componentes de frecuencia pertenecientes a las bandas de 20 y 30 Hz. Han desaparecido, permaneciendo casi sin alteración las frecuencias de 5 y 10 Hz. Finalmente la figura 57. presenta la señal reconstruida, donde se puede observar una excelente recuperación por medio de la Wavelet Meyer, no solo en magnitud de la señal sino que recupera las frecuencias de la señal original.

Figura 56. Tercera descomposición y sus componentes de frecuencia.

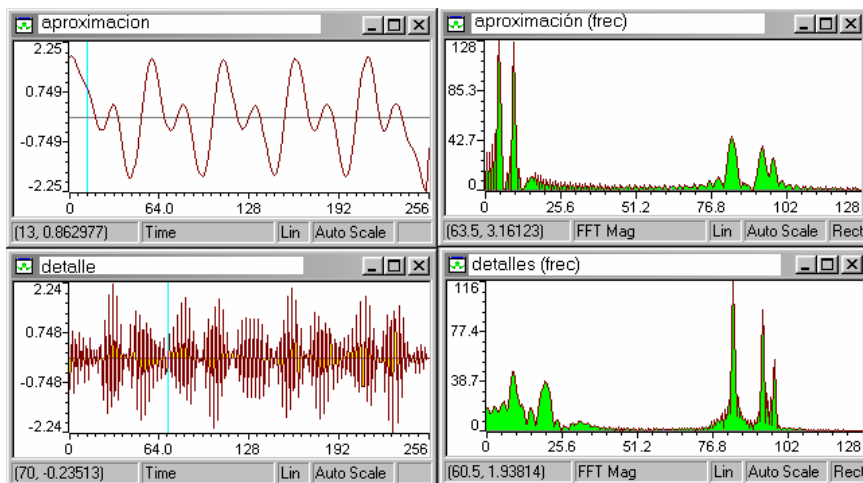
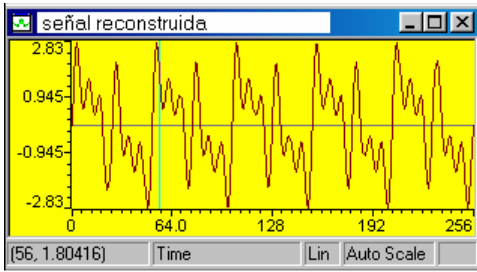


Figura 57. Señal reconstruida. Error cuadrático medio 2.9598e-004.



Ejemplo 2.

Este ejemplo hace hincapié en la ubicación en el tiempo de pequeñas discontinuidades que presenta una señal senoidal. Se observa como por medio de la herramienta implementada, estas discontinuidades pueden detectarse y aparecer en los diferentes niveles de descomposición.

Señal de entrada: señal senoidal de 5 Hz con discontinuidades

Tratamiento frontera: extensión periódica

Niveles de descomposición: 8.

Wavelet empleada: Wavelet Daubechies de cuarto orden.

Figura 58. Señal de entrada y sus componentes de frecuencia.

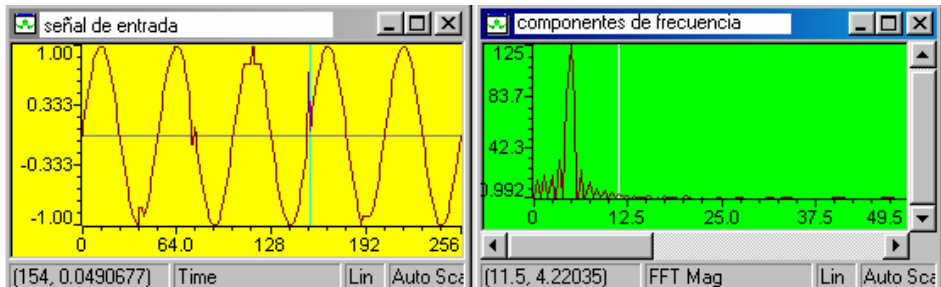
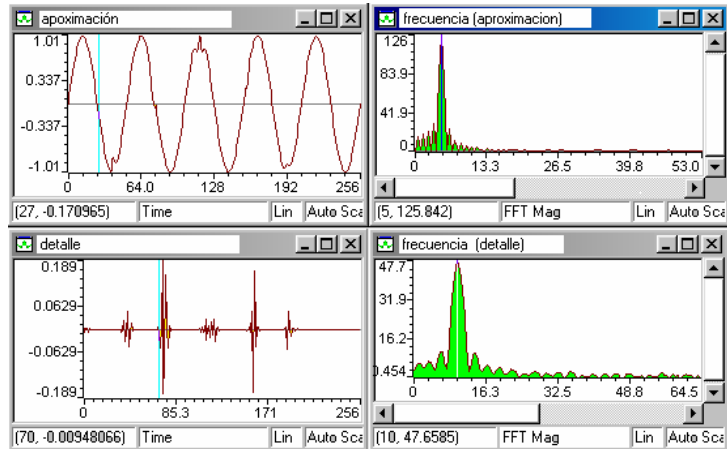
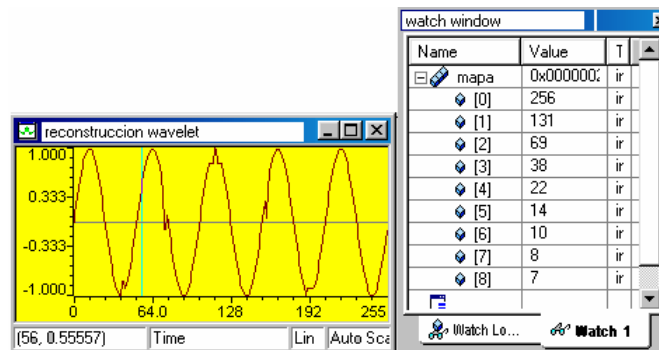


Figura 59. Primera descomposición Wavelet.



La figura 58. muestra la señal seno con frecuencia de 5Hz, a la cual se le han introducido pequeñas discontinuidades. La figura 59. presenta la primera descomposición Wavelet en donde se aprecia la diferencia entre la aproximación y los detalles de la señal, además es posible observar como la transformada Wavelet localiza las discontinuidades de la señal de entrada, (ver detalles). Finalmente se presenta la señal reconstruida en la figura 60. Junto con la ventana Watch Window que muestra el número máximo de descomposiciones alcanzadas y el numero de coeficientes Wavelet por descomposición.

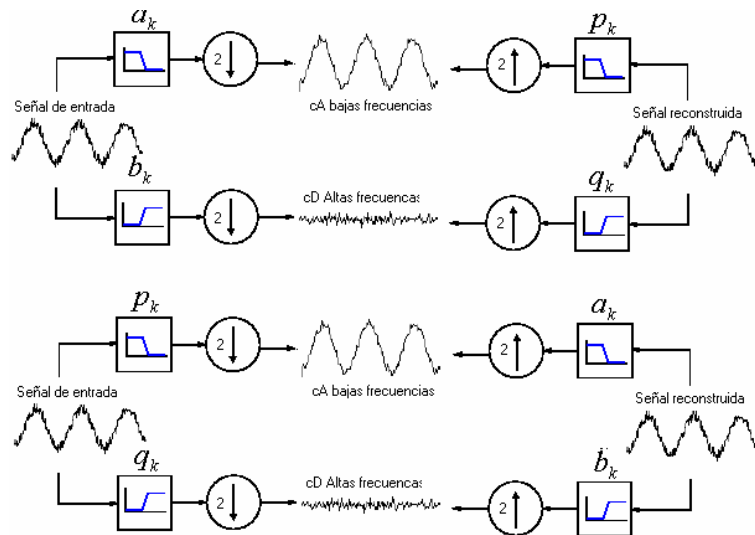
Figura 60. Señal reconstruida y Watch Window. Error cuadrático medio 8.32512e-007.



5.3.2.3 Resultados de Dualidad.

En el capítulo cuatro se presenta el *principio de dualidad*, del cual se concluye: debido a la complementariedad de las funciones Wavelets es posible la descomposición y la reconstrucción de la señal de manera independiente a la Wavelet usada como análisis o síntesis. Es decir, la función Wavelet de síntesis puede ser usada como Wavelet de análisis siempre y cuando la Wavelet de análisis sea usada como Wavelet de síntesis. Como muestra la figura 61.

Figura 61. Principio de Dualidad.



La herramienta desarrollada en el DSK para DSP TMS320C6711 de Texas Instruments cumple este principio de dualidad. Es así que cualquiera de los dos sistemas mostrados en la figura 61. refleja a la *Transformada Digital de Wavelet*.

5.3.3 Medidas de desempeño de la Herramienta. El desempeño de la herramienta es calculado por medio de los ciclos de maquina (o tiempo de ejecución) lo cual permite tener una medida de la competencia del sistema.

Debido a que es una herramienta abierta al usuario, el cual puede variar varios parámetros, se calcula el tiempo de desempeño para dos tamaños del buffer de datos de entrada (36 y 1024 datos punto flotante).

TABLA 19. Medida del desempeño del sistema en ciclos de máquina (Buffer de 32 datos punto flotante)

Función	CALCULO DE LOS CICLOS DE MAQUINA PARA UNA EJECUCIÓN				TOTALES PARA EJECUTAR EL CÓDIGO UNA VEZ	
	Long. código	c.c máxima	c.c. mínima	c.c promedio	Numero de Llamadas a la función	Total de ciclos promedio
Copia	144	694	286	501	4	2004
Retasos	220	521	378	381	1	381
Remiendos	436	1856	850	1128	1	1128
Convolucion	288	7624	2784	4495	2	8990
a_cero	132	1180	251	856	11	9416
Llenado_rta	212	1105	377	579	1	579
app_sen	144	694	286	435	1	435
Recupere	160	726	294	423	2	846
Upsam	204	987	371	628	4	2512
Conv_r	288	12619	3167	7543	4	30172
Sumar	172	1297	361	688	1	688
Mostrar	184	1475	1394	935	1	935
Numero total de ciclos para una ejecución del código						<u>58086*</u>

*correspondiente a 0.38724 ms. (tiempo del ciclo 6.666667 ns)

Interpretación de las tablas 19 y 20.

Función: el nombre de la función a evaluar.

Long. Código: longitud del código en unidades direccionables.

c.c. máximo: número máximo de ciclos para una ejecución de la función.

c.c. mínimo: número mínimo de ciclos para una ejecución de la función.

c.c. promedio: número promedio de ciclos para una ejecución de la función.

TABLA 20. Medida del desempeño del sistema en ciclos de máquina (Buffer de 1024 datos punto flotante)

Calculo de los ciclos de maquina para una ejecución					Totales para ejecutar el código una vez	
Función	Long. Código	c.c. máximo	c.c. mínimo	c.c. promedio	Numero de Llamadas a la función	Total de ciclos promedio
Copia	144	14413	286	4718	4	18872
Retasos	220	464	385	405	1	405
Remiendos	436	28226	862	6187	1	6187
Convolucion	288	157586	2787	33529	2	67058
a_cero	132	23254	246	20472	11	225192
Llenado_rta	212	20494	372	4170	1	4170
app_sen	144	14032	294	3012	1	3012
Recupere	160	15193	298	2931	2	5862
Upsam	204	20064	370	5785	4	23140
Conv_r	288	312244	3194	97801	4	3912068
Sumar	172	32083	361	6600	1	6600
Mostrar	184	35663	34493	34554	1	34554
Numero total de ciclos para una ejecución del código						<u>4307120*</u>

*correspondiente a 28.7141 ms. (tiempo de ciclo 6.666667 ns)

CONCLUSIONES

1. Se realizó un compendio y una clarificación de ideas sobre los conceptos fundamentales que maneja la teoría de la transformada wavelet, como las que se resaltan a continuación:

Para mejorar el desempeño en el modelado y segmentación de una señal en particular, se debe escoger la función que realiza esta tarea teniendo en cuenta la naturaleza de la misma.

Una diferencia importante a destacar en cuanto al análisis multirresolución y el análisis wavelet se encuentra en que el análisis multirresolución permite representar la señal bajo un sistema de espacios anidados. Mientras que el sistema Wavelet además de cumplir con esta característica permite discriminar particularidades existentes entre un nivel de resolución y otro.

La principal propiedad la Transformada Wavelet es su capacidad de ubicación en tiempo y en frecuencia ya que opera por medio de una ventana tiempo-frecuencia flexible a lo largo de todo el tratamiento.

Dentro del conjunto de wavelets existentes la que permite mejor localización tiempo frecuencia es aquella que tiende hacia la igualdad en el principio de incertidumbre. Es decir, la relación de los soportes en tiempo y en frecuencia tiende a ser un medio ($1/2$).

2. El esquema desarrollado para la Transformada Discreta de Wavelet, aplicado a señales de longitud arbitraria presenta problemas de distorsión en los bordes.

3. Para abordar el problema en las fronteras se implemento el esquema de extensión de la señal. Este método facilita la implementación del algoritmo de Banco de Filtros, así como genera buenos resultados en el cálculo de los coeficientes Wavelet.

4. La herramienta desarrollada en la tarjeta de desarrollo para DSP TMS520C6711 de Texas Instruments mediante el software Code Composer Studio permite la lectura y el tratamiento de datos, así como la visualización de la propiedad ubicación Tiempo-Frecuencia.

5. La herramienta desarrollada en Matlab permite observar las características preponderantes a cada wavelet estudiada, lo cual fortalece los conceptos teóricos desarrollados en el texto.

6. El texto y la toolbox desarrollada para Matlab y la DSK sirve como herramienta académica en el estudio de la transformada wavelet (TW), debido a que el texto presenta la teoría básica de la transformada siguiendo un orden lógico en la adquisición de conceptos. Finalmente con las utilidades disponibles en la herramienta es posible afianzar los conceptos teóricos. Por otro lado la herramienta sirve como plataforma para la realización de proyectos mediante la transformada wavelet, debido a la amplia gama de funciones wavelets disponibles para el usuario.

7. La toolbox desarrollada para Matlab y la DSK esta limitada para señales unidimensionales.

RECOMENDACIONES

- El software desarrollado como elemento genérico garantiza el análisis de señales por medio de la transformada Wavelet. Por tanto, como método de evaluación es deseable aplicarlo en el desarrollo de procesos específicos.
- La herramienta desarrollada cuenta con una amplia variedad de familias Wavelets para el estudio de procesos, no obstante permanece la posibilidad de ampliar sus capacidades de análisis por medio de la implementación de nuevas familias.
- Esta primera versión de la toolbox esta dedicada a señales unidimensionales, sin embargo, futuros estudios pueden llevar este desarrollo a un sistema software más general.
- La toolbox al mismo tiempo que es útil en el desarrollo de diversas aplicaciones puede ser usada como herramienta para el aprendizaje de los principios fundamentales de la transformada Wavelet; ya que conjuntamente a la presentación de resultados de calculo, permite observar las propiedades de cada familia Wavelet en particular y por tanto sus implicaciones en el proceso de desarrollo de la transformada.

BIBLIOGRAFIA

1. C.K.Chui, "Wavelets: a Mathematical Tool for Signal Analysis". Texas A&M University College Station, Texas. SIAM. Philadelphia 1997.
2. I.Daubechies, "Ten Lectures on Wavelets". Rutgers University and AT & T Bell laboratories. SIAM. Philadelphia, Pennsylvania 1992.
3. A. V. Oppenheim and Ronald W. Schafer, "Tratamiento de Señales en Tiempo Discreto". Prentice Hall 2000.
4. P. Faundez Y Álvaro Fuentes, "Procesamiento Digital de Señales Acústicas Utilizando Wavelets". Profesor Patrocinante Pedro Reumay, Instituto de Matemáticas UACH.
5. H.M. Deitel and P.J. Deitel, "Cómo Programar en C/C++". Prentice Hall. Segunda edición 1995.
6. M. Misita, Y. Misita, Georges Oppenheim, Jean-Michel Poggi, "Wavelet Toolbox". COPYRIGHT 1997 - 2002 by The MathWorks.
7. "The Wavelet Tutorial" (Agosto 2003)
8. <http://www.ccrma.stanford.edu/unjung/mylec/wtpart4>
9. "Wavelet Explorer Documentation" (Septiembre 2003).
<http://www.documents.wolfram.com/application/wavelet/FundamentalWavelets>
10. "Daubechies' Wavelet Transform" (Octubre 2003)
11. http://www.pp.ij4u.or.jp/~alucard/menu_j
12. "A Linear Algebra View of the Wavelet Transform" (Noviembre,2003),http://www.bearcave.com/misl/misl_tech/wavelets/index
13. "The Fast Wavelet Transform (FWT) Algorithm" (Enero 2004),
<http://www.mathworks.com/access/helpdesk/help/toolbox/wavelet>
14. Documentación de la tarjeta de desarrollo.
 - a. Guía de usuario del Code Composer Studio
 - b. Guía de usuario del DSP/BIOS TMS320C6711.
 - c. Tutorial del DSK TMS320C6711.

ANEXOS

ANEXO A.

MANUAL DE USO DE LA TOOLBOX DE TRANSFORMADA WAVELET

El presente manual guía al usuario de la *Toolbox* en el manejo del *Software*, mostrando paso a paso la forma de ejecutar el programa, leer y visualizar los resultados, así como manipular la información que brinda la Transformada Wavelet.

La descripción de la *Toolbox* se realiza mediante la siguiente división.

A.1. MANEJO DE LA *TOOLBOX* EN *MATLAB*.

- A.1.1. Funciones Wavelets Ortonormales.
- A.1.2. Funciones Wavelets Biorotogonales.
- A.1.3. Funciones de enlace *Matlab - Code Composer Studio*.

A.2. MANEJO DE LA *TOOLBOX* EN EL *CODE COMPOSER STUDIO*.

- A.2.1. Cargar el espacio de trabajo.
- A.2.2. Construcción y carga del proyecto.
- A.2.3. Ejecución del proyecto.

A.1. MANEJO DE LA TOOLBOX EN MATLAB

La *Toolbox* cuenta para *Matlab* con funciones que calculan los coeficientes Wavelets y sus formas características, así como una herramienta de enlace con el Code Composer Studio.

A.1.1. Funciones Wavelets Ortonormales.

En el presente apartado se describen las herramientas implementadas para *Matlab* y sus principales características. La Tabla A.1 presenta las diferentes Wavelets ortonormales implementadas.

TABLA A.1. Wavelets Ortonormales

Familia Wavelet	Funcion en Matlab
Haar	haar
Shannon	pk = shanon (n)
Meyer	[pmy] = meyer (m,l)
Battle-Lemarié	[b_L] Btle_Lm = (or , n_coef)
Daubechies	[pk] = coef_daubl (N)

Wavelet Haar

Sintaxis: `pk = haar`

Parámetros: `pk`: Secuencia doble escala de la función Haar.

Descripción: Para esta función no se requiere ningún dato de entrada ya que solo dos coeficientes forman la secuencia doble escala. (Más información los capítulos dos y tres del presente texto.)

La función *haar* presenta como salida al usuario los coeficientes doble escala y las gráficas correspondientes a la función de escala Haar y función Wavelet Haar, Así como

la respuesta en frecuencia respectiva, en donde es posible observar la complementariedad de estas funciones.

Wavelet Shannon

Sintaxis: `pk = shanon (n)`

Parámetros: `pk`: secuencia doble escala de la función Shannon.

`n`: número de coeficientes.

Descripción: esta función solicita como único parámetro de entrada el número de coeficientes del filtro. Como datos de salida presenta la secuencia doble escala y las gráficas correspondientes a la función de escala Shannon y función Wavelet Shannon, así como la respuesta en frecuencia respectiva, en donde es posible observar la complementariedad de estas funciones. . (Más información los capítulos dos y tres del presente texto.)

Wavelet Meyer

Sintaxis: `[pmy] = meyer (m,l)`

Parámetros: `pmy`: secuencia doble escala de la función Meyer.

`m`: orden del filtro de interpolación (posible elección : 1,2 ,3).

`l`: número de coeficientes.

Descripción: esta función solicita dos parámetros de entrada, uno correspondiente al polinomio de interpolación para el suavizado de esquinas (m); el siguiente parámetro hace referencia al número de coeficientes a solicitar para formar la secuencia doble escala. Este programa hace uso de la función ($v_i(x)$). Además emplea la función de curvas de suavizado ($v(x, n)$). . (Más información los capítulos tres y cinco del presente texto.)

La función `meyer`, además muestra las gráficas correspondientes a la función de escala Meyer y la función Wavelet Meyer, Así como la respuesta en frecuencia respectiva, en donde es posible observar la complementariedad de los filtros.

Wavelet Battle-Lemarié

Sintaxis: `[b_L] = Btle_Lm (or , n_coef)`

Parámetros: `b_L`: secuencia doble escala de la función Battle-Lemarié.
`or`: Indica el orden de la función meyer.
`c_coef`: numero de coeficientes.

Descripción: La función `Btle_Lm` presenta dos parámetros de entrada: el orden de la Wavelet (`or`) y el número de coeficientes solicitados para formar la secuencia doble escala (`c_coef`). La función tiene como parámetro de salida la secuencia doble escala de la función Battle-Lemarié (`b_L`).

(Myor información los capítulos tres y cinco del presente texto.)

La función `Btle_Lm` muestra las gráficas correspondientes a la función de escala y la función Wavelet Battle-Lemarié, Así como la respuesta en frecuencia respectiva, en donde es posible observar la complementariedad de estas funciones.

Wavelet Daubechies

Sintaxis: `[pk] = coef_daub1 (N)`

Parámetros: `pk`: secuencia doble escala de la función Wavelet Daubechies.
`N`: orden de la función Daubechies.

Descripción: La función presenta un parámetro de entrada (`N`) y un parámetro de salida (`pk`). El parámetro de entrada hace referencia al orden de la función Wavelet daubechies y el parámetro de salida corresponde a la secuencia doble escala. (Más información los capítulos tres y cinco del presente texto.)

`coef_daub1` además muestra las graficas correspondientes a la función de escala y función Wavelet Daubechies, Así como la respuesta en frecuencia respectiva, en donde es posible observar la complementariedad de estas funciones.

A.1.2. Funciones Wavelets Biortogonales.

Wavelet Biortogonales Spline.

Se implementaron las Wavelets Spline Biortogonales. (Más información los capítulos cuatro y cinco del presente texto.)

Sintaxis: `[p,q,at,bt] = bior (m,coe)`

Parámetros: `p`: secuencia doble escala de la función escala Spline.

`q`: secuencia doble escala de la función wavelet Biortogonal Spline.

`at`: secuencia doble escala de la función escala Spline dual.

`bt`: secuencia doble escala de la función Wavelet Biortogonal Spline dual.

`m`: orden de la función biortogonal Spline.

`coe`: número de coeficientes.

Descripción: La función `bio` presenta dos parámetros de entrada (`m` y `coe`) correspondientes al orden de la wavelet biortogonal y el número de coeficientes a emplear de los filtros IIR duales. Los parámetros de salida corresponden a las secuencias doble escala Spline (`p`), Wavelet Biortogonal Spline (`q`), Escala Spline Dual (`at`) y Wavelet Biortogonal Spline Dual (`bt`).

`bior` muestra las gráficas correspondientes a la función de escala y función Wavelet Biortogonal Spline, Así como la respuesta en frecuencia respectiva, en donde es posible observar la complementariedad de estas funciones.

A.1.3 Funciones de enlace *Matlab - Code Composer Studio*.

Las funciones de enlace *Matlab - Code Composer Studio* son las encargadas de trasladar los datos, necesarios para la transformada Wavelet, desde Matlab hacia el Code

Composer Studio. La tabla A.2 muestra las funciones de enlace *Matlab - Code Composer Studio* implementadas.

TABLA A.2. Funciones de enlace *Matlab - Code Composer Studio*

Enlace	Función
Enlace ortonormal	En_ort
Enlace Biortonormal	En_bior

Las herramientas de enlace `En_ort` y `En_bior` solicitan al usuario (en *Matlab*) los datos que necesita el Code Composer Studio para realizar la Transformada Wavelet.

Los datos que se requieren son:

- *path* donde se almacenan los datos para el Code Composer Studio.
- Secuencias doble escala de las Wavelets.
- Señal de entrada (señal a la cual se realiza la transformada Wavelet.)
- Longitud del buffer de datos a manejar.

Para finalizar este primer numeral, *Manejo de la Toolbox en Matlab*, se presenta un ejemplo de ilustración en cual se elige una función Wavelet en particular, para posteriormente enviar los datos al *Code Composer Studio*.

Ejemplo 1:

En este ejemplo se calculan los coeficientes de los filtros Wavelet Biortogonal Spline, se propone una señal a la cual se desea aplicar la transformada Wavelet y finalmente se envían estos datos al *Code Composer Studio*.

La señal a la cual se aplica la transformada Wavelet en este ejemplo se denomina *total*, la cual es una señal a trozos compuesta por funciones seno, escalon, recta y pulsos cuadrados. En el espacio de trabajo de *Matlab*, el cálculo de coeficientes de la familia

Biortonormal Spline se realiza por medio de la función *bio*. Se elige como familia Biortogonal la de orden tres y se cortan los filtros IIR en los primeros 24 coeficientes.

```
[p,q,at,bt] = bior (3,24)
```

La ejecución de la función *bior* presenta los siguientes resultados:

- Secuencia doble escala de la función escala Spline.

```
p = 0.2500 0.7500 0.7500 0.2500
```

- Secuencia doble escala de la función wavelet Biortogonal Spline.

```
q = 0.0021 -0.0604 0.3062 -0.6312 0.6312 -0.3063 0.0604 -0.0021
```

- Secuencia doble escala de la función escala Spline dual.

at =

Columns 1 through 13

```
-0.0000 -0.0001 0.0000 0.0001 -0.0000 -0.0003 0.0001 0.0007 -0.0002 -0.0015 0.0004 0.0035 -0.0009
```

Columns 14 through 26

```
-0.0082 0.0022 0.0191 -0.0050 -0.0444 0.0117 0.1033 -0.0259 -0.2438 0.0340 0.6553 0.6553 0.0340
```

Columns 27 through 39

```
-0.2438 -0.0259 0.1033 0.0117 -0.0444 -0.0050 0.0191 0.0022 -0.0082 -0.0009 0.0035 0.0004 -0.0015
```

Columns 40 through 48

```
-0.0002 0.0007 0.0001 -0.0003 -0.0000 0.0001 0.0000 -0.0001 -0.0000
```

- Secuencia doble escala de la función Wavelet Biortogonal Spline dual.

bt =

Columns 1 through 13

```
-0.0000 -0.0001 0.0000 0.0002 -0.0001 -0.0005 0.0001 0.0012 -0.0003 -0.0027 0.0007 0.0063 -0.0017
```

Columns 14 through 26

-0.0147 0.0039 0.0342 -0.0090 -0.0793 0.0210 0.1841 -0.0498 -0.4240 0.1404 0.9006 -0.9006 -0.1404

Columns 27 through 39

0.4240 0.0498 -0.1841 -0.0210 0.0793 0.0090 -0.0342 -0.0039 0.0147 0.0017 -0.0063 -0.0007 0.0027

Columns 40 through 48

0.0003 -0.0012 -0.0001 0.0005 0.0001 -0.0002 -0.0000 0.0001 0.0000

- Gráficas correspondientes a la función de escala y función Wavelet Biortogonal Spline.

Figura A.1 Funciones de escala y Wavelet Biortogonales generadas por medio del comando `[p,q,at,bt] = bior(3,24)`

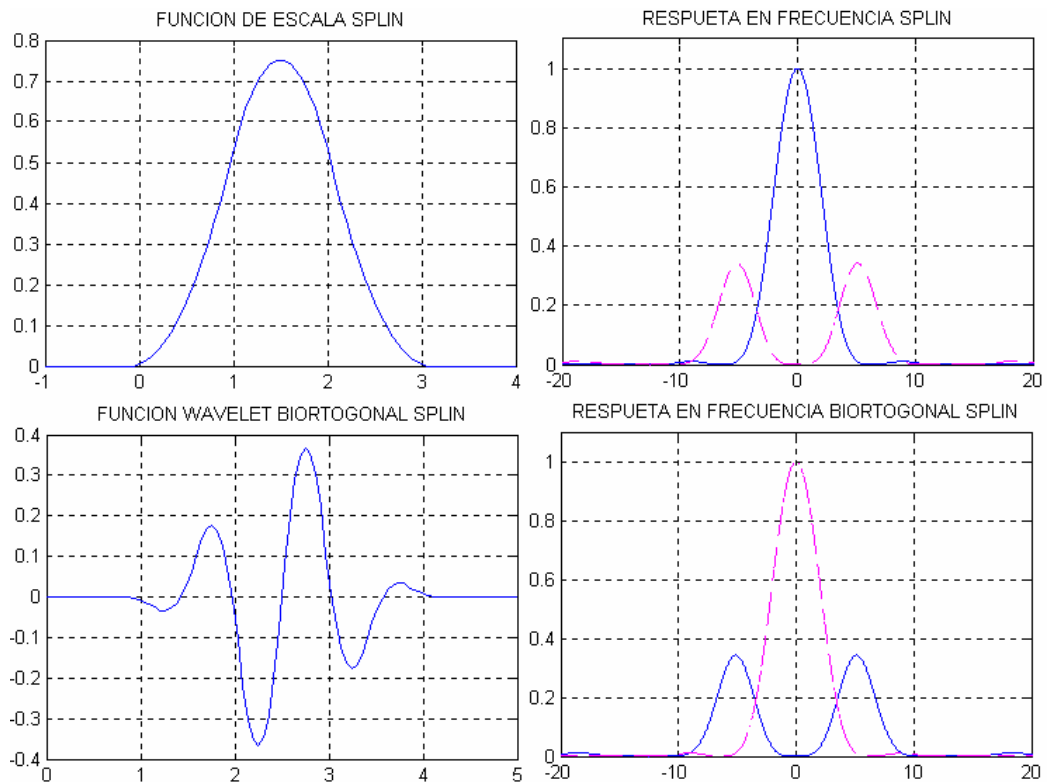
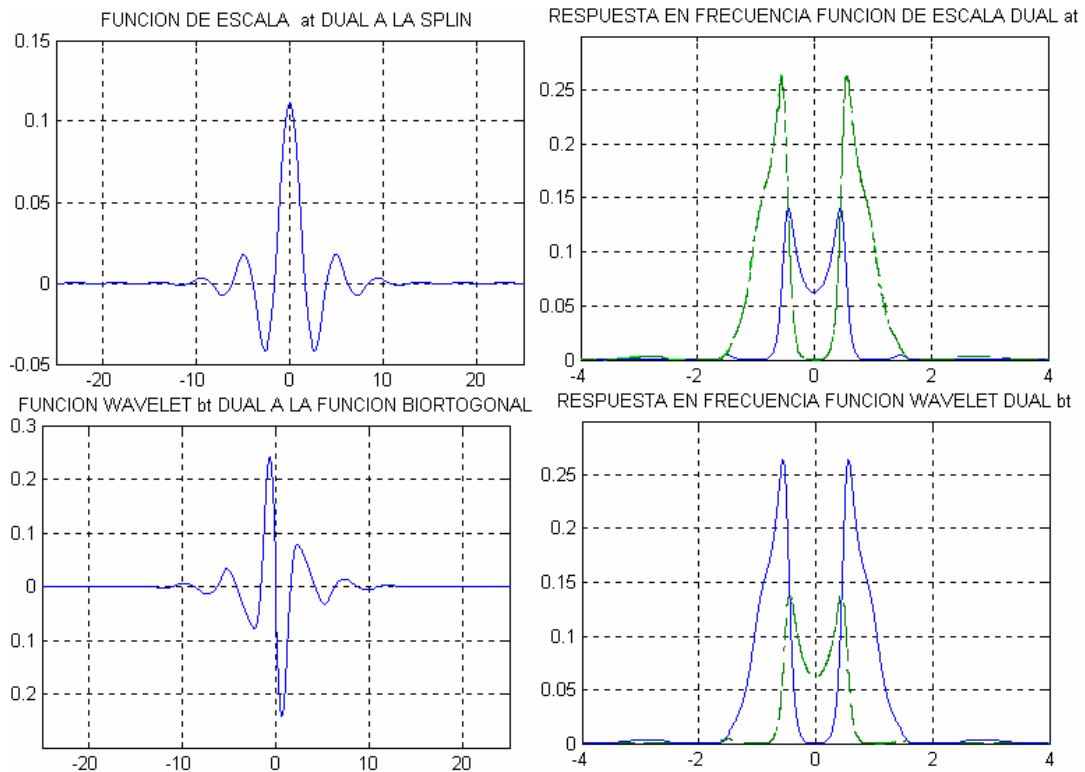


Figura A.2. Funciones de escala y Wavelet Biortogonales Duales generadas por medio del comando `[p,q,at,bt] = bior (3,24)`



Ya teniendo la señal a tratar y las secuencias doble escala de las funciones Biortogonales, se envía la información al *Code Composer Studio* mediante la función `En_bior`.

Al ejecutar `En_bior` es necesario introducir el path donde se deben almacenar los datos, además el comando pregunta por la señal a tratar (*total* en este caso), por los coeficientes de los filtros (*p, q, at* y *bt*), por el tamaño del buffer de datos; que arbitrariamente se ha elegido para este ejemplo un tamaño de 256 datos, y finalmente solicita el número de descomposiciones Wavelet a realizar (se eligen 8 niveles de descomposición para este ejemplo).

A.2 Manejo de la Toolbox en el Code Composer Studio.

La Toolbox para el *Code Composer Studio* cuenta con dos proyectos independientes denominados `DWT_ortonormales.pjt` y `DWT_wbiortonormales.pjt`, encargados de realizar la transformada Wavelet usando el esquema ortonormal y Biorotogonal respectivamente.

A.2.1 Cargar el espacio de trabajo.

El espacio de trabajo es el área en la cual es posible leer y visualizar los resultados de la transformada Wavelet, así como realizar la manipulación y manejo de datos.

En primera instancia el espacio de trabajo consta de siete graficas:

- *Aproximaciones*: Esta gráfica muestra las aproximaciones generadas por la transformada Wavelet.
- *Detalles*: Muestra los detalles generados por la transformada Wavelet.
- *Buffer*: Es la gráfica de los datos que están siendo tratados.
- *Frecuencias de las aproximaciones*: Esta gráfica presenta las componentes de frecuencia de de cada nivel de aproximación.
- *Frecuencias de los detalles*: Presenta las componentes de frecuencia de los detalles de cada descomposición.
- *Señal de entrada*: Es la señal completa a la cual se va a aplicar el tratamiento Wavelet.
- *Frecuencias de la señal de entrada*: Muestra los componentes de frecuencia de la señal de entrada sin aplicar tratamiento.

Por otro lado cuenta con la ventana *Watch Window* la cual consta de las variables `mapa`, `xdatos_a`, `xdatos_d`, `rta`.

- `mapa`: esta variable esta compuesta por los niveles posibles de descomposición, la cantidad de coeficientes en cada descomposición y el tamaño del *buffer de datos*.

- `xdatos_a`: Contiene los coeficientes de aproximación del correspondiente nivel de descomposición.
- `xdatos_d`: Contiene los coeficientes de detalle del correspondiente nivel de descomposición.
- `rta`: Esta variable almacena todos los coeficientes de detalle de las múltiples descomposiciones junto con los coeficientes de aproximación del último nivel de descomposición.

Los datos contenidos por las anteriores variables pueden ser alterados por el usuario para así permitir el desarrollo de aplicaciones académicas o ingenieriles.

Para cargar el espacio de trabajo en el Code Composer Studio se deben ejecutar las siguientes instrucciones:

- a. Abrir el menú `FILE`.
- b. Seleccionar `WORKSPACE`.
- c. Seleccionar `LOAD WORKSPACE...`

Al seleccionar `LOAD WORKSPACE...` aparece una ventana de diálogo en la cual se debe buscar la carpeta `DWT_ortonormal` o `DWT_biortogonal`, según el tipo de función Wavelet a utilizar. Estas carpetas generalmente se encuentran ubicadas en `C:\ti\myprojects`.

Dentro de cada una de estas carpetas (`DWT_ortonormal` o `DWT_biortogonal`) se encuentra el espacio de trabajo que permite realizar la transformada digital de Wavelet (DWT), la visualización y manipulación de datos.

Para realizar la DWT mediante Wavelets ortonormales se debe elegir el espacio de trabajo con el nombre `datos_ortonormales.wks` en la carpeta `DWT_ortonormal` y para realizar la DWT mediante Wavelets Biortogonales se debe elegir el espacio de trabajo con el nombre `datos_biortogonales.wks` en la carpeta `DWT_biortogonal`.

A.2.2 Construcción y Carga del Programa que realiza la Transformada Digital Wavelet.

Cargado el espacio de trabajo se debe construir el proyecto, lo cual se realiza por medio del comando *REBUILD ALL* que se encuentra en el menú *PROJECT* o mediante el comando


Construir proyecto 

Finalmente se debe cargar el proyecto a la tarjeta de desarrollo, lo cual se realiza ejecutando el archivo **.out* a través de *LOAD PROGRAM...* en el menú *FILE*.

A.2.3 Ejecución de la Transformada Digital de Wavelet.

Compilado y cargado el programa en la tarjeta (numeral 2.2), es posible operarlo mediante cualquiera de las opciones del menú *RUN*.

Ejecutar proyecto: 

Ejecución Animada: 

Detener ejecución: 

Para apoyar la descripción realizada acerca del Manejo de la *Toolbox* en el *Code Composer Studio* se presenta el ejemplo 2.

Ejemplo 2.

Este ejemplo ilustra la forma de manejar la herramienta para construir, cargar y correr el programa que realiza la Transformada Digital de Wavelet.

En el ejemplo anterior se calcularon las *secuencias doble escala* de la Wavelets Biorotogonales Spline, se propuso una señal para analizar, se eligió un tamaño de buffer

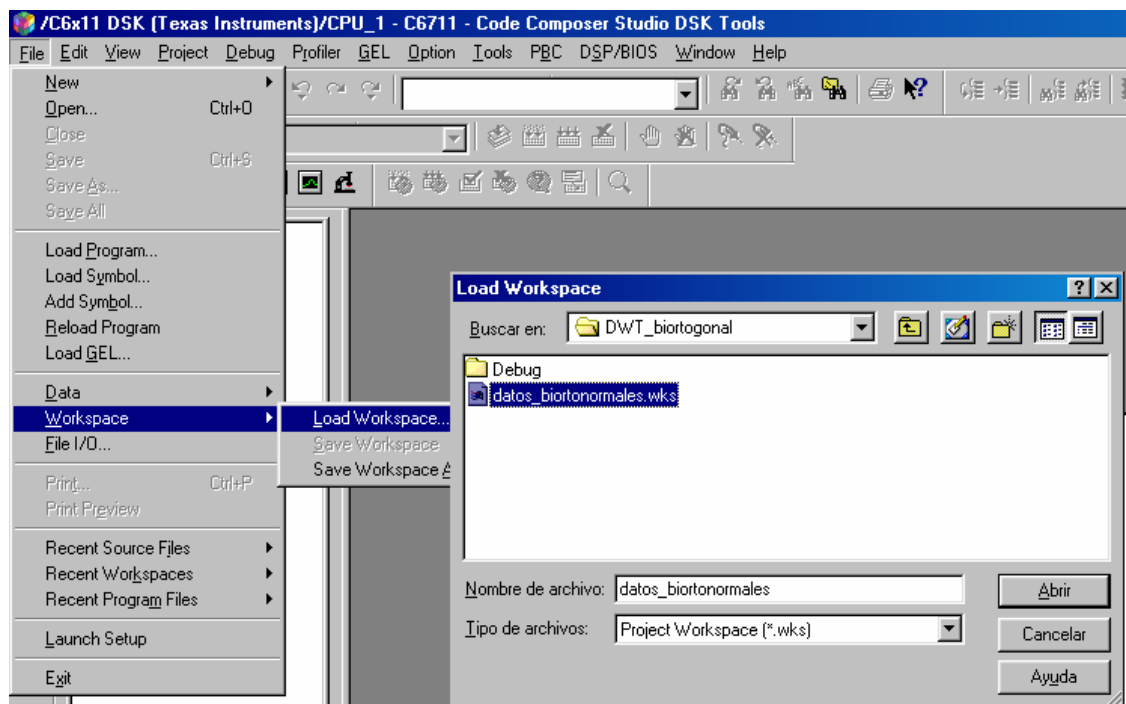
de datos y se llevaron estos datos al Code Composer Studio. Haciendo uso de estos datos se procede al cálculo de la Transformada Wavelet.

a. carga del espacio de trabajo.


La figura A.3 ilustra el procedimiento de cargar el espacio de trabajo.

(Sección A.2.1)

Figura A.3 Procedimiento para cargar el espacio de trabajo.

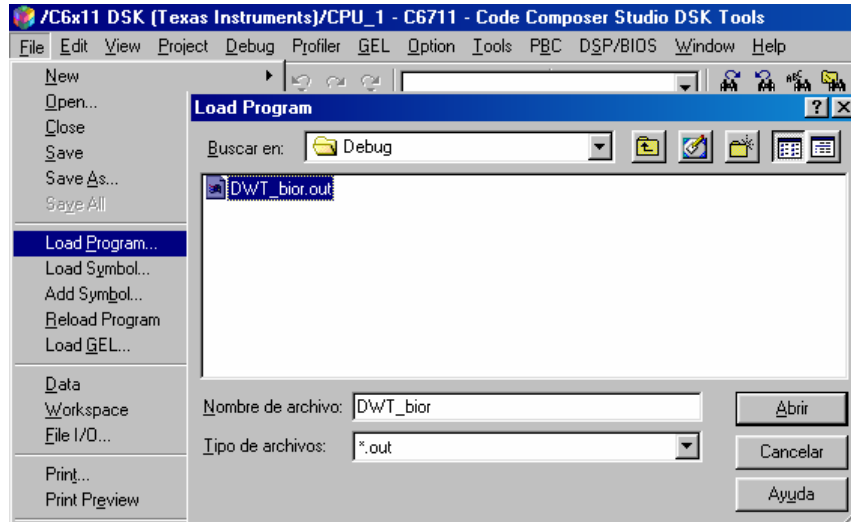


b. construcción y carga del programa que realiza la DWT.

La construcción del programa que ejecuta la Transformada Digital de Wavelet se realiza mediante el comando *Construir proyecto* 

La manera de cargar el programa de la DWT a la tarjeta de desarrollo se ilustra en la figura A.4.

Figura A.4. Procedimiento para cargar el programa hacia la tarjeta de desarrollo.



c. Ejecución de la Transformada Digital de Wavelet.

La ejecución de la Transformada Digital de Wavelet se realiza por cualquiera de los comandos citados en el numeral A.2.3.

d. Visualización y manipulación de resultados.

El espacio de trabajo consta de siete gráficas y de la ventana *Watch Window* la cual permite leer datos numéricos y alterarlos a conveniencia del usuario.

La lectura de las variables debe hacerse de la siguiente manera.

La variable `mapa` indica en primera instancia la cantidad de datos a los cuales se aplica el proceso de la *DWT*. Los siguientes datos muestran los posibles niveles de descomposición y cuantos coeficientes la *DWT* calcula en ese mismo nivel (ver figura A.5.)

Figura A.5 Interpretación de la variable Watch window.

Name	Value
mapa	0x000000C0
[0]	256
[1]	151
[2]	99
[3]	73
[4]	60
[5]	53
[6]	50
[7]	48
[8]	47

Nivel cero de descomposición / numero de datos en el buffer
 Nivel uno de descomposición / numero de coeficientes calculados por la DWT para el nivel uno
 Nivel dos de descomposición / numero de coeficientes calculados por la DWT para el nivel dos

La variable `xdatos_a` muestra los coeficientes de aproximación del nivel de descomposición que indica la variable `mapa`. La variable `xdatos_d` se interpreta de la misma manera que la variable `xdatos_a` solo que esta almacena los coeficientes de detalle.

Finalmente la variable `rta` se debe interpretar como muestra la figura A.6.

Figura A.6. Almacenamiento de la variable `rta`.

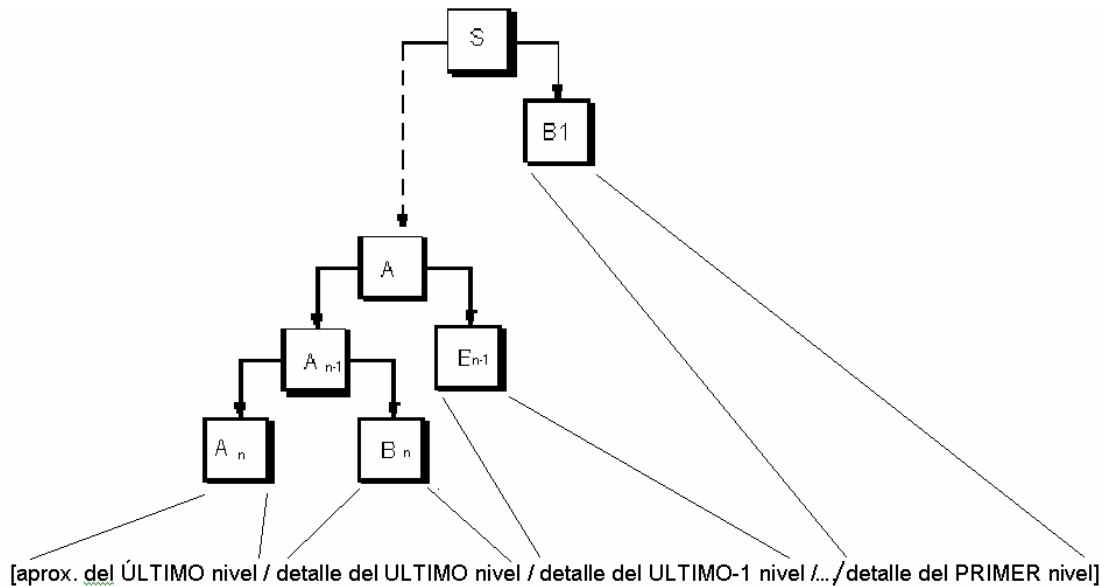
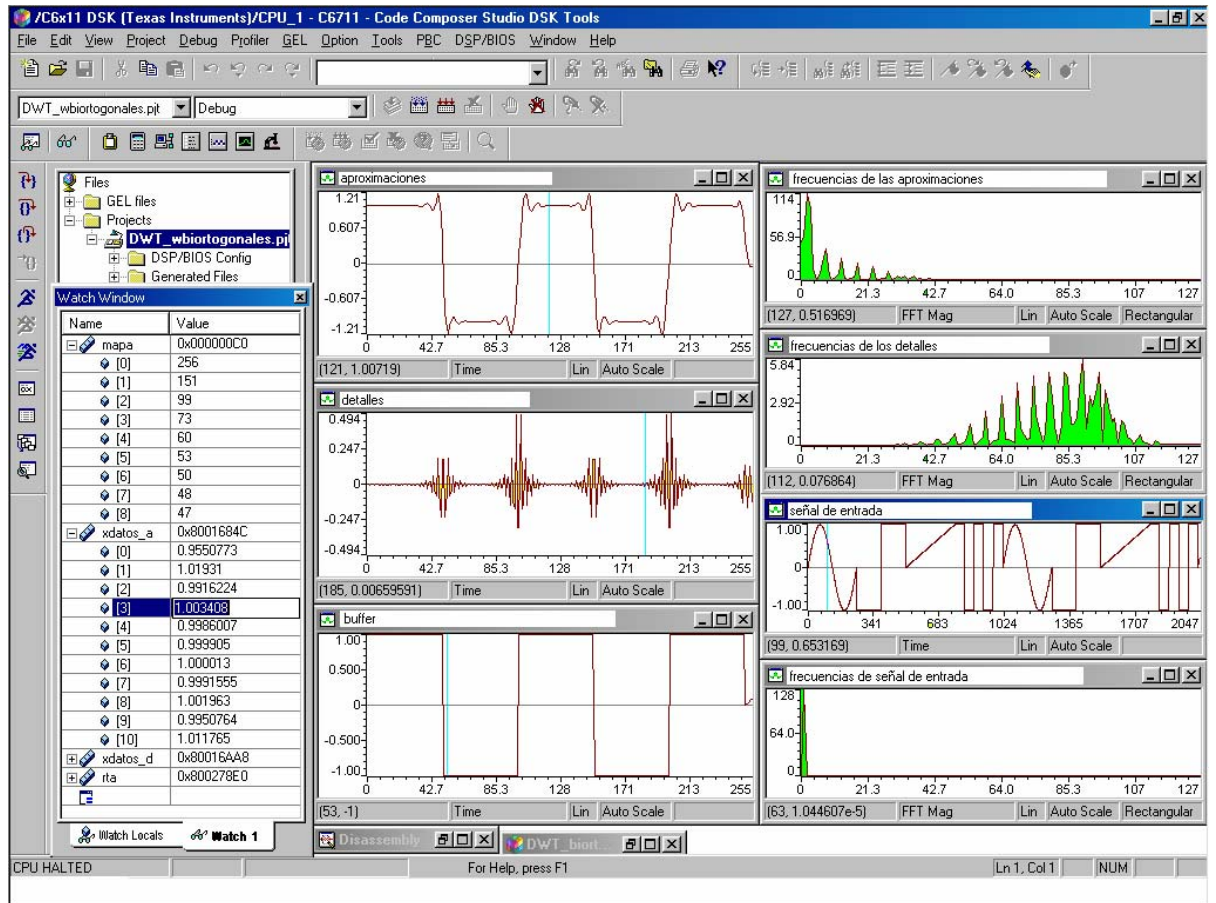


Figura A.7. Presentación del espacio de trabajo



ANEXO B

SISTEMA DE DESARROLLO

La TMS320C6711 DSK es una tarjeta de bajo costo y de fácil uso. El alto desempeño de esta tarjeta es debido a la capacidad del procesador para desarrollar operaciones de punto flotante, (capaz de realizar 900 millones de operaciones punto flotante por segundo (MFLOPS)).

B.1. PROPIEDADES DE LA DSK

- DSP C6711 de 150 MHz capaz de ejecutar 900 millones de operaciones por segundo. (MFLOPS).
- Soporte de dos relojes. El de la CPU de 150 MHz y otro de interface con memoria externa (EMIF) de 100MHz.
- Interface DSK- host a través de puerto paralelo de manera bi-direccional.
- 16M byte de memoria SDRAM.
- 128k Bytes de memoria ROM.
- Acceso a toda la memoria del DSP a través del puerto paralelo.
- Codec de audio de 16 bits

B.2. PROPIEDADES DEL DSP TMS320C6711

- 8 unidades funcionales independientes (6 ALUs y 2 multiplexores)
- 32 registros de propósito general de 32 bit.
- 900 millones de instrucciones punto flotante por segundo.
- tiempo de ciclo de 6.7 ns.(150 MHz)
- 2 caches de 4-k byte c/u. (L1P y L1D)
- memoria interna de 64K byte. (L2)

B.3. ARQUITECTURA DE LA CPU

La parte más importante del DSP está en la arquitectura de la CPU y es en gran medida la responsable de la velocidad que este pueda alcanzar. En la CPU del DSP TMS320C6711 se puede identificar la existencia de 8 unidades de procesamiento en paralelo encargadas de la eficiencia del procesador.

Otra componente de la CPU son los registros de control (13 registros) donde se almacena toda la información sobre las interrupciones del procesador. La CPU se encuentra dividida en dos zonas. Cada lado de la CPU tiene una estructura de registros independientes de 32 bits (16 a cada lado), y existe una conexión entre ellos que permite el intercambio de información.

Además, la CPU tiene una conexión directa con la memoria cache de datos y de programa, que permite acceso inmediato a los datos o a las instrucciones. La memoria interna (L2) donde reside la mayoría de la información tanto de datos como de programa, debe pasar primero por la memoria cache antes de llegar a la CPU. Con estas características el DSP puede llegar a realizar más de ocho instrucciones en un solo ciclo de reloj.

B.4. DISTRIBUCION DE MEMORIA

El DSP cuenta con tres niveles de memoria. El primer nivel consta de dos secciones de memoria cache conectadas directamente a la CPU del DSP. Ambas secciones tienen una capacidad de cuatro kilobytes y son denominadas L1D y L1P que corresponden a cache para datos y cache para programa respectivamente.

El segundo nivel de memoria corresponde a memoria interna del DSP formada de memoria RAM dividida en cuatro bloques de 16kilobytes. Este nivel de memoria es llamado L2 y esta diseñado para almacenar tanto datos como programa.

B.5. ACCESO DIRECTO A MEMORIA (DMA)

El acceso directo a memoria (DMA) controla transferencia de datos entre regiones de memoria sin intervención de la CPU. El DMA permite controlar movimientos de datos desde y hacia la memoria interna, periféricos internos o dispositivos externos. El controlador de DMA cuenta con cuatro canales independientes, permitiendo cuatro diferentes contextos para operaciones DMA. En adición, un quinto canal (auxiliar) permite el control a través del host.

B.6. MODULO DAT

El modulo (DAT) es usado para mover datos por medio de hardware DMA.

Rutinas DAT

El modulo DAT es un conjunto de rutinas para copiar datos de una localización de memoria a otra y rutinas para llenar una región de memoria. Estas operaciones ocurren en el contexto de un hardware de DMA dedicado independiente de la CPU.

Administración del DMA

Si se esta usando un canal de DMA para el modulo DAT, Este canal debe ser primero asignado. Para asegurar esto el modulo DAT debe ser abierto antes de ser usado, esto se realiza a través de la función `DAT_open ()` . Si el uso del canal de DMA no es muy alto, tal canal puede ser liberado por medio de la función `DAT_close ()` .

De manera particular, en la aplicación presente se utilizaron las funciones `DAT_open` y `DAT_copy` que se presentan a continuación.

Función `Uint32 DAT_copy(`
`void *src,`
`void *dst,`

```
uint16_t byteCnt  
);
```

Argumentos

`src` Puntero a la fuente de datos.

`dst` Puntero a la localización destino.

`byteCnt` Número de bytes a copiar.

Valor de Retorno

`xfrId` Transfer ID

Descripción

Copia un bloque de datos lineal desde `src` a `dst` usando el hardware dedicado para DMA. Para un buen desempeño, se debe asegurar que las direcciones fuente y el destino estén alineadas (una a continuación de la otra) y que la longitud de la transferencia sea un múltiplo de cuatro. Un máximo de 65 535 Bytes pueden ser copiados. Si el canal DMA está ocupado con una o más operaciones anteriores, esta función se bloquea y espera a que termine la operación pendiente para poder continuar. El módulo DAT debe ser abierto antes de llamar esta función.

El valor de retorno es un ID identificador de transferencia que puede ser usado luego para esperar la culminación de la transferencia.

Apertura del módulo DAT

Función `uint32_t DAT_open(
int chanum,
int priority,
uint32_t flags
);`

Argumentos

`chanNum`: Especifica cual canal DMA asignar; debe ser uno de los siguientes:

`_ DAT_CHAANY`
`_ DAT_CHA0`
`_ DAT_CHA1`
`_ DAT_CHA2`
`_ DAT_CHA3`

Prioridad:

Especifica la prioridad del canal DMA; debe ser uno de los siguientes:

`_ DAT_PRI_LOW`
`_ DAT_PRI_HIGH`

Valor de retorno

`Success` Retorna cero si existe error, y diferente de cero si es correcto. Las razones de error pueden ser:

- El modulo DAT ya había sido abierto.
- No puede hallar las fuentes requeridas.

Descripción:

Esta función abre el modulo DAT y debe ser llamado antes de llamar cualquier otra función referente a DAT. El argumento `ChanNum` especifica cual canal DMA abrir y dejar para uso específico del modulo DAT.

La prioridad del canal a usar se puede seleccionar mediante:

`_ DAT_PRI_LOW` Canal DMA con prioridad alta (por encima de CPU)
`_ DAT_PRI_HIGH` Canal con prioridad baja.

ANEXO C

CONCEPTOS MATEMATICOS

En este anexo se definen algunos conceptos matemáticos necesarios para la sustentación de la definición de las funciones wavelet como base de los espacios de funciones lineales de cuadrado integrable $L^2(\mathfrak{R})$.

C.1 ESPACIOS VECTORIALES

DEFINICION 1: Un espacio vectorial real es un conjunto de objetos, llamados vectores junto con dos operaciones llamadas suma y multiplicación por un escalar. Que satisfacen diez axiomas presentados a continuación.

- i. si $x \in V$ y $y \in V$, entonces $x + y \in V$ (cerradura bajo la suma).
- ii. Para todo $x, y, z \in V$, $(x + y) + z = x + (y + z)$ (ley asociativa de la suma).
- iii. Existe un vector $0 \in V$ tal que para todo $x \in V$, $x + 0 = 0 + x = x$ (el cero se llama vector cero o idéntico aditivo)
- iv. Si $x \in V$, existe un vector $-x \in V$ tal que $x + (-x) = 0$
 $-x$ se llama inverso aditivo de x
- v. Si x y y , están en V entonces $x + y = y + x$
- vi. Si $x \in V$ y α es un escalar entonces $\alpha x \in V$ (cerradura bajo la multiplicación por un escalar)
- vii. Si x y y están en V y α es un escalar, entonces $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ (primera ley distributiva)
- viii. Si $x \in V$ y α y β son escalares, entonces $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ (segunda ley

distributiva)

ix Si $x \in V$ y α y β son escalares entonces $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$ (ley asociativa de la multiplicación por escalares).

x Para cada vector $x \in V$, $1x = x$

C.2 SUBESPACIOS VECTORIALES

DEFINICIÓN 2: Sea W un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V ($W \subset V$) y suponga que W es en si un espacio vectorial bajo las operaciones de suma y multiplicación por un escalar definidas en V . Entonces se dice que W es un subespacio de V .

Se puede decir que el subespacio W hereda las operaciones del espacio vectorial *padre* V . Todo subespacio de un espacio vectorial V contiene al cero.

Teorema 1. $W \subset V, W \neq \emptyset$ es un subespacio de $V \Leftrightarrow \forall x, y \in W$ y $\forall c \in K$, el vector $cx + y \in W$.

A veces se prefiere usar la propiedad $cx + y$ como definición de un subespacio, lo que es sólo diferente. Lo importante es que si W contiene todos los $cx + y$, entonces será un espacio vectorial (con las propiedades heredadas de V).

C.3 COMBINACIÓN LINEAL

DEFINICIÓN 3: combinación Lineal, Sean $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ vectores en un espacio vectorial V . Entonces cualquier vector de la forma

$$a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \dots + a_nv_n \quad \text{C.1}$$

donde $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ son escalares se llama una combinación lineal de $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$

DEFINICIÓN 4: Conjunto generador, se dice que los vectores $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ en un espacio vectorial V generan a V si todo vector en V se puede escribir como una combinación lineal de ellos. Es decir, para todo $v \in V$, existen escalares $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ tales que

$$v = a_1v_1 + a_2v_2 + a_3v_3 + \dots + a_nv_n \quad \text{C.2}$$

De otra forma

$$v = a_1v_1 + \dots + a_nv_n = \sum_{i=1}^n a_iv_i \quad \text{C.3}$$

C.4 INDEPENDENCIA LINEAL

DEFINICIÓN 5: sea $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n$ n vectores en espacio vectorial V . Entonces se dice que los vectores son linealmente dependientes si existen n escalares c_1, c_2, \dots, c_n no todos 0 tales que

$$c_1v_1 + c_2v_2 + \dots + c_nv_n = 0 \quad \text{C.4}$$

si los no son linealmente dependientes, se dice que son linealmente independientes.

Como consecuencia de esta definición se tiene que:

- Todo conjunto que contiene el vector no nulo es linealmente dependiente.
- Un conjunto S es L.I \Leftrightarrow todo subconjunto finito de S es L.I.

DEFINICIÓN 6. **Base de un espacio vectorial.** Sea V un espacio vectorial sobre K . Una base de V es un conjunto de vectores linealmente independientes de V , que genera el espacio V . El espacio V es de dimensión finita si tiene una base finita.

C.5 BASES ORTONORMALES

DEFINICIÓN 7: conjunto ortonormal en R^n Se dice que un conjunto de vectores $S = \{u_1, u_2, \dots, u_k\}$ en R^n es un conjunto ortonormal si:

$$u_i \bullet u_j = 0 \quad \text{si } i \neq j \quad \text{sistema ortogonal} \quad \text{C.5}$$

$$u_i \bullet u_i = 1 \quad \text{C.6}$$

Se puede establecer que un conjunto de vectores es ortonormal si cualquier par de ellos es ortogonal y cada uno tiene longitud 1.

C.6 ESPACIOS CON PRODUCTO INTERNO

DEFINICIÓN 8: un espacio vectorial complejo V se llama espacio con producto interno si para cada par ordenado de vectores u y v en V existe un número complejo único $\langle u, v \rangle$, llamado producto interno de u y v , tal que si u, v y w están en V y $\alpha \in \mathbb{C}$, entonces,

- i. $\langle v, v \rangle \geq 0$
- ii. $\langle v, v \rangle = 0$ si y solo si $v = 0$
- iii. $\langle u, v + w \rangle = \langle u, v \rangle + \langle u, w \rangle$
- iv. $\langle u + v, w \rangle = \langle u, w \rangle + \langle v, w \rangle$
- v. $\langle u, v \rangle = \overline{\langle v, u \rangle}$
- vi. $\langle \alpha u, v \rangle = \alpha \langle u, v \rangle$
- vii. $\langle u, \alpha v \rangle = \overline{\alpha} \langle u, v \rangle$

Ejemplo 1: Un producto interno en $C[a, b]$ Suponga que $a < b$; sea $V = C[a, b]$ en el espacio de las funciones de valores reales continuas en el intervalo $[a, b]$ y defina:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t)g(t)dt \quad \text{(C.7)}$$

Ejemplo 2: Una función f es de valores complejos sobre el intervalo (real) $[a, b]$ si $f(x)$ se puede expresar como

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x)i \quad x \in [a, b] \quad (\text{C.8})$$

Donde f_1 y f_2 son funciones de valores reales. La función de valores complejos f es continua si f_1 y f_2 son continuas. Sea $CV[a, b]$ el conjunto de valores complejos que son continuas en $[a, b]$. Para f y g en $CV[a, b]$, defina

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(t) \overline{g(t)} dt \quad (\text{C.9})$$

Ejemplo 3 El vector cero es ortogonal a todo vector de V y es el único vector con esa propiedad

Ejemplo 4 El número real $\|f\| = \langle f, f \rangle^{\frac{1}{2}}$ es la norma de f . Si f, g son ortogonales, entonces

$$\|f + g\|^2 = \langle f + g, f + g \rangle = \langle f, f \rangle + \langle g, f \rangle + \langle f, g \rangle + \langle g, g \rangle = \|f\|^2 + \|g\|^2 \quad (\text{c.10})$$

DEFINICIÓN 9: Conjunto ortonormal, el conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ es un conjunto ortonormal en V si

$$\langle v_i, v_j \rangle = 0 \quad \text{para } i \neq j \quad \text{conjunto ortogonal}$$

$$\|v_i\| = \sqrt{\langle v_i, v_i \rangle} = 1 \quad (\text{C.11})$$

DEFINICIÓN 10: Complemento ortogonal: Sea H un subespacio del espacio con producto interno V . Entonces el complemento ortogonal de H , denotado por H^\perp , está dado por

$$H^\perp = \{x \in V : \langle x, h \rangle = 0 \text{ para todo } h \in H\} \quad (\text{C.12})$$

Teorema2: si H es un subespacio del espacio con producto interno V , entonces

- i H^\perp es un subespacio de V
- ii $H \cap H^\perp = \{0\}$