CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN EL PRIMER SEMESTRE DE LAS CARRERAS DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

GERMAN ANDRÉS BAUTISTA OBREGÓN

ÉDWING YESSID SALCEDO GARCÍA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2008

CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN EL PRIMER SEMESTRE DE LAS CARRERAS DE CIENCIAS E INGENIERÍAS

GERMAN ANDRÉS BAUTISTA OBREGÓN
ÉDWING YESSID SALCEDO GARCÍA

Trabajo de grado para optar al título de
Licenciados en Matemáticas

DIRECTOR
BERNARDO MAYORGA
Ph. D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2008

A Dios por todas las oportunidades que nos ha dado para seguir adelante, y por darnos fortaleza para afrontar cada prueba que ha puesto en nuestro camino.

AGRADECIMIENTOS

Queremos agradecer de manera muy especial a todas aquellas personas que hicieron posible la realización de esta investigación.

A Dios por iluminarnos y darnos la fuerza para no desfallecer en el camino.

A nuestras familias por darnos todo su amor, su apoyo incondicional, su paciencia, sus palabras de aliento y muy especialmente por creer en nosotros.

Al Dr. Bernardo Mayorga por su invaluable contribución en la elaboración y realización de esta investigación, por su enorme aporte en nuestra formación como docentes.

A los profesores Marisel Ardila y Germán Jaimes, por sus valiosos aportes como educadores y personas.

A los compañeros de la Licenciatura por su amistad y por compartir tantos momentos.

Y a los estudiantes del Curso de Cálculo I, grupo J4 de la Universidad Industrial de Santander del segundo semestre académico del año 2007, por su participación y dedicación en el desarrollo de este trabajo.

TABLA DE CONTENIDO

Pág.

LISTA DE FIGURAS

RESUMEN

TÍTULO: CONSTRUCCIÓN DEL CONCEPTO DE LÍMITE EN EL PRIMER SEMESTRE DE LAS CARRERAS DE CIENCIAS E INGENIERÍAS.

AUTORES: GERMÁN ANDRÉS BAUTISTA OBREGÓN Y ÉDWING YESSID SALCEDO GARCÍA

PALABRAS CLAVES: Límite, Dominio, Imagen, Intervalo, Puntos, Bola, Infinito.

Basados en la experiencia vivida durante su paso por la universidad, en que los autores tuvieron la oportunidad de trabajar y enseñar la definición de límite, pudieron notar cómo estudiantes y profesores tienen diferentes inconvenientes al momento de aprender y enseñar este importante concepto. Concientes de esto, se plantearon la siguiente pregunta de investigación: ¿Cómo podemos facilitar y optimizar el proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de límite? En torno a este interrogante se trazaron como objetivo principal construir una estrategia metodológica que contribuya a mejorar el aprendizaje del concepto de límite.

Teniendo en cuenta una noción bastante generalizada del concepto de límite y las diferentes investigaciones didácticas relacionadas, realizaron una investigación en el aula de tipo cualitativa, en la que plantean y ejecutan una propuesta, con un curso de 30 estudiantes de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander.

Con esa propuesta se logró llevar a los estudiantes a experimentar el proceso de “hacer matemáticas”, permitiendo que se sintieran parte activa y fundamental de la clase; de esta forma lograron eliminar la creencia que manejan los estudiantes acerca de este concepto como un tema mecánico y difícil de tratar, donde muchas veces se hacen las cosas sin entenderlas.

*Trabajo de Grado
**Facultad de Ciencias, Escuela de Matemáticas
Director: Bernardo Mayorga, Doctor en Matemáticas

SUMMARY

TITTLE: CONSTRUCTION OF THE CONCEPT OF LIMIT FOR FRESHMEN IN SCIENCES AND INGENEERING.

AUTHORS: GERMÁN ANDRÉS BAUTISTA OBREGÓN, ÉDWING YESSID SALCEDO GARCÍA

KEYWORD: Limit, Domain, Image, Interval, Point, Ball, Infinite.

Based on the experience lived throughout the university, where we had the chance to work and teach the definition of Limit; we could realize how both students and teachers have different problems when teaching or learning this concept. Aware of this, we state the following investigation question: How can we make the teaching-learning process of he limit concept easier and better? In relation to this question, we have as the main objective, to build a methodological strategy that contributes to improve the learning process of the limit definition.

Having into account a very general idea of the concept of limit and the different didactic investigations related, we made a qualitative research in the classroom, where we stated and executed a proposal with a course of 30 students of Calculus I at the Universidad Industrial de Santander.

With this proposal, we could make the students to experiment the process of “making math”, making them feel an active and esencial part in the process. Thus, there was a change in the students’ belief of this concept as a mechanical and hard-to-deal topic, where most of the times they do things without understanding.

* Working Grade
** Faculty of Science, Mathematics School, Mathematics
Adviser: Bernardo Mayorga, Ph. D. in Mathematics

INTRODUCCIÓN

Durante nuestro paso por el bachillerato, la universidad y el servicio social educativo tuvimos la oportunidad de observar y analizar los diferentes obstáculos y problemas que se presentan en los estudiantes cuando trabajan en el área de las matemáticas, y más específicamente en temas relacionados con el cálculo.

Algunos de los obstáculos que observamos, que en la actualidad intervienen en el proceso de enseñanza-aprendizaje en los estudiantes, son los diferentes distractores: celulares, rumbas, moda, etc., los cuales captan de una manera asombrosa la atención de los estudiantes, llevándolos a subestimar y descuidar su proceso educativo. Sumándole a esto, también existe el problema de la imagen que maneja la gran mayoría de los educandos acerca de las matemáticas, y en especial del Cálculo, como una materia complicada y poco útil para sus proyectos de vida. Esto hace que el ambiente en el salón de clase se torne difícil para el desarrollo de cualquier actividad o tema que se plantee.

Otros problemas que encontramos en los estudiantes al momento de trabajar actividades relacionadas con el Cálculo son:

- Dificultad para hacer e interpretar gráficas.
- Problemas para manejar la simbología o lenguaje matemático (leer y escribir).
- Dificultades para entender y aplicar conceptos (definiciones, teoremas, etc.).

Teniendo en cuenta esto, notamos la importancia de desarrollar actividades y estrategias metodológicas que despierten el interés del estudiante por el aprendizaje del Cálculo y en especial por el concepto del límite, ya este concepto juega un papel fundamental en la comprensión de otros conceptos del Cálculo; por ejemplo, la continuidad de una función, la derivada de una función, la suma de una serie infinita y la integral de una función, llevan en su definición el concepto de límite. Además es uno de los temas en que más se presentan conflictos, debido a su complejidad resulta ser fuente de dificultades tanto para su aprendizaje como para su enseñanza.

Conscientes de esto, nos planteamos la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo podemos facilitar y optimizar el proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de límite?* En torno a este interrogante realizamos nuestro trabajo de investigación, en el cual nos trazamos como objetivo principal el construir una estrategia metodológica que contribuya a lograr el aprendizaje del concepto de límite en los estudiantes de primer semestre de las carreras de ciencias e ingenierías de la Universidad Industrial de Santander.

Para esto realizamos una investigación de tipo cualitativo con un curso de 30 estudiantes de Cálculo I en la Universidad industrial de Santander, donde a través de la investigación matemática y didáctica del concepto de limite buscamos plantear una estrategia metodólogica con un lenguaje claro, cercano y preciso, para llevar a los estudiantes a experimentar el proceso de “hacer matemáticas”, de tal suerte que los educandos sientan que son parte activa y fundamental de la clase.

De esta forma se busca eliminar la creencia que manejan los estudiantes acerca del concepto límite como un tema mecánico y difícil de tratar, donde muchas veces toca hacer las cosas sin entenderlas [2]. Este tipo de mentalidad es la que lleva a la mayoría de los educandos a encontrar muchas dificultades para comprender el tema y obtener los malos resultados que se ven hoy en día.

Con esto se pretende cambiar la perspectiva que se tiene del Cálculo, y en especial del concepto de límite, como algo complicado y alejado de la realidad, mostrándoles a los estudiantes que las matemáticas no son algo mágico e irreal que está reservado solo para algunos, sino que –al contrario– es una ciencia que se puede manejar y entender siempre que se trabaje con dedicación y cuidado, no olvidando sustentar lo que se hace de una manera adecuada. De esta manera se puede hacer de la clase algo interesante y efectivo.

A continuación realizaremos una síntesis de la propuesta, donde se explicará el contenido de cada uno de los ocho capítulos que abarcarán nuestra investigación:

Capítulo 1: ALGO DE HISTORIA ACERCA DEL CONCEPTO DE LÍMITE. Aquí se tocará un poco la parte histórica relacionada los primeros pasos y la posterior formalización del concepto del límite.

Capítulo 2: DEFINICIÓN FORMAL DEL CONCEPTO DE LÍMITE. Damos a conocer al lector los aspectos matemáticos que soportan y orientan esta investigación, presentando las definiciones y teorías involucradas para el desarrollo de la estrategia metodológica.

Capítulo 3: METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN. En este se describe el proceso de investigación y el grupo en el cual se realizó este trabajo

Capítulo 4: CONOCIENDO EL PROBLEMA. Se presenta una síntesis de algunos obstáculos relacionados con respecto al concepto de límite.

Capítulo 5: EXPERIENCIA EN EL AULA. Aquí se presentan la experiencia y el desarrollo de la metodología planteada para abordad el concepto de límite.

Capítulo 6: ANÁLISIS DE RESULTADOS. En este capítulo relatamos paso a paso la intención, la forma y el análisis de la actividad, y hacemos una breve presentación y descripción del taller.

Capítulo 7: EVIDENCIA Y RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA. Aquí realizamos el análisis de las respuestas dadas por los estudiantes a cada una de los ejercicios planteados, retroalimentando la pregunta de investigación.

Capítulo 8: CONCLUSIONES. Para finalizar, formulamos los aspectos más relevantes encontrados al realizar y analizar nuestra experiencia.

1. ALGO DE HISTORIA ACERCA DEL CONCEPTO DE LÍMITE

Es importante hacer una revisión del desarrollo y evolución del concepto del límite, ya que desde sus inicios no fue algo fácil; se requirieron muchos años para tener el concepto tal como lo conocemos actualmente, a partir de Karl Weierstrass (1815–1897), quien propuso la actual definición rigurosa de límite.

Si revisamos muchos años atrás cerca de unos 3500 años, se evidencian los anhelos de la gente de medir con absoluta precisión; muestra de ello se refleja en las tablillas mesopotámicas, más precisamente en la tablilla YBC 7289 (ver figura 1), que da la medida de la diagonal de un cuadrado de lado 1 (“1;24,51,10” en escritura sexagesimal); en el sistema decimal es 1,41421296, y si la comparamos a la aproximación de 8 decimales que da la calculadora, que es 1,41421356 para ese caso, vemos que el error es muy pequeño.

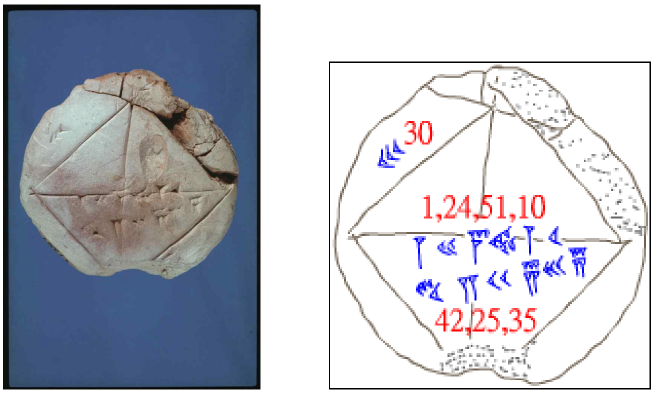


Figura 1. Tablilla Mesopotámica YBC7289.

Como se muestra en [1], los deseos de medir con precisión están certificados en Grecia desde los inicios del método de exhaución por Antifón (c. -480/-411), haciendo un intento de cuadrar el círculo mediante polígonos inscritos, hasta que fue perfeccionado por Eudoxo (c. -408/−355) y su brillante aplicación por Arquímedes (-287/-212). Allí mismo se mencionan los esfuerzos de diversos matemáticos por perfeccionar la aproximación de π, como el 355/113 del chino Zu Chongzhi (c. 430-501) y los diecisiete decimales logrados en el siglo XV por el iraní Al-Kashi (para lo cual debió calcular el lado de un polígono regular de 800.335.168 lados).

Otras manifestaciones de la idea intuitiva de límite se presentan en esta época griega, donde encontraron procesos geométricos infinitos que surgen de las paradojas de Zenón, del descubrimiento de los números irracionales y del cálculo de áreas y volúmenes de figuras curvilíneas mediante la comparación de figuras rectilíneas, utilizando el método de aproximaciones sucesivas.

En el siglo XVII, cuando Isaac Newton (1642–1727) y Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716) formularon el cálculo, el límite fue descrito como “la cantidad a la cual una variable se acerca pero nunca se sobrepasa”. En particular, el límite fue considerado como un valor al cual ciertas cantidades en movimiento “se aproximan continuamente más que cualquier diferencia dada, pero nunca puede alcanzarla o ir más allá, antes de que las cantidades hayan disminuido indefinidamente”.

A finales del siglo XVI y comienzos del XVII varios matemáticos, como Stevin, Luca Valerio y Cavalieri, basados en los trabajos griegos y aprovechando la inserción del infinito en los razonamientos matemáticos de los filósofos de la época, propusieron nuevos métodos para resolver problemas de áreas de figuras curvilíneas.

A principios del siglo XIX, los matemáticos empezaron a preocuparse por la falta de precisión en los conceptos y demostraciones de varias ramas del análisis, pero el uso de los procesos de aproximación continuó siendo herramienta esencial. Cauchy propone como definición: “Cuando los sucesivos valores asignados a una variable se aproximan indefinidamente a una valor fijo de modo que terminan por diferir de él tan poco como se desee, este último valor es llamado límite de los otros" (Boyer [2], 1992, p.647).

La moderna -"aritmetizada"- noción de límite la empieza a desarrollar a principios del siglo XIX Bernard BOLZANO (1781-1848) en escritos publicados entre 1810 y 1817. Pero esos escritos fueron conocidos por la comunidad matemática solo después de su muerte. Así que la primera definición rigurosa de límite para el caso de las funciones reales aparece públicamente en el *Analyse algebrique* (1821) de Augustin-Louis CAUCHY (1789-1857). Él estableció los teoremas fundamentales sobre la existencia de diferentes tipos de límites, e introdujo la noción de límite superior y límite inferior.

Concepciones más generales de límites fueron propuestas que en los primeros decenios del siglo XX en Rusia por Dmitri KRYZHANOVSKI (1883-1939) y Samuíl SHATUNOVSKI (1859-1929), y en los Estados Unidos por Eliakim MOORE (1862-1932) y H. L. SMITH (Mayorga, 2008 páginas 2 y 3).

2. DEFINICIÓN FORMAL DEL CONCEPTO DE LÍMITE

En esta sección presentamos una noción bastante generalizada del concepto de límite, que es el de límites según direcciones, debida Shilov [3], y que es un caso particular de la máxima generalización posible, la de límites por filtro, debida a Cartan [4]. La presentación está tomada de [1].

2.1. LÍMITE EN UNA DIRECCIÓN

2.1.1. Nociones básicas

Definición 2.1. Sean dados un conjunto arbitrario *S* y un sistema de conjuntos no vacíos $D \subset \mathcal{P}(S)$ ($\mathcal{P}(S)$ es el conjunto de partes de *S*). Se dice que *D* es una **dirección** en el conjunto *S* si $\bigcap_{C \in D} C = \phi$ y para cualesquiera $\mathrm{A}, \mathrm{B} \in \mathrm{D}$ tiene lugar una de las dos contenencias $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ ó $\mathrm{B} \subset \mathrm{A}$ •

Definición 2.2. Sean *S* un conjunto arbitrario, (M, d) un espacio métrico y *f* la función

$$\begin{array}{rccc} f: & S & \longrightarrow & M \\ & x & \longmapsto & f(x). \end{array}$$

Diremos que la **función *f* tiene limite en la dirección** $D \subset \mathcal{P}(S)$ si existe un punto $a \in \mathrm{M}$ tal que para cualquier ε > 0 se puede encontrar un subconjunto $\mathrm{A} \in \mathrm{D}$ en todos los puntos *x* del cual se satisface la desigualdad

$$d(f(x), a) < \varepsilon;$$

en tal caso el **punto** a **se denomina el límite de la función *f* en la dirección *D***, y se escribe: $\underset{D}{lìm}\, f(x)=a$, ó $f(x)\underset{D}{\rightarrow} a$ simplemente $f(x)\rightarrow a$.

En símbolos tenemos:

$$\lim_{D} f(x) = a \Leftrightarrow \forall\varepsilon > 0 : \exists A \in D \mid x \in A \Rightarrow d(f(x), a) < \varepsilon. \bullet$$

Teorema 2.1. Si una función f tiene límite en la dirección *D*, ese límite es único.

Demostración. Supongamos que *f* tiene dos límites en la dirección *D*,

$$\lim_{D} f(x) = a_1, \qquad \lim_{D} f(x) = a_2.$$

Aplicando la definición de límite en la dirección *D*, dado un cierto ε > 0 tenemos que

$$\exists A \in D \mid x \in A \Rightarrow d(f(x), a_1) < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\exists B \in D \mid x \in B \Rightarrow d(f(x), a_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Como necesariamente tiene lugar una de las dos contenencias $A \subset B$ ó $B \subset A$, para todos los *x* que pertenezcan al más pequeño de estos dos conjuntos (i.e., $\forall x \in A \cap B$) se cumplirán simultáneamente las dos anteriores desigualdades, así que

$$d(a_1, a_2) \leq d(a_1, f(x)) + d(f(x), a_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

es decir, $d(a_1, a_2) < \varepsilon.$

Así pues, $d(a_1, a_2)$ es un número no negativo menor que cualquier positivo, y por consiguiente sólo puede ser cero, de lo cual resulta que $a_1 = a_2$. ■

Ejemplo 2.1. Sean, $\mathbb{N}_i \equiv \{i, i+1, i+2, ...\},\ i \in \mathbb{N}_0,$

$$D = \{\mathbb{N}_0, \mathbb{N}_1, \mathbb{N}_2, ...\} = \{\{0,1,2,...\}, \{1,2,3,...\}, \{2,3,4,...\}, ...\} \subset \mathcal{P}(\mathbb{N})$$

Es claro que $\bigcap_{i \in N} N_i = \phi$ y que para cualesquiera $\mathbb{N}_n, \mathbb{N}_m \in D$ se tiene $\mathbb{N}_m \subset \mathbb{N}_n$ si m ≥ n ó $\mathbb{N}_n \subset \mathbb{N}_m$ si m ≤ n, así que en realidad *D* es una dirección. Esta dirección la denotamos $n \to \infty$. Consideremos además la función

$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{N} & \longrightarrow & \mathsf{M} \\ & n & \longmapsto & f(x) \equiv x_n, \end{array}$$

que será una sucesión $\{x_n\}$ en el espacio métrico M . De acuerdo con nuestra definición la sucesión $\{x_n\}$ tendrá límite $a \in M$ en la dirección *D*, es decir cuando $n \to \infty$, si para cualquier ε > 0 existe un $\mathbb{N}_k \in D$ tal que si $n \in \mathbb{N}_k$ (i.e., si n ≥ k) se cumple que $d(x_n, a) < \varepsilon$. De una sucesión $\{x_n\}$ que tiene límite a cuando $n \to \infty$ se dice que **converge** al punto a. Es evidente que la definición dada coincide con la definición conocida para convergencia de sucesiones en espacios métricos, y podemos escribir:

$$\lim_{n \to \infty} x_n = a. \bullet$$

Ejemplo 2.2. Sean $S \equiv [a, \infty)\ y\ D \subset \mathcal{P}([a, \infty))$ el sistema de todos los subconjuntos $A_\xi \subset S$ de la forma (ξ, ∞), ξ > a. Es evidente que *D* es una dirección en el sentido de nuestra definición. Esta dirección se denota x → +∞. Según esto, si se tiene

$$\begin{array}{rccl} f: & [a, \infty) & \longrightarrow & M \\ & x & \longmapsto & f(x), \end{array}$$

podemos decir que f tiene como límite en la dirección D (i.e., $f(x) \to b$), el elemento $b \in M$ si para cada ε > 0 existe un $A_\xi \subset S$ tal que si $x \in A_\xi$ (i.e., si $x > \xi$) entonces $d(f(x), b) < \varepsilon$. •

Definición 2.3. Sean (M_1, d_1) un espacio métrico y $a \in M_1^{'}$. La dirección la $x \to a$ definimos como la colección de todas las bolas perforadas $\overset{\circ}{B}(a; r)$. En virtud de que a es un punto de acumulación, ninguna de esas bolas es vacía, y las otras propiedades de la dirección se cumplen evidentemente.

Si (M_1, M_2) es otro espacio métrico y $f : M_1 \to M_2$, la función f **tendrá límite en la dirección** $x \to a$, según la definición general ya hecha, si existe un $b \in M_2$ para el cual, dado un $\varepsilon > 0$, se puede encontrar un *δ > 0* tal que $\forall x \in \overset{\circ}{B}(a; \delta)$ se cumpla que

$$d_2(f(x), b) < \varepsilon.$$

Esto lo podemos resumir escribiendo

$$\lim_{x \to a} f(x) = b,$$

y, como en los otros casos, se dice que *b* es el límite de la función *f* cuando $x \to a$. (Como se ve, la imagen de *f* en a no desempeña ningún papel; es incluso posible que $a \notin D(f)$)•

Teorema 2.2 (**del emparedado**). Considere las **funciones de valor real** $f, g, h : S \to \mathbb{R}$, en donde *S* es un conjunto cualquiera. Supóngase que en S existe una dirección *D* tal que

$$\lim_D f(x) = \lim_D h(x) = b,$$

y que hay un elemento $A \in D$ tal que $\forall x \in A$ se cumple

$$f(x) \leq g(x) \leq h(x). \tag{2.1}$$

Entonces

$$\lim_D g(x) = b.$$

Demostración. Desmenuzando las hipótesis tenemos:

$$\lim_D f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists A_1 \in D \mid \forall x \in A_1 : d_0(f(x), b)| < \varepsilon,$$

es decir, $\forall x \in A_1$

$$b - \varepsilon < f(x) < b + \varepsilon; \tag{2.2}$$

$$\lim_D h(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists A_2 \in D \mid \forall x \in A_2 : d_0(h(x), b) < \varepsilon,$$

i.e., $\forall x \in A_2$

$$b - \varepsilon < h(x) < b + \varepsilon. \tag{2.3}$$

Si tomamos $A_0 \equiv A \cap A_1 \cap A_2$, entonces $\forall x \in A_0$ se cumplirán simultáneamente (2.2) y (2.3), y en virtud de (2.1),

$$b - \varepsilon < f(x) \leq g(x) \leq h(x) < b + \varepsilon,$$

de donde

$$-\varepsilon < g(x) - b < \varepsilon,$$

o sea $d_0(g(x),b) < \varepsilon$ para cualquier $x \in A_0$, lo que quiere decir que

$$\lim_{D} g(x) = b.$$

Teorema 2.3. Sean S un conjunto cualquiera, (L,d) un espacio métrico-lineal concordante, $f,g : S \to L$ y

$$\begin{array}{rccl} f+g: & D(f)\cap D(G) & \longrightarrow & L \\ & x & \longmapsto & (f+g)(x) \equiv f(x)+g(x). \end{array}$$

Sea además *D* una dirección en $D(f)\cap D(g)$, y supóngase que existen

$$\lim_{D} f(x) = b_1 \quad y \quad \lim_{D} g(x) = b_2.$$

Entonces existe

$$\lim_{D} [f(x)+g(x)] = \lim_{D} f(x) + \lim_{D} g(x).$$

Demostración. La existencia de los límites equivale a las aseveraciones

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists A_1 \in D \mid \forall x \in A_1 : d(f(x), b_1) < \frac{\varepsilon}{2},$$
$$\forall \varepsilon > 0 : \exists A_2 \in D \mid \forall x \in A_2 : d(f(x), b_2) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Sea $A \equiv A_1 \cap A_2$. Entonces *A* es una dirección en $D(f)\cap D(g)$ y $\forall x \in A$ se cumplen las dos aseveraciones anteriores. En virtud de la concordancia de (L,d) tenemos

$$
\begin{aligned}
d(f(x)+g(x), b_1+b_2) &= d(f(x), b_1+b_2-g(x)) = d(f(x)-b_1, b_2-g(x)) \leq \\
&\leq d(f(x)-b_1, \odot) + d(\odot, b_2-g(x)) = \\
&= d(f(x), b_1) + d(g(x), b_2) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,
\end{aligned}
$$

y por tanto

$$\lim_D [f(x)+g(x)] = b_1 + b_2 = \lim_D f(x) + \lim_D g(x).$$

En particular, para el caso $S = L = \mathbb{R}$ obtenemos para las funciones reales el popular teorema acerca de que **“el límite de la suma es la suma de los límites”**.

Para el otro teorema del cálculo elemental según el cual **‘‘el límite del producto es el producto de los límites”**, tenemos la siguiente generalización.

Teorema 3.4. Sean *S* un conjunto cualquiera, *L* positivo un espacio lineal euclídeo, i.e., con producto escalar o interno $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ definido, y revestido con la norma ordinaria (i.e., $\|u\| \equiv \sqrt{\langle u|u \rangle}$).

Sean además $f, g : S \to L$ y *D* una dirección en el conjunto $D(f) \cap D(g)$, y considérese el funcional (en general complejo)

$$
\begin{aligned}
fg: \quad D(f) \cap D(g) &\longrightarrow \mathbb{C} \\
x &\longmapsto (fg)(x) \equiv \langle f(x)|g(x) \rangle.
\end{aligned}
$$

Supóngase finalmente que en *L* existen

$$\lim_D f(x) \equiv b_1 \quad y \quad \lim_D g(x) \equiv b_2.$$

Entonces existe

$$\lim_D (fg)(x) = \langle b_1|b_2 \rangle.$$

Demostración. Según la hipótesis del teorema tenemos que

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists A_1 \in D \mid x \in A_1 \Rightarrow \|f(x) - b_1\| < \varepsilon,$$

$$\exists A_2 \in D \mid x \in A_2 \Rightarrow \|g(x) - b_2\| < \varepsilon.$$

Utilizando la desigualdad de Cauchy-Buñakovski (ver, por ejemplo, [5]), según la cual en todo espacio euclídeo normado se tiene

$$|\langle u \mid v \rangle| \leq \|u\| \cdot \|v\|,$$

para los $x \in S$ tales que $x \in A \equiv A_1 \cap A_2$ tendremos

$$\Big|(fg)(x) - \langle b_1 \mid b_2 \rangle\Big| = \Big|\langle f(x)|g(x)\rangle - \langle b_1|b_2\rangle\Big| =$$

$$= \Big|\langle f(x) \mid g(x)\rangle - \langle b_1 \mid b_2\rangle + \langle f(x) \mid b_2\rangle - \langle f(x) \mid b_2\rangle + \langle b_1 \mid g(x)\rangle$$
$$- \langle b_1 \mid g(x)\rangle + \langle b_1 \mid b_2\rangle - \langle b_1 \mid b_2\rangle\Big| =$$
$$= \Big|\langle f(x) \mid g(x)\rangle - \langle f(x) \mid b_2\rangle - \langle b_1 \mid g(x)\rangle + \langle b_1 \mid b_2\rangle + \langle f(x) \mid b_2\rangle$$
$$- \langle b_1 \mid b_2\rangle + \langle b_1 \mid g(x)\rangle - \langle b_1 \mid b_2\rangle\Big| =$$
$$= \Big|\langle f(x) - b_1 \mid g(x) - b_2\rangle + \langle f(x) - b_1 \mid b_2\rangle + \langle b_1 \mid g(x) - b_2\rangle\Big| \leq$$
$$\leq \Big|\langle f(x) - b_1 \mid g(x) - b_2\rangle\Big| + \Big|\langle f(x) - b_1 \mid b_2\rangle\Big| + \Big|\langle b_1 \mid g(x) - b_2\rangle\Big| \leq$$
$$\leq \|f(x) - b_1\| \cdot \|g(x) - b_2\| + \|f(x) - b_1\| \cdot \|b_2\| + \|b_1\| \cdot \|g(x) - b_2\| \leq$$
$$< \varepsilon.\varepsilon + \varepsilon \|b_2\| + \varepsilon \|b_1\| = \varepsilon(\varepsilon + \|b_2\| + \|b_1\|),$$

es decir,

$$x \in A \Rightarrow |\langle f(x) \mid g(x)\rangle - \langle b_1 \mid b_2\rangle| < \varepsilon(\varepsilon + \|b_2\| + \|b_1\|).$$

Esta última expresión se puede hacer -según el principio arquimediano de los reales- tan pequeña como se quiera tomando ε suficientemente pequeño, y por lo tanto

$$\lim_D (fg)(x) = \lim_D \langle f(x)|g(x)\rangle = \langle \lim_D f(x)| \lim_D g(x)\rangle = \langle b_1 \mid b_2 \rangle, \text{ Q.E.D.}$$ ■

Es claro que si $S = L = \mathbb{R}$ (o si $S = L = \mathbb{C}$) y el producto interno es el producto común de funciones reales y complejas, del teorema demostrado se obtiene como caso particular el ya mencionado del cálculo elemental.

Teorema 2.5 (**de la conservación del signo** para funcionales reales). Sean S un conjunto cualquiera, D una dirección en S y f:S$\rightarrow$ R. $f : \mathrm{S} \rightarrow \mathrm{R}$ Supóngase que existe $\lim_D f(x) \equiv a > 0$.

Entonces

$$\exists B \in D \mid \forall x \in B : f(x) > 0.$$

Demostración. Tenemos por hipótesis que

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists A \in D \mid \forall x \in A : d_0(f(x), a) < \varepsilon.$$

En otras palabras,

$$-\varepsilon < f(x) - a < \varepsilon,$$

o lo que es lo mismo,

$$a - \varepsilon < f(x) < a + \varepsilon.$$

Como a es positivo, para valores de ε menores que a tendremos

$$a - \varepsilon > 0,$$

así que existirá

$$B \subset A \mid \forall x \in B : f(x) > 0, \quad Q.E.D.$$

■

El ejemplo que sigue ilustra la teoría expuesta para el caso de funciones con $\mathbb{R}$ tanto como conjunto de salida como conjunto de llegada.

Ejemplo 2.3. Sea $f(x) = x^2$. Demuéstrese que $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 9$.

Evidentemente (véase figura 2), para cualquier $\varepsilon > 0$ se puede tomar la dirección $\left\{ \overset{\circ}{B}(3, \delta) \right\}$, en donde $\delta \leq \sqrt{9+\varepsilon} - 3$ (aquí se aprovecha el hecho de que en la parte positiva del eje horizontal la función es estrictamente creciente y convexa). Por lo tanto

$$x \in B\left(3, \sqrt{9+\varepsilon} - 3\right) \Rightarrow f(x) \in (9-\varepsilon, 9+\varepsilon) .\bullet$$

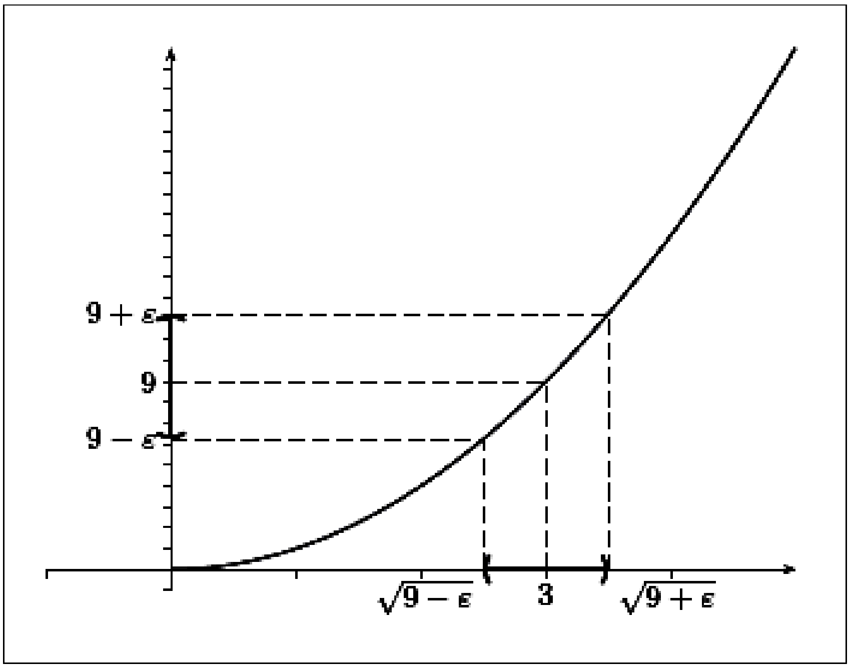


Figura 2. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 9$

3. METODOLOGÍA DE LA INVESTIGACIÓN

En este capítulo describimos la metodología usada en este trabajo, los sujetos de estudio, el tipo de investigación que estamos realizando y las etapas de esta investigación.

3.1. Tipo de investigación

El diseño de nuestro trabajo se clasifica como una investigación en el aula de tipo cualitativa, ya que es una alternativa que permite cambiar las concepciones del maestro desde sus prácticas pedagógicas. A su vez busca indagar, construir, explicar y resolver problemas que surgen en el proceso enseñanza-aprendizaje, que se desarrolla en el aula de clase a través de la observación, el análisis de resultados y experiencias que se dan al momento de trabajar ciertos temas. En nuestro caso el concepto intuitivo de límite.

3.2. Características de los estudiantes

Trabajamos con un curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander durante el segundo semestre académico del 2007. Este curso fue escogido basados en dos criterios: la disposición del docente encargado de participar en el proyecto, y que el curso tuviera una cantidad similar de estudiantes de primer nivel y repitentes (estudiantes que ya han visto la materia más de una vez).

Bajo estas condiciones, la profesora Marisel Ardila Amador accedió a colaborarnos muy amablemente, poniendo a nuestra disposición el grupo J4 del Cálculo I bajo su acertada tutoría y colaboración.

Este curso está conformado por 30 estudiantes: 14 que cursan la asignatura por primera vez y 16 repitentes (algunos cancelaron la asignatura en el segundo o tercer previo, y otros sí finalizaron la asignatura). Ellos hacen parte de las carreras de Geología, Química, Licenciatura en Matemáticas, Ingeniería Eléctrica, Ingeniería de Petróleos, Ingeniería Mecánica, Ingeniería Industrial, Ingeniería Metalúrgica e Ingeniería de Sistemas. Sus edades oscilan entre los 17 y 21 años; gran parte del curso pertenece a un estatus socioeconómico de entre los estratos 2 y 4. La relación entre ellos es relativamente buena, se evidencia el respeto que hay entre ellos mismos y hacia la profesora.

En este curso no hay estudiantes con necesidades educativas especiales (físicas ni mentales), y los problemas de aprendizaje que hemos podido observar en la mayoría de estudiantes se presentan por falta de voluntad o motivación por la materia, o por que sencillamente no se creen buenos para la asignatura y esto les impide trabajar con todas sus capacidades.

La participación durante las actividades de experimentación realizadas fue como en una clase normal, contando con la asistencia, puntualidad y buena participación de los estudiantes, en lo colectivo e individual, además; la completa colaboración y disposición por parte de algunos estudiantes hacia las dinámicas y actividades que propone el profesor para la clase es notable.

3.3. Etapas de la investigación

Este trabajo se realizó tres etapas:

Etapa 1: En esta etapa estuvimos indagando a través de entrevistas y preguntas en clase las concepciones, intuiciones y dificultades que presentaron los estudiantes alrededor del concepto intuitivo de límite. También se realizó revisión bibliográfica, examinando algunos autores y teorías que nos dieron luces para comprender y analizar mejor este importante concepto.

Etapa 2: Posteriormente, basados en la revisión bibliográfica y en lo indagado con los estudiantes, se construyó una estrategia metodológica que se espera contribuya a lograr el aprendizaje del concepto de límite, la cual se aplicó a los estudiantes de Cálculo I del curso mencionado.

Etapa 3: En esta etapa se analizaron todas las diversas experiencias que se adquirieron durante el trabajo de investigación, logrando extraer una serie de conclusiones, y además obteniendo aclaraciones, críticas y recomendaciones.

4. CONOCIENDO EL PROBLEMA

Como se había mencionado anteriormente, nuestra pregunta de investigación es: ¿Cómo podemos facilitar y optimizar el proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de límite? Surgió de la experiencia vivida durante nuestro paso por la universidad, especialmente en los cursos de Cálculo, Didáctica del Cálculo y Análisis Matemático, donde tuvimos la oportunidad de trabajar y enseñar la definición de límite. Durante este tiempo pudimos notar cómo estudiantes y profesores tienen diferentes inconvenientes al momento de aprender y enseñar el concepto de límite, debido a lo cual en la mayoría de los casos los educandos afrontan el tema de una forma mecánica y prevenida, lo que hace que se pierda el verdadero significado del concepto y su trascendencia.

Ahora, sin pretender hacer aquí un estudio exhaustivo de las dificultades que tienen los educandos en el estudio de los límites, sí queremos recoger los resultados de varias investigaciones en didáctica de las matemáticas que se han ocupado especialmente de los obstáculos epistemológicos relativos al concepto de límite (Cornu, 1983 [6]; Robinet, 1983 [7]; Sierpinska, 1985, 1987 [8]).

A partir del estudio del desarrollo histórico del concepto de límite y de los análisis de las experiencias llevadas a cabo con los estudiantes en el momento de iniciar su primer contacto con dicho concepto, se pueden establecer las siguientes clasificaciones:

4.1. *Obstáculos ligados al "horror" al infinito.* Se trata del principal obstáculo y, de hecho, tiene una raíz metafísica ligada a la discusión de la existencia de lo infinitamente grande o pequeño, de si el límite es alcanzable, de si existe un intermedio de lo infinitamente pequeño o lo nulo… En los estudiantes existen muchas manifestaciones de ello como es la idea del límite como aquello que solo conocemos por aproximaciones. También se observa cómo se transfieren automáticamente los métodos algebraicos como propios de las magnitudes finitas a las magnitudes infinitas. Otra transferencia que hacen los estudiantes es la de las propiedades de los términos de una serie a las de su límite. Existe también la idea que del paso al límite es como un movimiento físico de acercamiento, si bien el concepto de límite en la teoría formal es estático.

4.2. ***Obstáculo ligado al concepto de función.*** De hecho la aparición del concepto general de función ha sido decisiva para formular claramente el concepto de límite despojado de las intuiciones geométricas y físicas. En los estudiantes este obstáculo se manifiesta en su concepto primitivo de continuidad (puntos próximos), en la atención que prestan al aspecto relacional de la función que predomina sobre los propiedades topológicas del dominio y del codominio y, sobre todo, en la dificultad que tienen en distinguir el límite de las cotas superiores e inferiores.

4.3. ***Obstáculo lógico.*** Los cuantificadores resultan unos entes extraños y, además, aparece un problema en el orden de los cuantificadores: La función lleva del eje *x* al aje *y*, mientras que al estudiar el limite de una función en un punto se sigue el orden inverso.

4.4. ***Obstáculo geométrico.*** Este obstáculo se manifiesta en la idea geométrica de la diferencia entre una magnitud variable (los polígonos que se acercan al círculo o las secantes a una curva) y una magnitud constante (el círculo o la tangente) que es el límite. La representación grafica de las funciones.

4.5. Obstáculo ligado al símbolo. En tanto que los estudiantes consideran que el paso al límite no es una operación matemática, no sienten ninguna necesidad de usar un símbolo tan complejo.

Como consecuencia de estas consideraciones se puede llegar a la conclusión que el concepto del límite es de gran complejidad y no se puede tomar a la ligera la enseñanza del mismo [9].

Para evidenciar lo que se ha venido hablando hasta momento, indagamos a través de una encuesta, en la cual se hizo la siguiente petición: defina con sus palabras el concepto de límite. Esto nos permitió observar los diferentes puntos de vista que tienes los educandos acerca de este importante concepto; ya de que una forma u otra (bachillerato o cursos anteriores) todos ellos ya habían tenido contacto con este concepto. A continuación mostramos algunas de sus respuestas:

- "Es la aproximación de algo a un punto fijo sin llegar a ser ese punto".
- "Es un lugar en una función donde se genera una asintota".
- "Punto hasta donde llega una recta determinada".
- "Para mí es hasta dónde uno puede llegar, el límite es lo último".
- "Hay dos clases: unos son finitos y otros infinitos".
- "El límite es un valor el cual en una función no tiene un valor real".
- "Es la tendencia a llegar a su mínima expresión. La función".
- "Es la aproximación de algo a un punto sin llegar a ser ese punto".

Al reflexionar en torno de algunas de las respuestas que tienen los estudiantes hacia el concepto de límite, pensamos que estas estaban relacionadas, en su mayoría, con la manera como aprendieron el tema en cursos anteriores (educación media o bachillerato y universidad), o con el significado que tiene la palabra relacionándola un poco con lo visto en funciones. Esto nos ayudó para ver las dificultades evidenciadas que habían sobre el concepto y cómo los estudiantes solo se enfocan a la parte práctica (hacer ejercicios) de este.

Por esto se hace importante plantear una propuesta diferente para la clase, es decir, que se tengan en cuenta las distintas dificultades que se presentan en este tema y que estén sujetas al cambio, donde se le de más importancia al concepto que al procedimiento mecánico de aplicar artificios algebraicos para dar una respuesta a preguntas que los estudiantes no entienden o manejan.

5. EXPERIENCIA EN EL AULA

Basados en lo que hemos venido investigado acerca del concepto de límite, y con la ayuda y orientación el Dr. Bernardo Mayorga (director de esta investigación), planteamos una clase con la que buscamos abordar el concepto de límite de una forma sencilla, clara y efectiva que rompa la manera tradicional como se ha venido trabajando, para así evitar que se presenten los inconvenientes que se encuentran hoy en día (mencionados en el capítulo 4) y obtener una mejor comprensión de lo que es el límite. Para esto trabajamos, como ya se dijo, con un curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander bajo la tutoría de la profesora Marisel Ardila Amado, quien nos permitió hacer de esta propuesta un hecho. A continuación se relata la experiencia vivida en el aula y la dinámica planteada.

5.1. Primera sesión

Se dio comienzo a la clase haciendo una pequeña introducción o recuento de lo visto en el tema de anterior (funciones), donde se resaltó el concepto de dominio e imagen, clase de funciones y funciones inversas. Con esto se buscó despertar el interés de los estudiantes por hacer un análisis más profundo a las imágenes de una función cuyo comportamiento no es claro.

Después de esta breve introducción se plantearon algunos ejercicios, en los cuales se les pedía a los estudiantes que graficaran y determinaran en cada una de las funciones dadas si ellas seguían un comportamiento particular, es decir, si al tomar una dirección o camino en el dominio entonces las imágenes se aproximan o convergen a un punto.
A continuación se muestra las funciones que se trabajaron:

Ejemplo 5.1.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \rightarrow f(n) = (-1)^n .$$

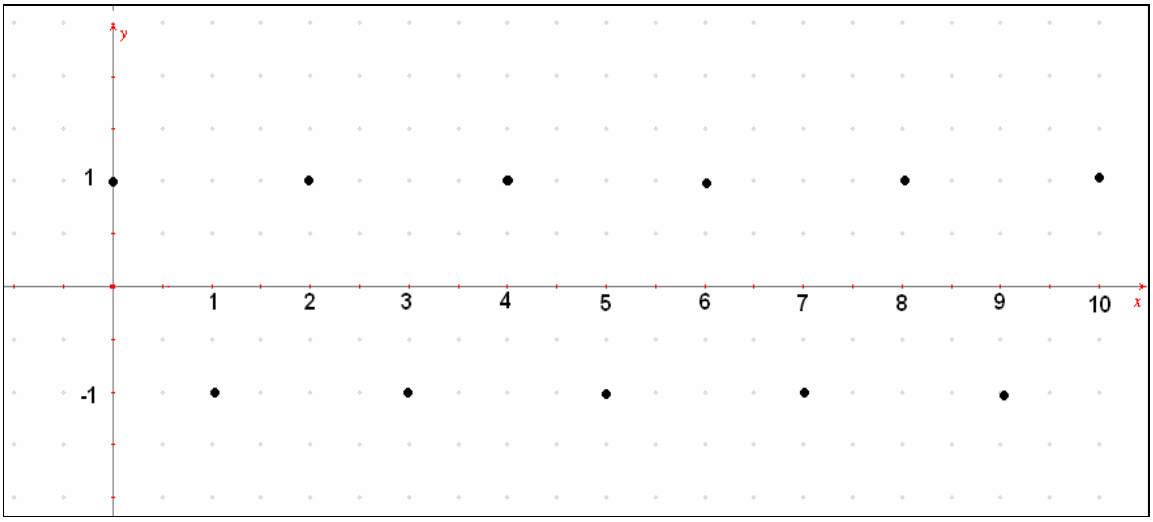


Figura 3. $f(n) = (-1)^n$

En esta función (figura 3) se observó que aunque la función tenía un comportamiento constante en sus imágenes, estas no convergían o se aproximaban a ningún punto.

Ejemplo 5.2.

$$f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$n \rightarrow f(n) = \frac{1}{n}$$

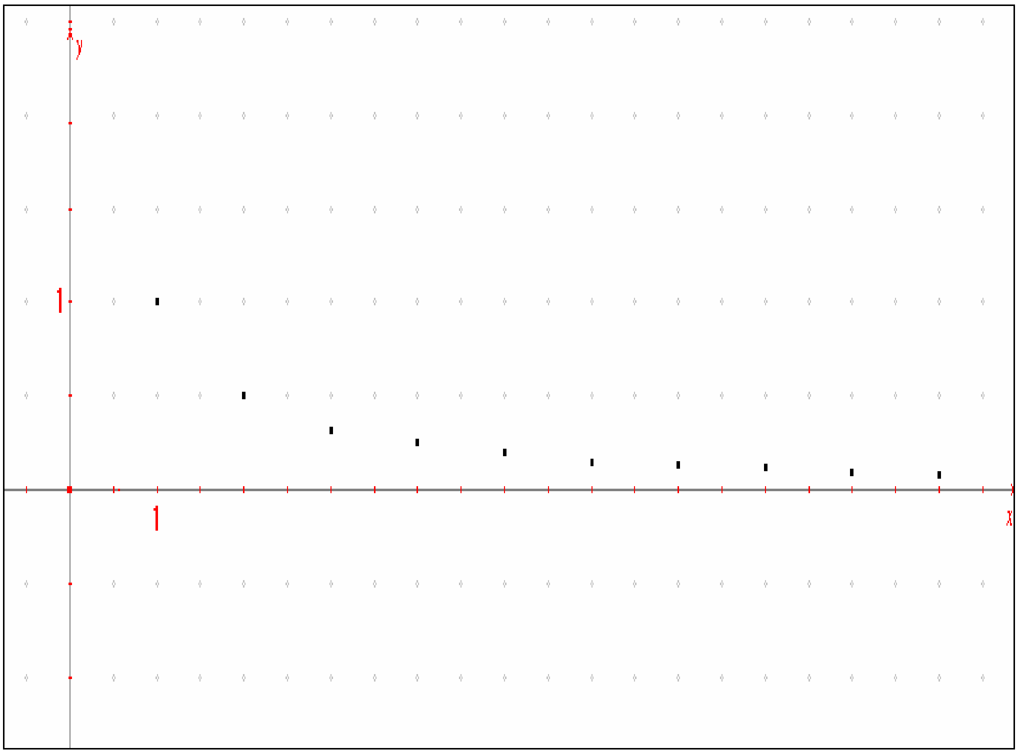


Figura 4. $f(n)=\frac{1}{n}$.

En esta función (figura 4) se notó que a medida que se tomaban valores más grandes en el dominio, sus imágenes tendían o se acercaban cada vez más a cero.

Ejemplo 5.3.

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$
$$x \rightarrow f(x)=e^{1/x}$$

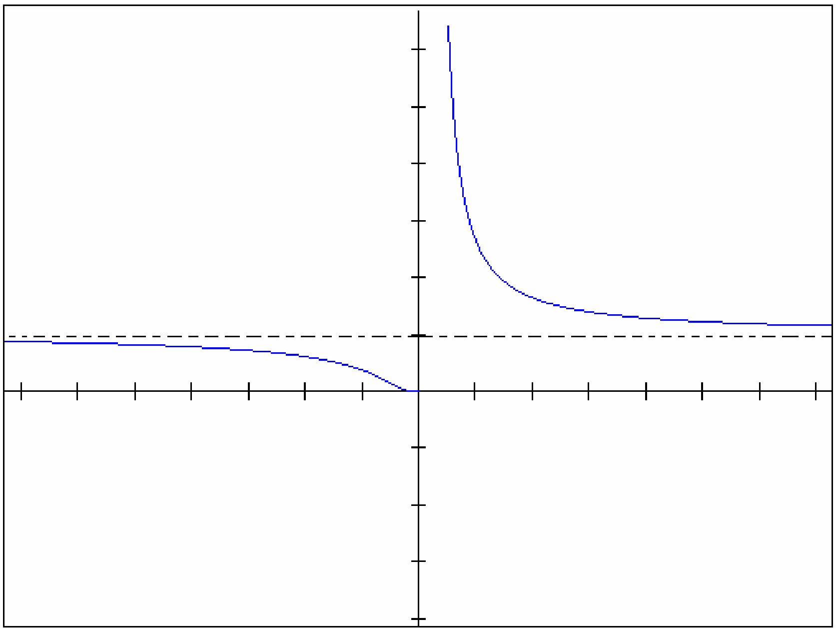


Figura 5. $f(x)=e^{1/x}$.

En esta función (figura 5) al ser el dominio el conjunto de los reales se podían tomar diferentes direcciones para determinar el comportamiento de las imágenes en varios intervalos. El análisis que los estudiantes realizaron fue el siguiente:

- Tomando la dirección hacia infinito $(\rightarrow \infty)$ las imágenes tienden a uno.
- Tomando la dirección de cero hacia menos infinito $(\rightarrow -\infty)$ las imágenes tienden a uno.
- Tomando la dirección de acercarse a cero por la izquierda $(\rightarrow 0^{-})$ las imágenes tienden a cero.
- Y tomando la dirección de acercarse a cero por la derecha $(\rightarrow 0^{+})$ las imágenes tienden a infinito.

Este ejercicio permitió identificar los diferentes comportamientos que puede tomar las imágenes de una función a medida que se toman diferentes direcciones en el dominio, ya sea un punto o tender a más o menos infinito $(\pm\infty)$.

Siguiendo este orden de ideas se buscó con los estudiantes construir la idea intuitiva del concepto de límite de una manera conjunta, dándoles espacio para definir esta importante idea, llegando a la conclusión que una función real posee límite en dos casos:

a) Cuando los elementos en el dominio se mueven en una dirección (i.e., se acercan a un punto de acumulación* o se dirigen indefinidamente hacia la izquierda o hacia la derecha) y las imágenes respectivas en el conjunto de llegada se acercan a un punto concreto, que será el límite.

b) Cuando los elementos en el dominio se mueven en una dirección y las imágenes se hacen cada vez más grandes positivamente sin cota superior, o cada vez más grandes negativamente sin cota inferior.

Al tener una idea intuitiva del concepto de límite se les mostró la necesidad de formalizar este concepto para poder aplicarlo a cualquier función.

Para formalizar el concepto de límite primero se definió un intervalo especial llamado bola, de la siguiente manera:

Definición 5.1. Se denomina bola con centro en $a \in \mathrm{R}$ y radio $r \in \mathrm{R}^+$ el conjunto de los números reales *x* cuya distancia hasta el punto a es menor que *r.* Esa bola se denota $B(a;r)$; en símbolos,

$$B(a;r) \equiv \{x \in \mathrm{R} \mid d(a,x) < r\}$$

***En topología, el concepto de **punto de acumulación** de un conjunto en un espacio captura la noción de estar *extremadamente* cercano al conjunto sin pertenecer necesariamente a él. Generaliza la noción de límite en $\mathbb{R}^n$.

Como la distancia entre dos números reales es el valor absoluto de la diferencia, esto equivale a

$$B(a;r) \equiv \{x \in \mathrm{R} \mid |x-a| < r\}.$$

Se les explicó a los estudiantes que de acuerdo con esta definición toda bola $B(a;r)$ es un intervalo finito $(a-r, a+r)$; y recíprocamente, todo intervalo finito (a,b) es una bola con centro en $\frac{a+b}{2}$ y radio $\frac{b-a}{2}$. Para ilustrar mejor esta definición se dieron los siguientes ejemplos:

$$B(5;3) = (2,8),$$
$$B(-8;2) = (-10,-6).$$

Después de esto se pasó a dar la definición formal de concepto límite, la cual se muestra a continuación. Esta definición es la aplicación al caso particular de las funciones reales de la teoría general expuesta en el Capítulo 2.

Definición de Límite 5.2. Sea a un punto del conjunto de salida al cual podemos acercarnos (no importa que no pertenezca al dominio), y sea *b* un punto del conjunto de llegada (no importa que no pertenezca al recorrido) (véase figura 6).
Se dice que *b* es el limite de la función *f* con respecto al punto a, si dado un ε positivo cualquiera, existe una bola con centro en a y radio *r* tal que

$$\forall x \in B_1(a;r) \cap D(f): f(x) \in B_2(b;\varepsilon)$$

(aquí B_1 quiere decir "bola en el conjunto de salida", y B_2 "bola en el conjunto de llegada").

En símbolos:

$$\lim_{x\to a} f(x)=b \Leftrightarrow \forall\varepsilon>0:\exists r>0 \;\big|\, x\in B_1(a;r)\cap D(f)\Rightarrow f(x)\in B_2(b;\varepsilon).$$

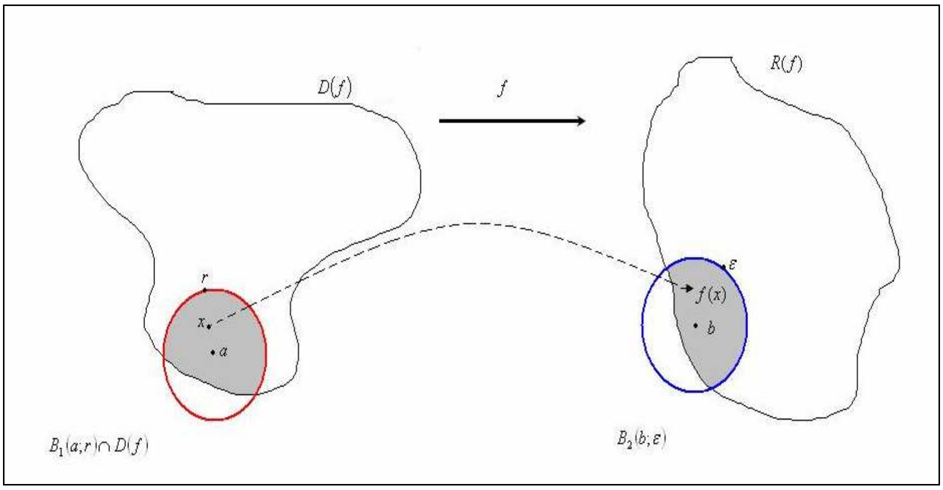


Figura 6. Visualización del concepto general de límite.

Si la función fuera una recta, tendríamos el esquema que sigue (figura 7):

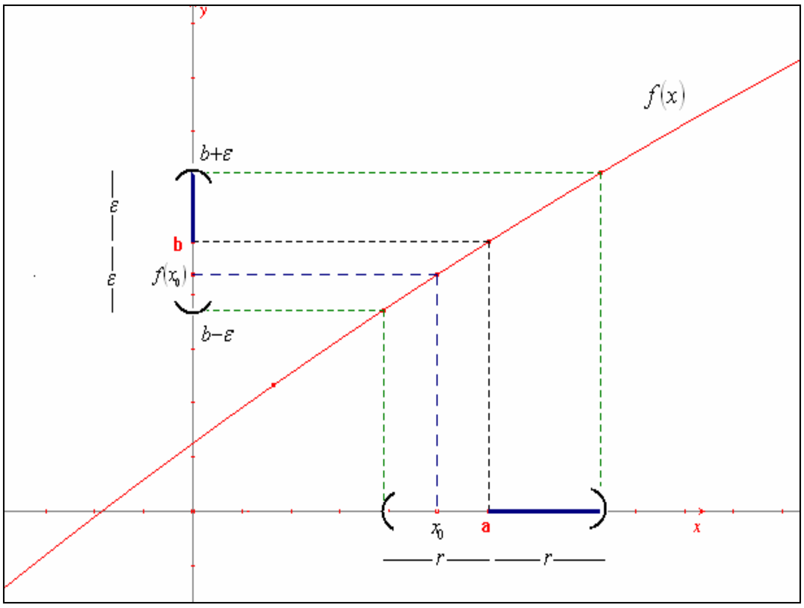


Figura 7. Visualización del concepto de límite para el caso de una recta.

Partiendo de esta definición de límite se mostró que a medida que nos acercamos al punto elegido en el dominio, las imágenes se acercan cada vez más al punto que se encontró como límite. Esta definición da continuidad a lo que se venía trabajando acerca del límite de una forma intuitiva, permitiendo que los estudiantes asimilen mejor este concepto, ya que al utilizar la definición de bola y la idea de dirección se pudo determinar o ver claramente cómo se forma el límite de una manera funcional, y que se puede acercar todo lo que quiera a este punto, ya que se cuenta con los intervalos que definen qué puntos se pueden tomar.

Ahora se darán unos ejemplos que se resolvieron con la ayuda de los estudiantes para mostrar cómo utilizar esta definición para determinar el comportamiento o límite de una función.

Ejemplo 5.4.

Sea $f(x)=2x-1$. Demuestre $\lim_{x\to 2} f(x)=3$.

La idea es demostrar que las imágenes se acerca cada vez más al punto 3 a medida que nos aproximamos más al punto 2 en el dominio, ya sea por izquierda o por derecha. Para esto debemos determinar un intervalo o bola con centro en b=3 y con radio ε, el cual será un valor mayor que cero, para así construir una bola en el dominio con centro en el punto a=2 para comprobar que esto pasa. Lo importante viene siendo encontrar el radio de la bola que se encuentra en el dominio, para así aplicar la definición de límite y comprobar su existencia; a continuación se muestra esto:

Lo primero que hacemos es la gráfica de la función, para ubicar los intervalos que hemos llamado bola en el dominio y en el recorrido de la función (ver figura 8).

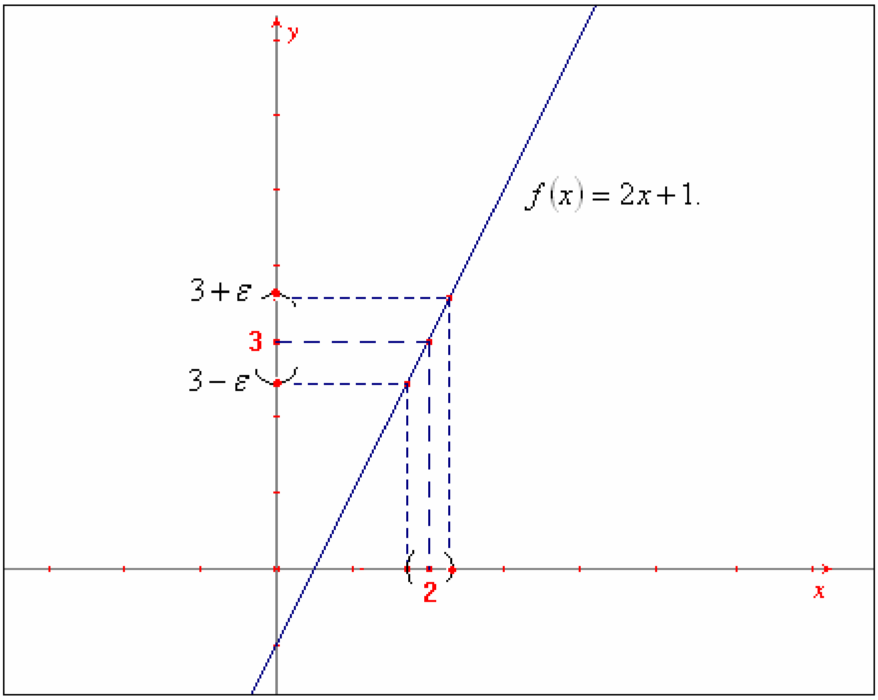


Figura 8. $\lim_{x \to 2} f(x) = 3$.

Después de esto, partiendo de la gráfica utilizamos la función inversa para determinar el valor del radio *r* de la bola que se encuentra en el recorrido de la siguiente forma;

$$\text{Si} \quad f(x) = 2x - 1 \Rightarrow f^{-1}(x) = \frac{x+1}{2};$$

$$\text{luego} \quad f^{-1}(3-\varepsilon) = \frac{3-\varepsilon+1}{2} = \frac{4-\varepsilon}{2} \quad \text{y} \quad f^{-1}(3+\varepsilon) = \frac{3+\varepsilon+1}{2} = \frac{4+\varepsilon}{2}.$$

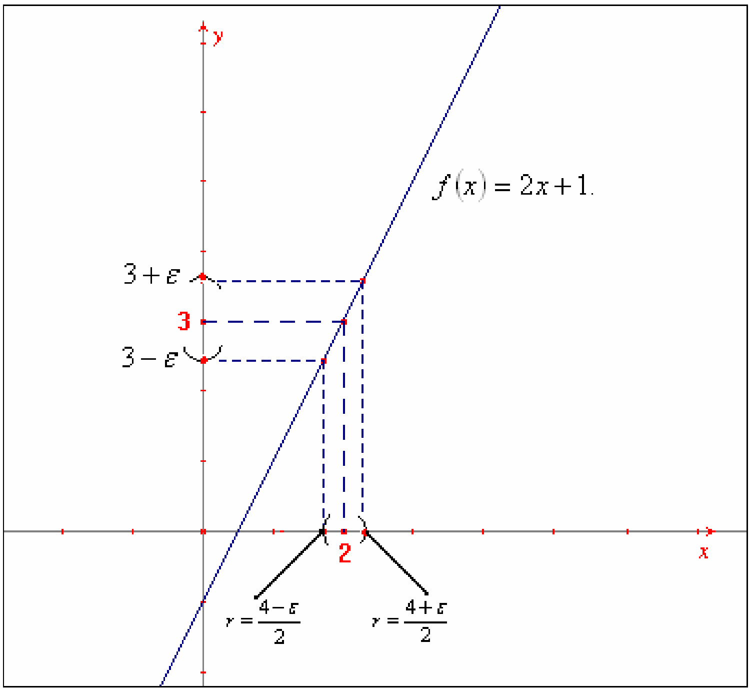


Figura 9. Cálculo de r según la Figura 8.

Ahora, tomando $x = 3-\varepsilon$ (ya que al observar la gráfica (Figura 9) se nota que se puede tomar cualquiera de los dos extremos del intervalo que se forma en el recorrido, debido a que la razón de cambio de la función lineal es constante) y tomando por ejemplo $\varepsilon = 10^{-1}$, tenemos por la definición de bola que el radio *r* es

$$r = 2 - \left(\frac{4-\varepsilon}{2}\right),$$

$$r = 2 - \left(\frac{4-10^{-1}}{2}\right),$$

$$r \cong 0{,}05.$$

Por lo tanto si $\varepsilon = 10^{-1}$ y $r = 5\times10^{-2}$, tenemos $x \in B\left(2;5\times10^{-2}\right) \Rightarrow f(x) \in B\left(3;10^{-1}\right)$.

Al terminar este ejercicio notamos por medio de algunas preguntas a los estudiantes que la mayoría del curso logró entender la idea que se estaba trabajando para demostrar el límite de una función, que es partiendo de las imágenes de la función para lograr construir una bola en el dominio de tal manera que a medida que nos acercamos al centro de la misma la imágenes también se acercan al punto que hemos llamado límite. Creemos que esto se dio gracias a que se estaba trabajando el concepto de límite partiendo solo de funciones y funciones inversas, los cuales eran temas con los cuales ya estaban muy familiarizados y además acababan de trabajar.

Después de esto se trabajó un ejercicio en el cual la razón de cambio de la función en la cual se va hallar el límite no es constante, que se muestra a continuación desmenuzando el ejemplo 2.3 que se dio como ilustración en la teoría general.

Ejemplo 5.5.

Sea $f(x)=x^2$. Demuestre $\underset{x\to 3}{lím} f(x)=9$ (ver figura 10).

En este ejercicio se trabajó la misma dinámica que en el anterior, donde se mostró que la idea es demostrar que las imágenes se acercan cada vez más al punto 9 a medida que nos aproximamos más al punto 3 en el dominio, ya sea por la izquierda o por la derecha. Para esto debemos determinar un intervalo o bola con centro en b=9 y con radio ε el cual será un valor mayor que cero, para así construir una bola en el dominio con centro en el punto a=3 para comprobar que esto pasa. Lo importante viene siendo encontrar el radio de la bola que se encuentra en el dominio, para así aplicar la definición de límite y comprobar su existencia; a continuación se muestra esto:

Lo primero que hacemos es la gráfica de la función, para ubicar los intervalos que hemos llamado bola en el dominio y en el recorrido de la misma.

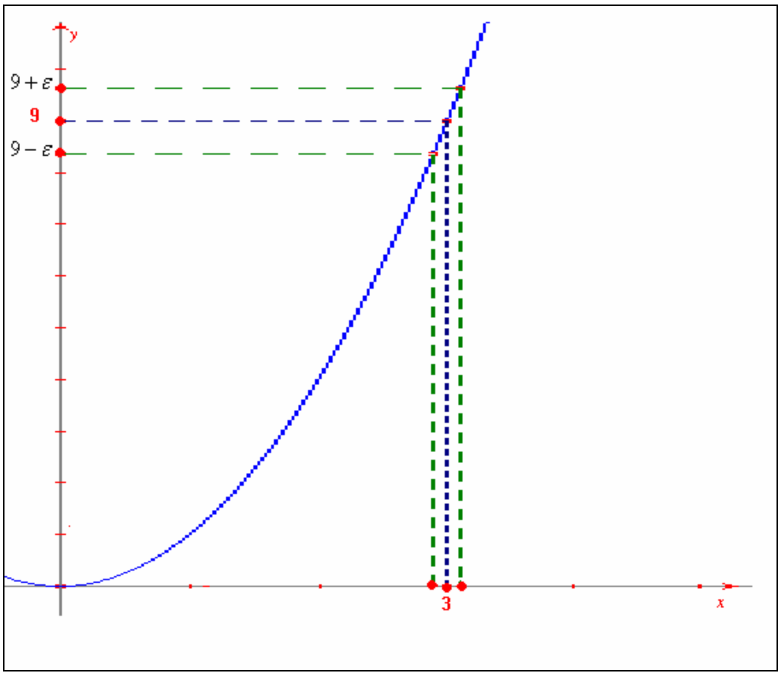


Figura 10. $\lim\limits_{x \to 3} f(x) = 9$.

Después de esto, partiendo de la gráfica utilizamos la función inversa para determinar el valor del radio *r* de la bola que se encuentra en el recorrido de la siguiente forma (ver Figura 11):

Ahora teniendo en cuenta que la función $y = x^2$ **con** $y \geq 0$ tiene mas de una solución; por lo tanto, f no tiene inversa. A menos que se solo se tomen las imágenes positivas ($f^{-1}(x) \geq 0$).

$$\text{Si} \quad f(x) = x^2 \Rightarrow f^{-1}(x) = \sqrt{x} \ ;$$

$$\text{luego} \ f^{-1}(9-\varepsilon) = \sqrt{9-\varepsilon} \quad \text{y} \quad f^{-1}(9+\varepsilon) = \sqrt{9+\varepsilon}$$

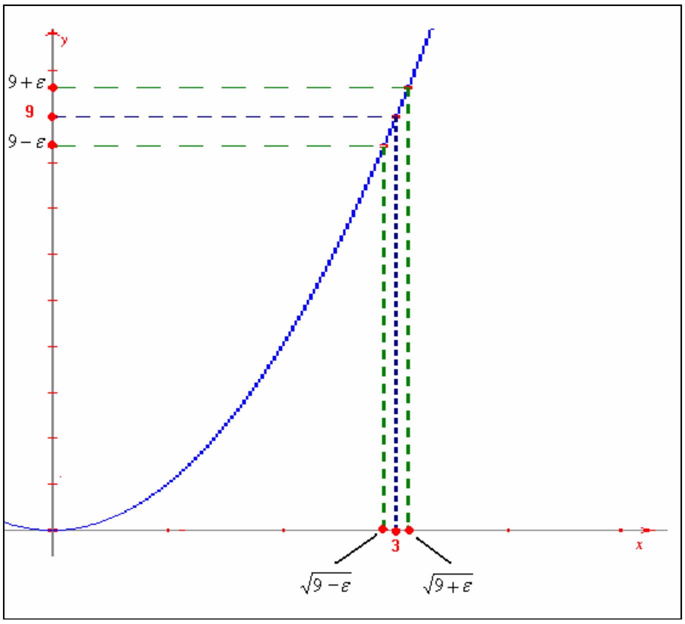


Figura 11. Cálculo del radio r para la Figura 10.

Ahora, como la razón de cambio de la función no es constante, tenemos que escoger uno de los extremos del intervalo que formó en el recorrido, el cual esté más cercano al punto $a=3$ para construir la bola que estará en el mismo, ya que si no se hace esto puede pasar que se tome x en la bola $B_1(a;r)$, pero sin embargo $f(x) \notin B_2(b;\varepsilon)$.

.

Para esto podemos plantear los dos posibles radios que se forman y darle un valor a ε para después comparar los resultados y así encontrar el radio más pequeño para la bola que vamos a construir en el dominio. A continuación se muestra el proceso.

Se nota que no se puede tomar cualquiera de los dos extremos del intervalo que se forma en el recorrido, debido a que la razón de cambio de la función no es constante; remplazando, se tiene:

$$\text{Sean } r_1 = \left(\sqrt{9+\varepsilon}\right) - 3 \text{ y } r_2 = 3 - \left(\sqrt{9-\varepsilon}\right)$$

Tomando, por ejemplo $\varepsilon = 10^{-2}$, se tiene:

$$r_1 = \left(\sqrt{9+10^{-2}}\right) - 3 \text{ y } r_2 = 3 - \left(\sqrt{9-10^{-2}}\right),$$
$$r_1 \cong 0{,}001666203 \text{ y } r_2 \cong 0{,}001667129.$$

Por lo tanto el radio r_1 será el escogido para construir la bola; luego

$$\text{Si } r = \sqrt{9+\varepsilon} - 3 \text{ y } \varepsilon = 10^{-1}, \text{ entonces}$$
$$r = \sqrt{9+10^{-1}} - 3,$$
$$r < 0{,}016620625$$

(se toma "$r <$" para asegurar que la aproximación de la calculadora no nos saque del verdadero intervalo).

Como podemos tomar una aproximación menor al valor hallado de r para simplificar el número y la definición se sigue cumpliendo, tenemos que $r \cong 10^{-2}$. Entonces,

si $\varepsilon = 10^{-1}$ y $r = 10^{-2}$ tenemos $x \in B\left(3;10^{-2}\right) \Rightarrow f(x) \in B\left(9;10^{-1}\right)$.
En general se puede plantear en este ejemplo particular:

$$\text{Si } \lim_{x \to a}\left(x^2\right) = a^2 \text{ entonces } r \leq \sqrt{a^2 + \varepsilon} - a.$$

Este ejercicio se logró trabajar sin ningún inconveniente. Lo importante hasta el momento de la clase era ver la manera de cómo los estudiantes se involucraban y participaban en la dinámica que se estaba proponiendo, donde se buscaba mostrar a ellos que tenían las herramientas matemáticas necesarias para enfrentar los problemas que se les plantearan y llegar a su solución.

Después de esto se desarrollaron otros dos ejercicios, que se enuncian a continuación:

Ejemplo 5.6.

Sea $f(x) = \ln x$. Demuestre $\lim\limits_{x \to 7} f(x) = \ln 7$.

Ejemplo 5.7.

Sea $f(x) = \dfrac{x^2 - 16}{x + 4}$. Demuestre $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = -8$.

En este último ejercicio se resaltó el hecho que el límite de la función no pertenece al conjunto llegada (pues la función no es continua), para mostrarles a los estudiantes lo que se había aclarado al principio en la definición de límite (definición 5.2.).

Con este último comentario se dio final a la clase, la cual duró espacio de 2 horas. Durante esta clase los estudiantes mostraron interés sobre la propuesta a través de su participación y los buenos comentarios que hicieron en el transcurso de la clase. Uno de ellos dijo: “Esta definición nos permitirá tener claridad de cómo el límite verifica o muestra lo que esta pasando en la función”.

5.2. Segunda sesión

Se comenzó la clase recordando la definición de límite que se había trabajado la clase anterior para que, partiendo de ella, se pudieran abordar los casos que hacía falta estudiar.

Ya habiendo trabajado en la clase anterior la existencia del límite de funciones cuando *x* tiende a un punto a, entonces el límite es un punto *b* ($\lim_{x \to a} f(x) = b$). Ahora se planteara el análisis para los otros casos diferentes, que son:

- Cuando tomamos una dirección a un punto en el domino, sus imágenes tienden a mas o menos infinito $\left(\lim_{x \to a} f(x) = \pm\infty\right)$.
- Y cuando tomando la dirección a más o menos infinito en el dominio, sus imágenes convergían a un punto $\left(\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = a\right)$.

Para esto se dio comienzo dando la definición del primer caso, la cual se muestra a continuación:

Definición 5.3. $\lim_{x \to a} f(x) = \infty \Leftrightarrow \forall M > 0 : \exists r > 0 \ \left| x \in B(a;r) \Rightarrow f(x) > M \right.$.

Esto quiere decir: que para todo *M* existe un *r* tal al construir una bola con centro en a y radio *r* en el dominio ($B(a;r)$), entonces, para todo *x* que pertenece a la bola $B(a;r)$ sus imágenes siempre van a ser mayores que *M,* lo cual garantiza que el límite va a tender a infinito (∞), debido a que tomando valores cada vez más cercanos a a, las imágenes de la función son cada vez mayores (ver Figura 12).

Para ilustrar esto mejor se realizó la siguiente gráfica:

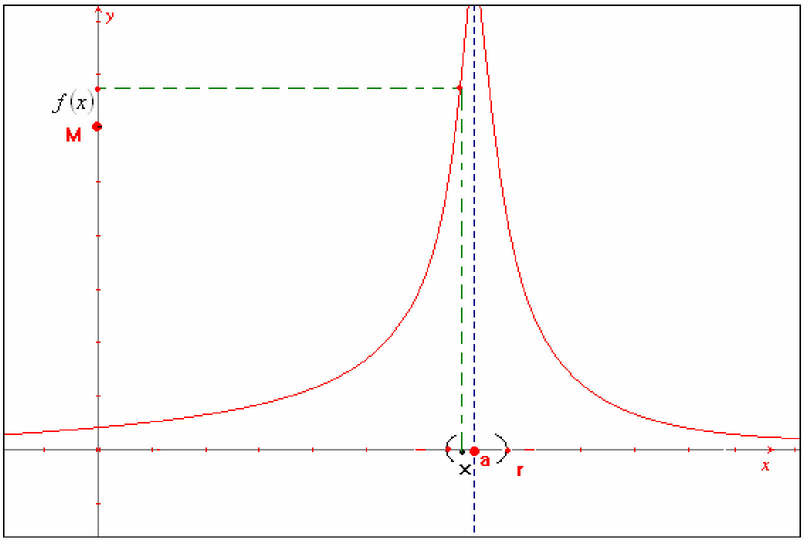


Figura 12. Las imágenes tienden a infinito.

Después de ver la definición en forma general, tanto en símbolos como gráficamente, se realizaron unos ejemplos para entender mejor la idea.

Ejemplo 5.8.

Sea $f(x)=\frac{1}{x^2}$. Demuestre $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=\infty$ (Figura 13).

La idea es demostrar que las imágenes van creciendo y van a tender hacia el infinito (∞) a medida que nos aproximamos más al punto 0 en el dominio, ya sea por la izquierda o por la derecha.

Lo importante viene siendo encontrar el radio de la bola que se encuentra en el dominio, para así aplicar la definición de límite y comprobar su existencia; a continuación se muestra el proceso.

Lo primero que hacemos es la gráfica de la función, para ubicar los intervalos que hemos llamado bola en el dominio y el punto *M* en el recorrido de la función;

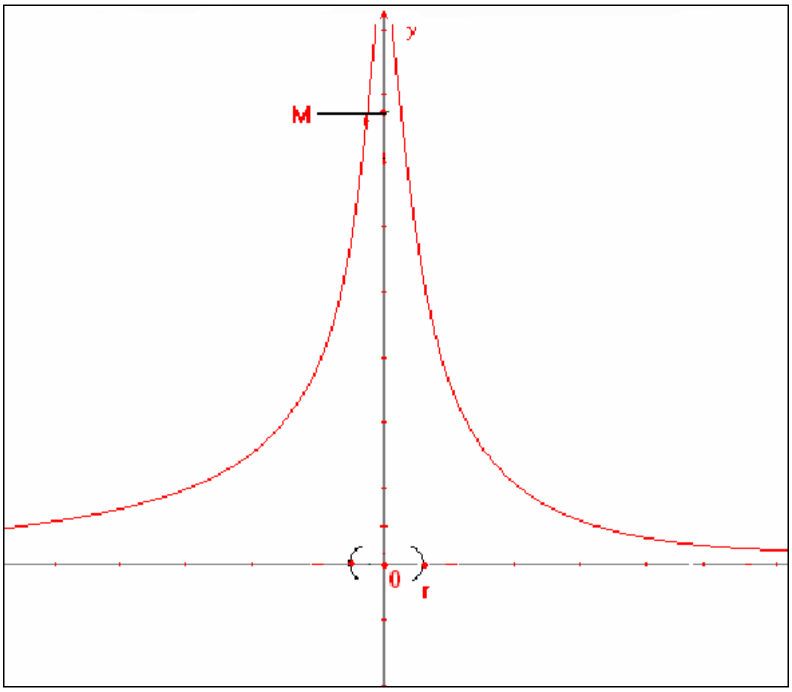


Figura 13. $\underset{x \to 0}{lím} \frac{1}{x^2} = \infty$.

Para esto debemos tomar un número $M > 0$ en el recorrido y construir una bola en el dominio con centro en *0* y radio *r* ($B(0;r)$) y garantizar que todas las imágenes de esta bola sean mayores que M ($f(x) > M$). Conociendo la función $f(x)$ se tiene la siguiente desigualdad, y despejado x se tiene que:

$$f(x) > M,$$

$$\frac{1}{x^2} > M, \qquad x \neq 0$$

$$\frac{1}{M} > x^2 > 0 \Rightarrow 0 < |x| < \frac{1}{\sqrt{M}} = r$$

$$x < \frac{1}{\sqrt{M}}.$$

Dándole un valor a *M* de preferencia grande, por ejemplo $M = 10000$, para poder así encontrar el radio *r* que es lo que finalmente se está buscando, entonces siendo $r = x$ se tiene que:

$$r < \frac{1}{\sqrt{10000}},$$
$$r < \frac{1}{100},$$
$$r < 10^{-2}.$$

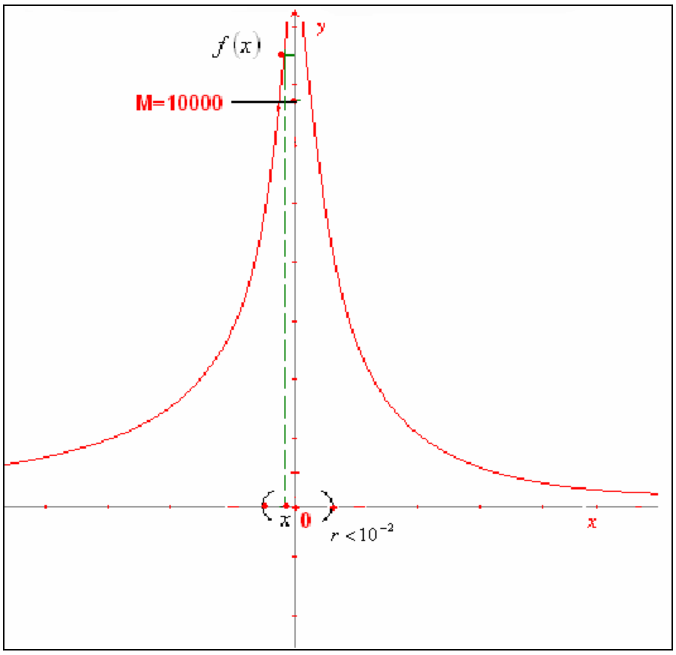


Figura 14. Cálculo del radio r para la Figura 15.

Luego la bola en el dominio es $B(0;10^{-2})$, de lo cual se puede decir con toda seguridad que para todo *x* que pertenece a la bola antes mencionada sus imágenes siempre van a ser mayores que diez mil ($\forall x \in B(0;10^{-2}) \Rightarrow f(x) > 10000$), lo que garantiza que siempre que nos acerquemos cada vez más a cero en el dominio, los imágenes van a tender a infinito en el conjunto de llegada.

Habiendo discutido ampliamente el ejemplo, se prestó para enseñarles a los estudiantes que para demostrar que el limite de la función tiende a infinito se supone que hay un punto máximo *M* y se muestra que no lo es. Con esto se puede concluir que el límite es infinito. Además, las funciones de este tipo no son acotadas.

Después de esto se trabajó el segundo caso que se había planteado al inicio de la clase, dando la definición:

Definición 5.4. $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 : \exists M \in R^{+} \; |x \geq M \Rightarrow f(x) \in B(b;\varepsilon)$.

Esto quiere decir: si para cada ε mayor que cero ($\varepsilon > 0$), existe un *M* que pertenece a los reales positivos ($M \in R^{+}$) en el dominio, tal que, para todo *x* mayor o igual a *M* ($x \geq M$) sus imágenes pertenecen a la bola con centro en *b* y radio ε ($B(b;\varepsilon)$) en el recorrido, eso garantiza que si tomamos valores cada vez más grandes o en dirección hacia el infinito sus imágenes se acercan cada vez al limite *b*.

Para ilustrar esto mejor se realizó la siguiente gráfica (Figura 15):

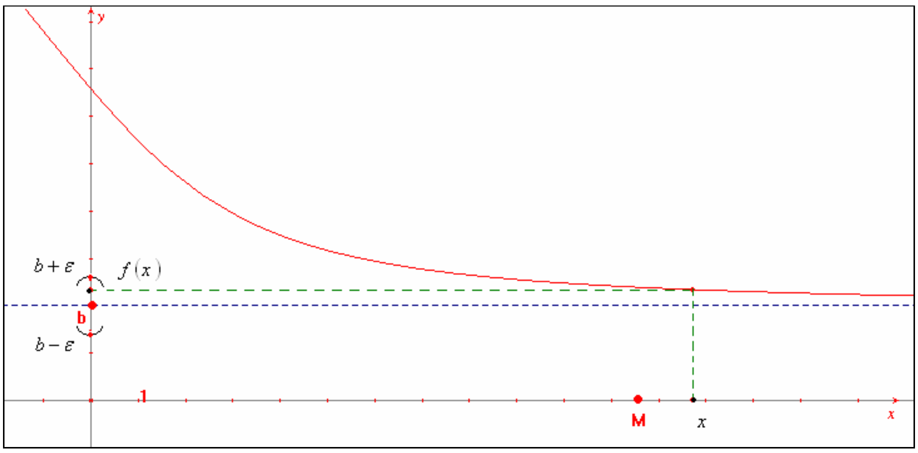


Figura 15. Límite de una función cuando x toma valores indefinidamente grandes en el dominio.

Después de ver la definición en forma general, tanto en símbolos como gráficamente, se realizaron unos ejemplos para entender mejor la idea.

Ejemplo 5.9.

Sea $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$ Demuestre $\lim_{x\to\infty} f(x)=0$.

La idea es demostrar que las imágenes se van acercando cada vez más al punto cero cuando tomamos la dirección hacia infinito (∞) en el dominio de la función.

Lo importante viene siendo encontrar el punto *M* en el dominio y construir la bola en el recorrido para así aplicar la definición de límite y comprobar su existencia; a continuación se muestra el proceso.

Lo primero que hacemos es la gráfica de la función, para ubicar los intervalos que hemos llamado bola en la imagen y el punto *M* en el domino de la función (Figura 16).

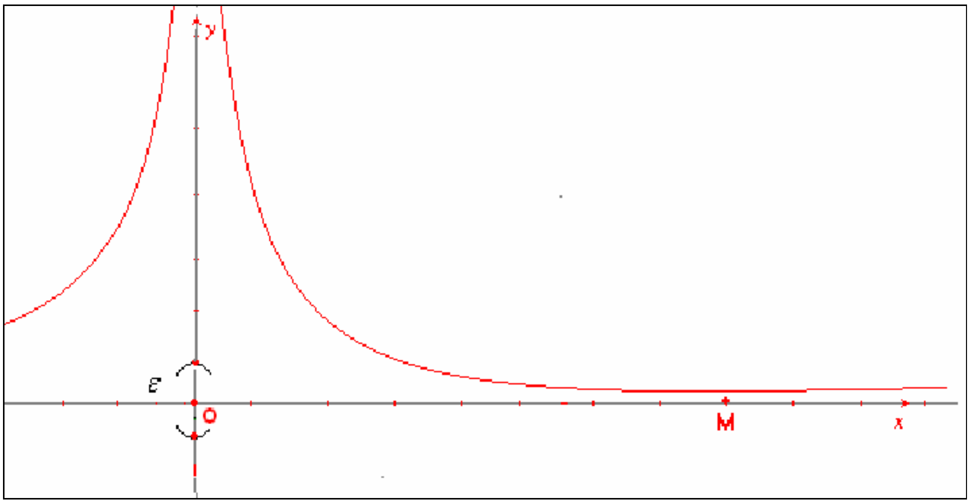


Figura 16. $\lim_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^2}=0$.

Para esto debemos tomar un número $\varepsilon > 0$ en el recorrido y construir una bola en el dominio con centro en *0* y radio ε *r* ($B(0;\varepsilon)$), y garantizar que para todos los $x \geq M$ sus imágenes van a pertenecer a la bola mencionada ($f(x) \in B(0;\varepsilon)$).

Conociendo la función $f(x)$ y despejado x, se tiene que

$$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow \ para \ \ f(x) > 0 \ \ \text{se tiene} \ \ f^{-1}(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}.$$

Dándole un valor a ε de preferencia pequeño, se toma por ejemplo $\varepsilon = 10^{-4}$, para así poder encontrar el número *M* en el dominio a partir del cual las imágenes están en la bola escogida.

Por lo tanto,

$$f^{-1}(\varepsilon) = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}},$$

$$f^{-1}(10^{-4}) = \frac{1}{\sqrt{10^{-4}}} = 100,$$

$$M = 100.$$

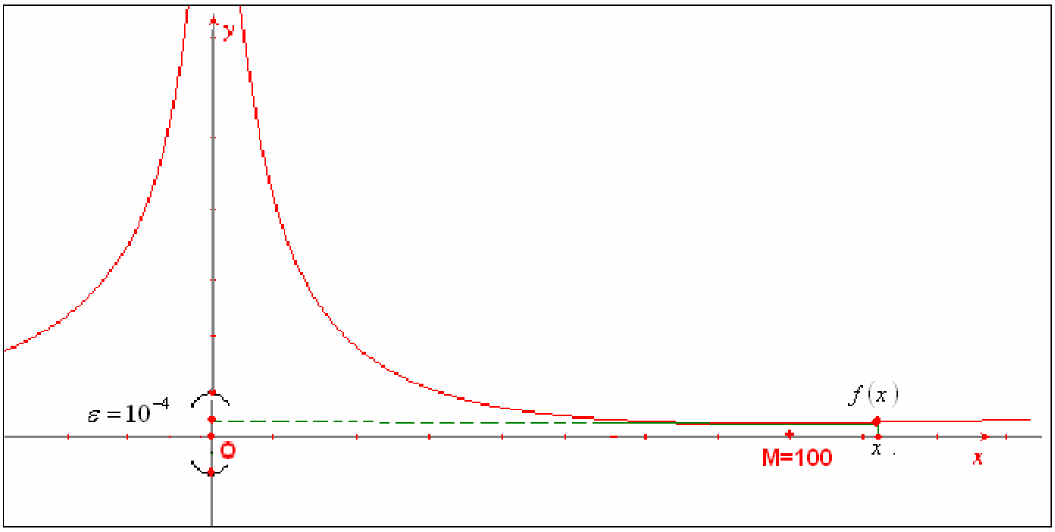


Figura 17. Cálculo de M para la Figura 16.

Luego para $\varepsilon = 10^{-4}$ (Figura 17) se tiene que si $M = 100$, para todo $x \geq 100$ se tendrá que $f(x) \in B(0;10^{-4})$, lo que garantiza que siempre que se tome la dirección hacia infinito en el dominio de la función sus imágenes van a tender a cero (Figura 17).

Después de esto se desarrollaron otros ejercicios, y se dejaron algunos de tarea para reforzar lo visto en la clase.

Durante esta clase se destaca el hecho de haber podido mostrar un principio matemático de demostración que contribuye a desarrollar herramientas matemáticas que les van a ser de utilidad a los estudiantes en su proceso de preparación. También se destaca la participación y buen comportamiento de los estudiantes durante la clase.

5.3. Tercera sesión

Habiendo terminado de dar el tema, se recordaron las definiciones vistas en las clases anteriores. Luego se pasó a entregarles un taller (Anexo), con el cual se buscaba reafirmaran lo trabajado y desarrollado hasta el momento en clase. En esta sesión se dedicó todo el tiempo para resolver preguntas e inquietudes que tuvieran los estudiantes acerca del tema o el taller que se estaba desarrollando. La pregunta que más hicieron se menciona a continuación:

- Cuando la función no es lineal, ¿cómo hago para saber cuál de los intervalos debo tomar para construir la bola que se forma en el dominio?

Para contestar esta pregunta se recordó lo explicado el ejemplo 5.5 de la primera sesión (página 37). Resolviendo inquietudes y ayudando a los educandos, se dio fin a la clase, y se pudo evidenciar cómo asimilaban el concepto de límite que se había trabajado.

5.4. Cuarta Sesión

En esta clase se trabajó hora y cuarenta minutos en el desarrollo y terminación del taller para entregarlo. Después de esto se les explicó una sencilla aplicación de la definición de límite para obtener dos importantes resultados, los cuales fueron:

- $\lim\limits_{x \to a}[f(x)+g(x)]=\lim\limits_{x \to a} f(x)+\lim\limits_{x \to a} g(x)=L_1+L_2$.
- $\lim\limits_{x \to a} f(x)g(x)=\lim\limits_{x \to a} f(x)\lim\limits_{x \to a} g(x)=L_1 L_2$.

El primer resultado se demostró utilizando la definición que se había manejado hasta el momento para mostrarles a los estudiantes que la demostración se puede comprender siempre y cuando se maneje el concepto, y que ella puede ayudar a dar ideas en cierto modo para resolver algunos ejercicios. El segundo enunciado, por motivos de tiempo y objetivos del curso, no se demostró. Con esto se dio fin a la clase.

6. ANÁLISIS DE RESULTADOS

Esta investigación se realizo durante el segundo semestre académico del 2007 en la Universidad industrial de Santander bajo la orientación del Dr. Bernardo Mayorga y la tutoría de la profesora Marisel Ardila Amado. Esta propuesta metodológica se desarrolló en cuatro sesiones de dos horas, los días 18 y 21 de diciembre de 2007, y 22 y 25 de enero de 2008, de cuatro a seis de la tarde, en el edificio Camilo torres con el grupo J4 de Cálculo I.

Las dos primeras sesiones se dedicaron por completo a presentar y explicar la propuesta planteada para abordar el concepto de límite (Capítulo 5) a los estudiantes. En las dos siguientes sesiones se trabajó un taller (Anexo) con el cual se buscó reafirmaran lo trabajado y desarrollado hasta el momento en clase. Para estimular el trabajo de los estudiantes se llegó a un acuerdo con la profesora, el cual consistía en que los estudiantes que desarrollaran el taller por completo y bien tendrían una nota extra en el parcial referente a límite.

6.1. Taller

Debido al inconveniente del tiempo, ya que para este tema solo se dedica a lo más dos clases de dos horas, se planeó desarrollar solo un taller (Anexo) donde se sintetizó todo lo trabajado durante las dos primeras sesiones, en las cuales se buscaba reafirmaran lo trabajado y conocer el alcance de la propuesta, y saber hasta qué punto los educandos habían logrado asimilar el concepto de límite.

Antes de analizar los resultados del taller se tenia la hipótesis de que se iban a encontrar dos formas diferentes de responderlo, debido a que el grupo contaba con estudiantes que veían la asignatura por primera vez y otro grupo formado por los repitentes; pero a medida que se desarrollaba la actividad se evidenció que no había ninguna diferencia o predisposición para manejar el concepto de límite que se estaba planteando. Los primíparos y repitentes manejaban el tema con las mismas expectativas, resultado que nos sorprendió gratamente, pues así se nos facilita realizar el análisis de resultados y mostrar las evidencias de los logros alcanzados por los estudiantes.

6.1.2. Puntos del Taller

Inciso a:

- En el primer punto se buscó que los estudiantes lograran aplicar el concepto de límite, de tal manera que entendieran que a través de la construcción de las bolas (en el dominio y sus imágenes) se puede verificar la existencia del límite tomando cualquier dirección en el dominio que converge en un punto particular, para lo cual se planteo una función lineal, el caso más sencillo.
- En el segundo punto se buscó mostrar a los estudiantes que al trabajar con funciones diferente a las lineales (donde la razón de cambio no es constante) había que tener cuidado al construir la bola en el dominio, ya que se deberá tomar el radio menor para garantizar la definición 5.2 se cumpla y no suceda que al tomar un $x \in B_1(a;r) \cap D(f) \Rightarrow f(x) \notin B_2(b;\varepsilon)$, ya que esto es posible si no se define bien la bola.
- En el tercero y cuarto punto se resalta el hecho mostrado en la definición 5.2, que dice que no importa que el punto hacia donde se esta tomando la

dirección en el domino no pertenezca a él, y ni que su límite pertenezca al recorrido, para demostrar la existencia de ese límite.

- En los puntos quinto y sexto se plantearon funciones diferentes, con los cuales se buscaba que los estudiantes evidenciaran que el concepto se aplica a cualquier tipo de función.
- En los puntos séptimo y octavo se buscó verificar hasta qué punto los educandos lograron comprender y aplicar la definición 5.4, donde el límite converge a un punto tomando la dirección hacia el infinito.
- En los puntos noveno y décimo se buscó verificar hasta qué punto los educandos lograron comprender y aplicar la definición 5.3, donde el límite tiende a infinito tomando la dirección hacia un punto en particular.

Inciso b:

- Se buscó que los estudiantes compararan el concepto trabajado en clase con el que se encuentra en libros tradicionales, y comentaran con cuál se identifican más, al momento de demostrar la existencia.

Bajo estas consideraciones se analizaran los resultados presentados por parte de los estudiantes.

7. EVIDENCIA Y RESULTADOS DE LA EXPERIENCIA

7.1. Experiencias realizadas y resultados.

A continuación analizaremos los resultados de cada uno de los ejercicios, utilizando diagramas circulares, comentando los aciertos y errores frecuentes cometidos por los estudiantes en el desarrollo del taller.

Ejercicio 1.

Sea $f(x)=1-3x$. Demuestre que el $\lim_{x\to -2} f(x) = 7$ (figura 18).

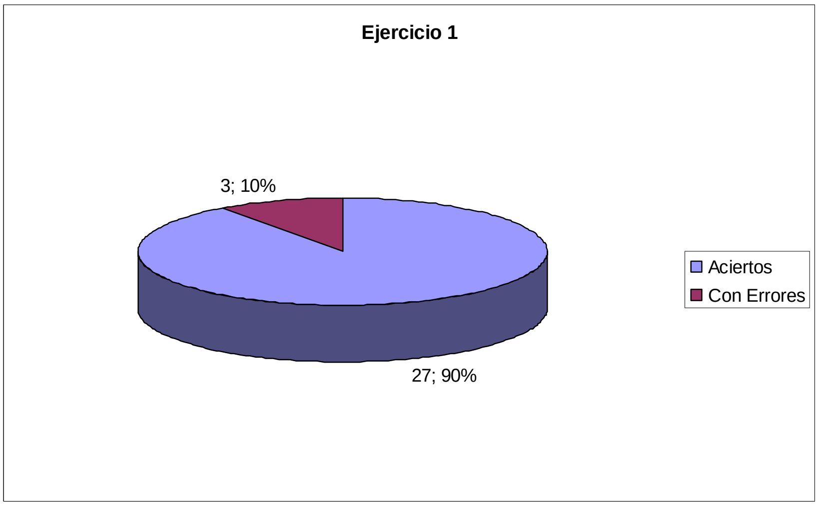


Figura 18. Aciertos y desaciertos para el ejercicio 1.

El 90% de los estudiantes, la gran mayoría, no presentó ningún inconveniente para desarrollar este ejercicio; se evidenció un buen análisis gráfico y desarrollo algorítmico. El 10% que presentó dificultades, lo manifestó al momento de construir el radio de la bola que se forma en el dominio. A continuación se muestra el trabajo desarrollado por los estudiantes (Figura 19 y 20).

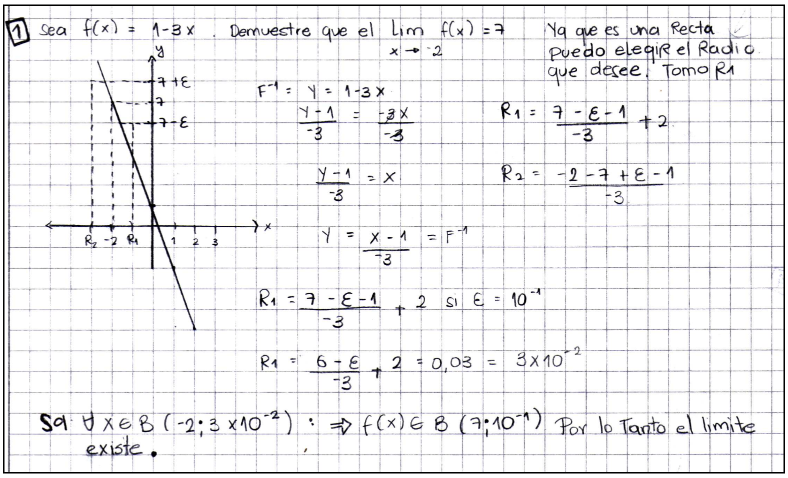


Figura 19. Trabajo de un estudiante.

Como se muestra en la Figura 19, los estudiantes partieron del análisis gráfico para determinar los elementos que iban a ser necesarios al instante de construir los radios de las bolas para aplicar la definición de límite (definición 5.2), lo cual les permitió evidenciar y concluir la existencia del límite.

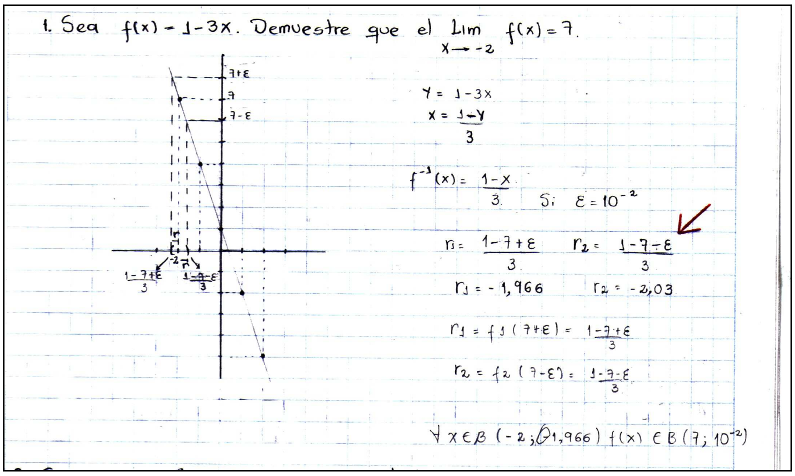


Figura 20. Trabajo de un estudiante.

Como se muestra en la Figura 20, los errores cometidos en el ejercicio se presentaron al momento de evaluar la imagen en la función inversa, es decir, se presentaron dificultades de tipo algorítmico, pues no tenían cuidado con el manejo de los signos.

Ejercicio 2.

Sea $f(x) = x^3 + 2$. Demuestre que el $\lim_{x \to 1} f(x) = 3$ (Figura 21).

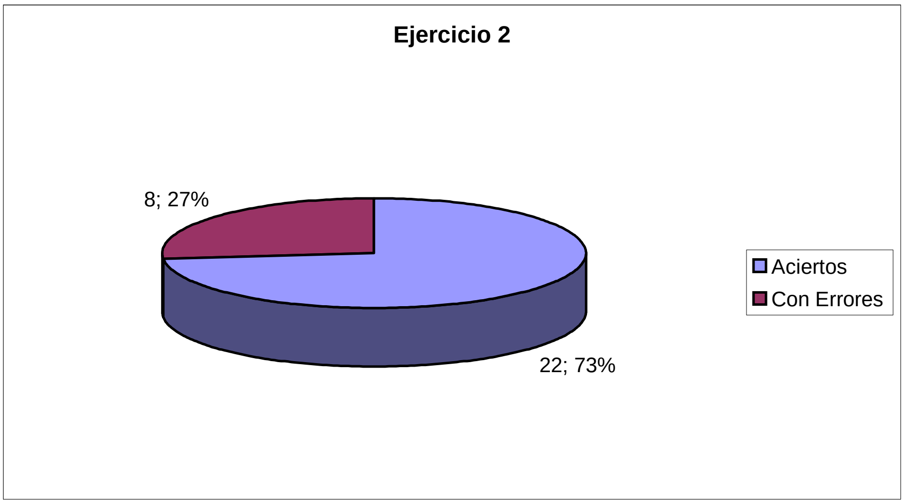


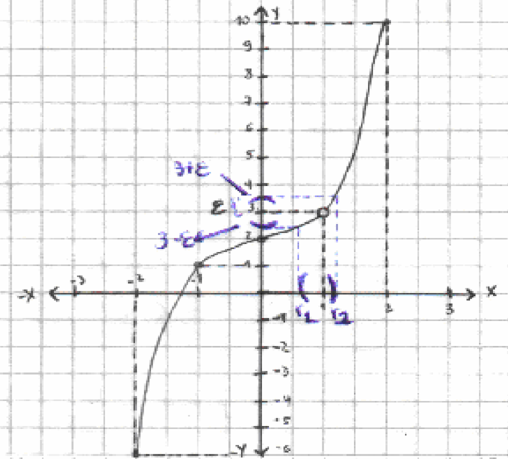
Figura 21. Aciertos y desaciertos para el ejercicio 2.

El 73% de los estudiantes, la gran mayoría, trabajaron bien el ejercicio teniendo cuidado al momento de elegir el radio para la bola que se construye en el dominio, teniendo en cuenta que la razón de cambio de la función no es constante. El 27% que presentó dificultades mostró plantear mal el radio, y por errores algebraicos tanto al momento de hallar la inversa como de sustituir el épsilon.

2° Sea $f(x)=x^3+2$. Demuestre que el $\lim_{x\to 1} f(x)=3$.

Como es una función cúbica sencilla, la graficamos y hallamos las bolas correspondientes al dominio y al recorrido de dicha función.

*Graficamos la función $f(x)=x^3+2$ teniendo encuenta el punto analizado:



*Tomamos un exilon cualquiera (ε) y obtenemos el intervalo $(3-\varepsilon;3+\varepsilon)$ y la bola $B_2(3;\varepsilon)$.

*Hallo la inversa de la función $f(x)=x^3+2$:

$f(x)=x^3+2$ $\quad Y-2=x^3$ $\quad x=\sqrt[3]{Y-2}$ $\quad f^{-1}(x)=\sqrt[3]{x-2}$

$Y=x^3+2$ $\quad \sqrt[3]{x^3}=\sqrt[3]{Y-2}$ $\quad Y=\sqrt[3]{x-2}$

*Remplazo la x, por el extremo más cercano al punto evaluado, pues la razón de cambio de ésta función no es constante. En este caso reemplazo X por $3+\varepsilon$ y obtenemos:

$f^{-1}(3+\varepsilon)=\sqrt[3]{(3+\varepsilon)-2}$ $\quad f^{-1}(3-\varepsilon)=\sqrt[3]{(3-\varepsilon)-2}$

$f^{-1}(3+\varepsilon)=\sqrt[3]{1+\varepsilon}$ $\quad f^{-1}(3-\varepsilon)=\sqrt[3]{1-\varepsilon}$

*Hallo r, utilizando la diferencia entre distancias:

$r_1=\sqrt[3]{1+\varepsilon}-1=3.32\times10^{-3}$ $\quad r_2=1-\sqrt[3]{1-\varepsilon}=3.34\times10^{-3}$

*Remplazo exilon por un valor cualquiera. $\varepsilon=10^{-1}$ en r_1:

$r_1=\sqrt[3]{1+10^{-1}}-1$ $\quad r_1=\sqrt[3]{1.1}-1$ $\quad r_1=0.032$ $\quad r_1=3.2\times10^{-2}$

Así concluimos que si $\varepsilon=10^{-1}$ y $r=0.032$ o $r=3.2\times10^{-2}$ entonces tenemos que:

$x\in B_1(1;3.2\times10^{-2})$; $f(x)\in B_2(3;10^{-1})$

Comprobamos de esta manera que el límite sí existe.

Figura 22. Trabajo de un estudiante.

Como se muestra en la Figura 22, la gran mayoría de los estudiantes trabajó de forma adecuada el ejercicio, realizó la gráfica e identificó los intervalos teniendo cuidado al momento de tomar el radio de la bola

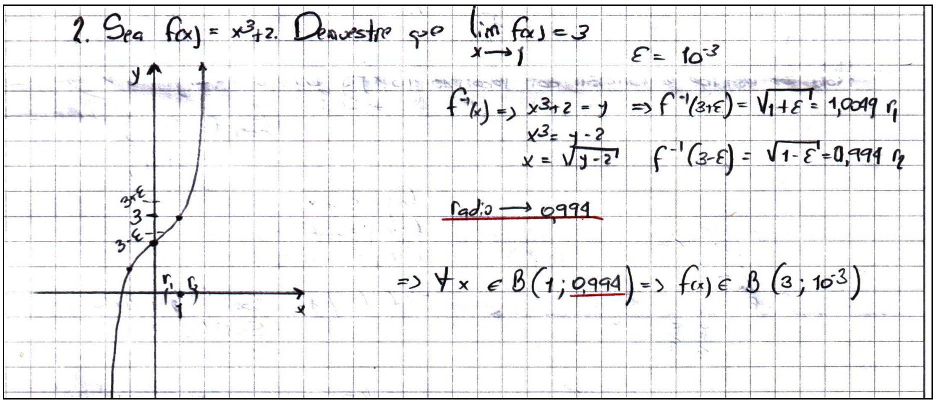


Figura 23. Trabajo de un estudiante.

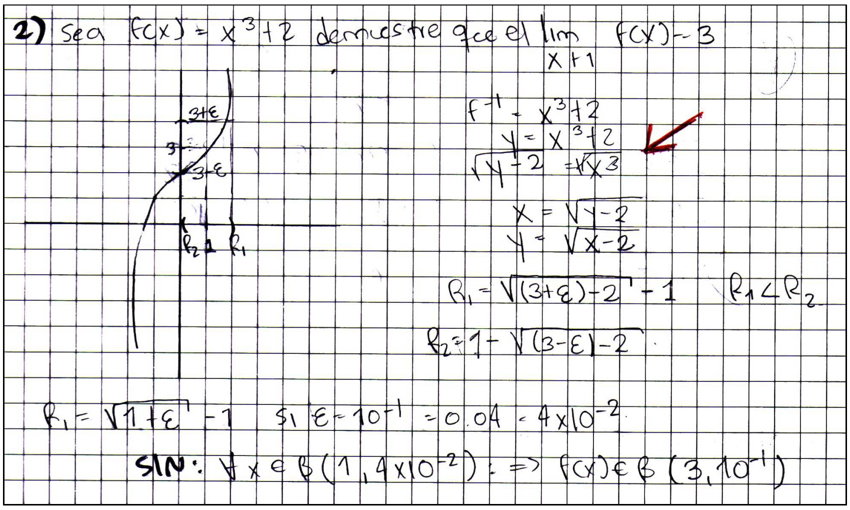


Figura 24. Trabajo de un estudiante.

En las figuras 23 y 24 se muestran las dificultades que presentaron los estudiantes en el desarrollo de este ejercicio, que fueron plantear mal el radio de la bola y despeje de ecuaciones.

Ejercicio 3.

Sea $f(x)=\dfrac{(x^2-64)}{x-8}$. Demuestre que el $\lim\limits_{x\to 8} f(x)=16$ (Figura 25).

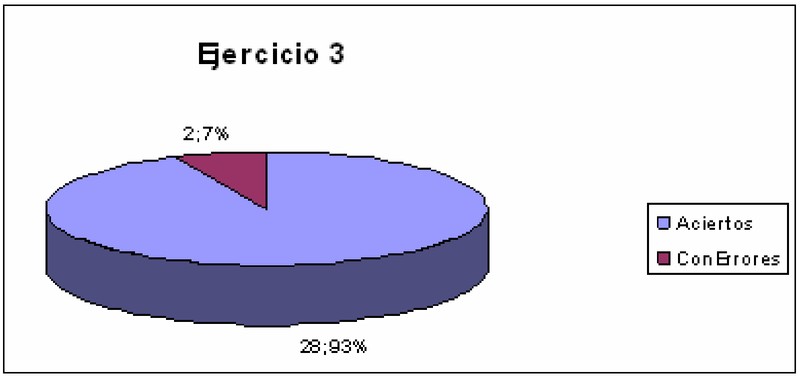


Figura 25. Aciertos y desaciertos para el ejercicio 3.

El 93% de los estudiantes no presento ningún inconveniente al trabajar este ejercicio, ya que tenía cierta similitud con el primero, pues solo había que tener en cuenta que el punto hacia donde se está tomando la dirección en el domino no pertenece al dominio, y tampoco su límite pertenece al recorrido. El 7% presentó dificultades al reemplazar al épsilon para determinar el radio.

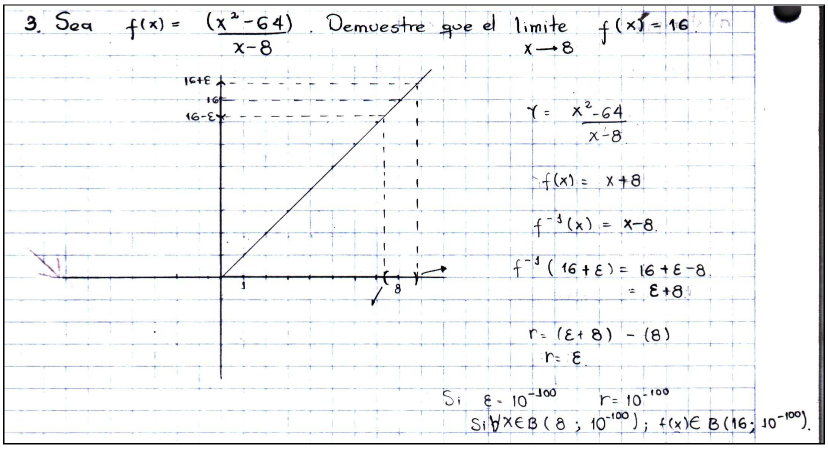


Figura 26. Trabajo de un estudiante.

En la Figura 26 se evidencia cómo los estudiantes lograron asimilar la idea del límite tomando valores para épsilon tan pequeños como se desean para comprobar la existencia del límite. No se presentaron mayores dificultades con el hecho que el punto hacia donde se está tomando la dirección en el domino no pertenezca al dominio, y tampoco su límite pertenezca al recorrido.

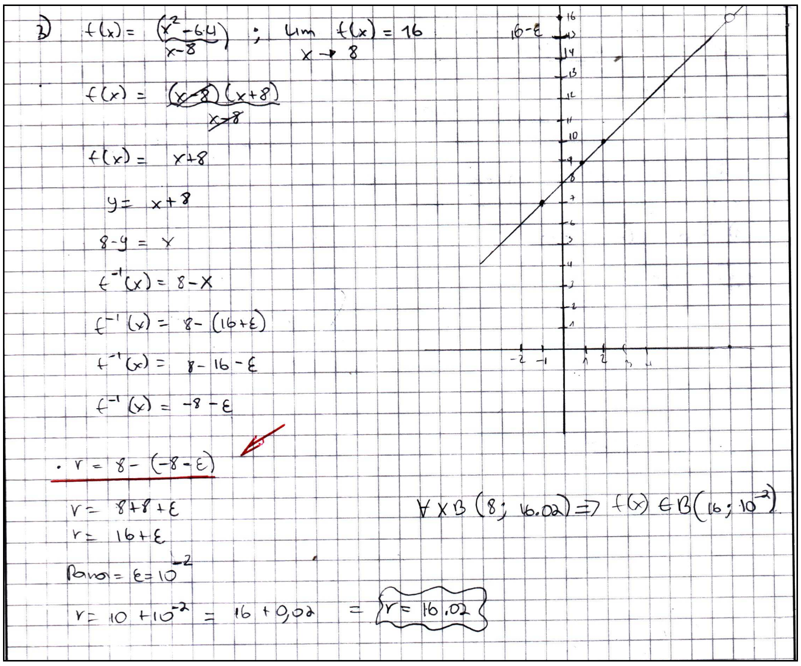


Figura 27. Trabajo de un estudiante.

Como se muestra en la Figura 27, los errores que cometieron fueron también de tipo algebraico (despeje de ecuaciones y reemplazo).

Ejercicio 4.

Sea $f(x)=\dfrac{(16x^2-4)}{4x-2}$. Demuestre que el $\lim\limits_{x\to\frac{1}{2}} f(x) = 4$ (Figura 28).

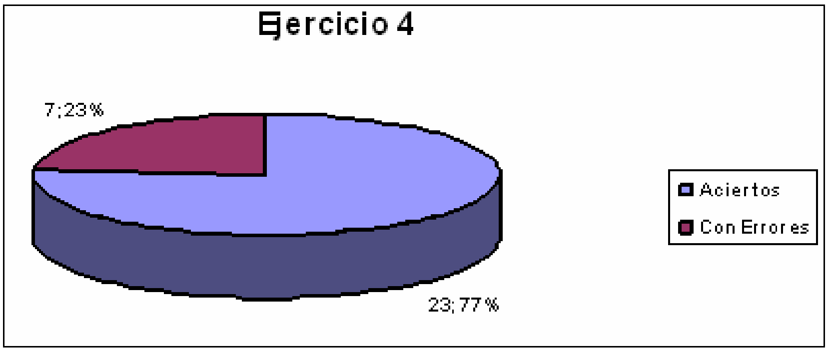


Figura 28. Aciertos y desaciertos para el ejercicio 4.

El 77% de los estudiantes no presento ningún inconveniente al trabajar este ejercicio, ya que tenía gran similitud con el ejercicio anterior. El 23% presentó dificultades al reemplazar al épsilon para determinar el radio y factorizar

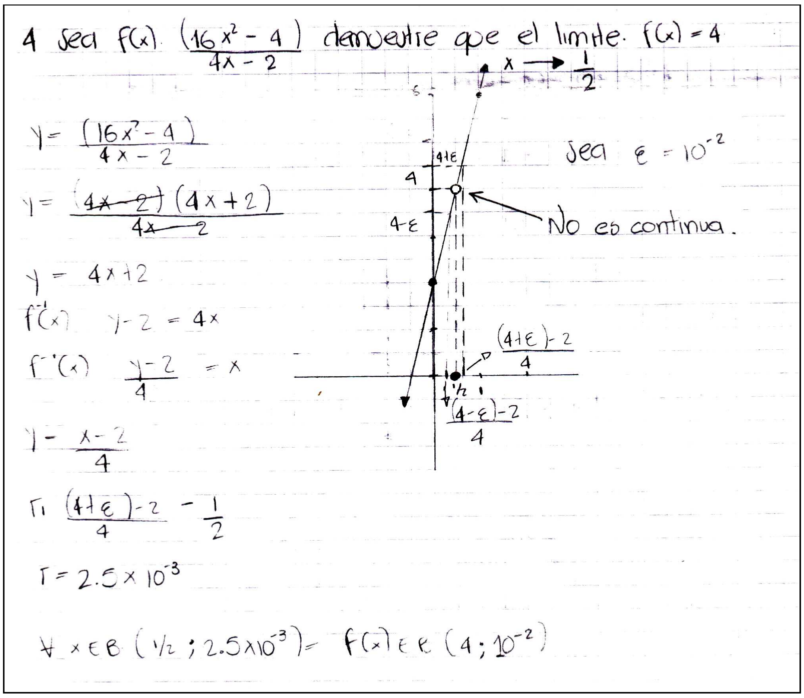


Figura 29. Trabajo de un estudiante.

El Figura 29 se muestra cómo los estudiantes identificaron que la función no es continua; y llegaron a demostrar que el límite si existía.

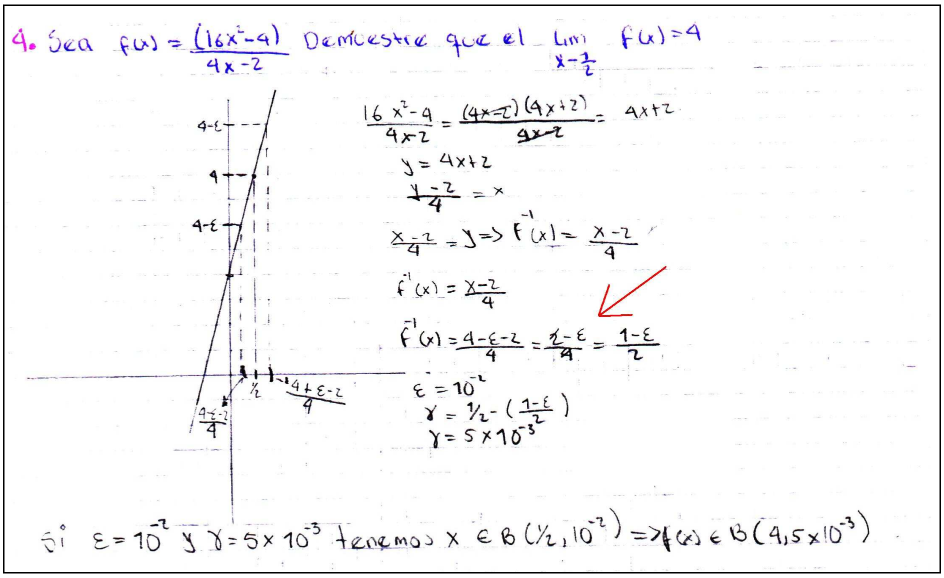


Figura 30. Trabajo de un estudiante.

En la Figura 30 se observa cómo los estudiantes realizan mal la factorización, lo cual no les permite llegar de forma adecuada al resultado buscado.

Ejercicio 5.

Sea $f(x) = sen(x)$. Demuestre que el $\lim_{x \to \frac{\pi}{4}} f(x) = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (Figura 31).

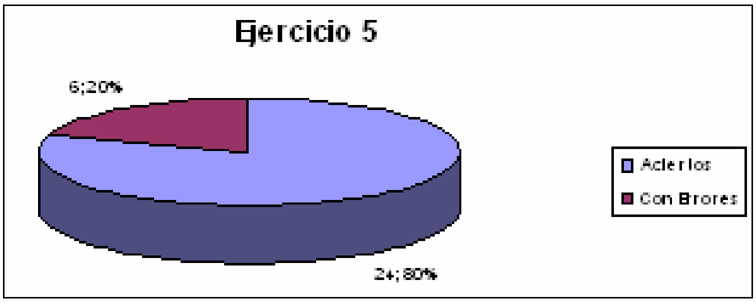


Figura 31. Aciertos y desaciertos para el ejercicio 5.

El 80% de los estudiantes no presento ningún inconveniente al trabajar este ejercicio, ya que conocían su función inversa y encontrar el radio de la bola en el dominio, logrando aplicar la definición 5.2. a la función trigonométrica. El 20% presentó dificultades al determinar el radio para la bola del dominio, debido a que al reemplazar no hacían bien las operaciones para poder culminar la demostración.

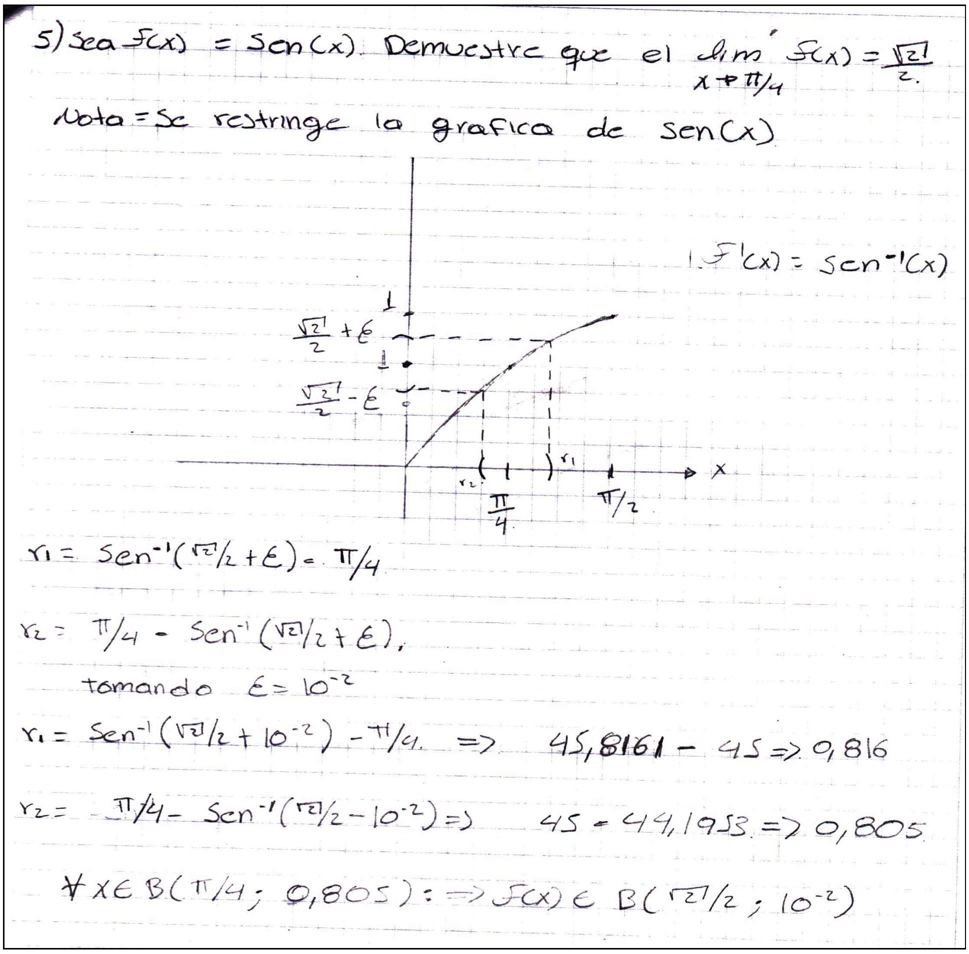


Figura 32. Trabajo de un estudiante.

En la figura 31 se muestra cómo los estudiantes manipularon bien el concepto de límite en la función trigonométrica.

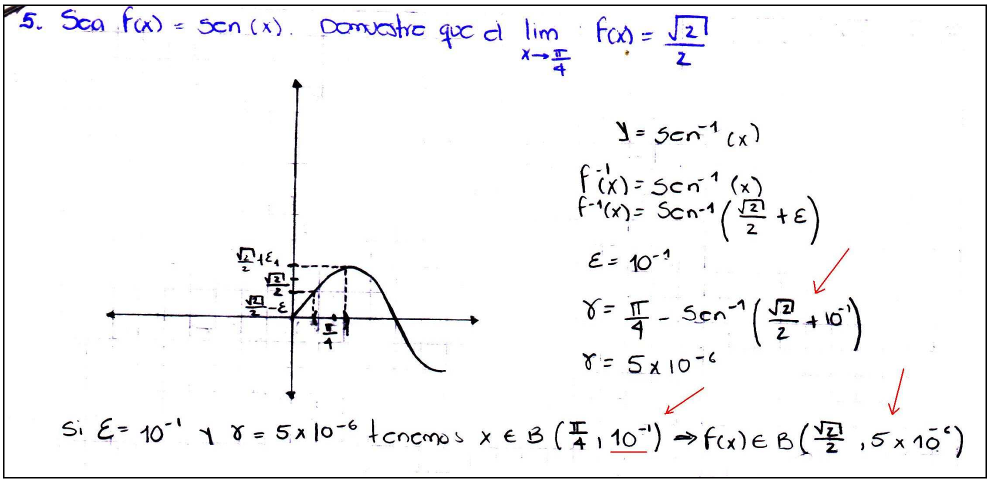


Figura 33. Trabajo de un estudiante.

En la Figura 33 se nota cómo reemplazan de manera equivocada el épsilon dentro de la función trigonométrica, obteniendo un resultado erróneo aunque siguen los pasos planteados para demostrar el límite.

Ejercicio 6.

Sea $f(x) = \ln x$. Demuestre que el $\underset{x\to 6}{lím}\ f(x) = \ln 6$ (figura 34).

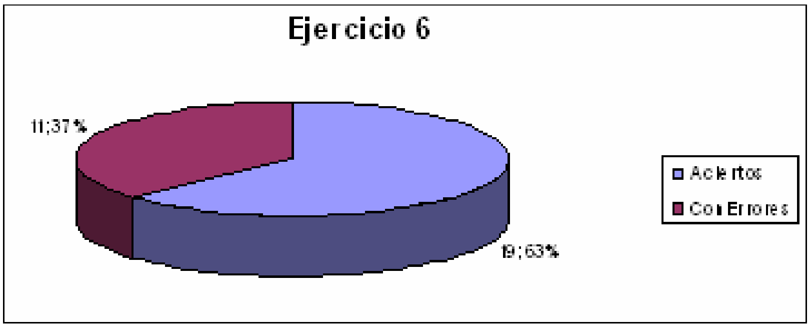


Figura 34. Aciertos y desaciertos para el ejercicio 6.

El 63% de los estudiantes logró graficar, interpretar y manipular correctamente la función logaritmo natural para demostrar la existencia del límite. El 37% presentó dificultades al momento de realizar la gráfica y encontrar su inversa, lo cual los llevó a obtener resultados erróneos.

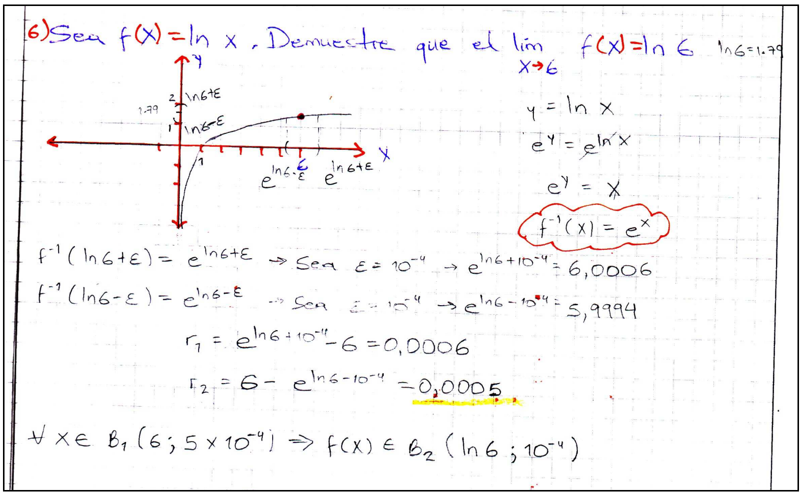


Figura 35. Trabajo de un estudiante.

En la figura 35 se evidencia cómo los estudiantes lograron realizar un buen análisis gráfico e identificar los radios de las bolas a partir de la función inversa y aplicar la definición 5.2 , concluyendo el ejercicio.

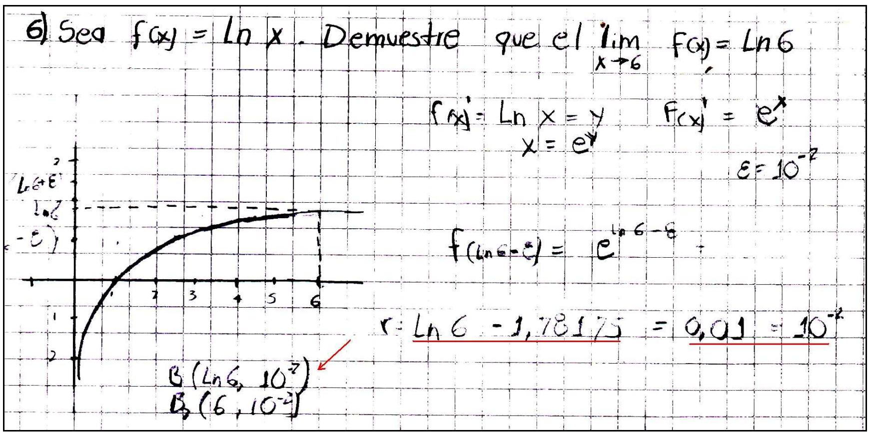


Figura 36. Trabajo de un estudiante.

En la figura 36 se muestra el obstáculo que más se presentó al momento de desarrollar este ejercicio: la mala sustitución, que viene siendo el factor común de todos los ejercicios analizados hasta el momento.

Ejercicio 7.

Sea $f(x)=\frac{5}{\sqrt{x^2+1}}$ tomando $f(x)\geq 0$. Demuestre que el $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ (Figura 37).

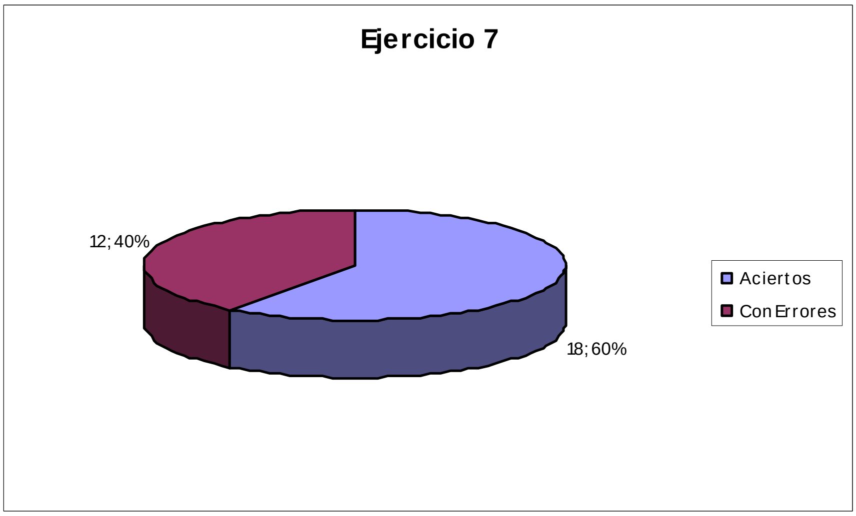


Figura 37. Aciertos y desaciertos para el ejercicio 7.

El 60% de los estudiantes logró con éxito aplicar la definición 5.4. El 40% presentó dificultades al instante de realizar la inversa de la función.

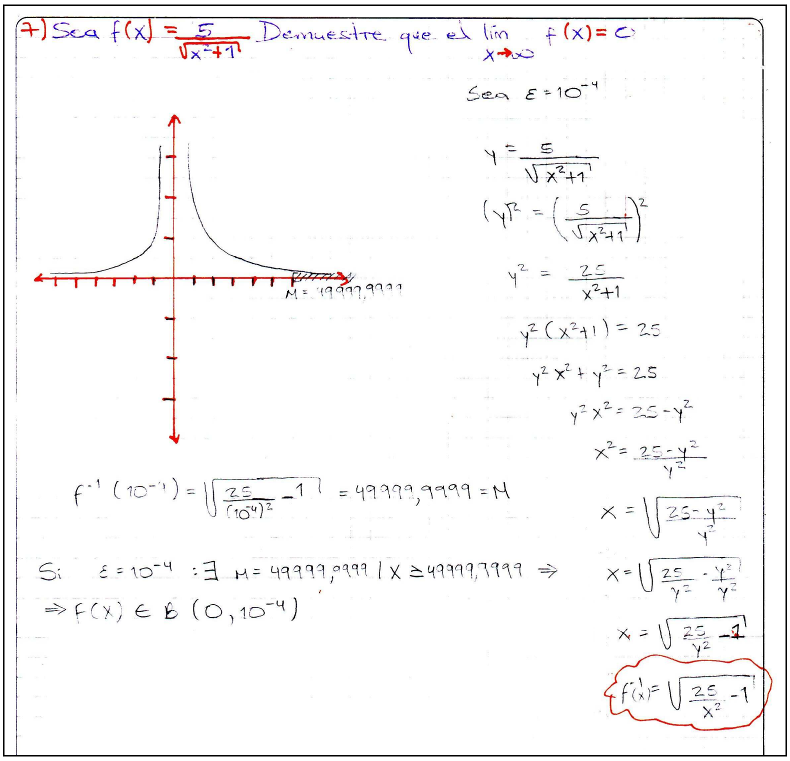


Figura 38. Trabajo de un estudiante.

En la Figura 38 se muestra cómo los estudiantes logran aplicar la definición 5.4 de forma apropiada para llegar a la conclusión pedida en el ejercicio.

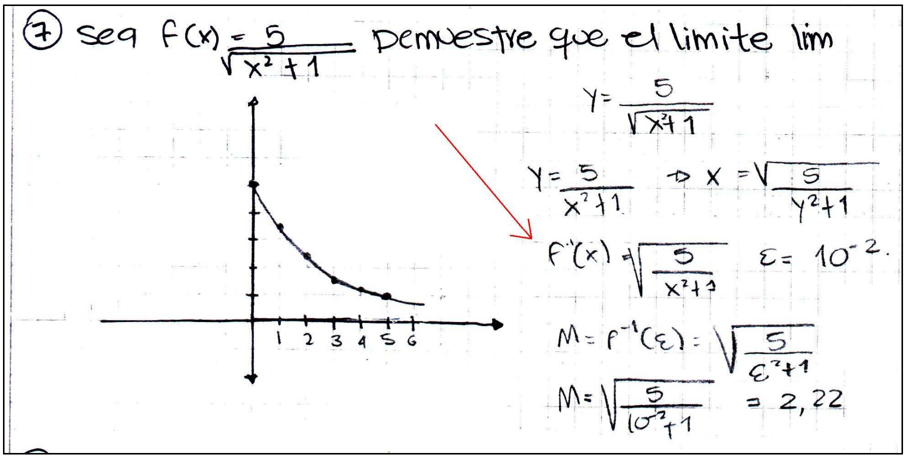


Figura 39. Trabajo de un estudiante.

En la Figura 39 se muestra cómo los estudiantes realizaron un mal despeje para determinar la inversa de la función, mostrando que tienen falencias o vacíos de temas anteriores.

Ejercicio 8.

Sea $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$. Demuestre que el $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 2$ (Figura 40).

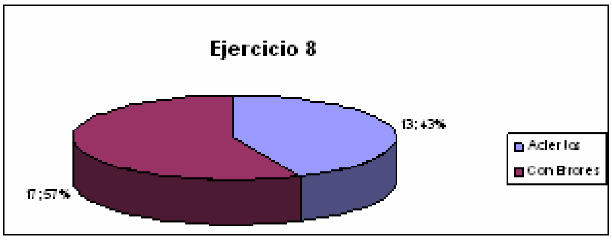


Figura 40. Aciertos y desaciertos para el ejercicio 8.

El 43% de los estudiantes logró con éxito aplicar la definición 5.4. El 57% no logró el objetivo planteado, debido a que al realizar el despeje de la función para determinar la inversa no lo hacían de forma apropiada, lo cual los llevó a obtener estos malos resultados.

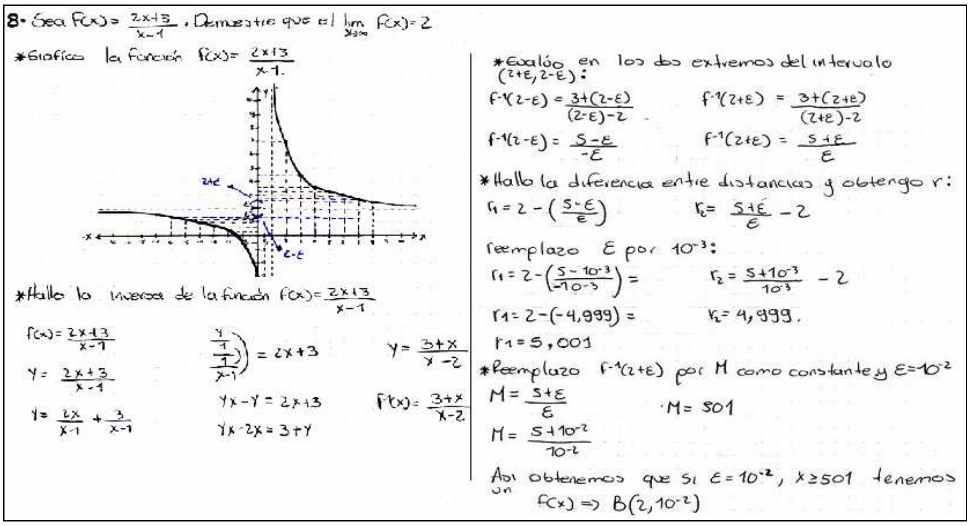


Figura 41. Trabajo de un estudiante.

En la figura 41 se muestra cómo los estudiantes logran aplicar la definición 5.4 para demostrar el límite planteado.

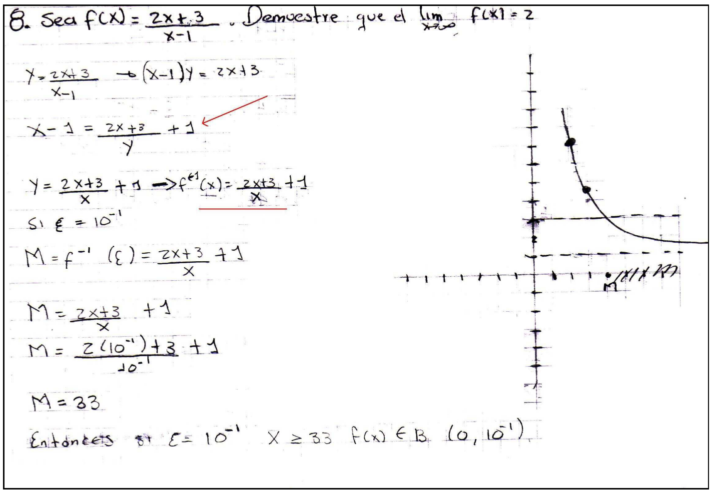


Figura 42. Trabajo de un estudiante.

En la figura 42 se muestra el obstáculo que más se presentó al momento de desarrollar este ejercicio, que fue la forma de obtener la función inversa, lo cual deja ver las malas bases con las que han llegado a esta asignatura.

Ejercicio 9.

Sea $f(x)=\dfrac{3}{(x-1)^4}$ tomando $f(x)\geq 0$ y $x\neq 1$. Demuestre que el $\lim_{x\to 1} f(x)=\infty$ (Figura 43).

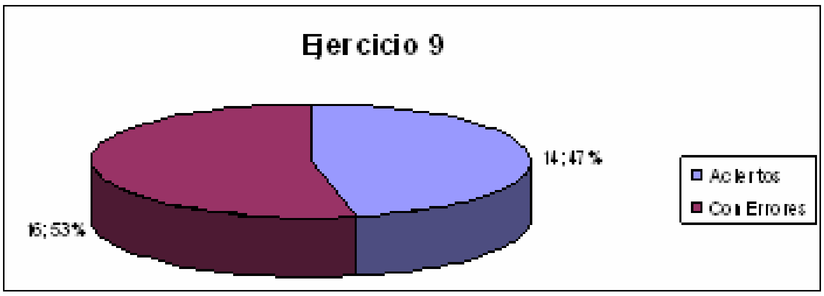


Figura 43. Aciertos y desaciertos para el ejercicio 9.

El 47% de los estudiantes lograron con éxito aplicar la definición 5.3, planteando de forma adecuada la desigualdad que les permitiera encontrar el radio de la bola que se forma en el dominio. El 53% presentó dificultades al momento de encontrar la inversa de la función y despejar la desigualdad planteada.

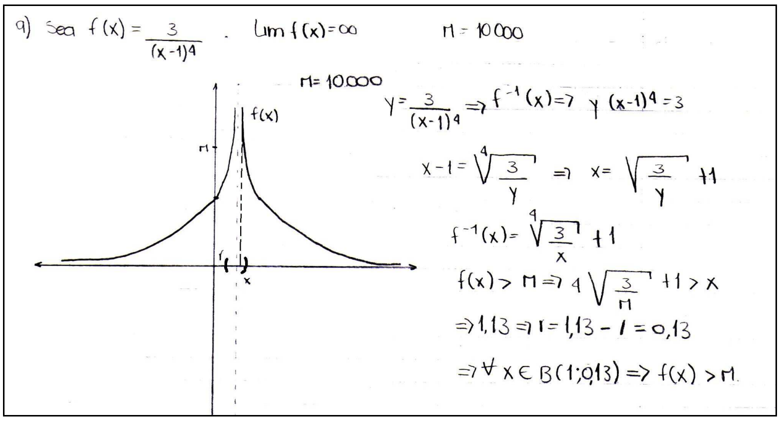


Figura 44. Trabajo de un estudiante.

En la figura 44 se muestra cómo logran plantear la desigualdad necesaria para poder encontrar el radio en el dominio partiendo de un M en particular, para así aplicar la definición 5.3.

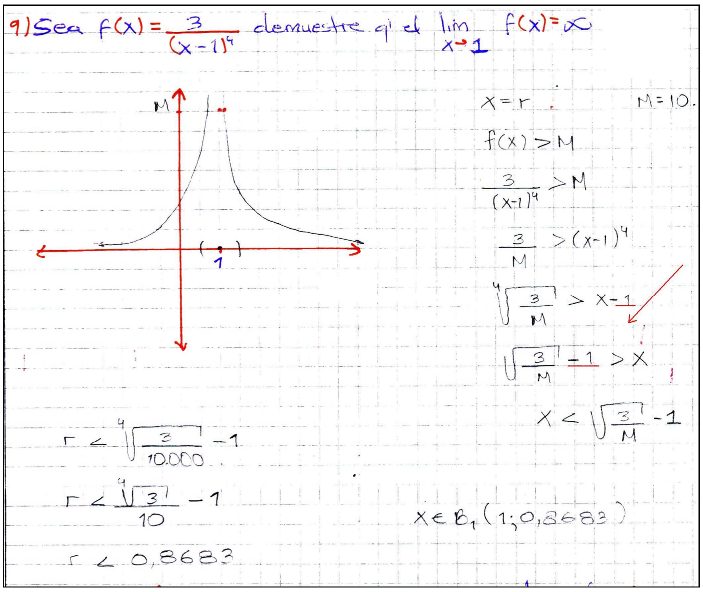


Figura 45. Trabajo de un estudiante.

En la figura 45 se muestra el error mas común que presentaron los estudiantes, el cual fue el de resolver de manera equivocada la desigualdad que permite llegar a la demostración.

Ejercicio 10.

Sea $f(x)=\frac{2}{(x-2)^2}$ tomando $f(x)\geq 0$ y $x\neq 2$ y. Demuestre que el $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\infty$ (Figura 46).

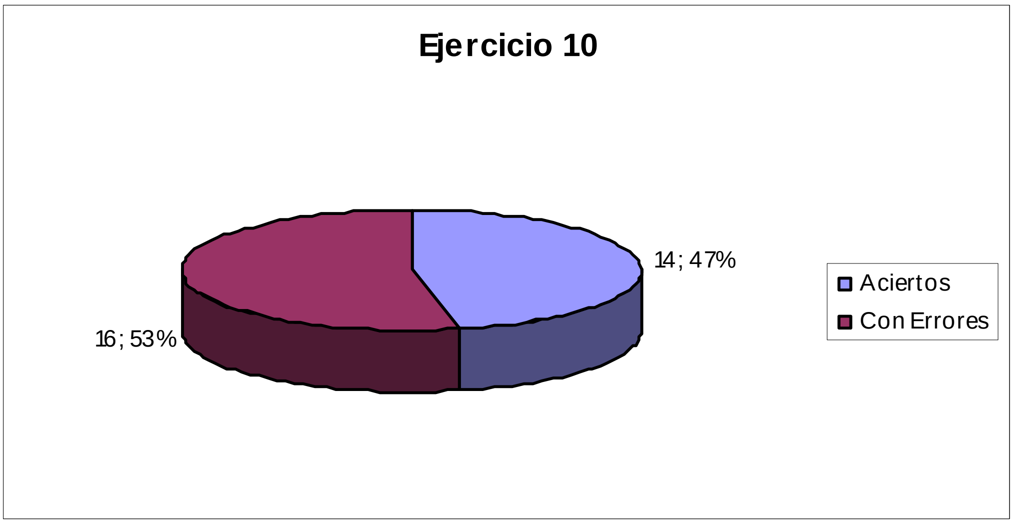


Figura 46. Aciertos y desaciertos para el ejercicio 10.

El 47% que desarrolló bien el ejercicio logró fácilmente encontrar la función inversa y le dio un adecuado valor a la r que les permitió establecer una relación entre M y el radio de la bola que se forma en el dominio. Se notó la dificultad en el 53% de los estudiantes, debido a que se enredaron para hallar la inversa y determinar de una manera adecuada el radio para poder conformar la bola que garantice la aplicación de la definición 5.3.

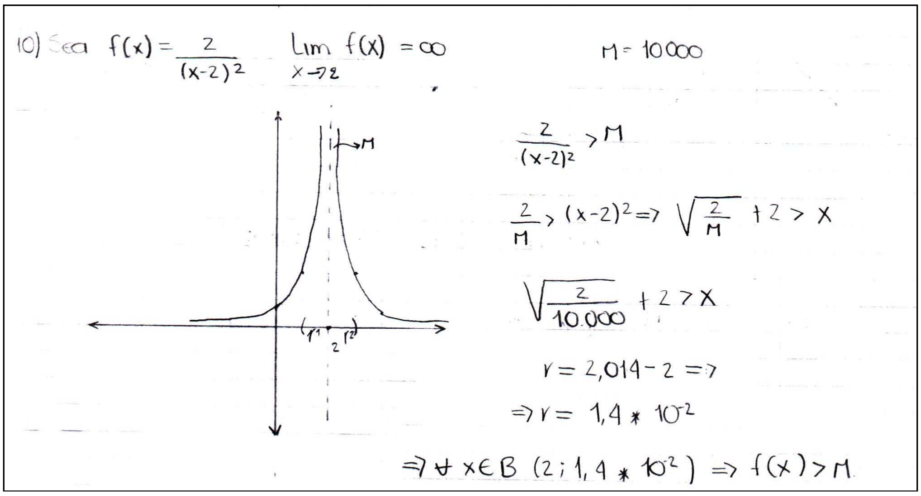


Figura 47. Trabajo de un estudiante.

En la Figura 47 se evidenció que los estudiantes pudieron establecer la relación entre M y el radio de la bola que se forma en el dominio y aplicar la definición 5.3 para concluir la demostración.

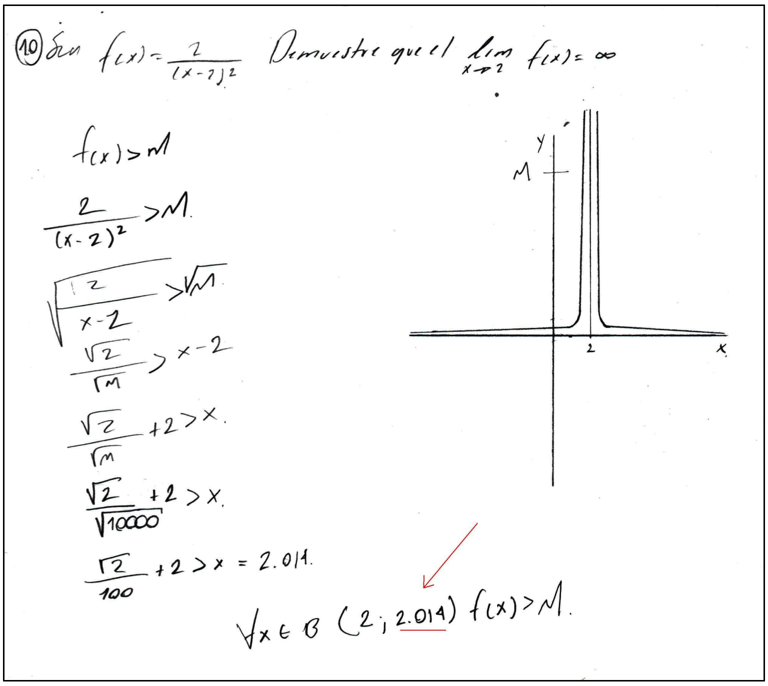


Figura 48. Trabajo de un estudiante.

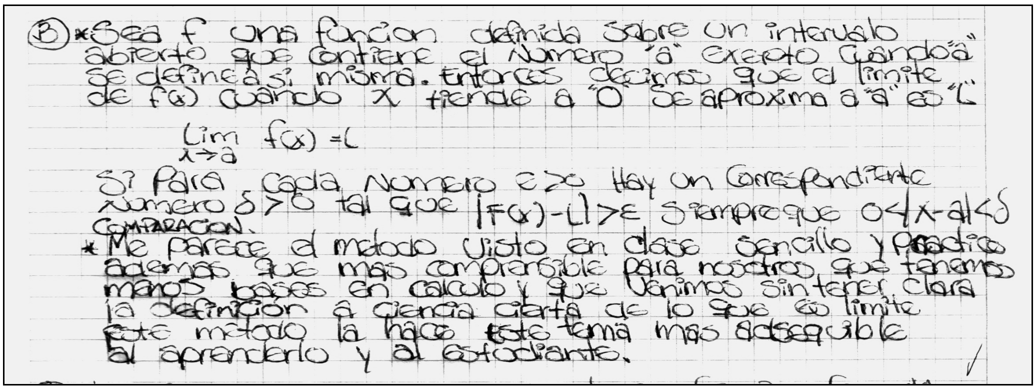
En la Figura 48 muestra que los estudiantes no lograron determinar el valor del radio de forma adecuada, ya que no plantearon el problema correctamente.

En los ejercicios del 7 al 10 no se presentaron los resultados esperados, debido a los vacíos que tenían los estudiantes en ciertos temas como son operaciones básicas, despeje de ecuaciones y desigualdades, y hallar funciones inversas. Pero pese a estas falencias se notó que los estudiantes lograron comprender y asimilar las definiciones (definición 5.3 y 5.4) de límite que se trabajaron ya que trataban de llegar a la conclusión deseada: demostrar la existencia del límite.

7.2. Otras definiciones

Se propuso a los estudiantes buscar en los textos otras definiciones límite y compararlas con la vista en clase.

En este punto los estudiantes plasmaron su opinión personal basados en la experiencia (colegio y universidad) que han tenido con el tema y lo encontrado en los textos comparándolo con lo visto en clase; algunos comentarios se muestran a continuación.



(5) *Sea f una funcion definida sobre un intervalo abierto que contiene el Numero "a" exepto cuando "a" se define así misma. entonces decimos que el limite de f(x) cuando x tiende a "a" se aproxima a "a" es "L"

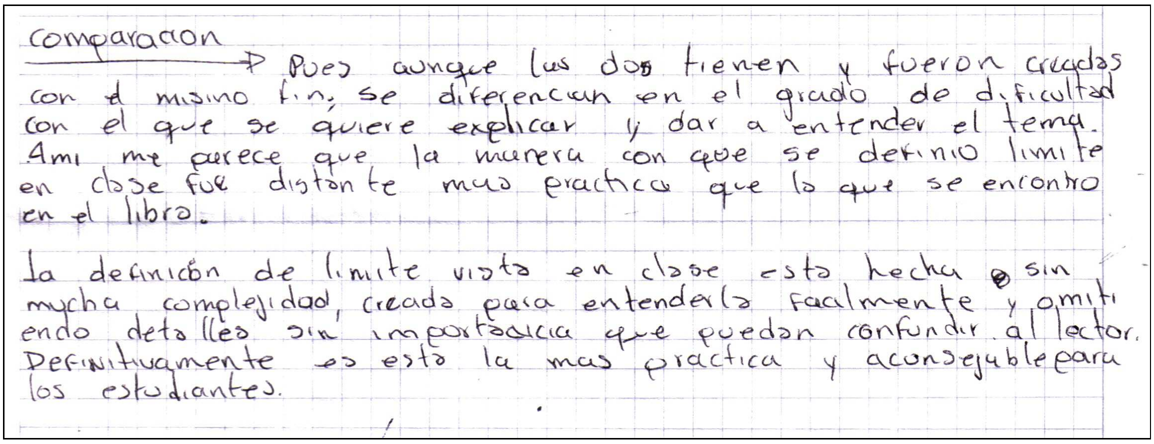
$\lim_{x\to a} f(x) = L$

Si para cada Numero $\varepsilon > 0$ hay un correspondiente numero $\delta > 0$ tal que $|f(x)-L| > \varepsilon$ siempre que $0 < |x-a| < \delta$

COMPARACION.

*Me parece el metodo visto en clase sencillo y practico ademas que mas comprensible para nosotros que tenemos menos bases en calculo y que venimos sin tener clara la definición a ciencia cierta de lo que es limite este metodo la hace este tema mas adsequible al aprenderlo y al estudiante.

Figura 49. Otra definición de límite.


comparacion → Pues aunque los dos tienen y fueron creados con el mismo fin, se diferencian en el grado de dificultad con el que se quiere explicar y dar a entender el tema.
Ami me parece que la manera con que se definio limite en clase fue distante mas practica que lo que se encontro en el libro.

La definicón de limite visto en clase esta hecha sin mucha complejidad, creada para entenderla facilmente y omitiendo detalles sin importancia que puedan confundir al lector. Definitivamente es esta la mas practica y aconsejable para los estudiantes.

Figura 50. Otra definición de límite.

En las figuras 49 y 50 se evidencia cómo los estudiantes comparan las definiciones que conocen de límite mostrando que se identifican más con la trabajada en clase, debido a que se relacionaba con temas que se han visto hasta el momento en la clase, como son intervalos (bolas), funciones y funciones inversas, permitiendo que se hablara un mismo lenguaje en el aula y así entender el significado del concepto de límite, que va más halla de resolver ejercicios aplicando artificios matemáticos sin comprender lo que se hace.

7.3. ¿Se logró el objetivo?

Cuando comenzamos nuestra vida en la escuela, y especialmente en la universidad (práctica docente I), notamos cómo los estudiantes contemplan el cálculo como una materia complicada y poco útil para sus proyectos de vida en la mayoría de los casos. Debido a esto se toman los temas que se trabajan en la asignatura de forma mecánica, haciéndola difícil de tratar, y muchas veces se hacen las cosas sin entenderlas, especialmente el concepto de límite. Para corroborar esta hipótesis se estuvo hablando con profesores de la Universidad Industrial de Santander que han trabajado con el tema como lo son Bernardo

Mayorga, Edilberto Reyes, German Jaimes, Rosario Iglesias, Marisel Ardila, Fernando Pérez y Hugo García, llegando a la conclusión que por cada curso de cálculo donde se trabaja este concepto, a lo mas el 30% de los estudiantes logran comprender y asimilar la importancia y trascendencia que tiene en las matemáticas. Por esto se inició este trabajo planteando la siguiente pregunta de investigación: *¿Cómo podemos facilitar y optimizar el proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de límite?* A lo cual creemos que se respondió positivamente debido al proceso y los resultados que se obtuvieron al realizar esta investigación, los cuales se muestran a continuación:

Total de Estudiantes		
Ejercicios	**Aciertos**	**Con Errores**
1	27	3
2	22	8
3	28	2
4	23	7
5	24	6
6	19	11
7	18	12
8	13	17
9	14	16
10	14	16
Total	202	98

Tabla 1.

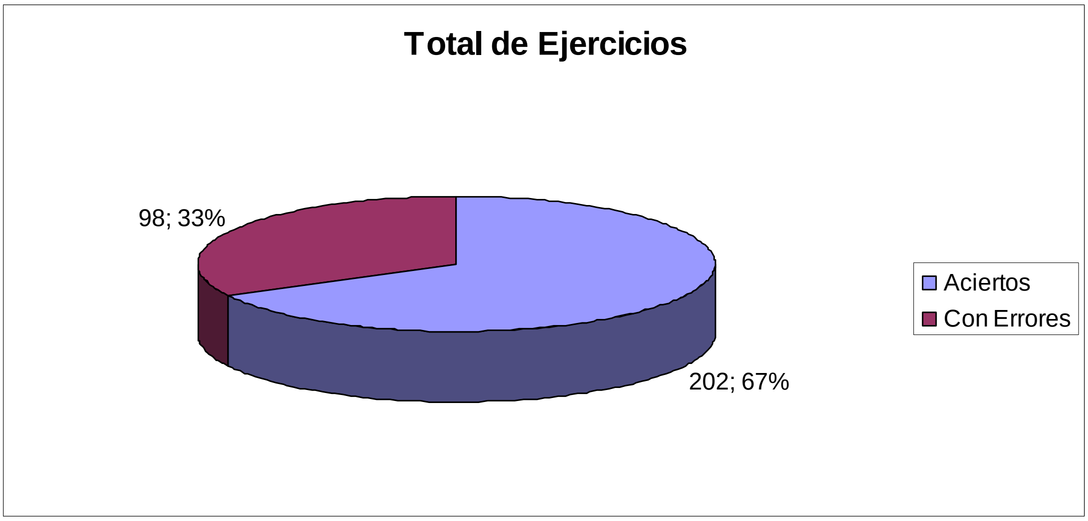


Figura. 51 Resultados globales.

Basados en la opinión de los estudiantes y en los resultados que muestran que poco más del 60% de los estudiantes logró comprender y asimilar la importancia del concepto de límite, se puede decir que se alcanzó el objetivo principal de esta investigación, que fue el construir una estrategia metodológica que contribuya a lograr el aprendizaje del concepto de límite en los estudiantes de primer semestre de las carreras de ciencias e ingenierías de la Universidad Industrial de Santander.

A continuación se muestran algunos cometarios de la clase y la opinión de la profesora Marisel Ardila Amado acerca de la propuesta desarrollada:

2.Comente qué fue lo que más le gustó de la clase y lo que no;
Me parece muy interesante que existan nuevas maneras de enseñar éste concepto fundamental pues no tenia idea que atravez de intervalos sencillos y conceptos sencillos se lleve a cabo el entendimiento de lo que es límite.

3. Comente qué diferencias encontró entre la definición tradicional de limite y la que se dio en clase; La diferencia es que la definición tradicional nos lleva a conocer y a utilizar teoremas y formulas que muchas veces no entendemos y no sabemos de donde salen, mientras ésta nueva definición explica perfectamente lo que es un limite, como encontrarlo y verificarlo conociendo su grafica y buscando por nuestros medios (teoria ya conocida) un resultado satisfactorio y entendible. Gracias por este nuevo metodo.

Comentario 1.

2.Comente qué fue lo que más le gustó de la clase y lo que no; Todo fue nuevo creativo y manejable. Los profesores Explicaron muy Exelente y aclararon las dudas se hallo una explicación netamente matemática y no superficial.

Comentario 2.

Marisel Ardila Amador (profesoral)

Con respecto a la experiencia desarrollada considero que es una propuesta muy valiosa ya que le da un enfoque más práctico y sencillo para los estudiantes de la definición del Limite.

No conocia esta manera de presentar el tema y comparándola con el enfoque que tradicionalmente se presentaba, noté q' a los estudiantes les fue más accequible entender el procedimiento.

Con respecto a la metodologia y manejo de las clases por parte de los estudiantes de Licenciatura fue excelente, se notaba en ellos seguridad y conocimiento del tema, además de una actitud positiva y amable con los estudiantes del curso.

Comentario 3.

8. CONCLUSIONES

Para finalizar la presentación de nuestra investigación hacemos mención de las conclusiones más relevantes en nuestro estudio.

- Podemos afirmar que se logró obtener una respuesta positiva a la pregunta de investigación, la cual consistía en *facilitar y optimizar el proceso enseñanza-aprendizaje del concepto de límite* desarrollando las capacidades de los estudiantes de primer semestre de las carreras de ciencias e ingenierías de la Universidad Industria de Santander.

- La metodología empleada de abordar el concepto de límite basados en la extracción general del concepto y sus dificultades fue la adecuada, ya que se pueden evidenciar los buenos resultados obtenidos: por medio de los comentarios y el desarrollo del taller, los estudiantes lograron familiarizarse con el concepto de límite.

- Durante la investigación los jóvenes mostraron gran interés por apropiarse y aplicar el concepto de límite, ya que fueron sujetos activos en el desarrollo de la clase y actividad, siendo directamente los protagonistas en el proceso de aprendizaje.

- Siempre es necesario verificar y afianzar las bases o presaberes que deben tener los estudiantes, para así poder lograr un buen desarrollo del tema.

- Se logró que los estudiantes crearan una relación entre todo aquel conocimiento que tenían con el que adquirieron (concepto de límite), y así alcanzar la continuidad de su proceso educativo.

- Es necesario que el docente sea una persona abierta a los cambios y dispuesta a romper los esquemas que impiden a los estudiantes participar y desarrollar sus capacidades.

- Es importante llevar a los estudiantes a vivir o experimentar el proceso y trabajo que llevan ciertos resultados fundamentales en matemáticas mediante actividades y ejercicios. Esto permitirá que los estudiantes valoren los resultados trabajados en clase y aprendan que más sencillo que memorizar es deducir si se trabaja con dedicación, entendiendo que este es uno de los principales adjetivos de las matemáticas.

ANEXO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

TALLER

Nombre:_____________________________ **Cód:**______

a) Verificar los siguientes límites:

1. Sea $f(x)=1-3x$. Demuestre que el $\lim\limits_{x\to -2} f(x) = 7$.
2. Sea $f(x)=x^3+2$. Demuestre que el $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = 3$.
3. Sea $f(x)=\dfrac{(x^2-64)}{x-8}$. Demuestre que el $\lim\limits_{x\to 8} f(x) = 16$.
4. Sea $f(x)=\dfrac{(16x^2-4)}{4x-2}$. Demuestre que el $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = 4$.
5. Sea $f(x)=sen(x)$. Demuestre que el $\lim\limits_{x\to \frac{\pi}{4}} f(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
6. Sea $f(x)=\ln x$. Demuestre que el $\lim\limits_{x\to 6} f(x) = \ln 6$.
7. Sea $f(x)=\dfrac{5}{\sqrt{x^2+1}}$. Demuestre que el $\lim\limits_{x\to \infty} f(x) = 0$.
8. Sea $f(x)=\dfrac{2x+3}{x-1}$. Demuestre que el $\underset{x\to \infty}{\text{íim}}\, f(x) = 2$.
9. Sea $f(x)=\dfrac{3}{(x-1)^4}$. Demuestre que el $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = \infty$.
10. Sea $f(x)=\dfrac{2}{(x-2)^2}$. Demuestre que el $\lim\limits_{x\to 2} f(x) = \infty$.

b) Encuentre otra definición de límite y compárela con la vista en clase.

REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] MAYORGA Bernardo. "Límites por direcciones". *En Memorias del primer Encuentro Iberoamericano de la Enseñanza del Cálculo.* Universidad Javeriana, Bogotá, 2008.

[2] BOYER Carl. *Historia de la Matemática.* Alianza Editorial, Madrid, 1999.

[3] SHÍLOV G. E. *Análisis matemático: funciones de una sola variable* (en ruso). Editorial Naúka, Moscú, 1969. (Existe traducción inglesa: *Elementary Real and Complex Analysis*. Dover Books in Mathematics, Mineola, N. Y., 1996).

[4] BOURBAKI Nicolas. *Topologie General*. Masson, Paris, 1997.

[5] KOLMOGÓROV A.N., FOMÍN S.V. *Elementos de la teoria de funciones del análisis funcional*. Editorial Mir, Moscú, 1972.

[6] CORNU B. "Interférence des modèles spontanés dans L`apprentissage de la notion de limite". *Séminaire de Recherche Pedagogique.* Tesis de doctorado, Grenoble, 1983.

[7] ROBINET J. "Une expérience d`ingénierie didactique sur la notion de limite de fonction". *Recherches en Didactique des Mathématiques, 1983.*

[8] SIERPINSKA Anna. "Obstacles épistémologiques relatifs à la notion de limite". *Recherches en didactique des mathèmatiques,* 1985.
-- "Humanities students and epistemological obstacles related to limits". *Educational Studies in Mathematics,* 1987.

[9] AZCÁRATE Carmen, DEULOFEU Jordi. *Funciones y Graficas,* Editorial Síntesis, S.A., 1990.

[10] MAYORGA Bernardo. *Libro de lectura de Cálculo*. Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, 1996.