

Geodésicas en el Campo Gravitacional Externo de un Objeto Compacto Lentamente Rotante y Ligeramente Deformado.

Angie Vianey Ariza Pardo

Trabajo de Grado para optar por el título de Físico

DIRECTOR:

Fabio Duvan Lora Clavijo
M.Sc en Física, Ph.D. en Física

CODIRECTOR:

Oscar Mauricio Pimentel Díaz
M.Sc. en Física

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Física
Bucaramanga
2018

*A mis abuelos
porque el amor nunca los olvida.*

*A Edu
por convertirse en la madre que no pudo ser antes.*

*A Ricardo
por ser el padre que necesité.*

*A Camilo Barbosa
por tu amor
Siempre Nuestro.*

Agradecimientos

A Fabio Lora y Oscar Pimentel por su guía en la realización de éste trabajo de grado, sus consejos y su apoyo.

A mis profesores, a los buenos y a los malos, porque de cada uno de ustedes he aprendido.

A todas las personas que de una u otra manera han contribuido en mi formación como físico.

Por último a mi familia y amigos por creer en mí.

Índice

1. Introducción	11
2. Propiedades de la Métrica de Hartle-Thorne	15
2.1. Métrica	15
2.2. Horizonte de Eventos y Ergosfera	17
3. Ecuaciones de las Geodésicas	18
4. Potencial Efectivo	21
4.1. Caso Particular sin rotación ni deformación (Schwarzschild)	22
4.2. Caso Particular sin rotación pero con deformación ($Q \neq 0$)	25
4.3. Caso Particular con rotación ($J \neq 0$) y deformación ($Q \neq 0$)	28
5. Órbita Circular Marginalmente Estable (ISCO)	29
6. Órbitas en el plano ecuatorial	33
6.1. Dispersión	35
6.2. Órbitas Acotadas	40
6.3. Órbitas de Un pétalo	42
6.4. Órbitas de Dos pétalos	45
6.5. Órbitas de Tres pétalos	51
6.6. Órbitas de Cuatro pétalos	54
7. Conclusiones	57
Referencias	60
Apéndices	64

Índice de figuras

1.	Horizonte de eventos y Ergosfera.	18
2.	Potenciales V_+ y V_- para $J = Q = 0$	23
3.	Potencial Efectivo de Schwarzschild	24
4.	Potenciales V_+ y V_- , sin rotación.	25
5.	Potencial Efectivo con cuadrupolar deformación	27
6.	Potenciales V_+ y V_- , con rotación	29
7.	Órbita circular marginalmente estable (ISCO).	31
8.	Radio de la órbita circular marginalmente estable.	32
9.	Geodésicas Ecuatoriales.	34
10.	Dispersión de partículas tipo tiempo con diferentes velocidades para la métrica de Schwarzschild.	36
11.	Dispersión de partículas tipo tiempo con diferentes velocidades para la métrica de Kerr a segundo orden en J	37
12.	Dispersión de partículas de prueba debido a un objeto compacto con $J = 0$	38
13.	Dispersión de partículas de prueba debido a un objeto compacto con deformación arbitraria descrito por la métrica de Hartle-Thorne.	39
14.	Ejemplo.	41
15.	Órbita de un pétalo para un objeto compacto sin deformación.	43
16.	Efecto del parámetro de deformación Q arbitrario sobre la órbita de un pétalo.	44
17.	Órbita de dos pétalos con $(z, w, \tilde{v}) = (2, 0, 1)$	46
18.	Efecto del parámetro de deformación Q arbitrario sobre el primer tipo de órbita de dos pétalos.	47
19.	Potencial efectivo y energía de la partícula de prueba para una órbita de dos pétalos con $(z, w, \tilde{v}) = (2, 0, 1)$	48
20.	Órbita de dos pétalos con $(z, w, \tilde{v}) = (2, 1, 1)$	49
21.	Efecto del parámetro de deformación Q arbitrario sobre el segundo tipo de órbita de dos pétalos.	50
22.	Potencial efectivo y energía de la partícula de prueba para una órbita de dos pétalos con $(z, w, \tilde{v}) = (2, 1, 1)$	51
23.	Órbita de tres pétalos para un objeto compacto sin deformación.	52
24.	Efecto del parámetro de deformación Q arbitrario sobre la órbita de tres pétalos.	53
25.	Órbita de cuatro pétalos para un objeto compacto sin deformación.	54
26.	Efecto del parámetro de deformación Q arbitrario sobre la órbita de cuatro pétalos.	55

Índice de Apéndices

A. Ecuaciones Canónicas de Hamilton	64
B. Método de Runge-Kutta-Fehlberg	65

RESUMEN

TÍTULO: GEODÉSICAS EN EL CAMPO GRAVITACIONAL EXTERNO DE UN OBJETO COMPACTO LENTAMENTE ROTANTE Y LIGERAMENTE DEFORMADO. ¹

AUTOR: ANGIE VIANEY ARIZA PARDO. ²

PALABRAS CLAVE: GEODÉSICAS, MÉTRICA DE HARTLE-THORNE, OBJETOS COMPACTOS.

RESUMEN:

En este trabajo se realiza un estudio de geodésicas ecuatoriales para partículas de prueba tipo tiempo, en el campo exterior de un objeto compacto lentamente rotante y ligeramente deformado, el cual es descrito por la métrica de Hartle-Thorne, donde el parámetro Q es independiente de la rotación J . Con el fin de realizar el análisis de las órbitas en este espacio-tiempo se estudia el horizonte de eventos y la ergosfera para un objeto compacto con distintos valores de deformación arbitraria. Seguido a ésto se deduce analíticamente las ecuaciones de las geodésicas para partículas tipo tiempo, se muestra la equivalencia entre éstas y las ecuaciones de Hamilton en el estudio de geodésicas, y se resuelve numéricamente estas últimas usando el método de Runge-Kutta-Fehlberg. Con las ecuaciones canónicas halladas, se calcula y grafica el potencial efectivo para un objeto compacto sin rotación pero con distintos valores de deformación donde se incluye el caso de Schwarzschild, además se calcula los potenciales V_{\pm} para dos parámetros de rotación lenta y distintos valores de ligera deformación. Adicionalmente se estudia la órbita circular marginalmente estable respecto a los parámetros de rotación y deformación del objeto. Luego, con el fin de calibrar y probar los algoritmos numéricos implementados se reproducen algunos resultados de la investigación llevada a cabo por [Boshkayev et al. \(2016a\)](#). Finalmente, se presentan los resultados numéricos los cuales se dividieron en dos secciones. La primera de ellas trata acerca de la dispersión de partículas tipo tiempo debido a un objeto compacto que tiene rotación fija pero distintos valores de deformación, y la segunda sección es sobre el efecto de la deformación cuadrupolar sobre órbitas cerradas compuestas por uno, dos, tres y cuatro pétalos.

¹Trabajo de Grado.

²Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Fabio Duvan Lora Clavijo, Ph.D., Codirector: Oscar Mauricio Pimentel Diaz, M.Sc.

ABSTRACT

TITLE: GEODESICS IN THE EXTERNAL GRAVITATIONAL FIELD OF AN SLOWLY ROTATING AN SLIGHTLY DEFORMED COMPACT OBJECT.¹

AUTHOR: ANGIE VIANEY ARIZA PARDO.²

KEY WORDS: GEODESICS, THE HARTLE-THORNE METRIC, COMPACT OBJECTS.

ABSTRACT:

In this work a study of equatorial geodesics for timelike test particles is performed in the external field of a slowly rotating and slightly deformed compact object, this is described by the Hartle-Thorne metric, where the deformation parameter Q is independent of rotation J . In order to perform the analysis of the orbits in this spacetime, the event horizon and the ergosphere are studied for a compact object with different values of arbitrary deformation. Following this, the geodesic equations for timelike particles are analytically deduced, the equivalence between them and the Hamilton equations, in the study of geodesics, is shown. Thereby the latter are numerically solved using the Runge-Kutta-Fehlberg method. With the canonical equations found, the effective potential for a compact object without rotation but with different values of deformation is calculated, where the Schwarzschild case is included, and the V_{\pm} potentials for two slow rotation parameters and different values of slight deformation are calculated. Additionally, the innermost stable circular orbit is studied with respect to the parameters of rotation and deformation of the object. Then, in order to calibrate and test the numerical algorithms implemented some results of the research carried out by [Boshkayev et al. \(2016a\)](#) are reproduced. Finally, the numerical results are presented, in two sections. First, the dispersion of timelike particles due to a compact object that has fixed rotation but with different values of deformation. Second, is about the effect of the quadrupole deformation on closed orbits composed of one, two, three and four petals.

¹Trabajo de Grado.

²Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Fabio Duvan Lora Clavijo, Ph.D., Co-director: Oscar Mauricio Pimentel Diaz, M.Sc.

1. Introducción

“En 1930, Einstein y su esposa Elsa fueron al Monte Wilson, donde Hubble les hizo visitar el observatorio. Cuando le dijo a Elsa que el telescopio de 250 centímetros se usaba para estudiar la estructura del cosmos, ella respondió: Vaya, vaya, mi marido lo hace en la parte de atrás de un viejo sobre (Smoot and Davidson, 1993).”

Mediante el movimiento orbital ha sido posible estudiar y entender el comportamiento de diferentes sistemas astrofísicos como, sistemas planetarios, discos de acreción, enanas blancas, estrellas de neutrones, agujeros negros y sistemas binarios. Éste ha permitido caracterizar las propiedades tanto del objeto compacto como de su campo gravitacional. Por ejemplo, a través del análisis de órbitas es posible entender la estructura dinámica del gas que se mueve en la vecindad de un objeto compacto, lo cual es de gran utilidad ya que en los alrededores de estos objetos astrofísicos se producen rayos-X de alta energía, radiación gamma, oscilaciones de alta frecuencia, jets relativistas (Chandrasekhar, 1983) y ondas gravitacionales (Abbott et al., 2017a).

Recientes avances tecnológicos han conducido al desarrollo de mejores métodos de observación. Entre los proyectos más avanzados se encuentran el “Event Horizon Telescope.” EHT (Doeleman et al., 2009), el cual está compuesto por ocho telescopios localizados en Hawái, el Polo Sur, Arizona, España, México y Chile, formando una distribución global de telescopios vinculados entre sí, de los cuales se combinan datos, con el propósito de tener información de diferentes estructuras en la cercanía del horizonte de eventos de los agujeros negros. Ésto no solo es importante para probar la teoría de la relatividad general en el régimen de campo fuerte (Broderick et al., 2014), sino también para estudiar procesos de acreción cerca de un agujero negro (Ricarte and Dexter, 2015). Entre sus objetos de estudio está el agujero negro super masivo SgrA*, el cual se localiza en el centro de nuestra Galaxia, y posee una masa de $M = (4.1 \pm 0.6) \times 10^6 M_{\odot}$ (Ghez et al., 2008). Observaciones recientes muestran evidencia de variabilidad de la materia y campos magnéticos parcialmente ordenados a escalas de aproximadamente 6 veces el radio de Schwarzschild de SgrA* (Johnson et al., 2015). Estas observaciones demuestran que es de gran importancia entender el comportamiento de la materia en la vecindad de los agujeros negros.

Otro proyecto interesante es GRAVITY, que es un dispositivo conformado por un combinador de cuatro haces, un infrarrojo cercano, óptica adaptativa asistida, seguimiento de franjas, y de instrumentos astrométricos y de imágenes. Entre sus objetivos se encuentran observar pequeños detalles del centro Galáctico como planetas y estrellas, así como medir distancias en el cielo con alta precisión. Al igual que el EHT, GRAVITY estará capacitado para observar los alrededores de SgrA*, proporcionando información, no sólo acerca de las propiedades de los agujeros negros albergados en los diversos centros galácticos, sino también sobre la formación y evolución de las estrellas que orbitan cerca. Se espera que los resultados de algunos

trabajos sean confirmados por el GRAVITY, por ejemplo en [Zhang et al. \(2015\)](#), los autores establecen una relación entre los patrones de desplazamiento, corrimiento al rojo y dirección del espín de SgrA*, a partir de observaciones previas de la estrella S0-2/S2. Además, en [Grould et al. \(2017\)](#), los autores esperan discernir, tanto la naturaleza del objeto central como sus propiedades, a partir del movimiento orbital de la estrella S2 con una precisión astrométrica de 10 microsegundos de arco.

La existencia de estudios numéricos y analíticos que coinciden con las observaciones, muestra la riqueza de la teoría de la relatividad general. Esto se evidencia en investigaciones como la realizada por [Hees et al. \(2017\)](#), donde se lleva a cabo un análisis numérico basado en 19 años de observación de órbitas de estrellas alrededor de SgrA*. En otra investigación llevada a cabo por [Will \(2008\)](#) se muestra que es posible probar los teoremas de no-pelo en la teoría de la relatividad general, mediante el monitoreo astrométrico de estrellas que orbitan a distancias de miliparsecs de SgrA*. Otros estudios como el realizado por [Sadeghian and Will \(2011\)](#), donde se analiza la precesión del plano orbital de una estrella alrededor de SgrA*, como consecuencia de las perturbaciones producidas por otras estrellas circundantes. Existen trabajos numéricos con resultados similares a este último, en los cuales se llevan a cabo simulaciones numéricas usando el método de N-cuerpos ([Merritt et al., 2010](#)). Recientemente en ([Grould et al., 2017](#)), se comparan las trayectorias de partículas tipo tiempo en estrellas de bosones y un agujero negro de Kerr, obteniendo resultados muy diferentes con ambas soluciones cuando se consideran estrellas orbitando cerca del objeto compacto.

A través de los años, se han llevado a cabo varios estudios sobre órbitas alrededor de objetos compactos. Un breve recuento cronológico sobre algunas de estas investigaciones incluyen trabajos como el de [Glampedakis and Kennefick \(2002\)](#), en el cual, con base en la distorsión gravitacional que generan ciertos objetos compactos, se presentan órbitas con comportamientos tipo “*zoom*” (patrones de pétalos, no necesariamente cerrados y restringidos entre un radio mayor y un radio menor), tipo “*whirl*” (múltiples rotaciones alrededor del punto de órbita más cercano al objeto compacto), y combinaciones de ambos. Estos fenómenos son generados por amplios rangos de momento angular y energía. Algunas investigaciones presentan resultados más gráficos, como lo es el caso de [Levin and Perez-Giz \(2008\)](#), donde se implementa un sistema de clasificación de órbitas en el plano ecuatorial para la solución de Kerr. En este trabajo, los autores definen una taxonomía completa de todas las órbitas periódicas. También en [Fujita and Hikida \(2009\)](#) se presenta una solución analítica para órbitas de geodésicas tipo tiempo en el espacio-tiempo de Kerr, cuyas soluciones están dadas en términos de integrales elípticas, las cuales usan el método de [Mino \(2003\)](#), que consiste en un acercamiento por medio de perturbaciones para trazar la evolución orbital alrededor de un agujero negro supermasivo. De igual modo, en [Merritt et al. \(2010\)](#) se mide el espín y el momento cuadrupolar de un agujero negro supermasivo, a través de la precesión orbital de distribuciones estelares basadas en

observaciones.

Por otro lado se encuentran investigaciones como la de [Grossman et al. \(2012\)](#) que es la continuación y profundización del trabajo de [Levin and Perez-Giz \(2008\)](#), en la cual se clasifican órbitas periódicas en un espacio-tiempo de Kerr fuera del plano ecuatorial. A partir de dicha clasificación, describen órbitas no periódicas en términos de las órbitas periódicas. En [Warburton et al. \(2013\)](#) se explica que las frecuencias asociadas con los movimientos radial, longitudinal y azimutal, no son una buena parametrización para órbitas en el régimen fuerte. Asimismo, en [Zhang et al. \(2015\)](#), los autores desarrollan un método para estudiar un agujero negro super masivo, con el cual es posible restringir de manera simultánea características como su masa, espín y dirección del espín. Esto se lleva a cabo mediante el análisis numérico de órbitas de estrellas, basados en observaciones y predicciones de modelos dinámicos en los alrededores del agujero negro supermasivo.

Si bien hay distintas métricas que son solución al campo exterior de un objeto compacto, la métrica de Hartle-Thorne es de las más usadas por la sencillez de los cálculos, y es muy interesante pues incluye características del objeto como ligera deformación arbitraria y rotación lenta. Por ejemplo en [Abramowicz et al. \(2003\)](#) los autores usan esta métrica para estudiar órbitas ecuatoriales alrededor de una estrella de neutrones. En [Boshkayev et al. \(2016a\)](#), mediante el análisis de órbitas ecuatoriales para distintas combinaciones del cuadrupolo de masa, los investigadores derivan la velocidad angular orbital, el momento angular, la energía y el radio de la órbita circular marginalmente estable. En [Boshkayev et al. \(2016b\)](#), se muestra la equivalencia entre las soluciones de Sedrakyan-Chubaryan, Fock-Adbildin y Hartle-Thorne, en el estudio del campo gravitacional de objetos compactos lentamente rotantes y ligeramente deformados. También está el trabajo de [Bini et al. \(2013\)](#), en el cual se trazan órbitas circulares alrededor de una fuente rotante en la zona ecuatorial para distintos valores de momento angular y cuadrupolo de masa.

Probar que algunos objetos astrofísicos pueden ser descritos mediante la métrica de Hartle-Thorne, cambiaría el paradigma del teorema de no-pelo ([Berti et al., 2005](#)), el cual establece que un agujero negro sin carga únicamente puede caracterizarse a partir de dos parámetros, la masa del objeto y su momento angular. Por el contrario en la solución de Hartle-Thorne, el parámetro de deformación cuadrupolar Q puede tomar un valor que no está ligado a ninguno de los otros parámetros que describen el objeto compacto ([Hartle and Thorne, 1968](#)). Adicionalmente, al ser una solución para rotaciones lentas, es una métrica de especial interés en la detección de ondas gravitacionales, ya que para el caso de estrellas de neutrones durante un proceso de coalescencia como el detectado por [Abbott et al. \(2017b\)](#), la rotación disminuye a medida que caen en espiral, mientras que su momento angular orbital aumenta. En este momento la estrella se encuentra en el régimen de rotación lenta y los detectores en tierra como el LIGO ([Abbott et al., 2017a](#)), VIRGO y KAGRA captan

las ondas gravitacionales que se producen en el proceso, ya que son sensibles sólo a los últimos 17 minutos de la órbita antes de la coalescencia (Yagi and Yunes, 2013).

En esta investigación se lleva a cabo un estudio de geodésicas ecuatoriales en el espacio-tiempo de Hartle-Thorne. La idea central es analizar como se alteran las trayectorias de las partículas de prueba tipo tiempo cuando se considera un parámetro de deformación Q independiente de la rotación de un objeto compacto lentamente rotante. Para ésto, se analizan dos tipos de deformación, $Q > 0$ que corresponde a deformación oblata, es decir, que el objeto es más ancho en el ecuador que en los polos, y $Q < 0$ que representa deformación prolata cuando el objeto luce más alargado en los polos con respecto al diámetro del ecuador. Los valores de J con los que se lleva a cabo el análisis para rotación lenta, están motivados astrofísicamente por los siguientes objetos: el pulsar $J1939 + 2134$ descubierto por Backer et al. (1982) cuyo parámetro de rotación $J/M^2 \leq 0.3$ (Narayan and McClintock, 2012) y el agujero negro que se encuentra en el sistema binario A0620-00 el cual tiene una masa de $6.61 \pm 0.25[M_{\odot}]$ ubicado en la constelación de Monoceros con una rotación de $J/M^2 = 0.12$ (Steiner et al., 2010). Durante el desarrollo de este trabajo se usan las unidades geométricas $c = G = 1$, donde c es la velocidad de la luz y G es la constante de gravitación universal, Adicionalmete en todos los calculos y gráficas se toma el valor de la masa del objeto compacto como $M = 1$.

El presente trabajo está organizado de la siguiente manera, en la sección (2) se introduce la métrica de Hartle-Thorne, se muestra que ésta reduce a las métricas de Schwarzschild y de Kerr a segundo orden. Además se estudia el horizonte de eventos y la ergosfera para dicha métrica. En la sección (3) se deducen la ecuaciones que describen las geodésicas en el formalismo Lagrangiano, se habla de la equivalencia entre el lagrangiano y el hamiltoniano. En la sección (4) se deduce la ecuación de movimiento en el plano ecuatorial para partículas tipo tiempo en función de los potenciales V_{\pm} , con los cuales se puede reducir al potencial efectivo de Schwarzschild, cuando no hay rotación ni deformación cuadrupolar. Luego en la sección (5) se hace un análisis de la órbita circular marginalmente estable (ISCO) en la solución de Hartle-Thorne. Seguido a ésto, en la sección (6) se presentan los resultados numéricos del estudio de geodésicas para partículas tipo tiempo en el plano ecuatorial. En esta sección se reproducen algunos resultados obtenidos por Boshkayev et al. (2016c). Posteriormente, en la subsección (6.1) se estudia la dispersión de la trayectoria de partículas tipo tiempo para cinco casos de rotación variando el parámetro de deformación del objeto y en la subsección (6.2) se estudian los efectos que introduce el parámetro de deformación sobre las órbitas cerradas en el plano ecuatorial para un objeto no rotante. Por último, en la sección (7) se presentan las conclusiones obtenidas de este trabajo.

2. Propiedades de la Métrica de Hartle-Thorne

2.1. Métrica

La métrica de Hartle-Thorne es una solución a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, que fue propuesta para modelos de estrellas lentamente rotantes. Esta métrica describe con buena aproximación, el campo gravitacional exterior de un objeto compacto lentamente rotante y ligeramente deformado (Hartle and Thorne, 1968), en términos de tres parámetros independientes M , J y Q los cuales representan la masa, rotación y deformación del objeto compacto respectivamente. El elemento de línea de Hartle-Thorne en coordenadas $q^\alpha = (t, r, \theta, \phi)$, tiene la forma

$$ds^2 = g_{tt}dt^2 + g_{rr}dr^2 + g_{\theta\theta}d\theta^2 + g_{\phi\phi}d\phi^2 + g_{\phi t}d\phi dt + g_{t\phi}dt d\phi, \quad (1)$$

donde los coeficientes métricos están dados por

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left[1 + 2k_1 P_2(\cos \theta) + 2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{J^2}{r^4} (2\cos^2 \theta - 1)\right], \\ g_{rr} &= \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \left[1 - 2k_2 P_2(\cos \theta) - 2\left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \frac{J^2}{r^4}\right], \\ g_{\theta\theta} &= r^2(1 - 2k_3 P_2), \\ g_{\phi\phi} &= r^2 \sin^2 \theta (1 - 2k_3 P_2), \\ g_{\phi t} &= g_{t\phi} = -\frac{2J}{r} \sin^2 \theta, \end{aligned} \quad (2)$$

con

$$\begin{aligned} k_1 &= \frac{J^2}{Mr^3} \left(1 + \frac{M}{r}\right) + \frac{5Q - J^2/M}{8M^3} Q_2^2 \left(\frac{r}{M} - 1\right), \\ k_2 &= k_1 - \frac{6J^2}{r^4}, \\ k_3 &= k_1 + \frac{J^2}{r^4} + \frac{5Q - J^2/M}{4M^2 r} \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1/2} Q_2^1 \left(\frac{r}{M} - 1\right), \end{aligned} \quad (3)$$

siendo $P_2(x)$ el polinomio de Legendre de grado 2 y Q_l^m los polinómios asociados de Legendre de segunda clase, de manera que

$$\begin{aligned} P_2(x) &= \frac{1}{2}(3x^2 - 1), \\ Q_2^1(x) &= (x^2 - 1)^{1/2} \left[\frac{3x}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} - \frac{3x^2 - 2}{x^2 - 1} \right], \\ Q_2^2(x) &= (x^2 - 1) \left[\frac{3}{2} \ln \frac{x+1}{x-1} - \frac{3x^2 - 5x}{(x^2 - 1)^2} \right]. \end{aligned} \quad (4)$$

En la solución de Hartle-Thorne se han descartado los términos mayores de J^2 , ya que al tratarse de un caso de rotación lenta, los valores para el momento angular en potencias mayores del cuadrado son muy pequeños. De igual manera, al ser ligeramente deformada posee solamente términos lineales del cuadrupolo de masa Q . Esta métrica describe la geometría exterior de un objeto compacto lentamente rotante y ligeramente deformado ([Hartle and Thorne, 1968](#)).

Del la ecuación (1) puede verse que para $J = Q = 0$, el elemento de línea de Hartle-Thorne reduce a la métrica de Schwarzschild. Además, la métrica de Hartle-Thorne también reduce a la solución de Kerr o métrica de Kerr a segundo orden en J , sin embargo a diferencia de la métrica de Hartle-Thorne, la métrica de Kerr está bien definida por sólo dos parámetros, la masa total del objeto M y el momento angular J , pues una vez dado el momento angular queda definido el parámetro de deformación Q a un valor único ([Boshkayev et al., 2016b](#))

$$Q = J^2/M. \quad (5)$$

Haciendo la transformación de coordenadas que se presenta a continuación

$$\begin{aligned} r &= R + \frac{a^2}{2R} \left[\left(1 + \frac{2M}{R}\right) \left(1 - \frac{M}{R}\right) - \cos^2 \Theta \left(1 - \frac{2M}{R}\right) \left(1 + \frac{3M}{R}\right) \right], \\ \theta &= \Theta + \frac{a^2}{2R^2} \left(1 + \frac{2M}{R}\right) \sin \Theta \cos \Theta, \end{aligned} \quad (6)$$

donde (t, R, θ, ϕ) son las coordenadas de Boyer-Lindquist, $a = -J/M$ es el parámetro de momento angular, el elemento de línea de Hartle-Thorne toma la forma

$$\begin{aligned} ds^2 = & - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma}\right) dt^2 - \left(\frac{4aMr \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 \\ & + \left(r^2 + a^2 + \frac{2a^2 Mr \sin^2 \theta}{\Sigma}\right) \sin^2 \theta d\phi^2, \end{aligned} \quad (7)$$

el cual corresponde a la métrica de Kerr a segundo orden en J , donde las funciones Σ y Δ se definen de la siguiente manera

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2.$$

Así puede se observa que la métrica de Hartle-Thorne contiene implícitamente a las métricas de Schwarzschild y Kerr a segundo orden. En la siguiente sección se presenta un estudio del horizonte de eventos y la ergosfera para la métrica de Hartle-Thorne en el plano ecuatorial, es decir para el plano definido por $\theta = \pi/2$.

2.2. Horizonte de Eventos y Ergosfera

El horizonte de eventos de un agujero negro es una superficie de no retorno desde la cual niquiera la luz puede regresar. Cualquier partícula ya sea tipo tiempo o tipo luz que cruce el horizonte de eventos no podrá salir de éste (Schutz, 1985). En el trabajo realizado por Abramowicz et al. (2003) los autores deducen el radio del horizonte de eventos para la métrica de Hartle-Thorne el cual toma la siguiente forma

$$r_H = 2 \left[1 - \frac{1}{16} J^2 (7 - 15 \cos^2 \theta) + \frac{5}{16} Q (1 - 3 \cos^2 \theta) \right]. \quad (8)$$

De la expresión (8) puede verse que para la geometría de Schwarzschild, esto es para $J = Q = 0$, el horizonte de eventos se encuentra en $r_H = 2$. Este es el punto desde donde la luz ya no puede escapar hacia el infinito. Adicionalmente, un objeto compacto rotante genera una zona de “arrastre” del espacio-tiempo donde todo rota con éste, o en otras palabras una zona donde ningún observador permanece en reposo respecto al infinito (Hartle, 2003). A esta zona se le conoce como ergoregión, la cual está ubicada entre el horizonte de eventos y la ergosfera o ergosuperficie. Al igual que con el radio del horizonte de eventos los autores calcularon la posición de la ergosuperficie la cual se presenta a continuación

$$r_E = 2 \left[1 - \frac{1}{16} J^2 (3 - 11 \cos^2 \theta) + \frac{5}{16} Q (1 - 3 \cos^2 \theta) \right]. \quad (9)$$

En la figura (1) se grafica en coordenadas polares el radio del horizonte de eventos y la ergosuperficie para dos valores de J con tres parámetros diferentes de deformación Q . Ésta es una vista frontal del objeto compacto que está girando sobre su eje polar 90° , donde el radio del horizonte de eventos se presenta en línea continua, y el radio de la ergosfera en línea punteada, por lo cual el eje 0° equivale al eje y y el eje 90° al eje z . Con el fin de analizar el efecto introducido por el parámetro de deformación arbitrario, ambos radios son comparados con respecto al caso de Kerr a segundo orden mostrado en color verde. El panel (1a) corresponde a $J = 0.12$ cuyo valor de deformación en la solución de Kerr a segundo orden es $Q = 0.0144$, mientras en el panel (1b) está dado para una rotación de $J = 0.3$ con un respectivo $Q = 0.09$.

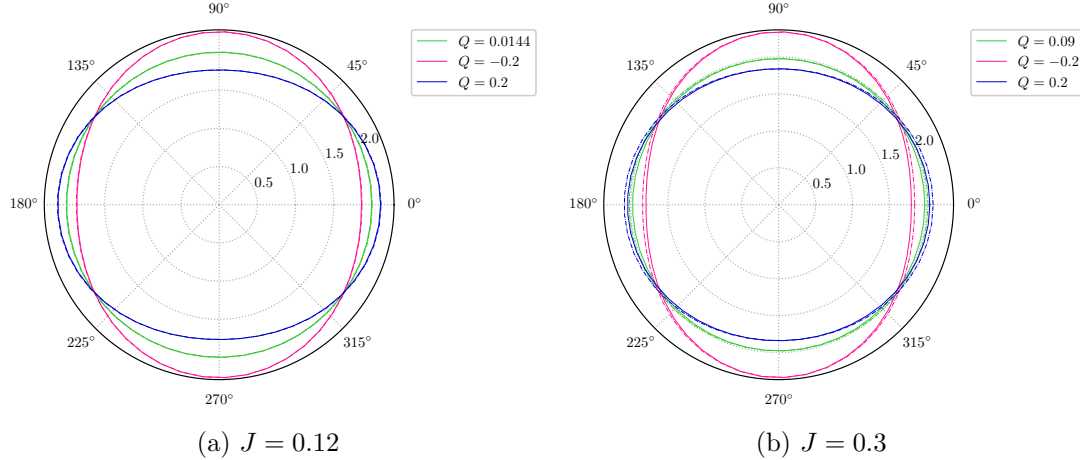


Figura 1: El horizonte de eventos en línea continua y la ergosfera en línea punteada para dos sistemas.

Al tratarse del régimen de rotación lenta el efecto del arrastre del espacio-tiempo circundante debido a la rotación del objeto compacto es pequeño por tanto la ergoregión, es decir, la distancia entre el radio del horizonte de eventos y el radio de la ergosfera es pequeño. Es por ello que en la figura (1a) la diferencia entre ambos radios es casi imperceptible, sin embargo los efectos del parámetro de deformación se aprecian con claridad. A medida que aumenta el valor de J como ocurre en la figura (1b) es posible observar la ergoregión, en ésta figura se ve que para los tres tipos de deformación ambos radios coinciden en los polos mientras que la diferencia se hace mayor en el ecuador siendo mayor el radio de la ergosuperficie que el del horizonte de eventos. En las dos gráficas de la figura (1), el efecto del parámetro Q es notorio tanto para deformación oblatada $Q = 0.2$ como prolata $Q = -0.2$ pues para los dos valores de J puede verse que los dos radios se deforman como una elipse más ancha en el ecuador o más alargada en los polos de acuerdo a cada tipo de deformación.

3. Ecuaciones de las Geodésicas

Una de las maneras en que se estudia el espacio-tiempo en relatividad general, ya sea de manera teórica u observacional, es analizando el comportamiento de partículas de prueba que se mueven en la vecindad de un objeto compacto y sobre la cual no actúa ninguna fuerza externa, es decir, estudiar geodésicas. A la trayectoria que siguen estas partículas en el espacio-tiempo también se le conoce como “línea de mundo” (Hartle, 2003). Para una métrica general el elemento de línea “ ds ”, en coordenadas generalizadas q^i está dada por

$$ds^2 = g_{ij}dq^i dq^j, \quad (10)$$

donde g_{ij} son las componentes covariantes del tensor métrico y los índices i, j toman los valores 0, 1, 2, 3. Del elemento de línea se puede definir la longitud de una curva en el espacio-tiempo como

$$l = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} ds = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{ds}{d\lambda} d\lambda = \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \sqrt{g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j} d\lambda, \quad (11)$$

en la cual λ es un parámetro definido sobre la curva, es decir que las coordenadas se pueden escribir de la forma $q^i(\lambda)$ y $\dot{q}^i = dq^i/d\lambda$. Ahora bien, la geodésica es la curva de mínima longitud entre dos puntos cercanos (Arfken et al., 2012). Cada geodésica es única ya que cuando se da una condición inicial $\lambda = \lambda_0$, la posición y dirección quedan definidas en función de ese parámetro afin. Para hallar la ecuación de la geodésica, se parte del lagrangiano, el cual en general, se define como la diferencia entre la energía cinética T y la energía potencial V

$$\mathcal{L} = T - V. \quad (12)$$

Sin embargo, en relatividad general el lagrangiano correspondiente a una partícula de prueba de masa m , sólo contiene la energía cinética ya que, en este caso, la gravitación no es una fuerza sino una propiedad de la geometría del espacio-tiempo (Hartle, 2003). El lagrangiano en este caso se expresa de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j = \frac{m}{2} \dot{q}_i \dot{q}^i, \\ \mathcal{L} &= \frac{m}{2} \frac{ds^2}{d\lambda^2}. \end{aligned} \quad (13)$$

Luego, con el fin de hallar las ecuaciones de movimiento de Euler-Lagrange se puede demostrar que minimizar la longitud l es equivalente a minimizar la acción \mathcal{A} , este análisis parte del principio de Hamilton el cual postula que un sistema físico evoluciona temporalmente de manera que la acción tiende a ser un mínimo, esto indica que su variación tiende a cero ($\delta\mathcal{A} = 0$)

$$\begin{aligned} \delta\mathcal{A} &= \delta \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mathcal{L}(q, \dot{q}) d\lambda = 0, \\ \delta\mathcal{A} &= \delta \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \frac{m}{2} g_{ij} \dot{q}^i \dot{q}^j d\lambda = 0. \end{aligned} \quad (14)$$

Para satisfacer la ecuación (14), de la variación de \mathcal{A} se deducen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\delta \int_{\lambda_0}^{\lambda_1} \mathcal{L}(q, \dot{q}) d\lambda = 0 \rightarrow \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q^k} - \frac{d}{d\lambda} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}^k} = 0, \quad (15)$$

Además, dado que g_{ij} no depende de las cantidades \dot{q}^i , al expandir la ecuación anterior se tiene que

$$\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j - \frac{d}{d\lambda} g_{ij} \frac{\partial}{\partial \dot{q}^k} (\dot{q}^i \dot{q}^j) = \frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} \dot{q}^i \dot{q}^j - \frac{d}{d\lambda} (g_{kj} \dot{q}^j + g_{ik} \dot{q}^i) = 0, \quad (16)$$

la cual se reduce de la siguiente manera

$$\frac{1}{2} \dot{q}^i \dot{q}^j \left[\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} - \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \right] - g_{ik} \ddot{q}^i = 0, \quad (17)$$

donde $d\dot{q}^j/d\lambda = \ddot{q}^j$ y $dg_{kj}/d\lambda = (\partial g_{kj}/\partial q^i) \dot{q}^i$. Luego, al multiplicar (17) por g^{kl} la ecuación general de la geodésica queda (Arfken et al., 2012)

$$\frac{d^2 q^l}{d\lambda^2} + \frac{dq^i}{d\lambda} \frac{dq^j}{d\lambda} \Gamma_{ij}^l = 0, \quad (18)$$

donde el término

$$\Gamma_{ij}^l = \frac{1}{2} g^{kl} \left(\frac{\partial g_{ij}}{\partial q^k} + \frac{\partial g_{kj}}{\partial q^i} - \frac{\partial g_{ik}}{\partial q^j} \right),$$

corresponde a los símbolos de Cristoffel de segunda clase. Ahora bien, ocurre que en relatividad general para el caso de las geodésicas el Hamiltoniano y el Lagrangiano tienen la misma forma (Arfken et al., 2012), como se muestra a continuación

$$\begin{aligned} \mathcal{H} &= \sum_i \dot{q}_i p_i - \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i), \\ \mathcal{H} &= \dot{q}_i \left(\frac{m}{2} \dot{q}_j \right) + \dot{q}_j \left(\frac{m}{2} \dot{q}_i \right) - \frac{m}{2} \dot{q}_i \dot{q}_j, \\ \mathcal{H} &= \mathcal{L}(q_i, \dot{q}_i), \end{aligned} \quad (19)$$

por esta razón, los momentos canónicos conjugados o las ecuaciones canónicas de Hamilton se pueden escribir como (20). Esto es importante ya que resolver las ecuaciones de Hamilton resulta matemática y numéricamente más sencillo pues éstas ofrecen un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias de primer orden. Los detalles acerca de la solución de las ecuaciones de Hamilton se presentan en el apéndice (A).

$$\dot{p}_i = -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_i}, \quad \dot{q}_i = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p_i}. \quad (20)$$

Cabe mencionar que las geodésicas pueden clasificarse en tres tipos de acuerdo al elemento de línea ds^2 . Usando la convención de signos $(-, +, +, +)$ en la métrica, se dividen en: las geodésicas tipo tiempo cuyo elemento de línea $ds^2 < 0$, las geodésicas correspondientes a rayos de luz que se conocen como geodésicas nulas, y se identifican con el elemento de línea igual a cero, $ds^2 = 0$, y las tipo espacio para las cuales el elemento de línea es $ds^2 > 0$ (Hartle, 2003).

4. Potencial Efectivo

El potencial efectivo permite clasificar las órbitas que pueden presentarse alrededor de un objeto compacto de acuerdo a los valores de energía y momento angular de la partícula de prueba, de ésta manera es posible establecer si se trata de una órbita que se encuentra acotada entre dos radios, si es una órbita circular o una órbita de inmersión también conocida como una órbita “*plunge*” (Boshkayev et al., 2016a). A partir de la métrica de Hartle-Thorne presentada en la ecuación (1), se tiene el lagrangiano como

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} \left[g_{tt}\dot{t}^2 + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 + 2g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} \right], \quad (21)$$

donde los términos $g_{\alpha\beta}$ son los elementos de la métrica y el parámetro m es la masa de la partícula de prueba. Dado que la métrica de Hartle-Thorne es independiente del tiempo y guarda simetría respecto al eje azimutal, la energía y el momento angular de la partícula de prueba se conservan sobre la trayectoria, por esto dicha trayectoria puede hallarse por completo con estas dos cantidades (Schutz, 1985), así los momentos canónicos de Hamilton son

$$\begin{aligned} p_t &= -\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -g_{tt}\dot{t} - g_{t\phi}\dot{\phi} = E, \\ p_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = g_{\phi\phi}\dot{\phi} + g_{t\phi}\dot{t} = L, \end{aligned} \quad (22)$$

en las cuales \dot{t} y $\dot{\phi}$ son componentes del cuadri-vector velocidad $v^\alpha = (\dot{t}, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\phi})$. De las ecuaciones (22), se despejan \dot{t} y $\dot{\phi}$ como se muestra a continuación

$$\dot{t} = \frac{g_{\phi\phi}E + g_{t\phi}L}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}, \quad \dot{\phi} = -\frac{g_{t\phi}E + g_{tt}L}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}. \quad (23)$$

Ahora, se define la condición de ligadura para las geodésicas en relatividad general, la cual depende de la métrica y de las primeras derivadas de la siguiente manera $g_{\alpha\beta}\dot{q}^\alpha\dot{q}^\beta = \epsilon$, donde el valor de ϵ define el tipo de partícula, de manera que $\epsilon = 0$ corresponde a partículas nulas, $\epsilon = -1$ corresponde a partículas tipo tiempo, y $\epsilon = 1$ a partículas tipo espacio. Al expandir la sumatoria, se tiene que

$$\epsilon = g_{tt}\dot{t}^2 + g_{rr}\dot{r}^2 + g_{\theta\theta}\dot{\theta}^2 + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 + 2g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi}. \quad (24)$$

Evaluando la ecuación anterior en el plano ecuatorial, es decir $\theta = \pi/2$ y $\dot{\theta} = 0$ y reemplazando las expresiones de la ecuación (23) se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{g_{\phi\phi}(Eg_{t\phi} + g_{tt}L)^2}{(-g_{t\phi}^2 + g_{tt}g_{\phi\phi})^2} + \frac{2g_{t\phi}(Eg_{t\phi} + g_{tt}L)(Eg_{\phi\phi} + g_{t\phi}L)}{(g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})(-g_{t\phi}^2 + g_{tt}g_{\phi\phi})} + \\ \frac{g_{tt}(Eg_{\phi\phi} + g_{t\phi}L)^2}{(g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})^2} + g_{rr}\dot{r}^2 = -1. \end{aligned} \quad (25)$$

Luego, al despejar \dot{r}^2 de la ecuación (25), se encuentra la ecuación de movimiento o ecuación de la trayectoria de las órbitas

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \left(\frac{E}{\sqrt{2}} - V_+ \right) \left(\frac{E}{\sqrt{2}} - V_- \right), \quad (26)$$

donde los potenciales V_+ y V_- son

$$V_{\pm} = -\frac{1}{\sqrt{2}g_{\phi\phi}} \left[g_{t\phi} \pm \sqrt{(L^2 - g_{\phi\phi}\epsilon)(g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi})} \right]. \quad (27)$$

Ahora bien, de la ecuación de movimiento de las órbitas (26), se observa que $\dot{r}^2/2 \geq 0$, es decir que los valores de energía permitidos son aquellos que satisfacen la siguiente desigualdad

$$\left(\frac{E}{\sqrt{2}} - V_+ \right) \left(\frac{E}{\sqrt{2}} - V_- \right) \geq 0. \quad (28)$$

Aquellos valores de E que no satisfacen la ecuación anterior se dice que se encuentran en la región prohibida, (Schutz, 1985). A partir de los potenciales V_{\pm} es posible hallar el potencial efectivo para la métrica de Schwarzschild tal como se muestra a continuación.

4.1. Caso Particular sin rotación ni deformación (Schwarzschild)

Al tomar los valores de $J = 0$ y $Q = 0$ en la métrica de Hartle-Thorne, ésta reduce a la métrica de Schwarzschild, la cual consiste en un horizonte de eventos ubicado en $r = 2$ y una singularidad esencial en $r = 0$ (Chandrasekhar, 1983). La métrica de Schwarzschild es solución a las ecuaciones de vacío de Einstein para un objeto esféricamente simétrico que no rota. Además se caracteriza por ser independiente del tiempo, razón por la cual guarda simetría bajo desplazamientos en la coordenada temporal t , (Bini et al., 2013), cuyo elemento de línea de Schwarzschild es

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2). \quad (29)$$

Teniendo en cuenta las características de esta métrica los potenciales V_+ y V_- presentados en la ecuación (27) cambian puesto que el elemento cruzado de la métrica $g_{t\phi} = 0$, por lo tanto los potenciales V_{\pm} toman la siguiente forma

$$\begin{aligned} V_+ &= -\frac{1}{\sqrt{2}r^2} \left[\sqrt{\left(1 - \frac{2}{r} \right) r^2 (L^2 + r^2)} \right], \\ V_- &= \frac{1}{\sqrt{2}r^2} \left[\sqrt{\left(1 - \frac{2}{r} \right) r^2 (L^2 + r^2)} \right]. \end{aligned} \quad (30)$$

Así, al graficar los potenciales V_{\pm} para una partícula de prueba con momento angular $L = 3.535534$ como se muestra en la figura (2), se observa que éstos se encuentran en el horizonte de eventos, ubicado en $r = 2$ y permanecen distantes entre sí a medida que $r \rightarrow \infty$. En la ecuación (30) se puede apreciar que $V_+ = -V_-$, lo cual implica que las energías que satisfacen la ecuación (28), para la métrica de Schwarzschild son $E^2/2 \geq V_{\pm}^2$. Aquellos valores de energía que no satisfacen esta relación se encuentran en la región prohibida que en este caso corresponde a la región sombreada en azul claro.

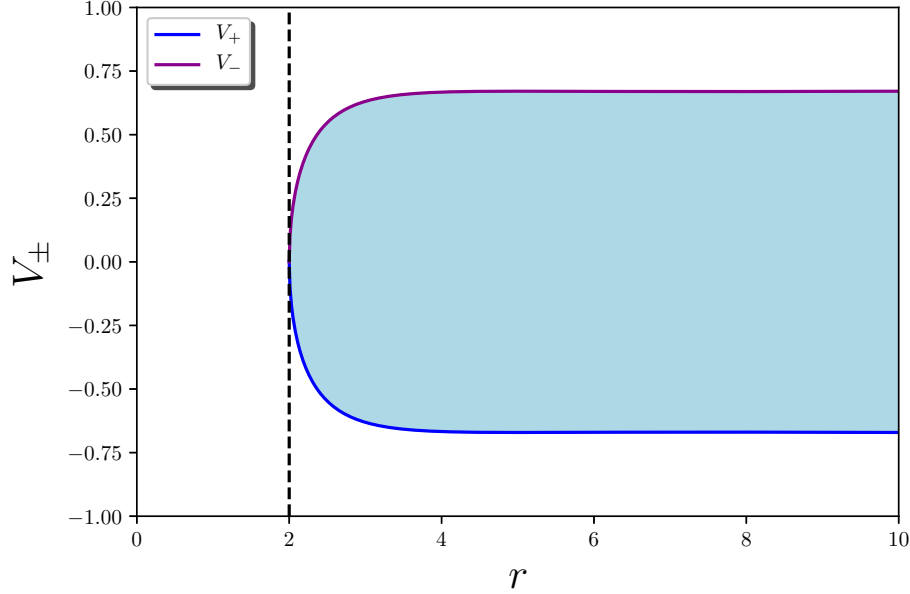


Figura 2: Potenciales V_+ y V_- para el caso de Schwarzschild, esto es $J = Q = 0$, para una partícula de prueba con momento angular $L = 3.535534$.

Para este caso es posible definir el potencial efectivo a partir de V_+ , de la siguiente manera

$$V_{eff} = V_+^2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{L^2}{r^3}. \quad (31)$$

Debido a que para el caso el potencial efectivo sólo depende del momento angular, la ecuación (26) se reduce a

$$\frac{\dot{r}^2}{2} = \varepsilon_{eff} - V_{eff}, \quad (32)$$

donde $\varepsilon_{eff} = \frac{1}{2}E^2$. Es interesante mencionar que la expresión para el potencial efectivo mostrada en la ecuación (31) tiene la misma forma del potencial Newtoniano excepto por el término $-L^2/r^3$, que corresponde a la corrección relativista. En la figura (3) se presentan algunos potenciales efectivos de Schwarzschild en línea continua,

y la línea punteada representa la aproximación al potencial Newtoniano. Cada uno de ellos está dado para un valor de momento angular diferente, estos L fueron tomados de la investigación sobre órbitas ecuatoriales llevada a cabo por [Levin and Perez-Giz \(2008\)](#).

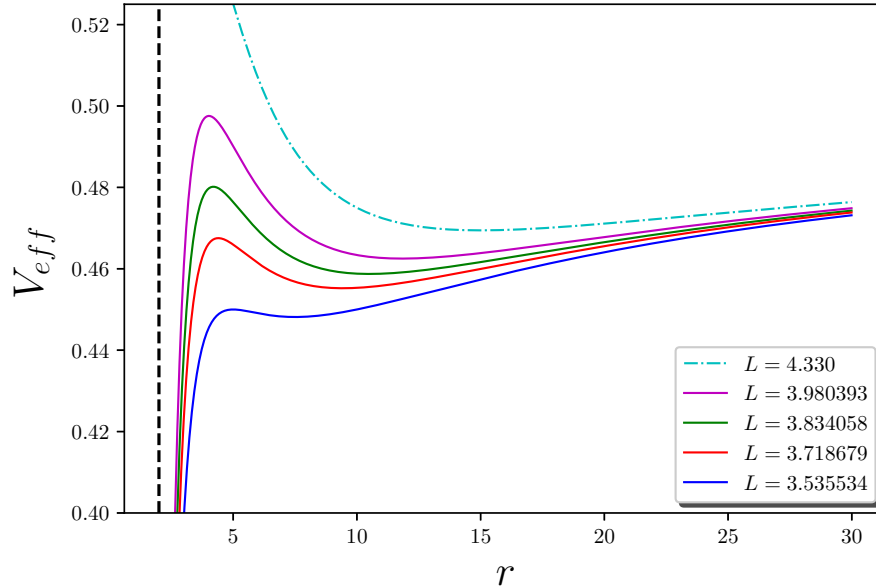


Figura 3: Potencial efectivo de Schwarzschild para distintos valores de momento angular de la partícula de prueba.

En los potenciales de la figura (3) el horizonte eventos se encuentra en $r = 2$ ya que son potenciales para la métrica de Schwarzschild. En esta figura se observa que cuanto mayor es el valor del momento angular de la partícula de prueba L , el potencial se acerca al horizonte de eventos, por esto el potencial correspondiente a $L = 3.980393$ se encuentra más cerca de $r = 2$, en comparación a la curva de menor momento angular con $L = 3.535534$, representada por la línea azul. Salta a la vista que cuanto mayor es el valor de L de la partícula de prueba, el potencial es cada vez más alto, acercándose así a la aproximación Newtoniana, cuanto más cerca se encuentra L a la aproximación Newtoniana se dice que ese momento angular se encuentra en el régimen de campo débil ya que la partícula de prueba es afectada en menor medida por el campo gravitacional del objeto compacto. La gráfica del potencial efectivo para cada valor de L permite deducir el tipo de órbitas que pueden presentarse, por ejemplo debido a la presencia de pozos de potencial es posible ubicar la posición a la cual se encuentre un órbita circular estable, también se puede saber si existe órbitas acotadas entre dos radios definidos por el pozo de potencial.

4.2. Caso Particular sin rotación pero con deformación ($Q \neq 0$)

Otro caso que se puede analizar es el de un objeto compacto deformado que no está rotando, si bien es difícil explicar la existencia física de un objeto con estas características, es un modelo que permite hacer un análisis sencillo del efecto de la deformación arbitraria Q del objeto en el espacio-tiempo de Hartle-Thorne. Al definir un objeto compacto que no está rotando, es decir cuyo parámetro de rotación es $J = 0$, se indica que el elemento cruzado de la métrica $g_{t\phi} = 0$, así los potenciales V_{\pm} definidos en las ecuaciones (27), toman la forma

$$V_{\pm} = \mp \frac{1}{\sqrt{2}g_{\phi\phi}} \sqrt{g_{tt}g_{\phi\phi}(g_{\phi\phi}\epsilon - L^2)}. \quad (33)$$

Estos potenciales se grafican a continuación en la figura (4), donde se trazan los distintos potenciales V_{\pm} de la ecuación (33) para una partícula de prueba con momento angular $L = 3.535534$ y diferentes valores de deformación Q . Los potenciales V_+ son los que se ubican por debajo del eje $V_{\pm} = 0$, mientras los potenciales V_- son los que se ubican por encima del mismo eje.

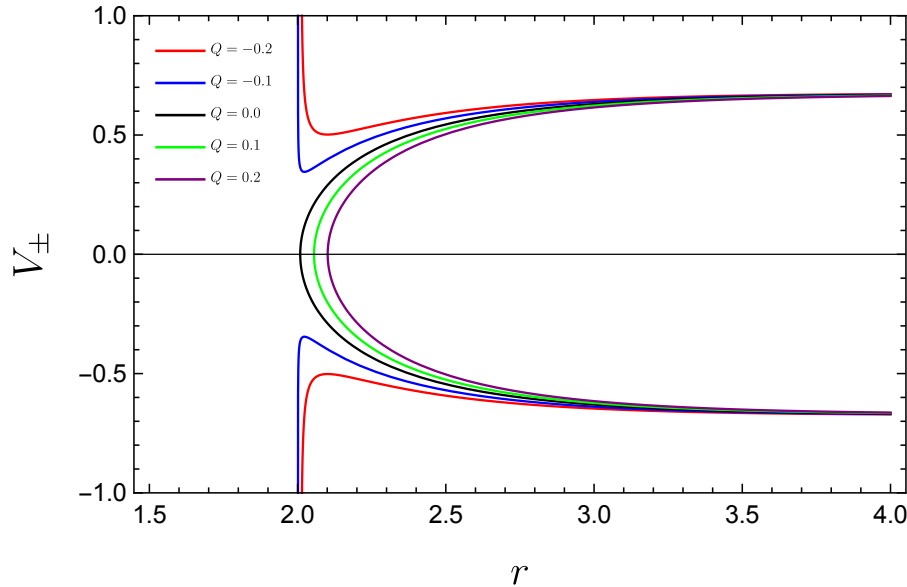


Figura 4: Potenciales V_+ y V_- , para un objeto compacto con ligera deformación y sin rotación.

En la figura (4) en color negro se muestra los potenciales V_{\pm} para el caso de Schwarzschild. Los valores de deformación oblatas correspondientes a $Q = 0.1$, (línea verde), y $Q = 0.2$, (línea morada), muestran un comportamiento muy similar al caso sin deformación en color negro pues se encuentran en un punto sobre $V_{\pm} = 0$,

con la diferencia de que este punto se desplaza hacia un radio mayor, debido a ésto, se observa que cuanto más oblató es el objeto, la zona prohibida disminuye ya que el área entre los potenciales V_{\pm} se reduce. La reducción de esta región indica que hay una mayor cantidad de energías permitidas de acuerdo a la ecuación (28). Adicionalmente, los potenciales correspondientes a los valores de deformación prolata que son $Q = -0.1$, representado por la línea de color azul, y $Q = 0.2$ para la línea de color rojo, no se encuentran en algún punto, sino que por el contrario divergen el uno del otro, pues el área entre V_+ y V_- aumenta por lo que para estos valores de Q es más grande la zona prohibida, por ende la cantidad de energías permitidas. De manera similar al caso de Schwarzschild, de ecuación (33) se ve con claridad que $V_- = -V_+$. Así al escribir la ecuación (26) para un objeto compacto no rotante, pero con un parámetro de deformación Q diferente de cero, se halla el potencial efectivo para partículas tipo tiempo ($\varepsilon = -1$) de la siguiente forma

$$\begin{aligned} \frac{\dot{r}^2}{2} &= \frac{E^2}{2} - V_+^2, \\ V_{eff} = V_+^2 &= \frac{g_{tt}}{2} \left(\frac{L^2}{g_{\phi\phi}} - 1 \right). \end{aligned} \quad (34)$$

En la figura (5) se presenta el potencial efectivo para una partícula tipo tiempo con cuatro valores diferentes de momento angular L , siendo éstos los mismos que se usaron en la figura (3). En cada pánel se varía el parámetro de deformación Q para dos valores de deformación oblata, dos de deformación prolata, y para $Q = 0$, de manera que se puede apreciar el efecto introducido por la deformación del objeto compacto.

En la figura (5) se presentan los potenciales efectivos correspondientes a un objeto no rotante con $Q \neq 0$, donde para deformación prolata se encuentran la curva de color azul para $Q = -0.2$ y la curva de color verde para $Q = -0.1$. En este tipo de deformación se observa que el máximo del potencial efectivo es más alto comparado con el potencial efectivo de Schwarzschild para el mismo valor de L en los cuatro p neles, ésto indica que la mínima energía que una partícula de prueba requiere para caer hacia el objeto es mayor en comparación al mínimo valor de energía que requiere la misma partícula con el mismo L para caer a un objeto sin deformación. Además se observa que éstos potenciales se encuentran desplazados hacia $r = 0$ debido a que el horizonte de eventos se ubica a un radio menor que el radio de Schwarzschild. Caso contrario ocurre para los potenciales efectivos correspondientes a deformación oblata, que en esta gráfica son: la curva de color rojo para $Q = 0.1$ y la curva de color morado $Q = 0.2$, pues el punto máximo del potencial efectivo se ubica más abajo que el punto máximo del potencial de Schwarzschild. De igual manera se observa que estos potenciales correspondientes a deformación oblata est n ubicados a un radio mayor, lo que indica que el horizonte de eventos se ubica más lejos que el caso de $Q = 0$.

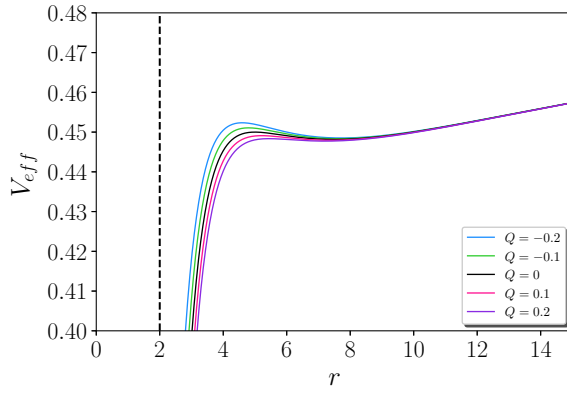
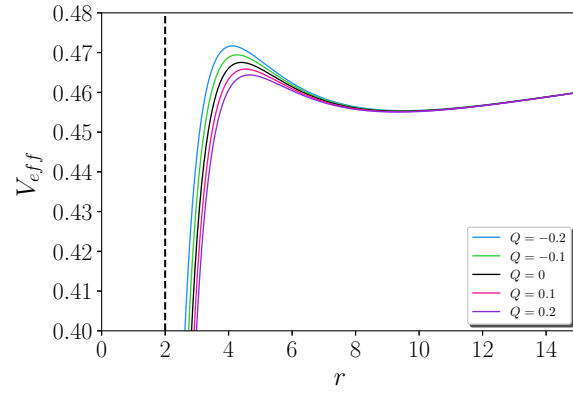
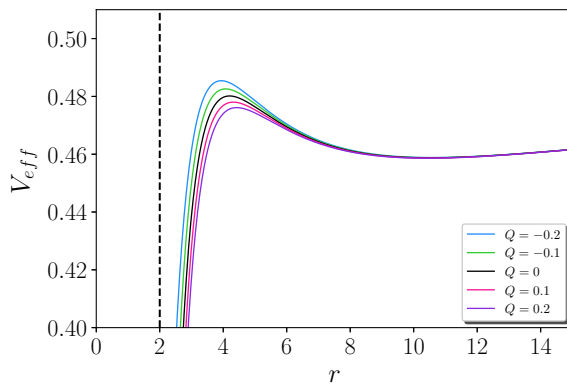
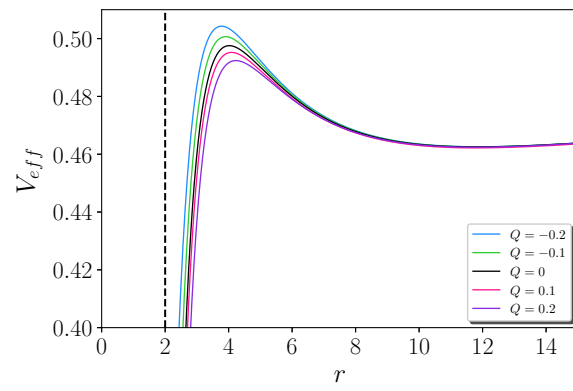
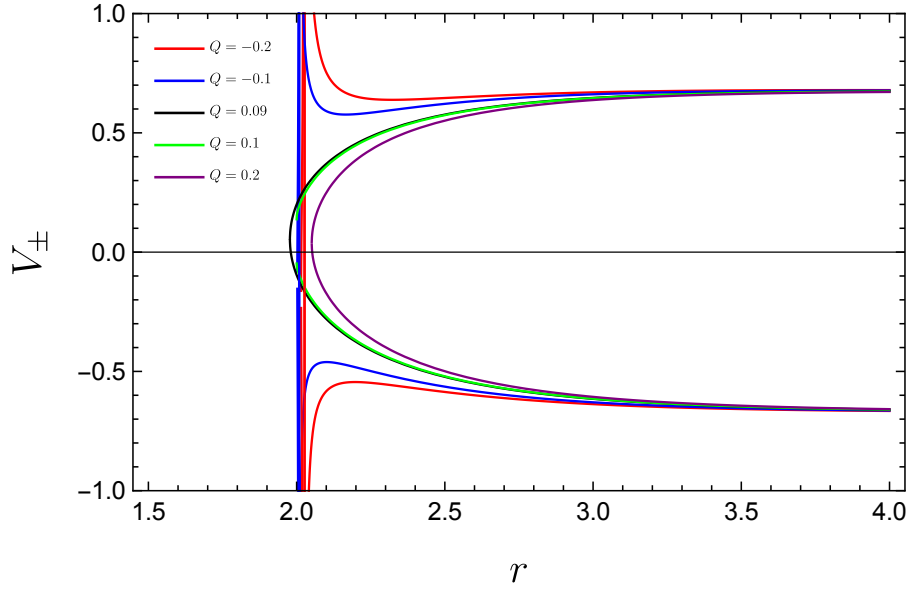
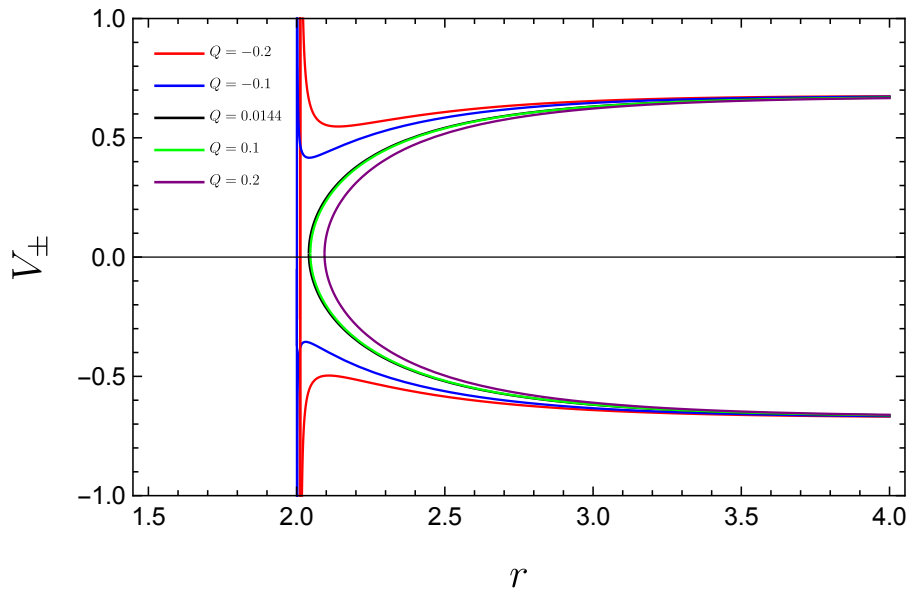
(a) $L = 3.535534$ (b) $L = 3.718679$ (c) $L = 3.834058$ (d) $L = 3.980393$

Figura 5: Efecto de la deformación ligera de un objeto compacto sin rotación sobre el potencial efectivo de una partícula. Cada uno de los paneles está dado para un valor diferente de momento angular.

4.3. Caso Particular con rotación ($J \neq 0$) y deformación ($Q \neq 0$)

Para el caso de un objeto con rotación ocurre que no hay un consenso acerca de una formulación sencilla del potencial efectivo, ya que no es posible separar L y E de la ecuación (25) debido al elemento cruzado $g_{t\phi}$, por esta razón en este trabajo se lleva a cabo un análisis sobre los potenciales V_{\pm} de la ecuación (27), donde se encuentran tanto el caso de Schwarzschild, estudiado con anterioridad, como el caso de Kerr, haciendo de éste, el caso más general de todos. Este análisis se realiza para los valores de rotación correspondientes a el pulsar $J1939 + 2134$, el cual posee un parámetro de rotación $J = 0.3$ y el agujero negro perteneciente al sistema binario $A0620 - 00$ con un valor de rotación de $J = 0.12$. En la figura (6) se presentan los potenciales V_{\pm} para los dos valores de rotación mencionados anteriormente, donde en cada una de las figuras se varía el parámetro Q para poder apreciar el efecto de la deformación cuadrupolar. En esta figura, las curvas de color negro representan las soluciones de Kerr a segundo orden, cuya deformación cuadrupolar se calcula como $Q = J^2$, que es la curva de referencia para apreciar.

En los dos paneles mostrados de la figura (6) se observa que los potenciales V_{\pm} no son simétricos respecto al eje $V_{\pm} = 0$, pues en general $V_+ \neq V_-$, a diferencia de los casos en que el objeto compacto no rota. Para los valores de deformación oblata, esto es, $Q = 0.1$ y $Q = 0.2$, se repite el comportamiento observado en la figura (4) donde la región prohibida se redujo con respecto a los potenciales correspondientes al Q de Kerr. Mientras que para los valores de deformación prolata ($Q = -0.1$ y $Q = -0.2$), a medida que se acercan al horizonte de eventos ambos potenciales (V_{\pm}) divergen, pero adicionalmente se observa una asíntota vertical. En la siguiente sección se presenta un análisis de otra propiedad importante en el estudio de órbitas que es la órbita marginalmente estable.

(a) $J = 0.3$.(b) $J = 0.12$.Figura 6: Potenciales V_+ y V_- para $J \neq 0$ con distintos valores de Q .

5. Órbita Circular Marginalmente Estable (ISCO)

La órbita marginalmente estable conocida como **ISCO** por sus siglas en inglés (“*Innermost Stable Circular Orbit*”), es la órbita circular estable más cercana al objeto

compacto en la cual una partícula puede permanecer sin caer hacia la fuente (Hobson et al., 2006). Estudiar esta órbita es de gran interés astrofísico ya que a partir de ella es posible deducir información de la fuente, por ejemplo, el parámetro de espín de un agujero negro se puede obtener asumiendo que el borde interior del disco de acreción está localizado en la ISCO de la métrica de Kerr (Yagi and Yunes, 2013). Para hallar la ISCO, se define el lado derecho de la ecuación (26) como

$$V = \left(\frac{E}{\sqrt{2}} - V_+ \right) \left(\frac{E}{\sqrt{2}} - V_- \right). \quad (35)$$

Ahora bien, el momento angular, la energía y la posición de la ISCO satisface el siguiente sistema de ecuaciones

$$\begin{aligned} V &= 0, \\ V' &= \frac{dV}{dr} = 0, \\ V'' &= \frac{d^2V}{dr^2} = 0. \end{aligned} \quad (36)$$

En este sistema la primera condición $V = 0$ implica que $\dot{r} = 0$, es decir, la órbita es circular. La siguiente ecuación indica que la ISCO se ubica en un punto extremo de V , en este caso ese extremo corresponde a un mínimo pues se busca un punto estable y los máximos por el contrario no son puntos estables a pesar de ser extremos. Por último, la tercera ecuación indica que la ISCO es un punto de inflexión. En este caso, al hacer V'' igual a cero, se está asegurando que el punto de la ISCO es el último punto estable antes de que la partícula de prueba que orbita a esa distancia del objeto caiga debido a la curvatura del espacio-tiempo. Para la métrica de Hartle-Thorne, el radio de la ISCO está dado por Berti et al. (2005) de la siguiente forma

$$r_{ISCO(\pm)} = 6 \left[1 \mp \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{3}} J + J^2 \left(\frac{251647}{2592} - 240 \ln \frac{3}{2} \right) + Q \left(-\frac{9325}{96} + 240 \ln \frac{3}{2} \right) \right], \quad (37)$$

donde el signo $+$ corresponde a partículas de movimiento corrotante, es decir que se mueven en el mismo sentido de rotación del objeto compacto, mientras que el signo $-$ corresponde a partículas contrarrotantes que se mueven en dirección opuesta (Berti et al., 2005). En particular, al resolver el sistema de ecuaciones mostrado en (36) para el caso de Schwarzschild se obtiene que $r_{ISCO} = 6$, $L_{ISCO} = 2\sqrt{3}$ y $E_{ISCO} = 2\sqrt{2}/3$. Para ilustrar mejor estas condiciones, en la figura (7) se muestran distintos potenciales efectivos en función del momento angular L .

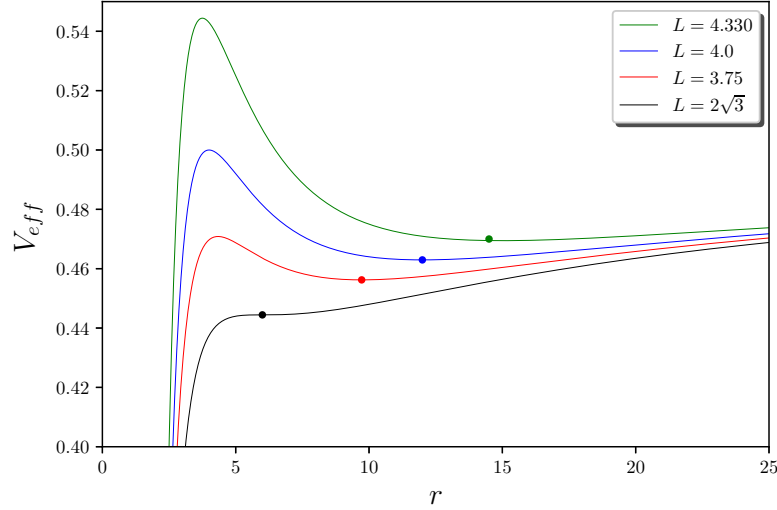


Figura 7: Potencial efectivo para partículas tipo tiempo en el caso de Schwarzschild, donde el punto negro corresponde al radio de la órbita marginalmente estable.

En la figura (7) todos los puntos marcados sobre cada órbita denotan el radio de la órbita circular estable ubicada en el valor mínimo del potencial, sin embargo sólo el punto negro satisface todas las condiciones (36), pues además de ser el radio de una órbita circular, es marginalmente estable es un punto de inflexión, es decir, que es la última órbita estable más interior donde puede orbitar una partícula sin caer al objeto. Ahora bien, para analizar el impacto del parámetro de deformación sobre la ISCO, se grafica r_{ISCO} en función de la rotación del objeto J para distintos valores de Q , de esta manera se obtiene la figura (8), donde la línea punteada corresponde al caso de Kerr a segundo orden en J , el punto de color negro ubicado en $J = 0$ y $r_{ISCO} = 6$, corresponde al caso de Schwarzschild.

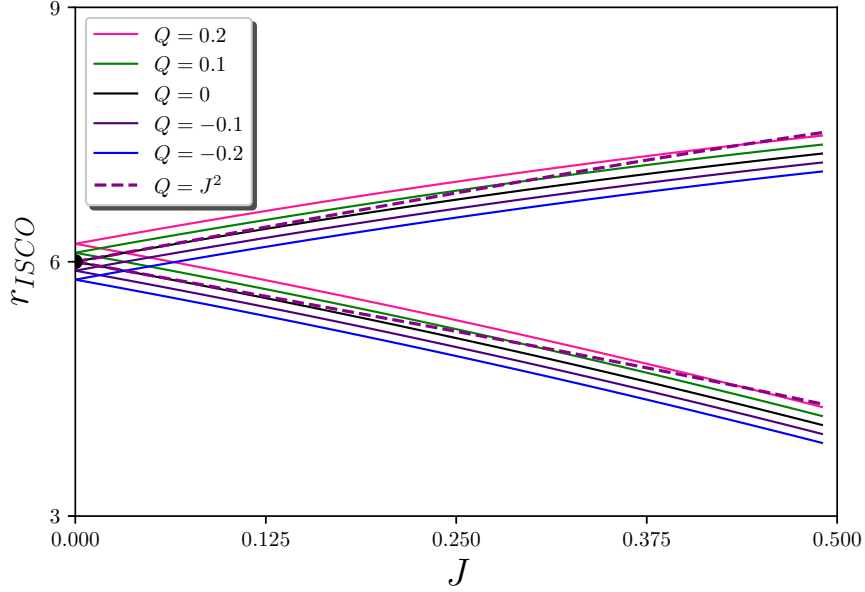


Figura 8: Dependencia del r_{ISCO} para partículas tipo tiempo, respecto a los parámetros de rotación para distintos valores de cuadrupolo de masa del objeto compacto.

En la figura (8) se aprecia que al aumentar la deformación tipo oblata, la posición de la ISCO se mueve a un radio mayor, en comparación a la línea de color negro correspondiente a $Q = 0$, esto ocurre debido a que el objeto aumenta de tamaño en la zona del ecuador por lo tanto al expandirse mueve la posición no sólo del horizonte de eventos y la ergosfera como se estudio en la sección (2.2), sino que también mueve la posición del radio de la ISCO a un radio mayor. El efecto inverso se observa para los valores de Q correspondientes a deformación prolata, representados por las líneas de color morado y azul, pues la ISCO se ubica en un radio menor en comparación a un objeto que no está deformado, debido a que para este tipo de deformación el objeto tiene menor tamaño en la zona del ecuador. La línea punteada muestra el radio de la ISCO para la solución de Kerr a segundo orden, esta línea permite analizar qué tanto dista la solución de Hartle-Thorne de la solución de Kerr. Salta a la vista que ésta línea punteada inicialmente se comporta como la línea de $Q = 0$ pero luego interseca los valores de $Q > 0$. A continuación, se hace un estudio acerca del efecto introducido por el parámetro Q en la dispersión de órbitas y en órbitas acotadas en el plano ecuatorial, para esto, se resolvieron de forma numérica las ecuaciones de Hamilton (22) usando una parte del código CAFE (Lora-Clavijo et al., 2015) que implementa el método de Runge-Kutta-Fehlberg, el cual se explica con mayor detalle en el apéndice (B).

6. Órbitas en el Plano Ecuatorial para Partículas Tipo Tiempo $\epsilon = -1$

Los resultados presentados en este estudio comienzan con la reproducción de algunos resultados numéricos obtenidos por [Boshkayev et al. \(2016a\)](#), en donde los autores llevaron a cabo un corto estudio analítico y numérico de geodésicas tipo tiempo alrededor de un objeto compacto descrito por la métrica de Hartle-Thorne en el plano ecuatorial, es decir para $\theta = \pi/2$ y $\dot{\theta} = 0$. Esta reproducción se hace con el fin de calibrar y probar los algoritmos numéricos implementados en este trabajo. En la figura (9), la cual se presenta a continuación, las condiciones iniciales y los parámetros de cada sistema son los siguientes: para la figura (9a) se fijan los valores de $r = 7$, $\phi = \pi/2$, $\dot{r} = 0$, $\dot{\phi} = 0.07145$, y se varía el parámetro Q . De la misma manera ocurre para la figura (9b) con $r = 20$, $\phi = 0$, $\dot{r} = -4$, $\dot{\phi} = 0.06$ y distintos valores de Q y para la figura (9c) se fijan $Q = 0$, $r = 20$, $\phi = 0$, $\dot{r} = -4$, $v_\phi = \dot{\phi}$ y se varía la velocidad v_ϕ .

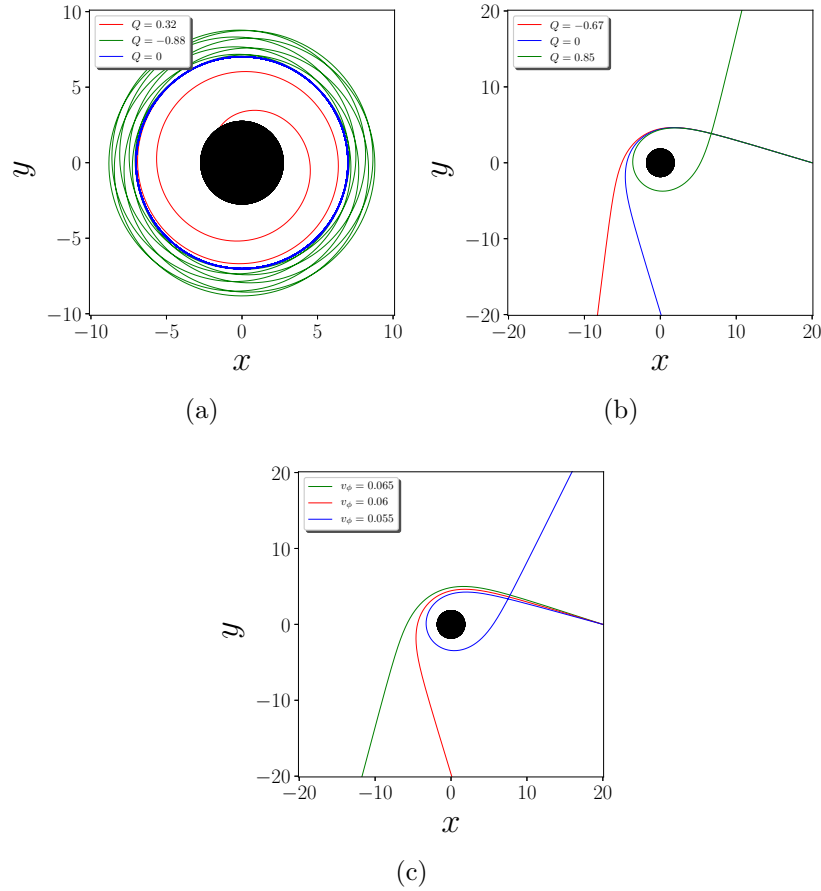


Figura 9: Geodésicas ecuatoriales de una partícula tipo tiempo en el campo gravitacional exterior de un objeto compacto deformado que no rota, el cual es descrito por la métrica de Hartle-Thorne.

En todos los casos de la figura (9) el valor del momento angular del objeto compacto es $J = 0$, y la masa del objeto compacto se iguala a la unidad, esto es $M = 1$. Específicamente en la figura (9a), se observan tres tipos de órbitas, la de color azul corresponde a una órbita circular estable para un objeto descrito por la métrica de Schwarzschild ya que además de no rotar tiene parámetro de deformación $Q = 0$. La siguiente, en color rojo, corresponde a una órbita de inmersión o “*plunge orbit*” como se conoce en inglés, la cual corresponde a una órbita cuyo parámetro de deformación oblata es $Q = 0.32$. La órbita de color verde está definida para un objeto compacto con deformación prolata $Q = -0.88$, la cual corresponde a una órbita acotada entre el radio $r = 7$ y un radio mayor. En la figura (9b) se presentan tres casos donde las órbitas son dispersadas por el objeto compacto. En esta figura la órbita de color azul corresponde al caso de Schwarzschild, la órbita de color rojo representa la dispersión debido a un objeto con deformación prolata $Q = -0.67$ y la órbita

de color verde corresponde a un parámetro de deformación $Q = 0.85$, es decir, deformación oblata. Por otra parte, en la figura (9c) la intención de estudio es un poco diferente a las figuras analizadas previamente, ya que en las anteriores se varía el parámetro de deformación Q , mientras que en ésta se muestra la variación de la componente angular de la velocidad v_ϕ para la métrica de Schwarzschild. A diferencia del trabajo realizado por Boshkayev et al. (2016a), a continuación se presenta un análisis más elaborado de órbitas en el plano ecuatorial, teniendo en cuenta los efectos del parámetro de deformación en la dispersión de partículas tipo tiempo y el impacto que éste tiene en las órbitas cerradas.

6.1. Dispersión de partículas tipo tiempo

A continuación se estudia la dispersión de partículas tipo tiempo en el plano ecuatorial, debido a un objeto compacto descrito por la métrica de Hartle-Thorne. Para analizar la dispersión debido al parámetro de deformación, primero es necesario conocer el comportamiento de las partículas de prueba para una configuración de un objeto con momento angular fijo y partículas de prueba con diferentes velocidades. Así, para un J dado se lanza una partícula tipo tiempo desde la posición $x = 20$ y $y = 8$ con velocidad $\vec{v} = (-v_x, 0)$, donde a la componente v_x se le asigna diferentes valores, los cuales varían desde 0.1 hasta 0.9 cada 0.01.

La primera configuración que se estudia, es un objeto con $J = 0$. En la figura (10) se observan las trayectorias de partículas tipo tiempo con distintas velocidades alrededor de un objeto compacto descrito por la métrica Schwarzschild, donde para las velocidades entre 0.1 a 0.6 la partícula cae al objeto compacto, demorando más en caer cuanto mayor es la velocidad. Mientras que las trayectorias de las partículas con velocidades de 0.7, 0.8 y 0.9 son dispersadas por el objeto.

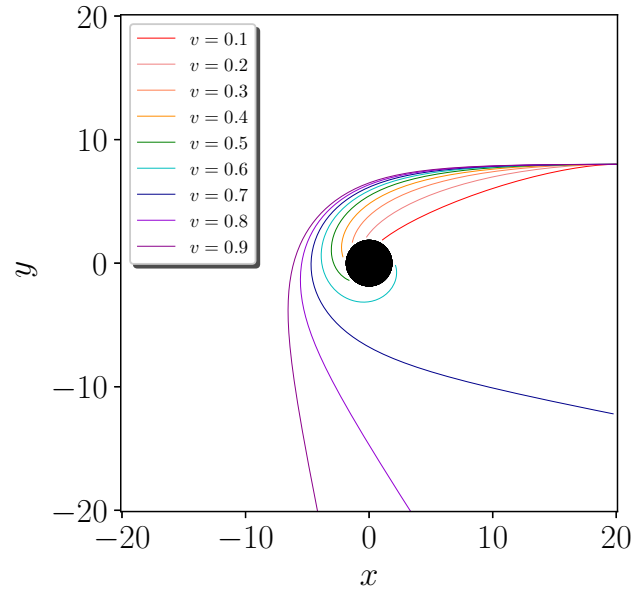


Figura 10: Dispersión de partículas tipo tiempo con diferentes velocidades para un objeto compacto descrito por la métrica de Schwarzschild.

Adicionalmente se hace el mismo análisis del comportamiento de las partículas de prueba con distintas velocidades para la métrica de Kerr a segundo orden, donde $Q = J^2$. La figura (11) representan las trayectorias de las partículas de prueba con distintas velocidades, para cuatro valores diferentes del parámetro de rotación del objeto compacto. En la figura (11a) se presentan las trayectorias de partículas tipo tiempo para un objeto compacto cuyo parámetro de rotación es $J = 0.3$ cuyo valor de deformación correspondiente es $Q = 0.09$. Por otra parte, la figura (11b) toma velocidades para un objeto contrarrotante con $J = -0.3$ donde el parámetro de deformación para Kerr a segundo orden es $Q = 0.09$ igual que el caso anterior. De la misma manera se analiza el caso corrotante de $J = 0.12$ con un parámetro de deformación $Q = 0.0144$, y el caso contrarrotante con valor de momento angular $J = -0.12$ con un correspondiente $Q = 0.0144$.

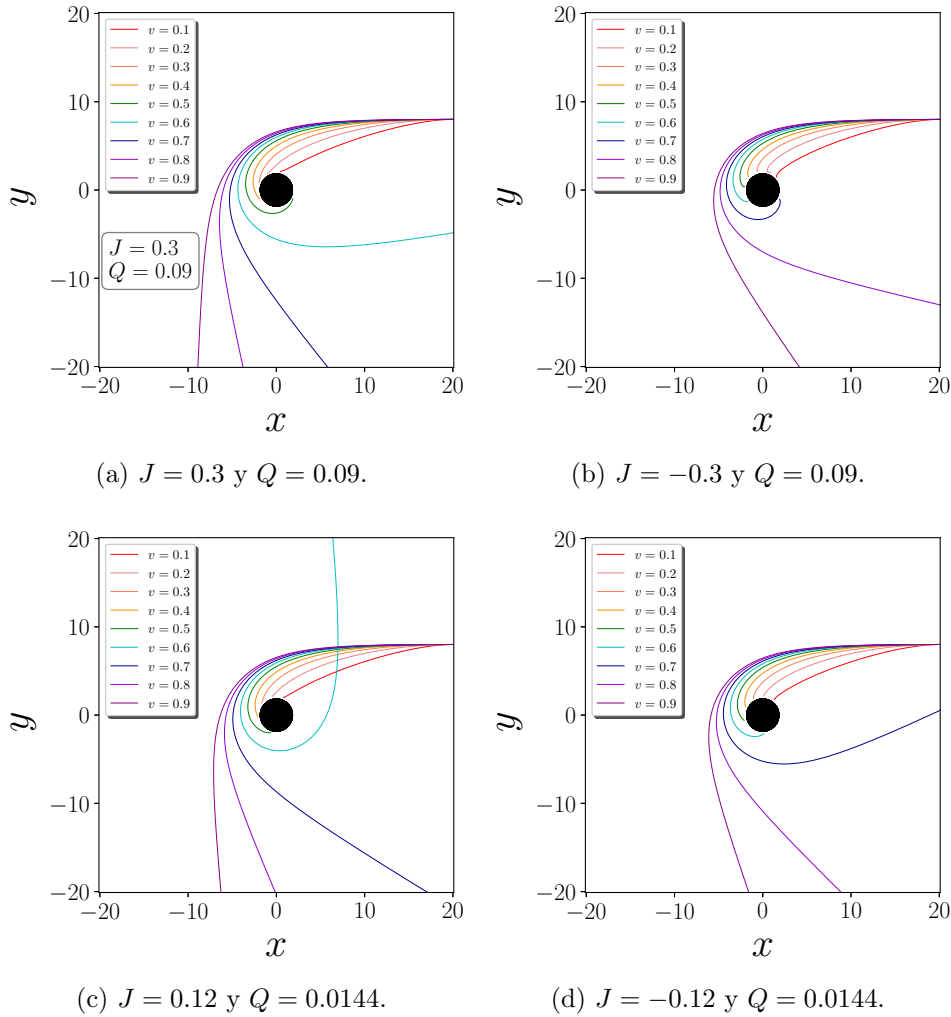


Figura 11: Dispersión de partículas tipo tiempo con diferentes velocidades para un objeto compacto descrito por la métrica de Kerr a segundo orden en J .

En la figura (11) se observa que al considerar un objeto compacto con rotación $J \neq 0$, las trayectorias de las partículas cambian aún estando en el régimen de rotación lenta. Como se aprecia en la figura (11a) las trayectorias de las partículas comienzan a dispersarse a partir de $v = 0.6$ mientras que para el caso contrarrotante mostrado en la figura (11b) las partículas con la misma velocidad caen al objeto en una órbita de inmersión y sólo se dispersan las partículas para las velocidades de $v = 0.8$ y $v = 0.9$. Un comportamiento similar ocurre para $J = 0.12$ en la figura (11c) donde se observa que las partículas son dispersadas a partir de la velocidad $v = 0.6$ en color turquesa, la cual alcanza a envolverse alrededor del objeto compacto antes de dispersarse, sin embargo para el caso contrarrotante en la figura (11d) se observa que para la partícula con la misma velocidad, cae al objeto compacto y se dispersan las

trayectorias de $v = 0.7$, $v = 0.8$ y $v = 0.9$. En ambos casos se observa que los valores de J contrarrotantes desvían más partículas hacia el objeto en comparación a los valores corrotantes, por lo que se observa que es menor la cantidad de partículas que logra ser dispersada, por ejemplo para $J = 0.3$ las partículas con velocidades $v = 0.6$ y $v = 0.7$ eran dispersadas mientras que para $J = -0.3$ las partículas con esas mismas velocidades caen. Ahora bien, con el fin de analizar el efecto que tiene el cuadrupolo de masa arbitrario sobre la dispersión de las partículas tipo tiempo, se seleccionan las trayectorias correspondientes a las velocidades $v = 0.6$, $v = 0.7$ y $v = 0.8$ para cada uno de los casos presentados en las figuras (10) y (11). Se escogen estos valores de velocidades ya que se observa que las partículas con éstas velocidades son las más sensibles a los efectos gravitacionales, en comparación a las partículas con velocidades desde $v = 0.1$ hasta $v = 0.5$ que caen al objeto compacto, y las trayectorias correspondientes a $v = 0.9$ cuya velocidad es muy alta por lo cual las partículas de prueba no se ven tan afectadas por el campo gravitacional del objeto compacto.

Una vez escogidas las velocidades a analizar se realizan las figuras (12) y (13), en las cuales cada pánel está configurado para un valor de fijo de J y v , donde se traza la trayectoria para de la partícula para distintos valores de deformación cuadrupolar del objeto compacto. Las líneas continuas de distintos colores corresponden a la trayectoria de la partícula dispersada para un valor de Q dado que varía entre $Q = -0.1$ hasta $Q = 0.1$ con $\Delta Q = 0.01$, y la línea punteada es la trayectoria para $Q = J^2$ que es respecto a la cual se analiza la dispersión en cada uno de los casos.

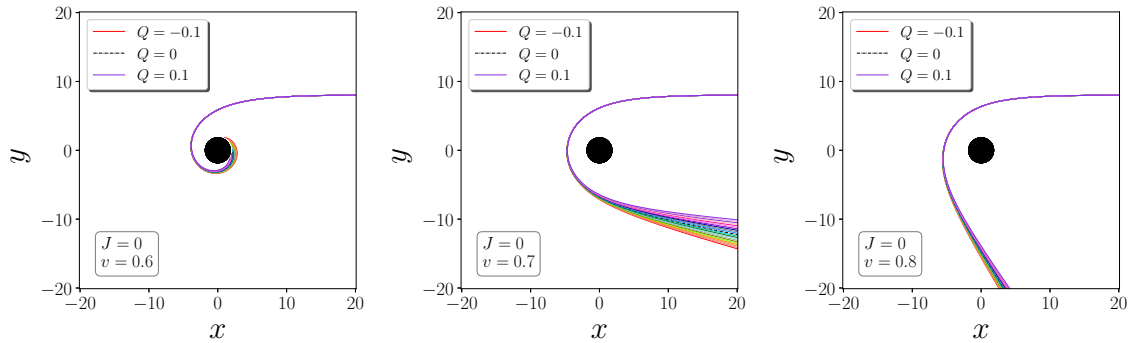


Figura 12: Dispersión de partículas de prueba debido a un objeto compacto con $J = 0$, para partículas con velocidades $v = 0.6$, $v = 0.7$ y $v = 0.8$ y Q variable.

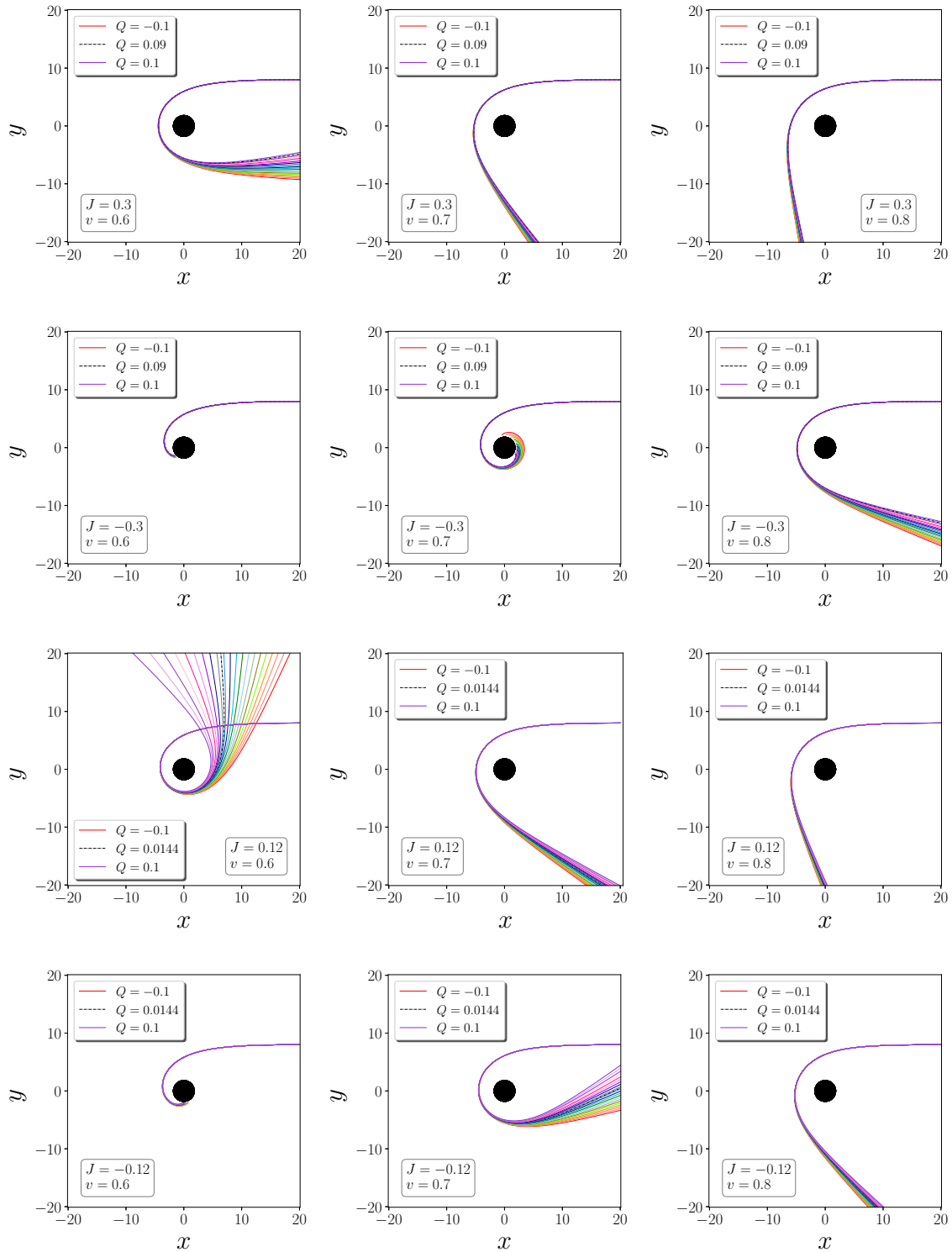


Figura 13: Dispersión de partículas tipo tiempo debido a un objeto compacto con deformación arbitraria. Cada fila tiene un valor fijo de J , y cada columna un valor fijo de v . Para todos los casos se varía el parámetro Q .

En las figuras (12) y (13) se observa que en todos los casos para los valores de $Q > 0$ la partícula de prueba es desviada hacia el objeto compacto, mientras que el comportamiento contrario ocurre para los valores de $Q < 0$ donde la partícula es dispersada lejos de éste. Si bien se observa un abanico de dispersión en todos los paneles, vale la pena resaltar los casos notorios. Así, en la columna correspondiente a la velocidad de la partícula $v = 0.8$ en el pánel de $J = -0.3$, es donde se ve con mayor claridad el abanico, ya que el arrastre ejercido por J hace que la separación entre las trayectorias sea mayor cerca al objeto en comparación a los demás casos de esa misma columna. Al mismo tiempo, en la columna correspondiente a $v = 0.6$ la partícula de prueba es donde se observa la mayor cantidad de abanicos, en ésta, el panel correspondiente a $J = 0.12$ es en el cual se aprecia la mayor separación entre cada una de las curvas dispersadas de toda la figura (13), de la misma manera ocurre para el pánel de $J = 0.3$ y para $J = 0$ donde si bien en todos los casos la partícula cae al objeto, se logra ver el abanico en el cual, para los valores de $Q < 0$ la partícula hace un mayor recorrido antes de caer que para los $Q > 0$. Del manera similar al caso anterior, se observa que en la columna correspondiente a $v = 0.7$, el caso más notorio ocurre para $J = -0.12$ en el cual las partículas se desvían hacia el punto de partida de la órbita, y el pánel de $J = -0.3$ donde ocurre un comportamiento similar al del pánel $v = 0.6$ y $J = 0$, y en el cual es posible inferir que para valores de $Q < -0.1$ la partícula puede dar una vuelta alrededor del objeto compacto antes de ser dispersada lejos de éste.

6.2. Órbitas Acotadas

Otro tipo de órbitas analizadas son las órbitas acotadas en el campo exterior de un objeto compacto no rotante descrito por la métrica de Hartle-Thorne. Estas órbitas son muy interesantes debido a que en el régimen de campo fuerte las órbitas adoptan un comportamiento “*zoom-whirl*” por lo que lucen como flores en lugar del efecto de precesión de órbitas elípticas como las observadas en las órbitas planetarias (Levin and Perez-Giz, 2008). Las órbitas estudiadas en ésta sección fueron clasificadas por Levin and Perez-Giz (2008) en la métrica de Kerr, mediante una taxonomía de órbitas periódicas basada en tres características, para las cuales se analizará el impacto que tiene Q sobre éstas.

Con el fin de entender esta taxonomía, en la figura (14) se presenta un ejemplo de una órbita cerrada, mediante la cual se explica en este trabajo. La primera característica es el “*zoom*” representado como z , la cual se refiere a la cantidad de pétalos que componen la órbita cerrada, donde el punto más alejado de cada pétalo corresponde al apoastro. También es la característica más fácil de reconocer pues se puede apreciar a simple vista. Al observar la figura (14a), el número de pétalos que componen la órbita es 2, por lo tanto es una órbita con $z = 2$.

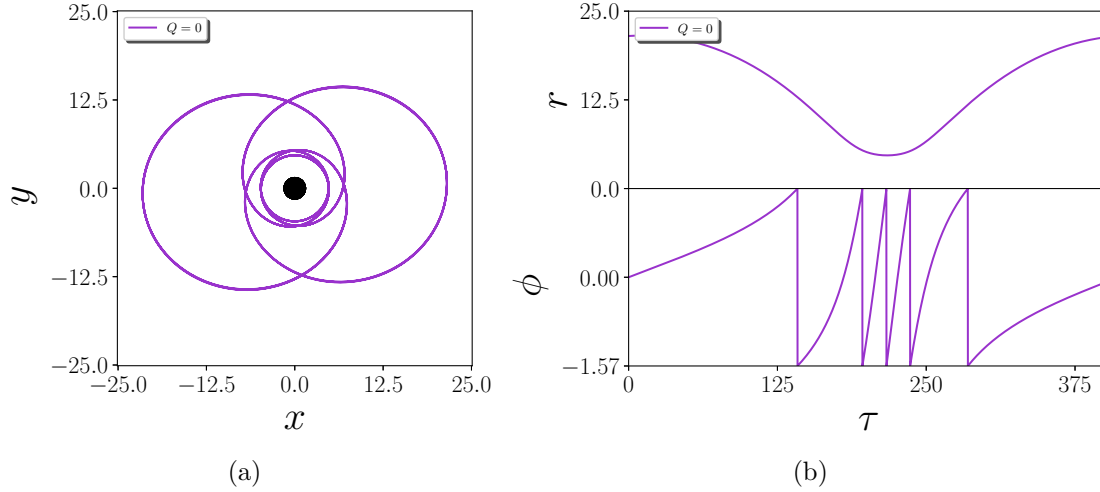


Figura 14: A la izquierda Órbita de dos pétalos sin deformación con $J = 0$, $L = 3.718679$, $E = 0.966555$ y $r = 21.5$, cuya taxonomía en función del “zoom”, “whirl” y “vértice” es $(z, w, \tilde{v}) = (2, 1, 1)$. A la derecha está la relación entre la posición radial y la posición angular de la partícula de prueba.

La segunda característica es el “whirl” representado por la letra w . El número de “whirls” indica la cantidad de vueltas completas alrededor del objeto compacto entre dos pétalos consecutivos, y se presentan cuando la partícula se aproxima al punto más cercano del objeto compacto, es decir al periastro. Esta característica es un poco más difícil de observar, a diferencia del “zoom”, por lo tanto para analizar el “whirl” se usa la figura (14b), donde en la parte superior de esta figura se muestra la variación del radio de la órbita a medida que transcurre el tiempo propio de la partícula de prueba τ , mientras que en la parte inferior se muestra la posición azimutal de la partícula en el mismo tiempo. En la figura (14b) se observa que ϕ varía entre $-\pi/2$ y $\pi/2$, donde cada caída en vertical indica que la partícula de prueba atravesó el eje y debido a que se invierte el signo de ϕ . Adicionalmente, la parte de la figura que es cóncava hacia arriba indica que la partícula está cayendo al objeto, mientras que la concavidad hacia abajo que la partícula se aleja del objeto. El “whirl” comienza justo en la mitad de la curva de ascenso que se presenta después de la primera caída en vertical, en $\phi = 0$, y termina a mitad de la curva de ascenso justo antes de la última caída en vertical. Por ejemplo en la figura (14b) el número de “whirls” se calcula de la siguiente manera, desde donde inicia el “whirl”, la órbita recorre $\pi/2$ hasta una caída en vertical, luego recorre π hasta la siguiente caída en vertical, luego vuelve a recorrer π y luego de pasar otra caída recorre $\pi/2$ hasta $\phi = 0$, lo cual suma un recorrido de $\pi/2 + \pi + \pi + \pi/2 = 3\pi$, es decir que la partícula de prueba da una vuelta y media alrededor del objeto compacto entre dos pétalos consecutivos, lo cual resulta en un número de whirl $w = 1$, puesto que sólo son válidas las vueltas completas.

La tercera característica es el “*vértice*” representado con la letra \tilde{v} , e indica el orden en que se forma la órbita. La manera en que funciona es asignando un número al apoastro de cada pétalo. De esta manera se tiene que el “*vértice*” inicial es $\tilde{v} = 0$ y los demás se enumeran de modo ascendente en contra de las manecillas del reloj. El primer “*vértice*” por donde pasa la órbita justo después del punto de partida es el valor que se asigna a \tilde{v} . En la figura (14a), al apoastro del pétalo que se ubica a la derecha del lector se le asigna $\tilde{v} = 0$ pues es el punto donde inicia la órbita y al “*vértice*” correspondiente al pétalo de la izquierda se le asigna $\tilde{v} = 1$, así la órbita se caracteriza con el número de “*vértice*” $\tilde{v} = 1$, ya que es el siguiente vértice hacia donde se dirige la partícula de prueba. Con esta taxonomía es posible describir una órbita en función de los tres parámetros explicados anteriormente, por medio de la triada (z, w, \tilde{v}) . Cada una de las órbitas que se estudia en esta sección está dada en función de un valor fijo de momentum angular L y energía E de la partícula de prueba. Una vez caracterizada cada órbita, se analizan los cambios que ocurren al variar el parámetro de deformación cuadrupolar del objeto compacto Q .

6.3. Órbitas de Un pétalo

Las órbitas de un pétalo como la que se aprecia en la figura (15a) toman su nombre debido a que el número de “*zoom*” es $z = 1$. Partiendo de la figura (15b) se calcula el número de “*whirls*”. En este caso ϕ recorre $\pi/2 + \pi + \pi + \pi + \pi/2 = 4\pi$, es decir que la partícula de prueba da dos vueltas completas alrededor del objeto compacto, por lo tanto $w = 2$. En cuanto al valor correspondiente al “*vértice*”, debido a que sólo tiene un pétalo, el número de “*vértice*” que caracteriza a esta órbita es $\tilde{v} = 0$. Esta órbita se traza con un momento angular $L = 3.535534$ y energía $E = 0.948491$ de la partícula de prueba, cuyo potencial efectivo está representado por la curva de color azul en la figura (3).

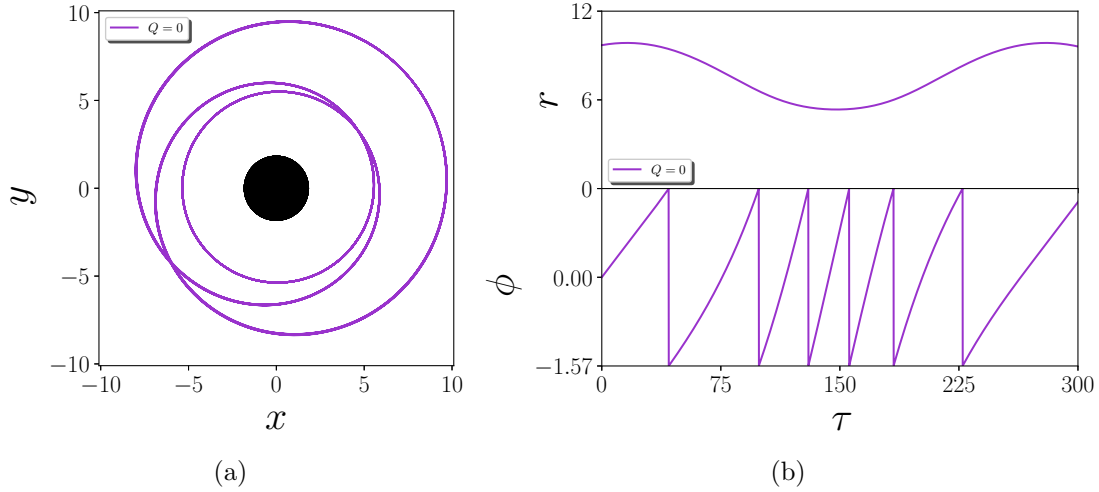


Figura 15: Órbita de un pétalo con $L = 3.535534$, $E = 0.948491$ y $r = 9.7$, cuya taxonomía es $(z, w, \tilde{v}) = (1, 2, 0)$.

A continuación se estudia el impacto del parámetro de deformación arbitrario Q sobre la órbita de un pétalo mostrada en la figura (15). La columna del lado izquierdo en la figura (16) muestra las órbitas de una partícula de prueba alrededor de un objeto compacto, el caso sin deformación se representa por la línea de color negro, y los casos de deformación se representan con las órbitas a color. En la columna del lado derecho se muestra la relación entre la posición radial y la posición azimutal de la partícula de prueba. En cada fila de la figura (16) se presenta la órbita para un valor distinto de deformación cuadrupolar, así la primera y segunda fila, contando de arriba hacia abajo, corresponden a parámetros de deformación prolata con $Q = -0.1$ y $Q = -0.05$ respectivamente, mientras que en las figuras mostradas en la tercera fila para $Q = 0.1$ y la cuarta fila para $Q = 0.05$, correspondientes a deformación oblata. En todos los casos de la figura (16), las órbitas son trazadas para los valores de energía y momento de la partícula $E = 0.948491$ y $L = 3.535534$ respectivamente.

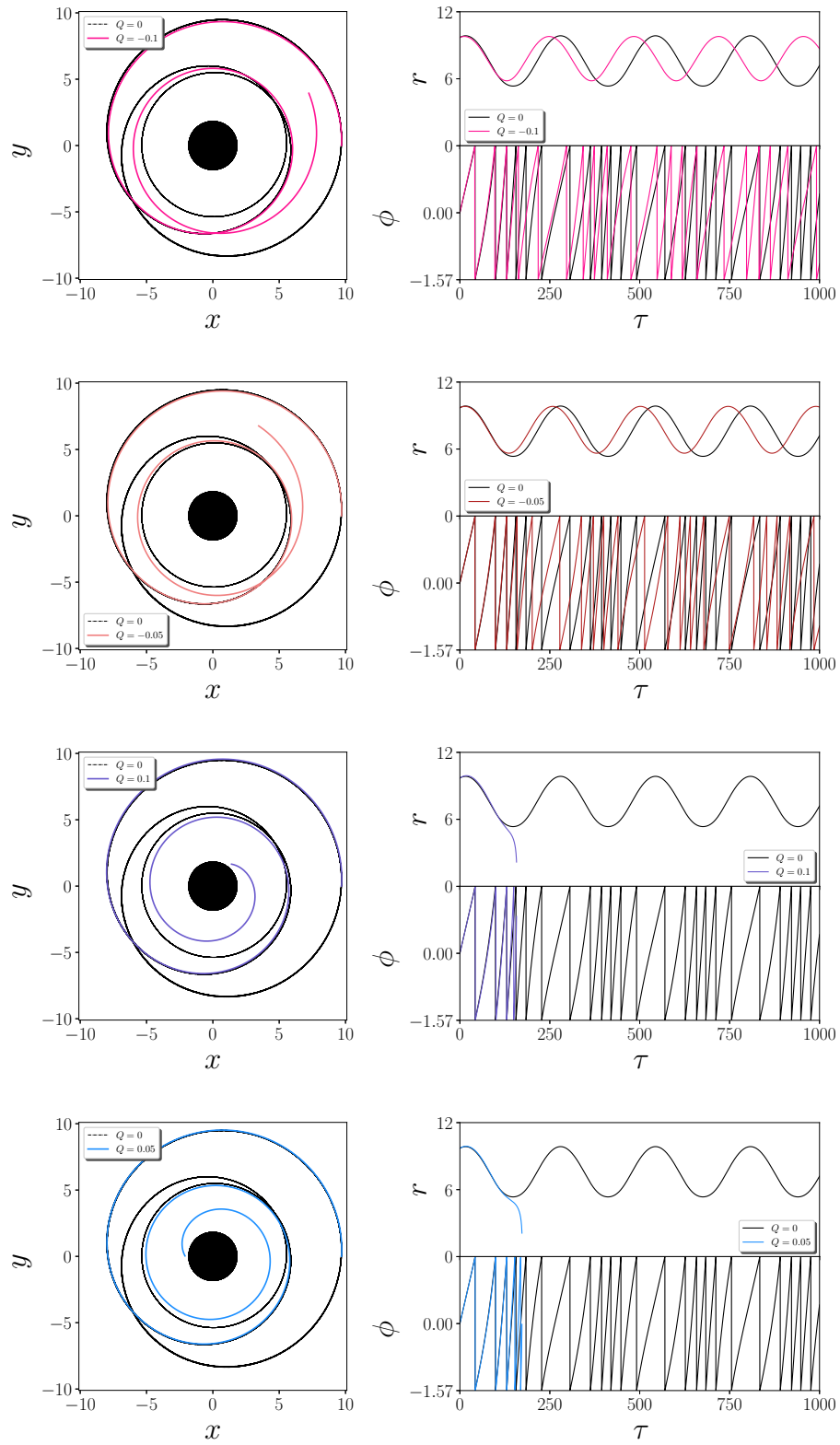


Figura 16: Efecto del parámetro de deformación arbitrario, a color, sobre la órbita de un pétalo con taxonomía $(z, w, \tilde{v}) = (1, 2, 0)$, en negro.

En la figura (16) para todos los casos se observa que inicialmente la órbita a color descrita por la solución de Hartle-Thorne sigue la misma trayectoria que la órbita de un pétalo para un objeto compacto sin deformación. Las órbitas comienzan a diferenciarse una de otra cuando la partícula de prueba pasa por el periastro de la órbita de un pétalo. Para los valores de deformación prolata $Q < 0$, la partícula de prueba es dispersada por el objeto compacto, es decir el radio menor que acotaba la órbita cerrada aumenta. Ahora, para los valores de cuadrupolo de masa correspondientes a deformación oblata $Q > 0$, el objeto compacto atrae la partícula de prueba, como consecuencia, las órbitas hacen inmersión, es decir que cambian por completo de ser órbitas de un pétalo a ser órbitas que caen al objeto compacto, donde para $Q = 0.1$ la órbita cae primero al objeto en comparación a la órbita correspondiente al parámetro de deformación $Q = 0.05$, esto se debe a que cuanto más oblato es el objeto, mayor atracción ejerce sobre la partícula de prueba.

6.4. Órbitas de Dos pétalos

Órbitas de dos pétalos, primer tipo. En esta subsección se presentan dos tipos de órbitas de dos pétalos, donde cada una está dada para valores diferentes de momento angular y energía de la partícula de prueba. La primera de éstas se observa en la figura (17a) cuyo número de “zoom” es $z = 2$. Al calcular el número de “whirls” se analiza el recorrido de ϕ en la figura (17b) donde se observa que la órbita da media vuelta alrededor del objeto compacto pues el recorrido suma $\pi/2 + \pi/2 = \pi$, por lo tanto el número de “whirl” es $w = 0$. En cuanto al valor correspondiente al “vértice”, en todos los casos de órbitas de dos pétalos $\tilde{v} = 1$ ya que sólo hay un vértice además del vértice inicial al cual se dirigirá la partícula de prueba. El valor del momento angular L para esta órbita es $L = 3.980393$ el cual está representado por la curva de color morado en la figura (3), que es la más cercana a la aproximación newtoniana, línea punteada, y cuya energía es $E = 0.973101$.

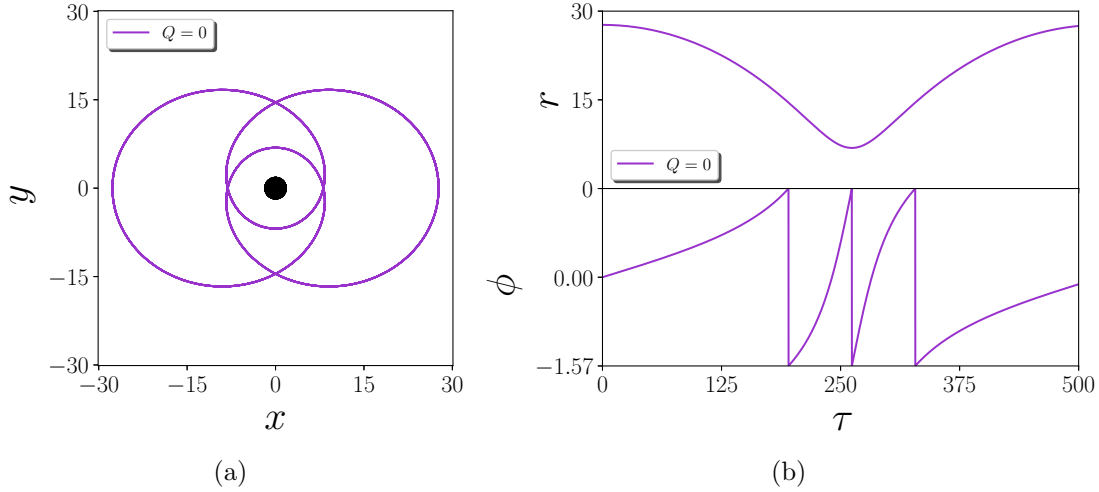


Figura 17: Órbita de dos pétalos con $L = 3.980393$, $E = 0.973101$ y $r = 27.5$, cuya es taxonomía $(z, w, \tilde{v}) = (2, 0, 1)$.

En la figura (18) la columna del lado izquierdo muestra las órbitas en el plano ecuatorial, donde la curva a color corresponde a la órbita para un objeto compacto con deformación arbitraria descrito por la métrica de Hartle-Thorne, y la curva de color negro corresponde a la órbita de dos pétalos con taxonomía $(z, w, \tilde{v}) = (2, 0, 1)$, para un objeto sin deformación, (ver figura (17)). Por otra parte en la columna del lado derecho se muestra la evolución de la posición radial y angular de la partícula. Al analizar el efecto introducido por el parámetro de deformación arbitrario en la figura (18), ocurre algo muy interesante, y es que la forma de los dos pétalos iniciales que se observa en la figura (17) se conserva en todos los casos. Como puede observarse, para todos los valores de deformación cuadrupolar del objeto las órbitas precesan, con la diferencia de que para valores de $Q < 0$ toda la órbita precesa en la dirección de las manecillas del reloj, mientras que para los valores de $Q > 0$ precesan en dirección opuesta a las manecillas del reloj. También puede verse que la cantidad que precesa cada órbita está relacionada con la deformación, pues cuanto mayor es la deformación, ya sea oblata o prolata, mayor es la distancia entre un recorrido de toda la estructura de dos pétalos y el siguiente recorrido que hace la partícula de prueba.

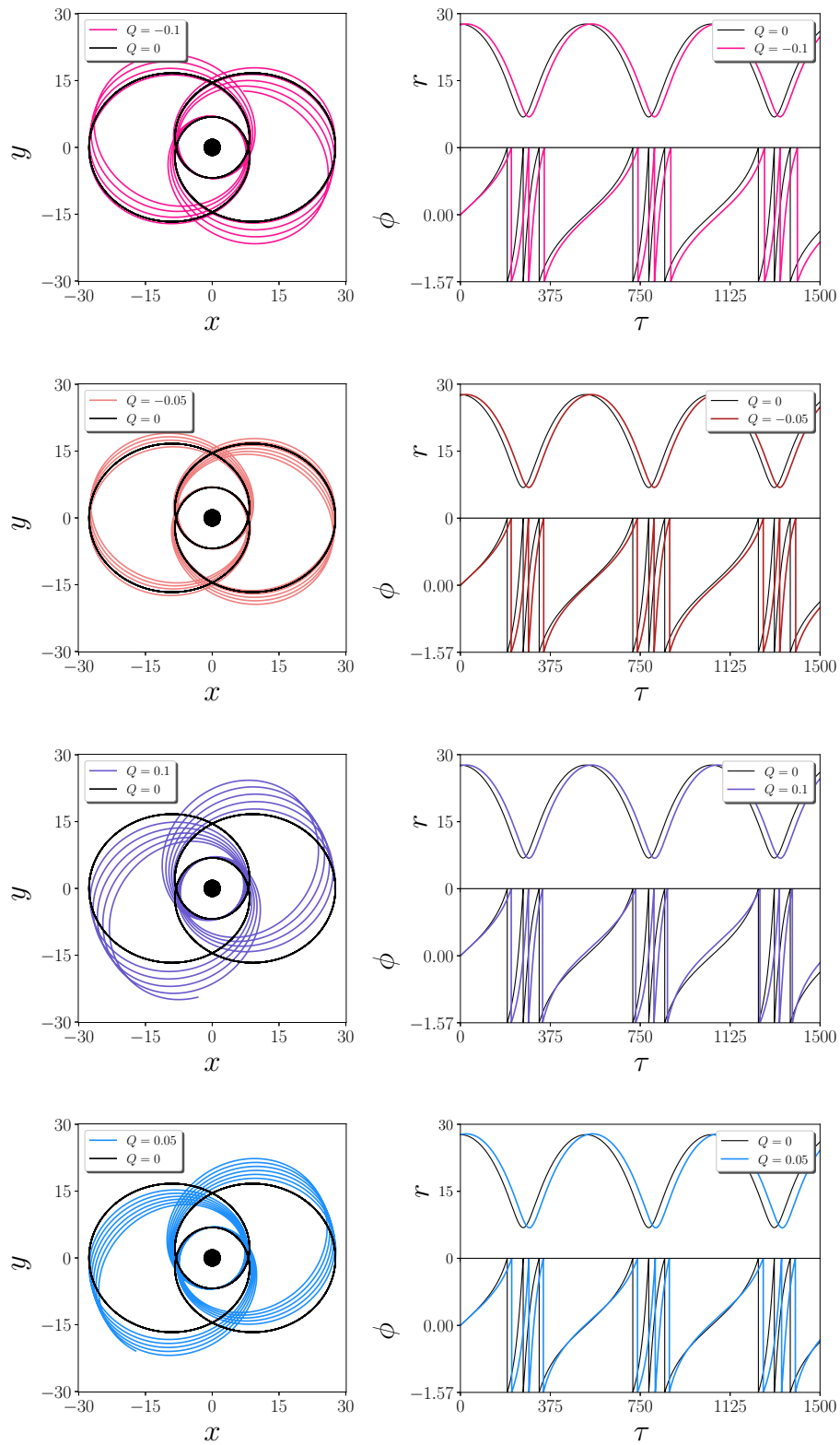


Figura 18: Efecto del parámetro de deformación arbitrario, a color, sobre el primer tipo de órbita de dos pétalos con taxonomía $(z, w, \tilde{v}) = (2, 0, 1)$, en negro.

Adicionalmente al analizar el potencial efectivo para este caso presentado en la figura (19), es notorio que tanto para los valores de deformación oblata como para los valores de deformación prolata, el potencial efectivo es mayor que la energía que tiene la partícula, por lo cual en ninguno de los casos ésta cae al objeto.

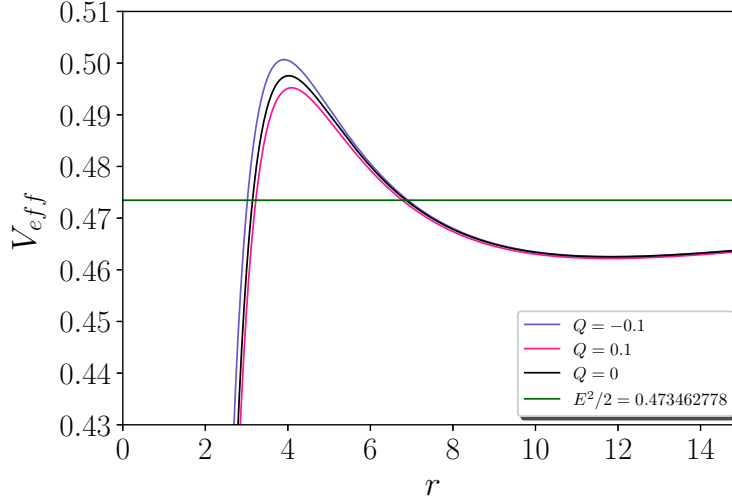


Figura 19: Potencial efectivo de una partícula de prueba con $L = 3.980393$ y $E = 0.973101$ para una órbita de dos pétalos con $(z, w, \tilde{v}) = (2, 0, 1)$.

Órbitas de dos pétalos, segundo tipo. Ahora, el segundo tipo de órbita de dos pétalos que se estudia en este trabajo, es la órbita que se usó como ejemplo al inicio de esta sección, la cual se presenta nuevamente en la figura (20a). A partir de la figura (20b) se observa que el recorrido de ϕ es $\pi/2 + \pi + \pi + \pi/2 = 3\pi$, es decir que la partícula de prueba da una vuelta y media alrededor del objeto compacto antes de ir al siguiente apoastro, por lo tanto $w = 1$. Es justamente el número de “whirls” lo que diferencia estas dos órbitas, ya que en el caso anterior $w = 0$.

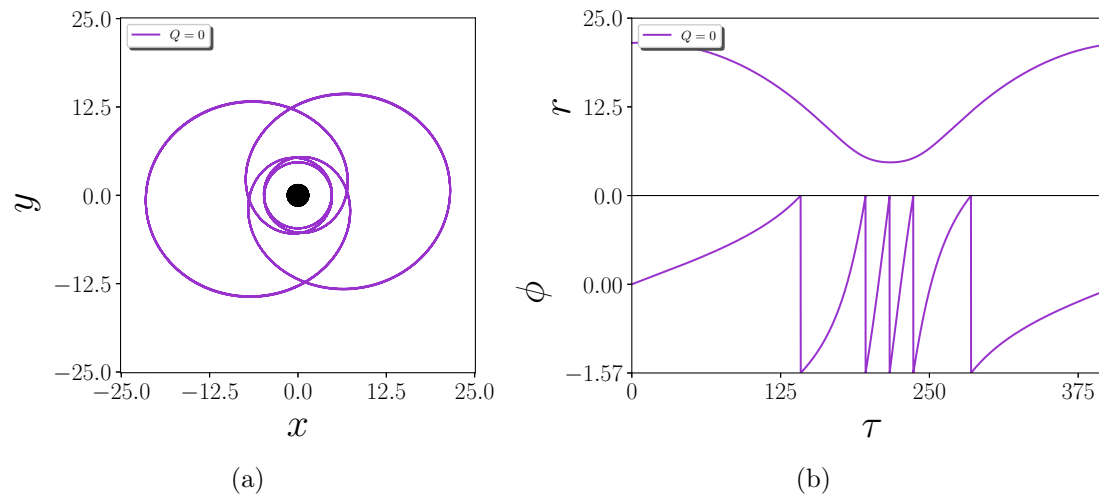


Figura 20: Órbita de dos pétalos para un objeto compacto sin deformación, con $L = 3.718679$, $E = 0.966555$ y $r = 21.5$, cuya taxonomía es $(z, w, \tilde{v}) = (2, 1, 1)$.

A continuación se presenta la figura (21), donde es posible observar el efecto del parámetro de deformación Q arbitrario sobre la órbita de dos pétalos mostrada en la figura (20).

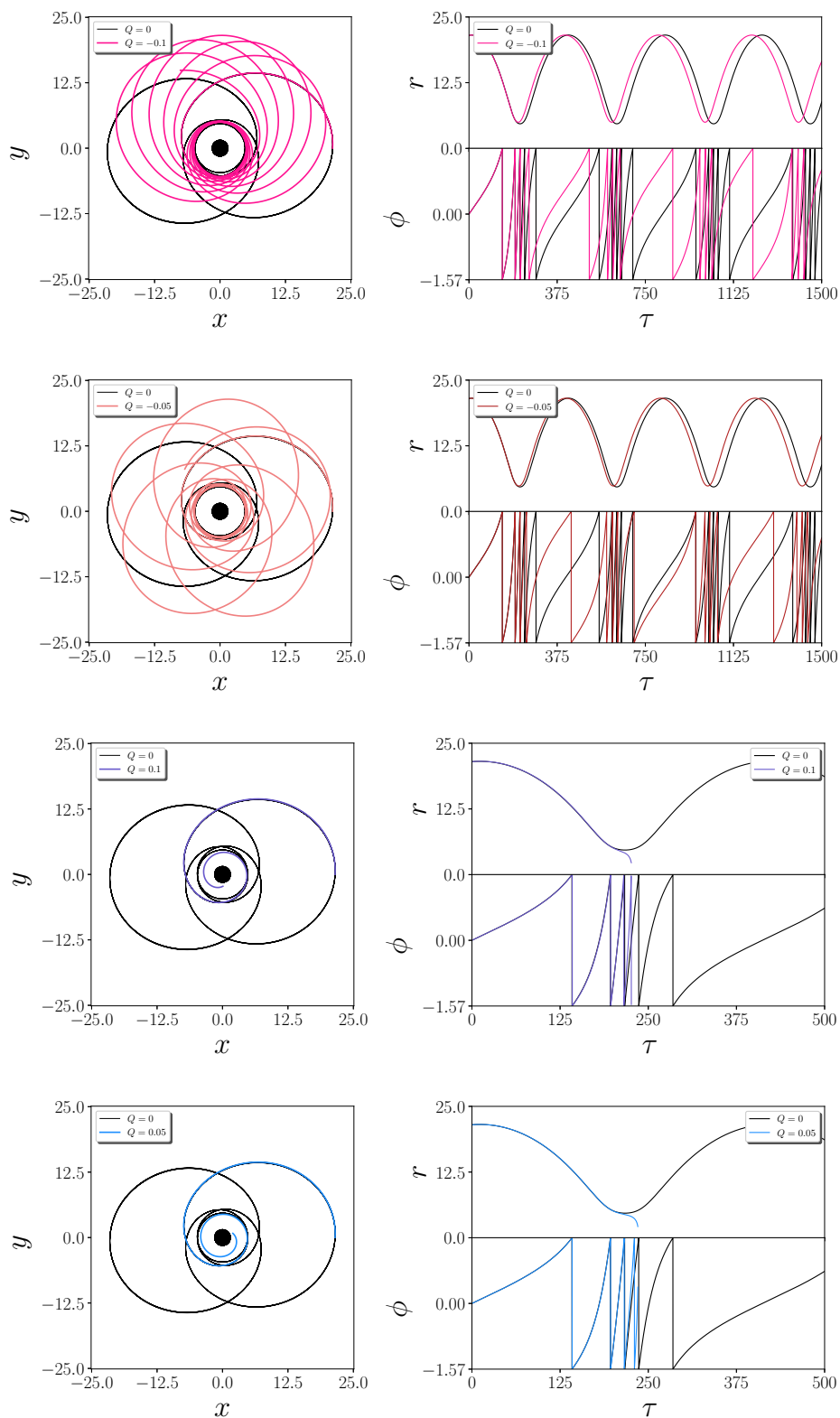


Figura 21: Efecto del parámetro de deformación arbitrario, a color, sobre el segundo tipo de órbita de dos pétalos con taxonomía $(z, w, \tilde{v}) = (2, 1, 1)$, en negro.

A diferencia de las órbitas de la figura (18) donde se conserva la estructura de dos pétalos para los distintos valores de Q , en la figura (21) la estructura de la órbita no se mantiene, por el contrario lo que se observa es que para los valores de $Q < 0$ la órbita hace muchos pétalos, y para los valores de $Q > 0$ la partícula de prueba cae en espiral al objeto compacto. Para entender una parte de este comportamiento, en la figura (22) se presenta el potencial efectivo para los valores de deformación $Q = -0.1$, $Q = 0$ y $Q = 0.1$.

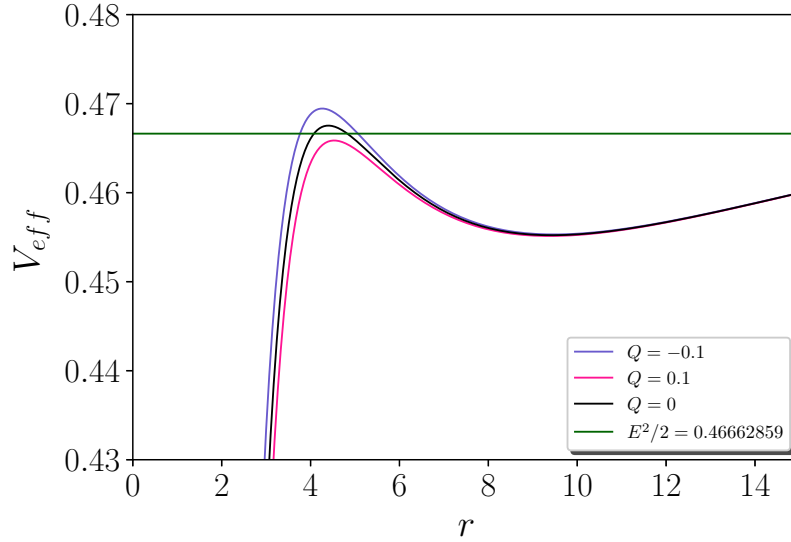


Figura 22: Potencial efectivo de una partícula de prueba con $L = 3.718679$ y $E = 0.966555$ para una órbita de dos pétalos cuya taxonomía es $(z, w, \tilde{v}) = (2, 0, 1)$.

En la figura anterior se observa que para los valores de $Q < 0$ el máximo del potencial efectivo sube haciendo que sea más difícil que la partícula de prueba, con los valores de L y E dados, caiga hacia el objeto. Por el contrario, para los valores de $Q > 0$ el máximo del potencial efectivo baja, por lo que la partícula no encuentra ninguna barrera de potencial que le impida caer hacia el objeto compacto.

6.5. Órbitas de Tres pétalos

En esta órbita el apoastro se ubica en tres posiciones angulares distintas como se aprecia en la figura (23a), por lo tanto el número de “zoom” correspondiente a esta órbita es $z = 3$. Además al calcular el número de “whirls” para esta órbita, en la figura (23b) se observa que ϕ recorre $\pi/2 + \pi + \pi + \pi/2 = 3\pi$, lo cual indica que la partícula de prueba da una vuelta y media alrededor del objeto compacto, por lo tanto $w = 1$. Ahora, el valor correspondiente al “vértice” es $\tilde{v} = 1$ pues justo después del punto de partida, la partícula se dirige al “vértice” 1 que corresponde al pétalo de arriba, en lugar de dirigirse al de abajo cuyo $\tilde{v} = 2$.

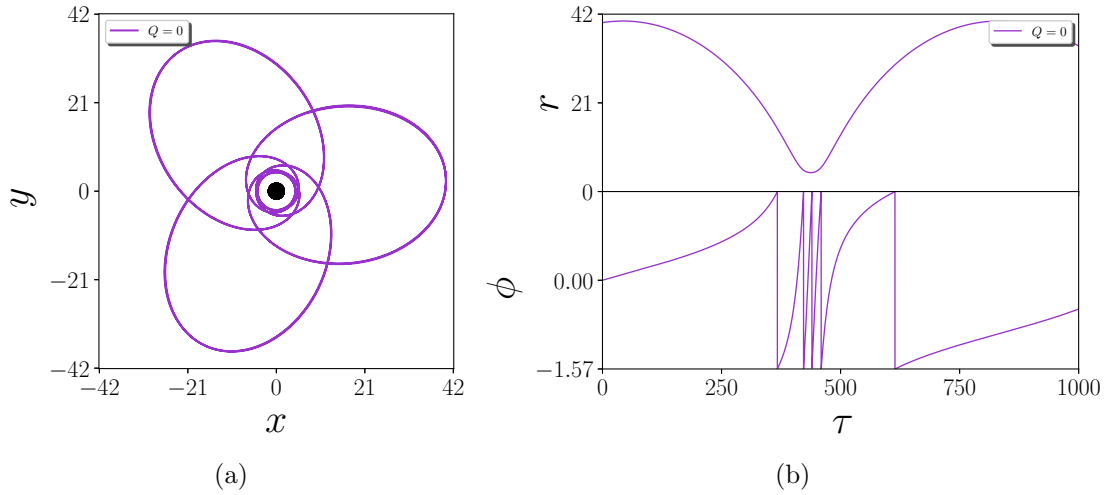


Figura 23: Órbita de tres pétalos para un objeto compacto sin deformación, con $L = 3.834058$, $E = 0.979304$ y $r = 40$, cuya taxonomía es $(z, w, \tilde{v}) = (3, 1, 1)$.

Al analizar la columna del lado derecho en la figura (24), se puede ver que el número de “whirl” se mantiene constante para los valores de $Q > 0$, con la diferencia de que se adelantan, como se observa en las figuras correspondientes a ϕ . Este adelanto se debe a que el radio del periastro aumenta como consecuencia al efecto de dispersión introducido por el parámetro de deformación, como consecuencia, la distancia que recorre la partícula en ésta nueva órbita es menor.

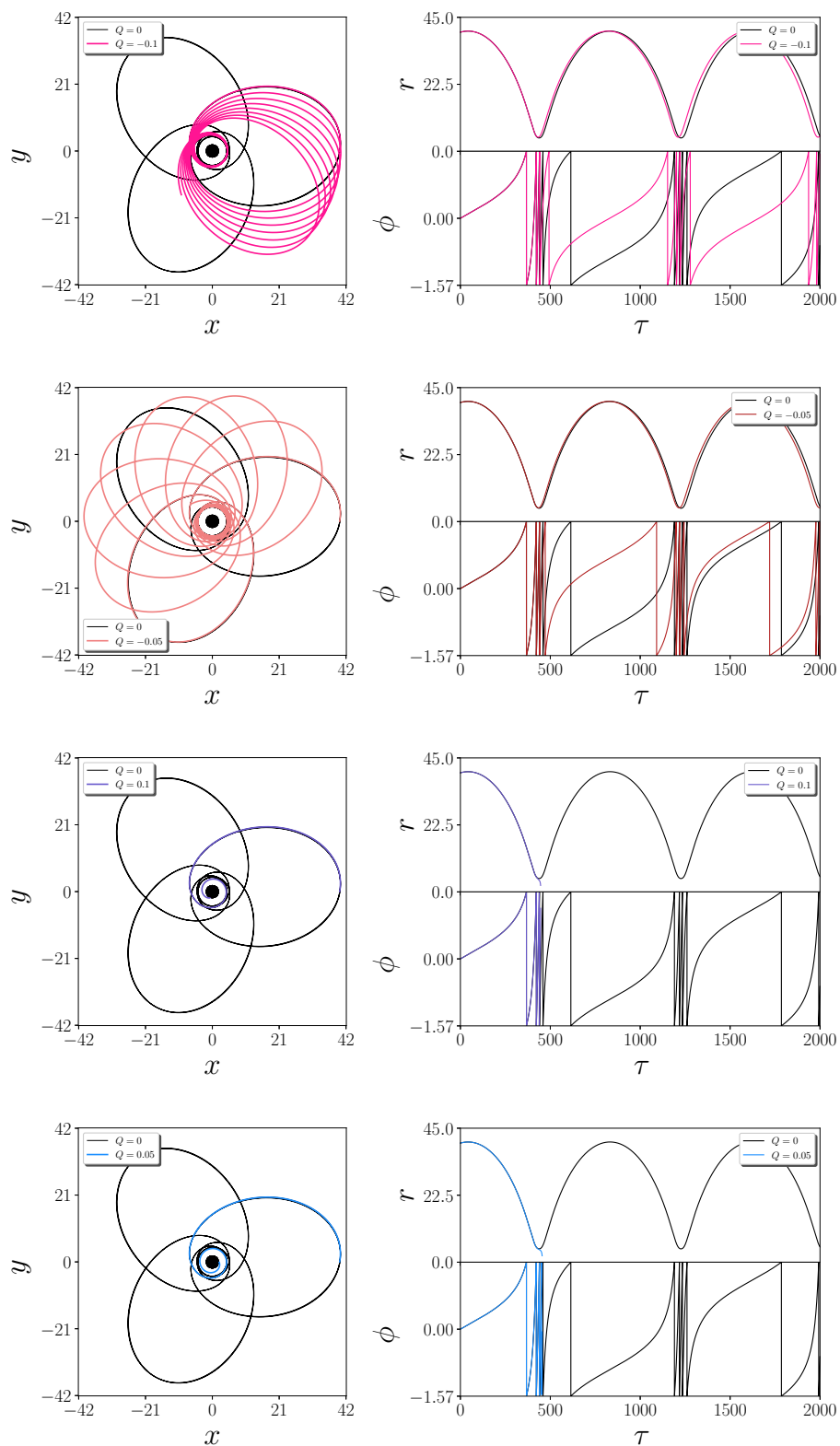


Figura 24: Efecto del parámetro de deformación arbitrario, a color, sobre la órbita de un pétalo con taxonomía $(z, w, \tilde{v}) = (3, 1, 1)$, en negro.

6.6. Órbitas de Cuatro pétalos

Otro tipo de órbita estudiada en este trabajo, son las órbitas de cuatro pétalos como la que se muestra en la figura (25a) donde se observa que la partícula de prueba pasa cuatro veces por el apoastro antes de regresar al punto de partida, es decir que el número de “zoom” correspondiente a esta órbita es $z = 4$. Para hallar el valor de la característica “whirl”, se analiza la figura (25b) donde se observa que ϕ recorre $\pi/2 + \pi + \pi + \pi/2 = 3\pi$, es decir que la partícula de prueba da una vuelta completa mas media vuelta alrededor del objeto compacto, por lo tanto $w = 1$. Al igual que la para la órbita de tres pétalos mostrada en la subsección anterior $\tilde{v} = 1$.

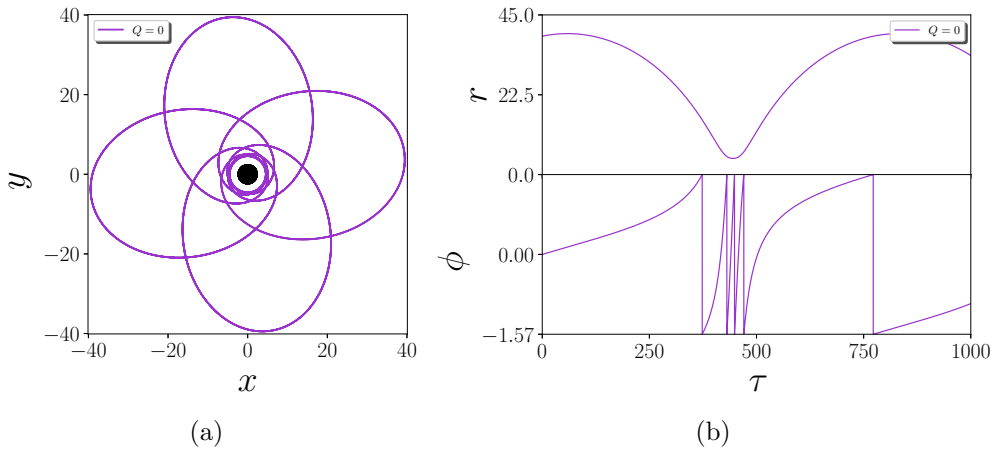


Figura 25: Órbita de cuatro pétalos para un objeto compacto sin deformación, con $L = 3.834058$, $E = 0.979331$ y $r = 39$, cuya taxonomía es $(z, w, \tilde{v}) = (4, 1, 1)$.

De manera similar a las figuras analizadas anteriormente, se presenta la figura (26) donde se observa el efecto que tiene el parámetro de defromación arbitrario sobre la trayectoria de un partícula de prueba. Tal como se pudo apreciar en las figuras correspondientes a uno pétalo, dos pétalos con $w = 1$ y tres pétalos, el comportamiento se repite tanto para los valores de deformación oblata como los valores de deformación prolata. La única diferencia notoria en el comportamiento general de las órbitas, es que al obsevar las figuras de la columna del lado derecho, el desfase entre las curvas a color y las curvas en negro, es el más pequeño en comparación a los demás casos estudiados.

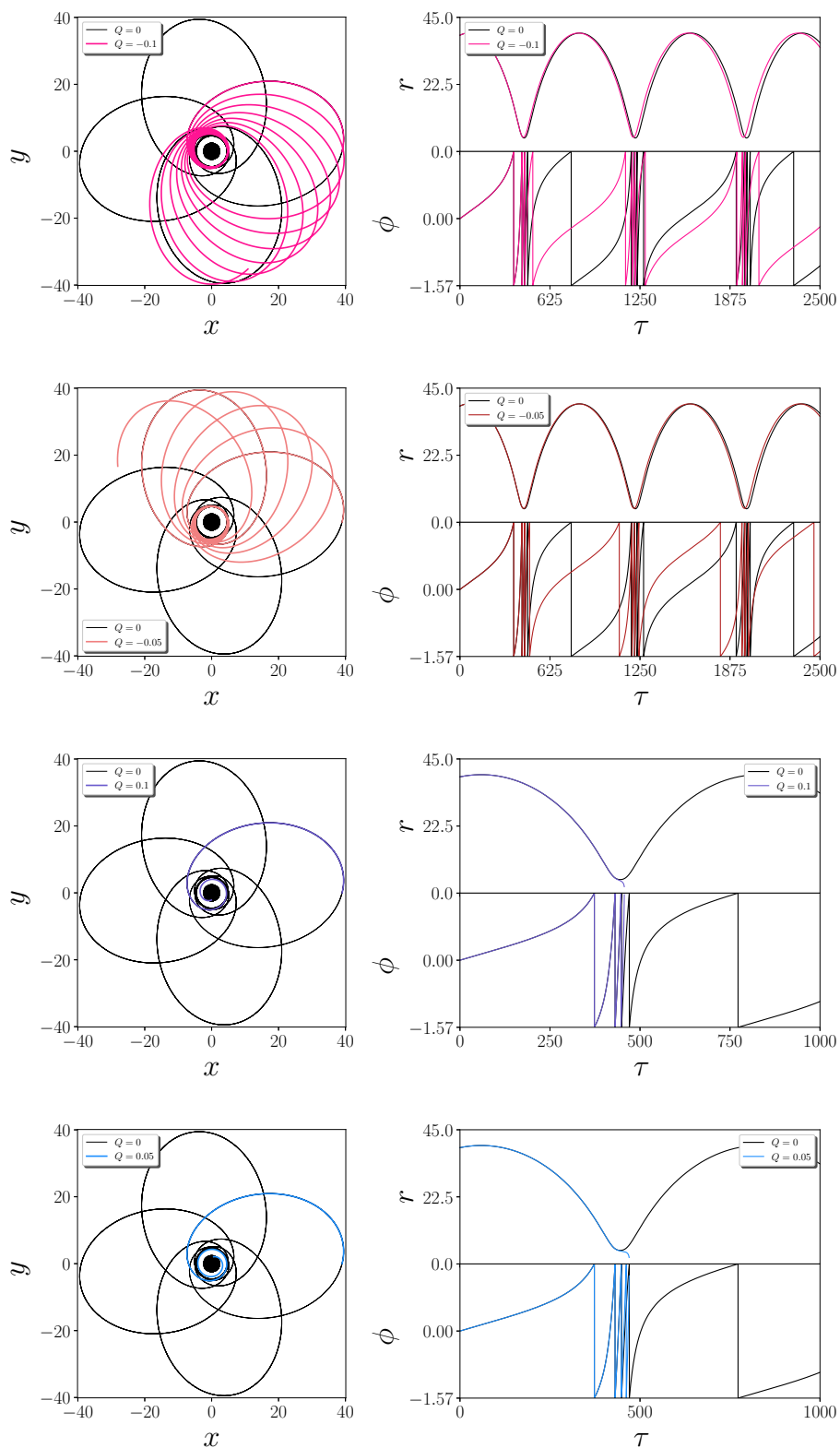


Figura 26: Efecto del parámetro de deformación arbitrario, a color, sobre la órbita de un pétalo con taxonomía $(z, w, \tilde{v}) = (4, 1, 1)$, en negro.

Aquí terminan los resultados que se presentan en éste trabajo. A continuación se exponen las conclusiones finales resultantes de este estudio.

7. Conclusiones

Este estudio sobre geodésicas tipo tiempo comenzó mediante el análisis del efecto de la deformación del objeto compacto sobre el horizonte de eventos y la ergosuperficie. Seguido a esto se presentaron la ecuación de las geodésicas en general para cualquier tipo de partícula, se mostró que es equivalente y más sencillo resolver las ecuaciones canónicas de Hamilton, las cuales se resolvieron numéricamente para partículas tipo tiempo, obteniendo de ésta manera la ecuación de movimiento para las órbitas en función de la energía de la partícula y los potenciales V_{\pm} que dependen únicamente de la métrica y el momento angular de la partícula. A partir de esto, se analizó el potencial efectivo y los potenciales V_{+} y V_{-} para tres casos particulares, el primero es un objeto compacto sin rotación ni deformación, el segundo para un objeto sin rotación pero con deformación, y el tercero se centró en el caso de un objeto con rotación y deformación, donde en el primer ($J = Q = 0$) y segundo ($J = 0, Q \neq 0$) caso se dedujo y estudió en el potencial efectivo. También se estudia la órbita marginalmente estable (ISCO) en función de Q y J . Luego, se estudió la dispersión de las órbitas de partículas de prueba debido a la deformación del objeto compacto para distintos valores de rotación y se analizó el impacto del parámetro Q sobre las órbitas cerradas.

Al estudiar el horizonte de eventos y la ergosfera se trataron dos valores de deformación, $Q = 0.2$ para deformación oblatada y $Q = -0.2$ para deformación prolata cuyo efecto se comparó con los radios del horizonte y la ergosfera de Kerr a segundo orden en cada uno de los J , en donde se observó que incluso para un valor de deformación del 20 %, el efecto introducido por el cuadrupolo de masa es notorio, puesto que los dos radios se deforman como una elipse más ancha en el ecuador para $Q > 0$, y más alargada en los polos para $Q < 0$. Luego, al graficar los potenciales efectivos correspondientes a un objeto no rotante con deformación arbitraria, se observó que el máximo del potencial efectivo es más alto para los valores de $Q < 0$ en comparación al potencial efectivo de Schwarzschild para el mismo momento angular de la partícula de prueba, por lo que la mínima energía para que una partícula de prueba caiga hacia el objeto compacto debe ser mayor en comparación al mínimo valor de energía que requiere la misma partícula con el mismo L para caer hacia el objeto con $Q = 0$. También ocurrió que estos potenciales efectivos se desplazaban hacia $r = 0$ debido a que el horizonte de eventos se ubica a un radio menor que el radio de Schwarzschild. Caso contrario ocurrió para los potenciales efectivos correspondientes a deformación oblatada, donde el punto máximo del potencial efectivo bajó respecto al punto máximo del potencial de Schwarzschild, además, estos potenciales se ubicaron a un radio mayor. En cuanto a los potenciales V_{\pm} , las gráficas presentadas mostraron que para los valores de deformación oblatada los potenciales se comportan muy similar al caso sin deformación, tanto en la forma como en que se encuentran en un punto común sobre $V_{\pm} = 0$, sin embargo, la diferencia yace en que este punto se desplaza hacia un radio mayor a medida que Q aumenta, como consecuencia la

zona prohibida disminuye debido a que el área entre los potenciales V_{\pm} se reduce. Esta reducción indica que hay una mayor cantidad de energías E que satisfacen $\dot{r}^2/2 > 0$. Mientras que los potenciales correspondientes a los valores de deformación prolata, las gráficas muestran que no tienen un punto común, sino que por el contrario, divergen uno del otro, debido a esto, el área entre V_+ y V_- aumenta por lo que para estos valores de Q la zona prohibida es más grande, por ende la cantidad de energías permitidas también es mayor. Por otro lado, para los casos de $J \neq 0$ la diferencia más notoria se presentó para los valores de $Q < 0$ en los cuales aparece una línea vertical antes del horizonte de eventos que hace parte de los potenciales V_{\pm} . De modo similar al radio del horizonte de eventos y la ergosuperficie, el radio de la ISCO se ubicó más lejos cuanto más oblató era el objeto compacto con respecto a la ISCO para un objeto sin deformación, mientras que el efecto inverso se observa para los valores de deformación prolata donde la ISCO se ubicó en un radio menor en comparación a la ISCO de $Q = 0$. También se graficó el radio de la ISCO para la solución de Kerr ($Q = J^2$), lo cual fue muy interesante ya que intersecta las líneas de $Q > 0$ dentro de los valores de J usados, ésto demuestra que es válido comparar las soluciones obtenidas para Hartle-Thorne con las de Kerr a segundo orden en J .

Con el código implementado fue posible reproducir algunos resultados numéricos de la investigación llevada a cabo por [Boshkayev et al. \(2016a\)](#), lo cual funcionó a modo de calibración. En ésta, los investigadores obtuvieron órbitas diferentes, entre las que se encuentran órbitas acotadas, de inmersión, circulares y dispersadas. Una vez se comprobó la efectividad del código a usar, se inició estudiando la dispersión de órbitas, en donde se observó que para las distintas configuraciones de velocidad de la partícula y rotación del objeto compacto, los valores de $Q > 0$ hacen que la partícula de prueba sea desviada hacia el objeto compacto, mientras que el comportamiento contrario ocurrió para los valores de $Q < 0$ donde la partícula es dispersada lejos de éste, como resultado, en cada uno de los casos tratado se pudo apreciar un abanico de dispersión donde cada línea a color diferente estaba dada para un valor de deformación del objeto distinto.

Luego, al analizar el impacto del parámetro de deformación arbitrario sobre partículas de prueba que trazaban órbitas cerradas, se encontró que en el régimen de campo fuerte, la órbita de la partícula de prueba correspondiente a los valores de deformación prolata es dispersada por el objeto compacto, lo que ocasiona que la órbita precesé por todo el plano ecuatorial. En cambio, para los valores de cuadrupolo de masa oblató el objeto compacto atrae a la partícula de prueba, lo que ocasiona que ésta ya no se mueva sobre una órbita cerrada, sino que cae. Además se observa que un comportamiento diferente ocurre con las órbitas a medida que se aleja de régimen de campo fuerte, tal como se presenta para el caso de la órbita de dos pétalos cuya taxonomía es $(z, w, \tilde{v}) = (2, 0, 1)$, donde para todos los valores de deformación trabajados se mantuvo la estructura de dos pétalos, en este caso el efecto introducido por Q fue diferente puesto que es toda la estructura lo que precesó. En cuanto a la

taxonomía en general se observó que un valor de deformación arbitrario no afecta el número de “whirls”, pues éste se mantuvo invariante en todos los casos a diferencia del número de “zoom” y “vértice”, debido a que para $Q < 0$ la órbita no se cerraba lo que da como resultado una cantidad indeterminada de pétalos por lo tanto una cantidad indeterminada de vértices, además para esta última, sucede que algunas ocasiones la órbita precesaba en sentido horario y otras veces en sentido antihorario y como los vértices se numeraban sólo en sentido antihorario, no fue posible darle un valor que fuera coherente en todos los casos. Entretanto para los valores de $Q > 0$, la partícula caía al objeto sin alcanzar a completar ningún pétalo, por lo que no fue posible dar un número de z ni de \tilde{v} .

En general, se concluye que el cuadrupolo de masa arbitrario del objeto compacto, incluso para valores pequeños, tiene un efecto notable en las órbitas de las partículas de prueba. Fue posible analizar dicho impacto en el horizonte de eventos y ergosfera, así como en la órbita marginalmente estable, en el potencial efectivo y en la trayectoria misma de las partículas tanto el órbitas acotadas como no-acotadas.

Finalmente, el estudio de geodésicas en el plano ecuatorial resultó ser una herramienta gráfica y sencilla para analizar el impacto en el parámetro de deformación de un objeto compacto en el régimen de rotación lenta, es por esto que actualmente se está realizando un artículo para publicación en el cual se exponen los resultados obtenidos en este trabajo, profundizando un poco más en algunos detalles de análisis fino, por ejemplo, se calcula el ángulo de dispersión en las trayectorias de las partículas tipo tiempo. Adicionalmente es posible continuar con el análisis de las frecuencias epicíclicas en la métrica de Hartle-Thorne. Incluso podría extenderse hasta adentrarse en el análisis de las “*Quasi Periodic Oscillations*”, QPOs por sus siglas en inglés. también, en un futuro trabajo se espera ampliar el estudio de geodésicas fuera del plano ecuatorial.

Referencias

Abbott, B. et al.

2017a. GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral. *Phys. Rev. Lett.*, 119(16):161101.

Abbott, B. P. et al.

2017b. GW170608: Observation of a 19-solar-mass Binary Black Hole Coalescence. *Astrophys. J.*, 851(2):L35.

Abramowicz, M. A., G. J. E. Almergren, W. Kluzniak, and A. V. Thampan

2003. Circular geodesics in the Hartle-Thorne metric.

Arfken, G., H. Weber, and F. Harris

2012. *Mathematical Methods for Physicists: A Comprehensive Guide*, YBP Print DDA. Elsevier.

Backer, D. C., S. R. Kulkarni, C. Heiles, M. M. Davis, and W. M. Goss

1982. A millisecond pulsar. *Nature*, 300(5893):615–618.

Berti, E., F. White, A. Maniopoulou, and M. Bruni

2005. Rotating neutron stars: An Invariant comparison of approximate and numerical spacetime models. *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.*, 358:923–938.

Bini, D., K. Boshkayev, R. Ruffini, and I. Siutsou

2013. Equatorial Circular Geodesics in the Hartle-Thorne Spacetime. *Nuovo Cimento*, C036(s01):31–36.

Boshkayev, K., H. Quevedo, M. Abutalip, Z. Kalymova, and S. Suleymanova

2016a. Geodesics in the field of a rotating deformed gravitational source. *International Journal of Modern Physics*, A31(02n03):1641006.

Boshkayev, K., H. Quevedo, S. Toktarbay, B. Zhami, and M. Abishev

2016b. On the equivalence of approximate stationary axially symmetric solutions of the Einstein field equations. *Gravitation and Cosmology*, 22(4):305–311.

Boshkayev, K., J. A. Rueda, and M. Muccino

2016c. Theoretical and observational constraints on the mass-radius relations of neutron stars.

Broderick, A. E., T. Johannsen, A. Loeb, and D. Psaltis

2014. Testing the No-hair Theorem with Event Horizon Telescope Observations of Sagittarius A*. *Astrophysical Journal*, 784:7.

Chandrasekhar, S.

1983. *The Mathematical Theory of Black Holes*, International series of monographs on physics. Oxford.

- Doeleman, S., E. Agol, D. Backer, F. Baganoff, G. C. Bower, A. Broderick, A. Fabian, V. Fish, C. Gammie, P. Ho, M. Honman, T. Krichbaum, A. Loeb, D. Marrone, M. Reid, A. Rogers, I. Shapiro, P. Strittmatter, R. Tilanus, J. Weintroub, A. Whitney, M. Wright, and L. Ziurys
2009. Imaging an Event Horizon: submm-VLBI of a Super Massive Black Hole. In *astro2010: The Astronomy and Astrophysics Decadal Survey*, volume 2010 of *Astronomy*.
- Fujita, R. and W. Hikida
2009. Analytical solutions of bound timelike geodesic orbits in Kerr spacetime. *Classical and Quantum Gravity*, 26(13):135002.
- Ghez, A. M., S. Salim, N. N. Weinberg, J. R. Lu, T. Do, J. K. Dunn, K. Matthews, M. R. Morris, S. Yelda, E. E. Becklin, T. Kremenek, M. Milosavljevic, and J. Naiman
2008. Measuring Distance and Properties of the Milky Way's Central Supermassive Black Hole with Stellar Orbits. *Astrophysical Journal*, 689:1044–1062.
- Glampedakis, K. and D. Kennefick
2002. Zoom and whirl: Eccentric equatorial orbits around spinning black holes and their evolution under gravitational radiation reaction. *Physical Review D*, D66:044002.
- Grossman, R., J. Levin, and G. Perez-Giz
2012. Harmonic structure of generic Kerr orbits. *Physical Review D*, 85(2):023012.
- Grould, M., Z. Meliani, F. H. Vincent, P. Grandclement, and E. Gourgoulhon
2017. Comparing timelike geodesics around a Kerr black hole and a boson star. *arXiv:1709.05938 [astro-ph.HE]*.
- Hartle, J.
2003. *Gravity: An Introduction to Einstein's General Relativity*. Addison-Wesley.
- Hartle, J. B. and K. S. Thorne
1968. Slowly Rotating Relativistic Stars. II. Models for Neutron Stars and Supermassive Stars. *Astrophysical Journal*, 153:807.
- Hees, A., T. Do, A. M. Ghez, G. D. Martinez, S. Naoz, E. E. Becklin, A. Boehle, S. Chappell, D. Chu, A. Dehghanfar, K. Kosmo, J. R. Lu, K. Matthews, M. R. Morris, S. Sakai, R. Schödel, and G. Witzel
2017. Testing general relativity with stellar orbits around the supermassive black hole in our galactic center. *Physical Review Letter*, 118:211101.
- Hobson, M., G. Efstathiou, and A. Lasenby
2006. *General Relativity: An Introduction for Physicists*. Cambridge University Press.

- Johnson, M. D., V. L. Fish, S. S. Doeleman, D. P. Marrone, R. L. Plambeck, J. F. C. Wardle, K. Akiyama, K. Asada, C. Beaudoin, L. Blackburn, R. Blundell, G. C. Bower, C. Brinkerink, A. E. Broderick, R. Cappallo, A. A. Chael, G. B. Crew, J. Dexter, M. Dexter, R. Freund, P. Friberg, R. Gold, M. A. Gurwell, P. T. P. Ho, M. Honma, M. Inoue, M. Kosowsky, T. P. Krichbaum, J. Lamb, A. Loeb, R.-S. Lu, D. MacMahon, J. C. McKinney, J. M. Moran, R. Narayan, R. A. Primiani, D. Psaltis, A. E. E. Rogers, K. Rosenfeld, J. SooHoo, R. P. J. Tilanus, M. Titus, L. Vertatschitsch, J. Weintroub, M. Wright, K. H. Young, J. A. Zensus, and L. M. Ziurys
 2015. Resolved magnetic-field structure and variability near the event horizon of Sagittarius A*. *Science*, 350:1242–1245.
- Kahaner, D., C. Moler, S. Nash, and G. Forsythe
 1989. *Numerical methods and software*, Prentice-Hall series in computational mathematics. Prentice Hall.
- Levin, J. and G. Perez-Giz
 2008. A periodic table for black hole orbits. *Physical Review D*, 77(10):103005.
- Lora-Clavijo, F. D., A. Cruz-Osorio, and F. S. Guzmán
 2015. CAFE: A New Relativistic MHD Code. *Astrophys. J. Suppl.*, 218(2):24.
- Merritt, D., T. Alexander, S. Mikkola, and C. M. Will
 2010. Testing properties of the Galactic center black hole using stellar orbits. *Physical Review D*, 81(6):062002.
- Mino, Y.
 2003. Perturbative approach to an orbital evolution around a supermassive black hole. *Physical Review D*, 67(8):084027.
- Narayan, R. and J. E. McClintock
 2012. Observational evidence for a correlation between jet power and black hole spin. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society: Letters*, 419(1):L69–L73.
- Ricarte, A. and J. Dexter
 2015. The Event Horizon Telescope: exploring strong gravity and accretion physics. *Monthly notices of the royal astronomical society*, 446:1973–1987.
- Sadeghian, L. and C. M. Will
 2011. Testing the black hole no-hair theorem at the galactic center: perturbing effects of stars in the surrounding cluster. *Classical and Quantum Gravity*, 28(22):225029.
- Schutz, B.
 1985. *A First Course in General Relativity*, Series in physics. Cambridge University Press.

Smoot, G. and K. Davidson

1993. *Wrinkles in time*. W. Morrow.

Steiner, J. F., J. E. McClintock, R. A. Remillard, L. Gou, S. Yamada, and R. Narayan

2010. The constant inner-disk radius of lmc x-3: A basis for measuring black hole spin. *The Astrophysical Journal Letters*, 718(2):L117.

Warburton, N., L. Barack, and N. Sago

2013. Isospectrum pairing of geodesic orbits in Kerr geometry. *Physical Review D*, 87(8):084012.

Will, C. M.

2008. Testing the General Relativistic “No-Hair” Theorems Using the Galactic Center Black Hole Sagittarius A*. *Astrophysical Journal Letter*, 674:L25.

Yagi, K. and N. Yunes

2013. I-Love-Q Relations in Neutron Stars and their Applications to Astrophysics, Gravitational Waves and Fundamental Physics. *Phys. Rev.*, D88(2):023009.

Zhang, F., Y. Lu, and Q. Yu

2015. On Testing the Kerr Metric of the Massive Black Hole in the Galactic Center via Stellar Orbital Motion: Full General Relativistic Treatment. *Astrophysical Journal*, 809:127.

A. Ecuaciones canónicas de Hamilton

Para calcular las trayectorias de las partículas de prueba, se resuelve las ecuaciones de Hamilton para la métrica de Hartle-Thorne, las cuales se presentan a continuación

$$\begin{aligned}
\dot{t} &= \frac{g_{\phi\phi}P_t + g_{t\phi}P_\phi}{g_{t\phi}^2 - g_{tt}g_{\phi\phi}}, \\
\dot{r} &= \frac{P_r}{g_{rr}}, \\
\dot{\theta} &= \frac{P_\theta}{g_{\theta\theta}}, \\
\dot{\phi} &= \frac{g_{t\phi}P_t + g_{tt}P_\phi}{-g_{t\phi}^2 + g_{tt}g_{\phi\phi}}, \\
\dot{p}_t &= 0, \\
\dot{p}_r &= \frac{1}{2} \left(\dot{t}^2 \partial_r g_{tt} + \dot{r}^2 \partial_r g_{rr} + \dot{\theta}^2 \partial_r g_{\theta\theta} + \dot{\phi}^2 \partial_r g_{\phi\phi} + 2\dot{t}\dot{\phi} \partial_r g_{t\phi} \right), \\
\dot{p}_\theta &= \frac{1}{2} \left(\dot{t}^2 \partial_\theta g_{tt} + \dot{r}^2 \partial_\theta g_{rr} + \dot{\theta}^2 \partial_\theta g_{\theta\theta} + \dot{\phi}^2 \partial_\theta g_{\phi\phi} + 2\dot{t}\dot{\phi} \partial_\theta g_{t\phi} \right), \\
\dot{p}_\phi &= 0.
\end{aligned} \tag{38}$$

Dado que la métrica de Harle-Thorne es estática y axialmente simétrica, ocurre que $\dot{p}_t = 0$ lo que indica que se conserva la energía E , asimismo, $\dot{p}_\phi = 0$ implica que se conserva el momento angular L de la partícula de prueba. En la ecuación anterior las derivadas de la métrica respecto a la coordenada r son:

$$\begin{aligned}
\partial_r g_{tt} &= \frac{-2(1 + 2k_1 P_2 - 2(\partial_r k_1) P_2 r + (\partial_r k_1) P_2 r^2)}{r^2} + \frac{8J^2 \cos(2\theta)}{r^5}, \\
\partial_r g_{rr} &= \frac{8J^2(1-r)}{r^3(2-r)^3} + \frac{2(-(\partial_r k_2) P_2 r^2 + (-1 + 2P_2(k_2 + (\partial_r k_2)r)))}{(2-r)^2}, \\
\partial_r g_{\theta\theta} &= -2r(-1 + 2k_3 P_2 + (\partial_r k_3) P_2 r), \\
\partial_r g_{\phi\phi} &= -2r(-1 + 2k_3 P_2 + (\partial_r k_3) P_2 r)(\sin \theta)^2, \\
\partial_r g_{t\phi} &= \frac{2J(\sin \theta)^2}{r^2},
\end{aligned} \tag{39}$$

y respecto a la coordenada θ son,

$$\begin{aligned}
\partial_\theta g_{tt} &= \frac{2(\partial_\theta P_2)k_1}{r^4} \left(-1 + \frac{2}{r} \right) + \frac{8J^2 \cos \theta \sin \theta}{r^4}, \\
\partial_\theta g_{rr} &= \frac{(\partial_\theta P_2)k_2 r}{2-r}, \\
\partial_\theta g_{\theta\theta} &= -2(\partial_\theta P_2)k_3 r^2, \\
\partial_\theta g_{\phi\phi} &= -2r^2 \sin \theta (-1 + 2k_3 P_2) \cos \theta + (\partial_\theta P_2)k_3 \sin \theta, \\
\partial_\theta g_{t\phi} &= \frac{-4J \cos \theta \sin \theta}{r}.
\end{aligned} \tag{40}$$

Adicionalmente se tienen las derivadas del polinomio de Legendre $P_2(x)$ y los polinómios asociados de Legendre Q_l^m

$$\begin{aligned}
\partial_x Q_2^1(x) &= \frac{2x(7-6x^2) + (3-9x^2+6x^4)}{2(x^2-1)^{3/2}} \left[\log \left(\frac{1+x}{x-1} \right) \right], \\
\partial_x Q_2^2(x) &= \frac{-8+10x^2-6x^4+3x(x^2-1)^2}{(x^2-1)^2} \left[\log \left(\frac{1+x}{x-1} \right) \right], \\
\partial_r k_1 &= \frac{-5(\partial_r Q_2^2)(J^2-Q)}{8} + \frac{8J^2(4+3r)}{8r^5}, \\
\partial_r k_2 &= \frac{5(\partial_r Q_2^2)}{r^5} \left(\frac{Q-J^2}{8} \right) + \frac{J^2(20-3r)}{r^5}, \\
\partial_r k_3 &= \frac{5(\partial_r Q_2^2)(Q-J^2)}{8} - \frac{5J^2}{r^5} + \frac{5(J^2-Q)Q_2^1}{4r(r-2)^{3/2}} - \frac{5(\partial_r Q_2^1)(J^2-Q)}{4\sqrt{r(r-2)}} \\
&\quad + \frac{5(J^2-Q)Q_2^1}{4\sqrt{r^3(r-2)}} - \frac{3J^2(1-r)}{r^5}, \\
\partial_\theta P_2(x) &= -3 \cos \theta \sin \theta.
\end{aligned} \tag{41}$$

B. Método de Runge-Kutta-Fehlberg

El método número usado en la realización de este trabajo es el método de Runge-Kutta-Fehlberg también conocido como RKF45, ya que es un método de cuarto orden con un error local estimado de quinto orden y un error total acumulado de cuarto orden, que además permite un paso adaptativo cuyo tamaño se determina automáticamente de acuerdo a la tolerancia requerida por el problema. Este método requiere evaluar la función seis veces por paso ([Kahaner et al., 1989](#)). Asumiendo el valor principal del problema

$$\dot{y} = f(t, y), \quad y(t_0) = y_0, \tag{42}$$

donde y_0 es una condición inicial dada, el RKF45 consiste en los siguientes pasos:

1. Se escoge un tamaño de paso $h > 0$ y calcula las funciones $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6$

como

$$\begin{aligned}
\alpha_1 &= f(t_n, y_n), \\
\alpha_2 &= hf(t_n + \frac{1}{4}h, y_n + \frac{1}{4}\alpha_1), \\
\alpha_3 &= hf(t_n + \frac{3}{8}h, y_n + \frac{3}{32}\alpha_1 + \frac{9}{32}\alpha_2), \\
\alpha_4 &= hf(t_n + \frac{12}{13}h, y_n + \frac{1932}{2197}\alpha_1 - \frac{7200}{2197}\alpha_2 + \frac{7296}{2197}\alpha_3), \\
\alpha_5 &= hf(t_n + h, y_n + \frac{439}{216}\alpha_1 - 8\alpha_2 + \frac{3680}{513}\alpha_3 - \frac{845}{4104}\alpha_4), \\
\alpha_6 &= hf(t_n + \frac{1}{2}h, y_n - \frac{8}{27}\alpha_1 + 2\alpha_2 - \frac{3544}{2565}\alpha_3 + \frac{1859}{4104}\alpha_4 - \frac{11}{40}\alpha_5).
\end{aligned}$$

La aproximación a la solución del problema (42) está dada a cuarto orden como

$$y_{n+1} = y_n + \frac{25}{216}\alpha_1 + \frac{1408}{2565}\alpha_3 + \frac{2197}{4104}\alpha_4 - \frac{1}{5}\alpha_5, \quad (43)$$

y un valor incluso mejor para la solución es determinado usando un método RKF de quinto orden

$$z_{n+1} = z_n + \frac{16}{135}\alpha_1 + \frac{6656}{12825}\alpha_3 + \frac{28561}{56430}\alpha_4 - \frac{9}{50}\alpha_5 + \frac{2}{55}\alpha_6. \quad (44)$$

2. Luego, la estimación del error puede calcularse usando,

$$\begin{aligned}
e &= |z_{n+1} - y_{n+1}| \\
&= \left| \frac{1}{360}\alpha_1 - \frac{128}{4275}\alpha_3 + \frac{2197}{75240}\alpha_4 + \frac{1}{50}\alpha_5 + \frac{2}{55}\alpha_6 \right|
\end{aligned} \quad (45)$$

3. Sí $e \geq e_{max}$, siendo e_{max} una tolerancia definida por el usuario antes de que el método iterativo inicie, entonces se devuelve al punto 1 y se recalcula el tamaño del paso como sh , donde s está dado por

$$s = \left(\frac{e_{max}h}{2|z_{n+1} - y_{n+1}|} \right)^{1/4}, \quad (46)$$

Luego, el punto 1 se repite para el nuevo paso sh . Ahora, si por el contrario, $e < e_{max}$, se acepta el tamaño de paso h y el siguiente valor de y , es decir es y_{n+1} , se calcula usando (43).