ANÁLISIS DE LAS OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMÁTICAS UIS IMPLEMENTANDO EL MODELO RASCH PARA LOS AÑOS 2009 Y 2010

CINDY NATHALIA MORGADO HERNÁNDEZ
MARÍA DEL PILAR NEUSA VARGAS

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2011

ANÁLISIS DE LAS OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMÁTICAS UIS IMPLEMENTANDO EL MODELO RASCH PARA LOS AÑOS 2009 Y 2010

CINDY NATHALIA MORGADO HERNÁNDEZ
MARÍA DEL PILAR NEUSA VARGAS

Trabajo de grado para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Director
DR. GABRIEL YAÑEZ CANAL
Especialidad en Matemática Educativa

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2011

AGRADECIMIENTOS Y DEDICATORIAS

Una vez más culminó una etapa académica llena de satisfacción y felicidad por cada una de las experiencias vividas, por los conocimientos adquiridos y por la formación recibida. Todo ha sido posible gracias a muchas personas que de una u otra manera han sido un soporte y guía en cada una de las etapas de mi vida.

Primero quiero agradecer a Dios por permitirme haber vivido esta experiencia formadora y enriquecedora para mi vida y sobre todo por ser mi soporte espiritual en cada uno de los momentos de angustia y una permanente compañía.

Segundo quiero agradecer a los dos seres que son la razón de mi vida, mis padres Ana y Tomás quienes han sido guía, compañía, amigos y formadores incansables de la persona que soy hoy día, doy gracias a Dios porque mejores padres no me pudo dar, gracias a ellos por sus sacrificios, por su apoyo y por todo el amor brindado hasta el momento.

Tercero quiero agradecer a mis hermanas Sonia y Yolima porque han sido una compañía incondicional y un apoyo en todo, con quienes he compartido los momentos más importantes de mi vida.

Cuarto quiero agradecer muy especialmente a mi tía Evidalina quien ha sido como una segunda mamá y a mi madrina Adriana pues han estado siempre para apoyarme, aconsejarme y compartir momentos inolvidables, y en general a todos los miembros de mi familia mis tías, mis tíos, mis primos, mis primas y mi sobrino, porque aunque están lejos nunca se han olvidado de mí y han estado muy pendientes de cada una de los proyectos de mi vida.

Quinto quiero agradecer a todos los docentes que han sido autores de mi formación académica, moral y espiritual, desde los de preescolar quienes sentaron bases firmes en mí, los de primaria quienes fortalecieron mis bases y continuaron la labor formadora, los de secundaria quienes fueron inspiración para la elección de mi carrera y por su entrega y pasión en cada una de las clases en que ellos estuvieron, a los docentes de la universidad por todo sus conocimientos compartidos y por una formación exigente y muy especialmente al profesor Gabriel Yáñez Canal por su entrega, dedicación y compromiso en la realización del proyecto, por su formación estadística que ha sido inspiración para continuar mi formación académica.

Sexto al grupo de Olimpiadas Matemáticas de la UIS especialmente a la profesora Adriana Albarracín por su confianza y colaboración en la realización de este proyecto. A Cindy Morgado, Orlando Esparza, Carolina Botello, Vladimir Angulo y Danny Samuel Lobo por su apoyo y colaboración en el proceso de elaboración del proyecto, y a todas y cada una de las personas que de alguna u otra han sido compañía, guía y han aportado cosas valiosas a mi vida.

María del Pilar Neusa Vargas

A ti DIOS que me diste la oportunidad de vivir.

A mi madre, aquí tienes mi esfuerzo… tarde pero seguro… este triunfo es de las dos, gracias por apoyarme.

A mi abuelo José, por su apoyo incondicional.

A mi abuela María, que está en alguna parte cerca de Dios y que ha estado conmigo todo el tiempo.

A mi gran hermano Carlos, eres el mejor gran hermano que una gran hermana puede tener, gracias.

Al profesor Gabriel Yáñez Canal, por toda la paciencia y su valioso tiempo para la dirección de este trabajo y sobre todo por sus enseñanzas y apoyo durante mi vida universitaria.

A Danny Samuel, gracias por todo el apoyo que me has dado, gracias por estar conmigo y recuerda que eres muy importante para mí.

A mi compañero y amigo Orlando Yesid Esparza Albarracín, por los consejos, el apoyo y el ánimo que me brindó.

A mi mejor amiga Tibisay, por haber estado siempre conmigo. Gracias por tu amistad.

Gracias también a mis queridos compañeros y amigos, que me apoyaron y me permitieron entrar en su vida durante estos años de convivir dentro y fuera del salón de clase:María del Pilar Neusa,Ángel Cristancho y Diana Villabona.

Gracias a todos aquellos que no están aquí, pero me ayudaron a que este gran esfuerzo se volviera realidad.

Nathalia

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE TABLAS

Pág.

LISTA DE FIGURAS

LISTAS DE ANEXOS

TÍTULO: ÁNALISIS DE LAS OLIMPIADAS REGIONALES DE MATEMÁTICAS UIS IMPLEMENTANDO EL MODELO RASCH PARA LOS AÑOS 2009 Y 2010[*]

AUTORES:
María del Pilar Neusa Vargas
Cindy Nathalia Morgado Hernández[**]

PALABRAS CLAVES:
Modelo Rasch
Olimpiadas
Outfit, Infit, lógitos

RESUMEN:

Se realizó un análisis descriptivo de los ítems en las fases clasificatoria, selectiva y final para los años 2009 y 2010, clasificando los ítems de opción múltiple de acuerdo a su grado de dificultad, y los ítems tipo ensayo de acuerdo a una escala de calificación implementada por el grupo de olimpiadas regionales de matemáticas UIS. Mediante la prueba de análisis de varianza, ANOVA y el coeficiente de Pearson se determinó que existía un comportamiento semejante en los resultados de la fase clasificatoria en los años 2009 y 2010, se realizaron otras pruebas estadísticas como la t y una prueba de bondad de ajuste, que corroboraron una vez más el alto nivel de los problemas de las olimpiadas y la similitud en los resultados obtenidos en cada una de las sedes.

Por medio del modelo Rasch se evidenció el buen ajuste de los ítems al modelo para la fase clasificatoria de los dos años, lo que permitió una buena estimación de la dificultad de los ítems de igual manera ocurrió para los ítems de la fase clasificatoria junto con la selectiva mientras que para los datos de la fase clasificatoria, selectiva junto con la final presentaron un buen ajuste al modelo permitiendo hacer una buena estimación de la habilidad de los estudiantes.

---

[*] Trabajo de Grado
[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Dr. Gabriel Yáñez Canal

TITLE: ANALYSIS OF REGIONAL MATHEMATICS OLYMPIAD UIS IMPLEMENTING THE RASCH MODEL FOR THE YEARS 2009 AND 2010 *

AUTHORS:
María del Pilar Neusa Vargas
Cindy Nathalia Morgado Hernández **[1]

KEYWORDS:
Rasch Model
Olympics
Outfit, InFit, logit

SUMMARY:

We performed a descriptive analysis of the items in the qualifiers, selective and final for the years 2009 and 2010, classifying the multiple-choice items according to their degree of difficulty, and essay-type items based on a rating scale implemented by the group of math UIS regional Olympics. By analysis of variance test, ANOVA and Pearson's coefficient was determined that there was a similar behavior in the results of the qualifiers in 2009 and 2010, there were other statistical tests as the t test for goodness of fit, again corroborating the high level of problems for the Olympics and the similarity in the results obtained in each of the venues.

Through the Rasch model was shown the fit of the model items qualifying for two years, allowing a good estimate of the difficulty of the items just as happened to the items in the preliminary round along with selective while for data qualification, selective with the final gave a good fit to the model allowing a good estimate of the ability of students

[1*] Grade work.
[**] Faculty of Science.Departament of Mathematics.Dr Gabriel Yáñez Canal

INTRODUCCIÓN

Las competencias escolares sobre problemas matemáticos tienen su origen a comienzos del siglo XX. La primera de ellas llamada “Eötvos” fue realizada en Hungría en 1894 dirigida a estudiantes en sus últimos años de educación media. En 1959, distintos países del Este de Europa (Bulgaria, Hungría, Polonia, Rumania, Checoslovaquia y las desaparecidas URSS y República Democrática Alemana) se unieron para establecer las primeras Olimpiadas Matemáticas. En 1967 empezaron a participar algunos países de occidente, con el tiempo las olimpiadas adquirieron un carácter internacional.

Con el propósito de integrar a las olimpiadas matemáticas internacionales a Latinoamérica, Colombia realizó en 1985 la primera Olimpiada Iberoamericana de Matemáticas. Como efecto de esta competencia, años después, se organizaron concursos regionales en algunos departamentos del país buscando preparar a los estudiantes para las Olimpiadas Nacionales o Internacionales.

En Santander no existía quien organizara competencias matemáticas con el ánimo de detectar jóvenes talentos. Precisamente, para suplir esta necesidad, algunos profesores de la Escuela de Matemáticas de la Universidad Industrial de Santander decidieron crear el Grupo de Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS en el año 2009, en este mismo año se realizaron las primeras pruebas.

Las olimpiadas UIS se desarrollan en 3 niveles: Básico (grados sexto y séptimo), Medio (grados octavo y noveno) y Avanzado (grados décimo y once), en las siguientes 5 fases:

Preparatoria: Esta fase la realiza cada estudiante que desee participar de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS. Para esta fase, el proyecto ofrece talleres de preparación previos a la fase de clasificación.

Clasificatoria: En esta fase participan los estudiantes de secundaria inscritos, quienes presentan la prueba en su institución educativa según el grado de escolaridad. La prueba consta de 12 problemas de selección múltiple con única respuesta.

Selectiva: En esta fase participan el 10% de los estudiantes inscritos que corresponden a los mejores puntajes de la prueba de clasificación, quienes presentan la prueba en la sede regional correspondiente según el grado de escolaridad. La prueba consta de 9 problemas: 6 de selección múltiple con única respuesta y 3 tipo ensayo, es decir, justificando las respuestas.

Final: En esta fase sólo clasifican los estudiantes que obtuvieron en cada nivel los 20 mejores puntajes. En caso de empate se da prioridad a quien responda el mayor número de preguntas tipo ensayo. La prueba consta de 6 problemas tipo ensayo. Esta fase tiene una duración de un fin de semana en las instalaciones de la UIS Bucaramanga.

Entrenamiento de estudiantes destacados: A los 7 estudiantes más destacados de cada uno de los niveles, se les ofrece una preparación especial con el ánimo que participen en las Olimpiadas Nacionales de Matemáticas.

Los participantes de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS, son estudiantes de secundaria de colegios públicos y privados. La sede de Bucaramanga cobija los estudiantes de los municipios de: Bucaramanga, Girón, Floridablanca, Piedecuesta y Lebrija; los estudiantes del resto del departamento cuentan con las sedes de Barbosa, Málaga, Barrancabermeja y Socorro, para las fases preparatoria y selectiva; la fase clasificatoria se realiza en cada colegio y la fase final se lleva a cabo en la sede central en Bucaramanga.

Los resultados de la aplicación de pruebas masivas en el desarrollo de una Olimpiada matemática proporcionan una gran cantidad de información que se presta para ser analizada y que permitiría identificar el nivel de desarrollo de las habilidades matemáticas de los estudiantes.

En concordancia con esto, realizamos una investigación para dar respuesta a la siguiente pregunta: *¿Cómo fueron los resultados de las olimpiadas regionales de matemáticas UIS en las diferentes sedes, niveles y áreas, para los años 2009 y 2010?*

La respuesta a la pregunta propuesta la damos respondiendo a las siguientes cuestiones más específicas:

- *¿Cómo se podrían caracterizar las habilidades matemáticas de los estudiantes que se presentan a las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS?*
- *¿Existen diferencias entre las habilidades matemáticas de los estudiantes por sede, nivel y área?*
- *¿Cuál es el nivel de dificultad de los ítems que se presentan en las Olimpiadas Regionales de Matemáticas?*
- *¿Existen diferencias en la dificultad de los ítems por sede, nivel y área?*

Los resultados de esta investigación se presentan en cinco capítulos que se describen brevemente a continuación.

El primer capítulo contiene el sustento teórico del modelo, se presentan los aspectos más relevantes del modelo Rasch.

En el segundo capítulo, “Fase Clasificatoria”, se presenta un análisis descriptivo de los ítems en los distintos niveles para los dos años, analizando su dificultad y señalando los errores más sobresalientes en las respuestas de los estudiantes. Se estudian y comparan los resultados obtenidos en cada una de las sedes tanto en 2009 como en 2010 utilizando el coeficiente de correlación de Pearson, el análisis de varianza y el modelo Rasch. También se presenta un análisis comparativo de la distribución observada de los resultados con una distribución binomial con el ánimo de confrontar la hipótesis de que los estudiantes pudieron haber respondido el cuestionario con la estrategia del “tin marín”.

En el tercer capítulo “Fase Selectiva” se presenta el análisis descriptivo de los ítems presentados en esta fase y se continúa con un análisis utilizando el modelo Rasch pero uniendo los ítems de la fase clasificatoria con los de la fase selectiva.

En el cuarto capítulo “Fase Final” se presenta un análisis descriptivo de los ítems tipo ensayo con su correspondiente análisis.

En el quinto capítulo “Conclusiones” se presentan los resultados más importantes obtenidos en esta investigación.

Finalmente se presentan las referencias utilizadas en esta investigación y algunos anexos: Problemas y soluciones de las pruebas.

Esperamos que este trabajo sea de gran utilidad al grupo de Olimpiadas matemáticas para que mejore y fortalezca su trabajo en las próximas versiones de las olimpiadas.

1. Marco Teórico

En este capítulo se presentan las bases teóricas del modelo Rasch.

1.1 Estudiando el Modelo Rasch

El modelo Rasch, que se utiliza en esta investigación, fue propuesto por el matemático danés con el mismo nombre en 1960 como una respuesta a las desventajas de la Teoría Clásica de Test imperante hasta ese momento (Prieto, 2003). Este modelo, que hoy se utiliza ampliamente en áreas como educación, sicología y más recientemente en medicina, entre otras, para medir variables latentes (inteligencia, capacidades y rasgos personales no observables directamente), a partir de las respuestas de los individuos ante preguntas o ítems formulados en entrevistas, cuestionarios y pruebas estandarizadas (tests).

El modelo Rasch predice la probabilidad de respuesta correcta a un ítem en función de la diferencia entre la habilidad de la persona θ y la dificultad del ítem β. Más exactamente se tiene la siguiente relación:

$$\ln\left(\frac{P_{ni}}{1-P_{ni}}\right) = \theta_n - \beta_i \qquad (1)$$

“La ecuación (1), que caracteriza el modelo Rasch, es el resultado de variadas combinaciones de condiciones debidamente articuladas. Estas condiciones no son otra cosa que hipótesis o asunciones previamente establecidas y que responden al interés de que las medidas de las variables latentes satisfagan ciertas propiedades”(Barajas, Esparza, 2010), como la *unidimensionalidad* que implica que la respuesta de los individuos a cada uno de los ítems, y por lo tanto su rendimiento en el test, depende exclusivamente de la característica que se está midiendo, y la *invarianza de medida,* en el sentido de que la medida que un individuo posee de la característica que se mide deber ser indiferente al conjunto de ítems que se utilicen para hacerlo.

Como se observa en la ecuación (1), el cociente entre la probabilidad de una respuesta correcta y la probabilidad de una respuesta incorrecta a un ítem $P_{ni}/1-P_{ni}$, es una función de la diferencia entre la habilidad de la persona θ_n y la dificultad del ítem β_i. Así, cuando una persona responde a un ítem en su nivel de habilidad, tendrá la misma probabilidad de dar una respuesta correcta que incorrecta, realizando operaciones en (1) obtenemos:

$$\ln\left(\frac{P_{ni}}{1-P_{ni}}\right) = \theta_n - \beta_i = 0$$

$$\frac{P_{ni}}{1-P_{ni}} = 1$$

$$P_{ni} = \frac{1}{2} = 0{,}5$$

Del mismo modo, cuando la habilidad de la persona sea mayor que la dificultad del ítem$(\theta_n - \beta_i > 0)$ la probabilidad de dar una respuesta correcta es mayor que la de dar una incorrecta. Por el contrario, si la habilidad de la persona es menor que la requerida por el ítem $(\theta_n - \beta_i < 0)$, la probabilidad de una respuesta correcta será menor que la de una respuesta incorrecta.

Una formulación más conocida del modelo Rasch, se obtiene despejando la ecuación (1) de lo que resulta que la probabilidad que un individuo n responda correctamente un ítem i está dada por la expresión (Wright y Stone, 1999):

$$P_{ni} = \frac{e^{\theta_n - \beta_i}}{1 + e^{\theta_n - \beta_i}} \qquad (2)$$

1.2 Estimación de Parámetros

El objetivo inicial que se tiene al aplicar un test consiste en estimar la habilidad de las personas θ y la dificultad de los ítems β. En la estimación de los parámetros de habilidad y dificultad, la característica fundamental del modelo es la propiedad de *invariabilidad*. El modelo postula que bajo esta propiedad los parámetros que caracterizan a un ítem no dependen de la distribución de habilidades de las personas. De igual forma, los parámetros que caracteriza a las personas no dependen del conjunto de ítems en un examen determinado (Hambleton, Swaminathan y Jane, 1991).

Ya que el modelo se aplica a partir de datos observables en patrones de respuestas reales, el método apropiado y matemáticamente justificado es el de máxima verosimilitud el cual consiste en determinar los parámetros de los ítems y las personas que hacen más probable las respuestas observadas, además permite obtener errores que determinan los intervalos donde con mayor probabilidad se encuentra la medida real de la dificultad de los ítems y de la habilidad de las personas.Para calcular el valor del estimador de máxima verosimilitud, es necesario realizar procedimientos iterativos que se llevan a cabo en dos etapas. En la primera se tratan las dificultades de los ítems como conocidos, y se estima la habilidad de los individuos. En el siguiente paso, se toman como punto de partida los valores de la habilidad obtenidos en la etapa anterior, y partir de ellos se estiman de nueva la dificultad de los ítems. Estos pasos se repiten hasta que la diferencia entre las estimación de las iteraciones n y n+1 es mínima, tanto para la habilidad de las personas como para la dificultad de los ítems. Estos procedimientos de cálculo son sumamente largos, por lo que es necesario recurrir al uso de programas informáticos. Algunos de los más utilizados son: Quest (Adams y Khoo, 1996), RASCAL (Assessment Systems Corporation, 1995), RUMM (Sheridan, Andrich y Luo, 1996) y WINSTEPS (Wright y Linacre, 1998).

1.3 El modelo Rasch y la escala de intervalo

Para Thurstone toda medición es siempre una abstracción y la medición de un objeto es ubicar el objeto en un punto de un continuo abstracto (Wright y Stone, 1999).Bajo el modelo Rasch los niveles de habilidad de las personas y dificultad de los ítems (θ_n, β_i), se ubican en la misma escala y presentan las mismas unidades. Las unidades son los "log-units" por lo que la escala se conoce como logit en inglés y en español como lógito que corresponde al logaritmo natural de la relación entre la probabilidad de acierto y la de error (proporción entre la probabilidad de errores y la de aciertos para un ítem dado o entre la probabilidad de acierto y la de error para una persona dada). La escala lógito cubre todos los números reales aunque por lo general las medidas estimadas se encuentran entre -0.5 y 5.0 lógitos. Tristán (2001) señala que "esta medida tiene la ventaja de que limita los valores de medida a intervalos razonables y permite tomar en cuenta tanto el éxito como el fracaso en una sola cantidad" (p.11).

1.4 Ajuste de los datos al modelo

De acuerdo con la ecuación (2), la probabilidad de respuesta a un ítem depende sólo del nivel de habilidad de la persona y de la dificultad del ítem. Siguiendo un patrón lógico, un alumno debería responder correctamente aquellas preguntas cuyos niveles de dificultad sean menores que su nivel de habilidad y no podría responder correctamente aquellas con niveles de dificultad mayores que su nivel de habilidad. Esto es lo más probable, sin embargo al analizar el patrón de respuestas de los alumnos se puede notar que no siempre ocurre de ese modo. Existen desajustes en los datos recogidos, tales como estudiantes con poca habilidad respondiendo ítems difíciles o viceversa, que podrían deberse a diversos factores: multidimensionalidad o sesgo de los ítems, falta de precisión en el enunciado o en las opciones de respuesta, respuestas al azar, falta de motivación o cooperación, errores al anotar la respuesta, etc. (Prieto y Delgado, 2003).

El análisis del ajuste entre los datos y el modelo se fundamenta en el cálculo de residuales entre cada persona n al responder a cada ítem i. Este cálculo produce una estimación de qué tanto se apartan las respuestas observadas X_{ni} de las respuestas esperadas $E(X_{ni})$ en el modelo, utilizando los valores estimados de habilidad de las personas y dificultad de los ítems (Barajas y Esparza, 2010). Estos residuales se calculan de la siguiente forma:

$$Y_{ni} = X_{ni} - E(X_{ni}) = X_{ni} - P_{ni}$$

Se suelen estandarizar los residuos dividiéndolos por su desviación típica:

$$Z_{ni} = \frac{X_{ni} - P_{ni}}{\sqrt{P_{ni}(1 - P_{ni})}}$$

El modelo Rasch nos proporciona dos medidas de ajuste y pueden realizarse tanto para las personas como para los ítems.

El valor de OUTFIT es la media de los residuales estandarizados al cuadrado tanto de personas como de ítems.

$$Outfit = \frac{\sum Z_{ni}^2}{N}$$

Su valor se interpreta como una media cuadrática sensible a comportamientos inesperados del alumno (ítem) en los ítems (alumnos) alejados de su nivel de habilidad (dificultad).

El valor de INFIT se interpreta como una media cuadrática ponderada de residuales que es sensible a patrones de respuesta irregulares. Este estadístico mide el comportamiento inesperado del alumno (ítem) en los ítems (alumnos) cercanos a su nivel de habilidad (dificultad).

Su expresión algebraica es la siguiente:

$$Infit = \frac{\sum Z_{ni}^2 W_{ni}}{\sum W_{ni}} \quad ; \; W_{ni} = P_{ni}(1 - P_{ni})$$

Donde los residuales están ponderados por sus varianzas individuales (W_{ni}) para reducir la influencia de comportamiento de respuestas lejos del nivel de habilidad estimado para el individuo o el nivel de dificultad del ítem.

Los criterios de bondad de ajuste para el infit y el outfit tienen un valor esperado de 1. Por convención se considera que los valores superiores a 1,3 indican desajuste en muestras con menos de 500 casos, 1,2 en muestras de tamaño medio (entre 500 y 1000 casos) y 1,1 en muestras con más de 1000 casos (Prieto y Delgado, 2003).

Otro criterio que mide qué tan consistentes son las medidas estimadas bajo el modelo es la *confiabilidad*, la cual está relacionada con la precisión del instrumento. Las medidas obtenidas de la prueba serán más confiables cuanto menor sea el error con el cual se estimen.

El coeficiente de confiabilidad varía entre 0 y 1, cuanto más cercano a 1, menor error de medición por tanto mayor precisión en la estimación de las medidas. Es decir, la confiabilidad es una medida de la dispersión o separación ya sea entre las personas o los ítems. Si la confiabilidad tiene un valor alto, la separación entre las personas y en los ítems es confiable, en caso contrario no lo es tanto.

La separación expresa la variación real entre los valores estimados en términos de desviaciones estándar media y da cuenta también de la diferencia real que existe en la dificultad de los diversos ítems y entre la habilidad de los diferentes individuos. La relación entre confiabilidad y separación es directamente proporcional, es decir, a mayor confiabilidad se tiene mayor separación y viceversa Obtener la separación permite establecer el número de niveles estadísticamente diferentes de la habilidad o de la dificultad de los ítems (Barajas y Esparza, 2010).

1.5 Ventajas del modelo

El modelo Rasch, respecto a la Teoría Clásica de Test que es el método tradicional, se destaca por una serie de características entre las que se encuentran las siguientes: medición conjunta, objetividad específica, propiedades de intervalo y especificidad del error típico de medida.

Invarianza de la medida. Una medida solo puede ser considerada válida y generalizable si no depende de las condiciones específicas con la que ha sido obtenida. En consecuencia, si los datos se ajustan al modelo, las comparaciones entre personas son independientes de los ítems administrados y las estimaciones de los parámetros de los ítems no estarán influenciadas por las personas. Esta relevante propiedad caracteriza al modelo Rasch.

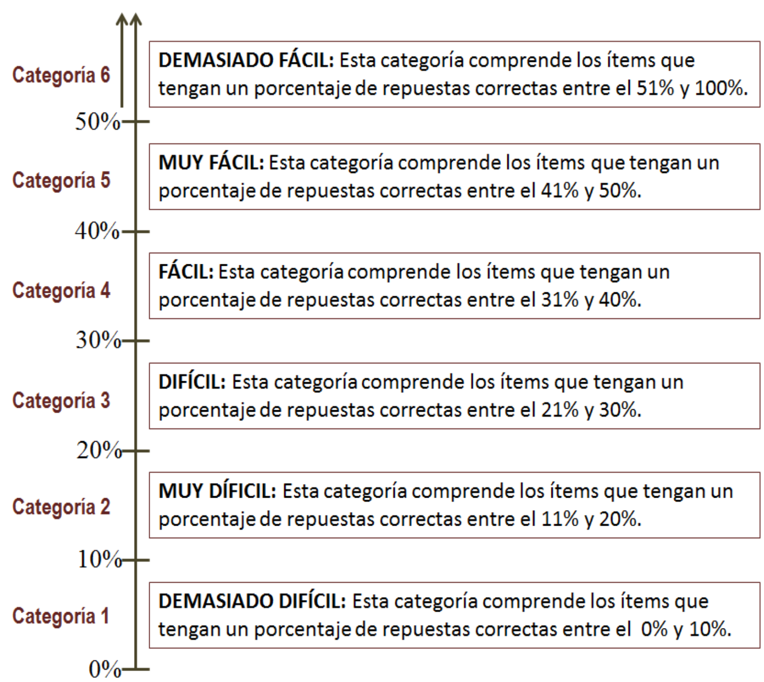
Propiedades de intervalo. A diferencias constantes entre personas e ítems les corresponde la misma probabilidad de una respuesta correcta. Esta propiedad permite realizar análisis estadísticos (análisis de varianza, regresión, etc.) con las medidas de habilidad de las personas y de dificultad de los ítems además de que garantiza la invarianza de las puntuaciones diferenciales a lo largo de un continuo.

Especificidad del error típico de medida. Esta propiedad que hace referencia al hecho de que existe un error particular para cada parámetro estimado, permite cuantificar la cantidad de información con la que se mide en cada punto de la dimensión y seleccionar los ítems que permiten incrementar la información en regiones del atributo previamente especificada. Si los ítems son fáciles, la estimación de los parámetros de las personas de bajo nivel se hará con mayor precisión. De igual forma, si las personas son de alto nivel, se estimarán con mayor precisión los parámetros de los ítems difíciles.

2. Fase Clasificatoria

2.1. Análisis descriptivo de los ítems de la fase clasificatoria de los años 2009 y 2010

Se estudiará la dificultad de los 12 ítems de las pruebas que se presentaron en la Fase Clasificatoria delos años 2009 y 2010 para cada uno de los niveles, Básico, Medio y Avanzado. Los ítems se corresponden con alguna de las siguientes áreas: Álgebra (A), Geometría (G), Razonamiento Lógico (L), Teoría de Números (TN) y Combinatoria (C). La notación que utilizaremos para identificar los ítems serán las letras mencionadas anteriormente acompañadas del número que le correspondió en la prueba, por ejemplo el ítem 9 que es de Razonamiento Lógico se identifica como L9. Los ítems se clasificarán de acuerdo al nivel de dificultad al que pertenezcan, caracterizándose este nivel por el porcentaje de buenas respuestas obtenidas: alto porcentaje, ítem fácil; bajo porcentaje, ítem difícil. Las categorías que consideramos, serán ordenadas en orden decreciente de acuerdo a su dificultad, de este modo:



NIVEL BÁSICO 2009

En el nivel básico se presentaron 1186 estudiantes.

La Figura 1 muestra el porcentaje de respuestas correctas para cada ítem de la prueba clasificatoria correspondiente al nivel básico.

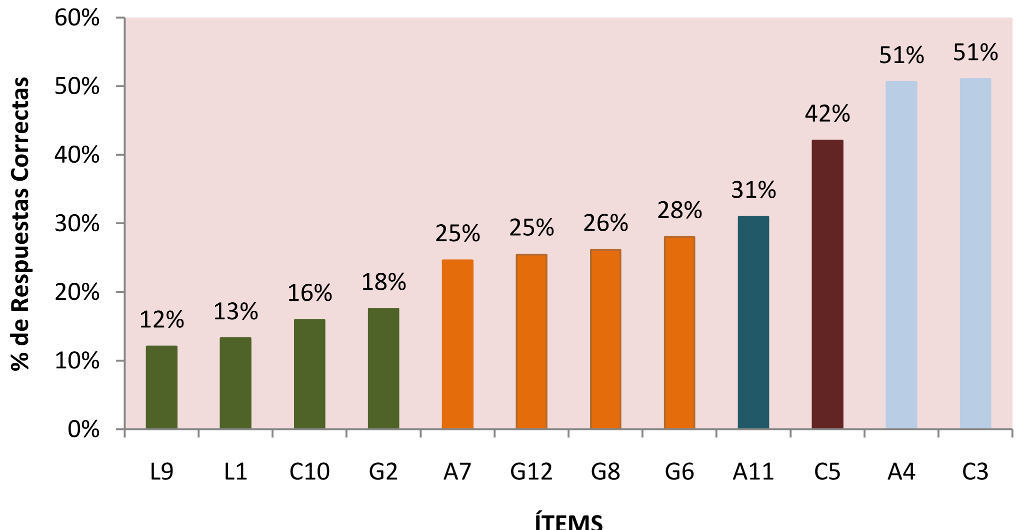


Figura 1. Porcentajes de respuestas correctas de los ítems según su categoría correspondiente a la prueba clasificatoria nivel básico del año 2009

- Muy difícil: L9, L1, C10 y G2.
- Fácil: A11.
- Difícil: A7, G12, G8 y G6.
- Muy fácil: C5.
- Demasiado fácil: A4 y C3.

En la Tabla 1 se presentan los ítems junto a su respectiva área, frecuencia y porcentaje de respuestas correctas, y por último a la categoría en la que se ubica:

ÍTEMS	Área	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas	CATEGORÍA
L9	Razonamiento Lógico	143	12%	Muy difícil
L1	Razonamiento Lógico	157	13%	Muy difícil
C10	Combinatoria: Conteo	189	16%	Muy difícil
G2	Geometría: área y perímetro.	208	18%	Muy difícil
A7	Álgebra Planteamiento de ecuaciones	292	25%	Difícil
G12	Geometría: ángulos de un triángulo	302	25%	Difícil
G8	Geometría: Círculos	310	26%	Difícil
G6	Geometría: Semejanza de triángulos	332	28%	Difícil
A11	Álgebra Planteamiento de Ecuaciones	367	31%	Fácil
C5	Combinatoria: Conteo	499	42%	Muy fácil
A4	Álgebra: Operaciones	600	51%	Demasiado fácil
C3	Combinatoria: Conteo	605	51%	Demasiado fácil

Tabla 1. Clasificación de los ítems según su categoría en la prueba clasificatoria nivel básico 2009

En la Tabla 2 se muestra el número de estudiantes que respondieron cada opción en los ítems, además se resalta la opción correcta y la opción más contestada.

	L1	G2	C3	A4	C5	G6	A7	G8	L9	C10	A11	G12
a	153	131	215	136	87	332	292	253	552	193	239	140
b	157	208	27	177	326	335	114	269	143	189	367	148
c	151	251	605	98	499	169	441	311	247	90	112	302
d	482	253	308	600	110	107	104	154	96	157	168	211
e	239	293	25	130	134	72	172	142	117	494	245	210
NO Respondieron	4	50	6	45	30	171	63	57	31	63	55	175

Tabla 2. Número de estudiantes que respondieron cada opción en los ítems de la prueba clasificatoria nivel básico 2009

Opción Correcta

Opción más contestada

A continuación analizaremos cada ítem según la categoría a la que pertenecen. Como observamos en la Figura 1 en este nivel no se presentaron ítems de categoría 1 demasiado difícil.

CATEGORÍA 2: Muy difícil

En la Figura 1 observamos que se presentaron cuatro ítems con un porcentaje menor del 20%, es decir de categoría muy difícil. Dos de ellos fueron de Razonamiento Lógico (L), los otros dos correspondieron a problemas de Combinatoria (C) y Geometría (G); estos ítems son los siguientes:

- Problema de Razonamiento Lógico:

9. De cuantas formas se puede trazar la palabra ROSA, si sólo se permite movimientos de una casilla a otra contigua en línea recta, hacia arriba, abajo, izquierda o derecha?

			A			
		A	S	A		
	A	S	O	S	A	
A	S	O	R	O	S	A
	A	S	O	S	A	
		A	S	A		
			A			

(a) 8 (b) 28 (c) 14 (d) 26 (e) 21

En este ítem la opción más contestada fue la (a) (Ver Tabla 2), la cual es la que tiene menor número de formas, ya que pareciera que en la figura pocas veces se puede formar la palabra ROSA, debido a que la letra R aparece una sola vez, por lo que solo contaron las veces que se formaba la palabra ROSA, sin tener en cuenta que la palabra se podía leer en diferentes direcciones como: hacía arriba, abajo, izquierda, derecha, en forma de L o en línea recta, entre otras. La respuesta correcta es la (b) (Ver Solución Anexos)[2].

- Problema de Razonamiento Lógico:

1. Suponga que seis días después de anteayer es jueves. ¿Qué día de la semana es un día después de mañana?

(a)Lunes (b) Martes (c) Miércoles (d) Sábado (e)Viernes 8

[2] Elaborado por: Adriana Albarracín, Carlos Arturo Rodríguez, Carolina Botello, Vladimir Ángulo, María Angélica Colmenares y María del Pilar Neusa Vargas. Grupo Olimpiadas Matemáticas UIS.

La opción (b) es la correcta (Ver Solución Anexos). La dificultad de este ítem se pudo deber a que los estudiantes no construyen algún tipo de diagrama que les facilité encontrar la respuesta o asumen el ítem literalmente. En este ítem la opción más contestada fue la (d) (Ver Tabla 2), la cual se pudo deber a que si solo tenemos en cuenta el jueves y respondemos a la pregunta, ¿Qué día de la semana es un día después de mañana? La respuesta seria sábado, olvidando la condición que plantea el problema como es que seis días después de anteayer es jueves.

Los otros dos ítems que se ubican en esta categoría son:

- Problema de Combinatoria:

> **10.** Una caja fuerte tiene tres ruedas y cada rueda se puede colocar en los números $0, 1, 2, 3, 4, ..,9$. Si la caja se abre cuando las tres ruedas están colocadas en números distintos. ¿Con cuántas combinaciones se puede abrir?
>
> (a) 10 (b) 720 (c) 36280 (d) 72
> (e) Ninguna de las anteriores.

La opción correcta es la (b) (Ver Tabla 2), esta se deduce teniendo en cuenta que cada una de las ruedas solo se puede colocar en 10 posiciones diferentes es decir un número distinto para cada rueda, lo cual para los estudiantes fue muy difícil. Si en la primera rueda elijo cualquiera de los 10 números para que ocupe esta posición, luego para la segunda rueda, si ya escogí un número en la primera rueda, me quedan 9 números, y para la tercera me quedan 8 números, por lo que el total de combinaciones posibles para abrir la caja fuerte es $10 \times 9 \times 8 = 720$.
En este ítem, la opción más contestada fue la (e) que eligieron 494 estudiantes, esto evidencia que posiblemente no tuvieron en cuenta que en cada rueda debía

haber un número diferente, es decir sin repetición, por lo que la solución para ellos sería $10 \times 10 \times 10 = 1000$, como esta solución no estaba entre las opciones eligieron la opción (e).

- Problema de Geometría:

> **2.** Se transformó un rectángulo de 50 cm de largo y 10 cm de ancho en un cuadrado de igual perímetro. Con respecto al área del rectángulo en centímetros cuadrados, el área del cuadrado aumentó en:
>
> (a) 200 (b) 400 (c) menos de 200
> (d) más de 400 (e) No aumentó

En este ítem la opción más contestada fue la (e) (Ver Tabla 2), la dificultad se pudo deber a que los estudiantes asumieron que si el perímetro es igual en ambas figuras, entonces las áreas también. La respuesta correcta es la (b) la cual respondieron 208 estudiantes. Para la solución los estudiantes debían conocer las características del cuadrado y el rectángulo y la definición de área y perímetro (Ver Solución Anexos).

CATEGORÍA 3: Difícil

Se presentaron cuatro ítems en esta categoría, con un porcentaje de respuestas correctas menor del 30%, uno de ellos correspondió a un problema algebraico y tres a problemas geométricos (Ver Figura 1); estos ítems son los siguientes:

- Problema de Álgebra:

7. De un grupo de niños y niñas se retiran 15 niñas quedando dos niños por cada niña. Después se retiran 45 niños y quedan entonces cinco niñas por cada niño. El número de niñas y niños respectivamente, al comienzo era de:

(a) $(40, 50)$ (b) $(43, 56)$ (c) $(50, 70)$
(d) $(56, 43)$ (e) $(50, 40)$

La opción correcta es la (e). Para la solución de este problema se debían plantear ecuaciones algebraicas a partir de la información dada en el problema (Ver Solución Anexos). La opción (c) fue la más contestada (Ver Tabla 2), esto se pudo deber a que los estudiantes asumieron que x representaba las niñas y y los niños. Como vemos en la opción más contestada, la ordenada es 70 el número mayor de todas opciones, debido a que se retiraban primero 15 niñas y después 45 niños, entonces los estudiantes pudieron haber elegido esta opción por ser la que tiene el mayor número de niños y niñas.

- Problema de Geometría:

12. Sea D un punto interior del triángulo ABC tal que $\angle BDC = 123°$, $\angle ABD = 15°$ y $\angle ACD = 21°$. La medida del ángulo BAC es:

(a) $47°$ (b) $67°$ (c) $87°$ (d) $107°$ (e) $27°$

En este ítem no hubo una tendencia marcada hacia alguna respuesta en particular por parte de los estudiantes que no lo respondieron correctamente (Ver Tabla 2). La dificultad de este ítem pudo deberse al desconocimiento de la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo y a la no realización de una representación gráfica del problema, además, claro, de no plantear correctamente las ecuaciones. A pesar que la opción correcta fue la más contestada, este ítem fue respondido correctamente por tan solo 302 estudiantes (Ver Solución Anexos).

- Problema de Geometría:

> **8.** Una moneda de cincuenta pesos se coloca sobre una mesa; el número de monedas de cincuenta pesos que se pueden colocar tangentes alrededor de ella es de:
>
> (a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8 (e) 12

Alrededor de un círculo siempre se pueden formar 6 círculos tangentes de igual tamaño. La opción (c) es la opción correcta y además la más contestada por solo 311 estudiantes. (Ver Tabla 2). La dificultad para los estudiantes que no respondieron correctamente a este ítem pudo estar en no saber la definición de tangente o simplemente al haber hecho una representación gráfica inadecuada de la situación (Ver Solución Anexos).

- Problema de Geométrica:

> **6.** Una base de un triángulo es de longitud b y altura h. Un rectángulo de altura x se inscribe en el triángulo, con base del rectángulo sobre la base del triángulo; el área del rectángulo es:
>
> (a) $\frac{bx}{h}(h-x)$ (b) $\frac{hx}{b}(b-x)$ (c) $\frac{bx}{h}(h-2x)$
> (d) $x(b-x)$ (e) $x(h-x)$

La respuesta correcta es la (b). Para resolver este ítem se debía hacer una representación gráfica que les permitiera identificar la semejanza entre los triángulos y plantear una proporción entre las longitudes de los lados de los triángulos. (Ver Solución Anexos). La opción (b) fue la más contestada (Ver Tabla 2), el error que cometieron los estudiantes fue restarle a la base b la altura x . La dificultad de este problema se pudo deber a que los estudiantes no identificaron la semejanza entre los triángulos, además de que no es fácil deducir que la altura del rectángulo es $h-x$.

CATEGORÍA 4: Fácil

Solo se presentó un ítem en esta categoría con un porcentaje de respuestas correctas del 31% (Ver Figura 1), este ítem fue el siguiente problema algebraico:

11. En un grupo de vacas y gallinas, si el número de patas entre vacas y gallinas es 14 más dos veces el número de cabezas; el número de vacas es:

(a) 5 (b) 7 (c) 10 (d) 12 (e) 14

La respuesta correcta es la (b). Para la soluciónlos estudiantes debían plantear una ecuación con dos incógnitas. (Ver Solución Anexos). La opción más contestada fue la correcta (b). (Ver Tabla 2). En las otras opciones no hubo una tendencia hacia alguna en particular. La dificultad se pudo deber a que no saben representar en lenguaje algebraico las condiciones del problema.

CATEGORÍA 5: Muy Fácil

Al igual que la categoría anterior solo se presentó un ítem en esta categoría el cual obtuvo un 42% de respuestas correctas; este ítem es el siguiente problema de combinatoria:

5. Con los dígitos $1, 2, 3$ y 5 se pueden formar 24 números de 4 dígitos. ¿Cuántos de estos 24 números son pares?

(a) 24 (b) 12 (c) 6 (d) 3 (e) 4

En este problema la opción más contestada fue la opción correcta (c) (Ver Tabla 2), ya que para que un número sea par debe tener a 2 en las unidades; por lo que los dígitos 1,3 y 5 se pueden ordenar de seis maneras para formar las tres primeras cifras (Ver Solución Anexos). Los estudiantes que no respondieron correctamente este ítem asumieron que como se podían formar 24 números con estos cuatro dígitos entonces la mitad de estos debían ser pares, es decir 12 la opción (b); las opciones (d) y (e) las eligieron por que no realizaron todas las combinaciones con estos dígitos, y si eligieron la opción (a) pudo ser por tomar literalmente el número del enunciado sin hacer una adecuada interpretación del problema.

CATEGORÍA 6: Demasiado fácil

Los ítems de menor dificultad para los estudiantes correspondió a un ítem de Álgebra (A) y a un ítem de Combinatoria (C), los cuales fueron respondidos por el 51% de los estudiantes ubicándose, por consiguiente, en la categoría 6, demasiado fácil. (Ver Figura 1).
A continuación presentamos los ítems y realizamos un análisis de las razones de su facilidad.

- Problema de Álgebra:

> **4.** Tres niños deciden repartirse un saco de bolas de la siguiente manera: El primer niño toma la mitad más una: el segundo la tercera parte de las restantes; el tercero se da cuenta que le quedaron el doble de las que tomó el segundo. Entonces el número original de bolas era:
>
> (a) 8 ó 36 (b) 20 ó 26 (c) 14 ó 32 (e) 10 ó 32
> (d) No se puede determinar con los datos suministrados.

La respuesta correcta es la opción (d), la cual fue la más contestada (Ver Tabla 2), esto pudo ser porque los estudiantes no encontraron una única respuesta al problema, luego asumieron que no se podía determinar la solución. Los demás estudiantes que no respondieron correctamente, pudo ser debido a que en las otras opciones hay un valor que da respuesta a las condiciones del problema.

- Problema de Combinatoria:

3. En una heladería se ofrecen 3 tipos de barquillo y helados de 31 sabores. El número de helados distintos que se pueden comprar es:

(a) 31 (b) 90 (c) 93 (d) 34 (e) 183

Este problema fue demasiado fácil ya que solo requería la regla del producto $3 \times 31 = 93$, por lo que la opción correcta (c) fue la más contestada. (Ver Tabla 2). De las demás opciones, la opción (a), que solo considera los sabores, fue seleccionada por el 18% de los estudiantes, y la opción (d) la eligieron posiblemente porque al sumar los 31 sabores más los 3 tipos de barquillos da el valor 34, dando a entender la interpretación aditiva que muchos estudiantes pueden tener de la forma multiplicativa del principio fundamental de conteo.

NIVEL MEDIO 2009

En el nivel medio se presentaron 1274 estudiantes.
La Figura 2 muestra el porcentaje de respuestas correctas para cada ítem de la prueba clasificatoria correspondiente al nivel medio.

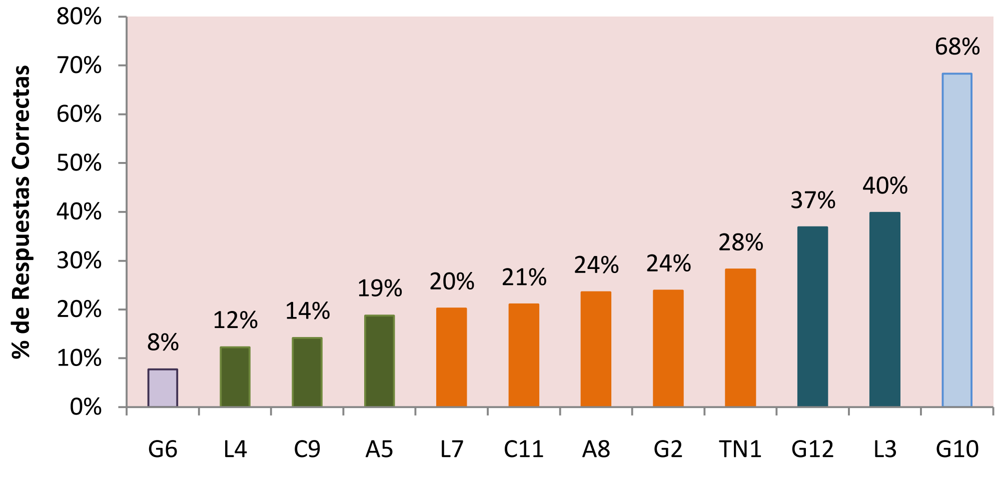


Figura 2. Porcentajes de respuestas correctas de los ítems según su categoría correspondiente a la prueba clasificatoria nivel medio del año 2009

- Demasiado difícil: G6.
- Fácil: G12 y L3.
- Muy difícil: L4, C9 y A5.
- Demasiado fácil: G10.
- Difícil: L7, C11, A8, G2 y TN1.

En la Tabla 6 se presentan los ítems junto a su respectiva área, frecuencia y porcentaje de respuestas correctas, y por último a la categoría en la que se ubica:

ÍTEMS	**Área**	**Cantidad de Respuestas Correctas**	**% de Respuestas Correctas**	**CATEGORÍA**
G6	Geometría: Semejanza figuras geométricas	98	8%	Demasiado difícil
L4	Razonamiento Lógico	156	12%	Muy difícil
C9	Combinatoria	180	14%	Muy difícil
A5	Álgebra: División de polinomios	239	19%	Muy difícil

L7	Razonamiento lógico	257	20%	Difícil	
C11	Combinatoria	268	21%	Difícil	
A8	Álgebra: Planteamiento ecuaciones	300	24%	Difícil	
G2	Geometría: Resolución de triángulos	304	24%	Difícil	
TN1	Teoría de Números: Criterios de divisibilidad	359	28%	Difícil	
G12	Geometría: solución triángulos	469	37%	Fácil	
L3	Razonamiento lógico	507	40%	Fácil	
G10	Geometría: Volumen	870	68%	Demasiado fácil	

Tabla 3. Clasificación de los ítems según su categoría en la prueba clasificatoria nivel medio 2009.

En la Tabla 4 se muestra el número de estudiantes que respondieron cada opción en los ítems, además se resalta la opción correcta y la opción más contestada.

	N1	G2	L3	L4	A5	G6	L7	A8	C9	G10	C11	G12
a	399	29	122	602	464	215	78	395	180	76	266	293
b	296	168	143	112	179	650	256	142	260	92	384	231
c	101	601	267	156	170	98	105	234	178	872	301	85
d	76	71	505	60	239	151	59	302	108	89	117	139
e	359	304	217	263	92	77	704	137	359	113	147	471
NO Respondieron	43	101	20	81	130	83	72	64	189	32	59	55

Tabla 4 Número de estudiantes que respondieron cada opción en los ítems de la prueba clasificatoria nivel medio 2009

Opción Correcta

Opción más contestada

En este nivel no se presentaron ítems de categoría 5 muy fácil, los ítems de este nivel se ubican dentro de las siguientes categorías:

CATEGORÍA 1: Demasiado difícil

En este nivel se presentó un ítem con un porcentaje del 8% de respuestas correctas. (Ver Figura 2)

El ítem de mayor dificultad fue el siguiente problema geométrico:

> **6.** Los lados paralelos de un trapecio miden 3 cm y 9 cm; los lados no paralelos miden 4 cm y 6 cm . Una recta paralela a la base divide el trapecio en dos trapecios de igual perímetro; la razón en que quedan divididos los lados no paralelos es:
>
> (a) $4:3$ (b) $3:2$ (c) $4:1$ (d) $3:1$ (e) $6:1$

La respuesta correcta es la (c), la cual eligieron 98 estudiantes. Para la solución de este ítem se requería conocer las características básicas de un trapecio, establecer las razones entre las longitudes de los lados de los trapecios, además de plantear un sistema de ecuaciones (Ver Solución Anexos). La opción más contestada fue la (b) (Ver Tabla 4), esto pudo deberse a que ellos asumieron que la razón que hay entre los lados no paralelos del trapecio es $3:2$, sin tener en cuenta que les pedían la razón en que quedan divididos los lados no paralelos.

CATEGORÍA 2: Muy difícil

Se presentaron tres ítems en esta categoría los cuales fueron contestados por menos del 20% de los estudiantes correctamente (Ver Figura 2), estos ítems fueron los siguientes:

Problema de Razonamiento Lógico:

4. Dos nadadores parten al mismo tiempo de los extremos de una piscina de 90 metros de longitud, con velocidad de 3 y 2 metros por segundo respectivamente. Atraviesan la piscina varias veces durante 12 minutos. Suponiendo que no se pierde tiempo al voltear, el número de veces que se han encontrado será: (Nota: $s = v \cdot t$, donde v es la velocidad, s es la distancia recorrida y t el tiempo empleado para recorrer la distancia a.

(a) 24 (b) 21 (c) 20 (d) 19 (e) 18

La respuesta correcta es la (c), la cual eligieron 156 estudiantes. Para la solución se requería realizar un conteo para encontrar el número de encuentros en el primer ciclo (cuando los nadadores se encuentran en la posición inicial nuevamente), teniendo en cuenta que el tiempo del primer ciclo es de cuatro minutos y multiplicando por 3 obtenemos el número de encuentros en los doce minutos (Ver Solución Anexos).La opción que más eligieron fue la (e) (Ver Tabla 4), esto posiblemente se debió a que los estudiantes no tuvieron en cuenta que el primer ciclo era cumplido los 180s, luego pensaron que los 6 encuentros estaban dentro del primer ciclo, por lo que multiplicaron $6 \times 4 = 24$.

- Problema de Combinatoria:

9. Un club colegial tiene 18 miembros, de los cuales 10 son hombres y 8 mujeres. El administrador del club es uno de los hombres. Se va a formar un comité de 5 miembros, donde debe estar el administrador. El numero de comités que se pueden formar de tal manera que tengan 2 mujeres y 3 hombres es:

(a) 1008 (b) 784 (c) 1260 (d) 5004 (e) 630

La respuesta correcta es la (a), la cual eligieron 180 estudiantes, es decir el 14%. Para la solución se requería utilizar el algoritmo de la combinatoria (Ver Solución Anexos). La respuesta (e) fue la más contestada (Ver Tabla 4) debido a que es el menor número de comités que se puede formar. La dificultad se pudo deber a que los estudiantes no conocen el algoritmo de la combinatoria y no tuvieron en cuenta que el administrador es un miembro fijo del comité.

- Problema de Álgebra:

5. Para que la expresión $x^2 + 2x + 5$ sea un factor de $x^4 + px^2 + q$, los valores de p y q deben ser respectivamente:

(a) -2 y 5 (b) 5 y 25 (c) 10 y 20
(d) 6 y 25 (e) 14 y 25.

La opción más contestada fue la (a) (Ver Tabla 4), esto se debió a que los estudiantes toman los valores más pequeños al reemplazar en un polinomio o en el sistema de ecuaciones. Además porque en el polinomio aparecen los coeficientes 2 y 5de la opción (a) excepto por el – del 2. La dificultad del problema pudo estar en que no identificaron que el polinomio se podía descomponer o que no reemplazaron bien los valores numéricos en la expresión algebraica (Ver Solución Anexos). La respuesta correcta es la (d), la cual fue seleccionada por 239 estudiantes.

CATEGORÍA 3: Difícil

Cuatro ítems pertenecen a esta categoría con un porcentaje de respuestas correctas menor del 30%. (Ver Figura 2). Estos ítems fueron los siguientes:

- Problema de Razonamiento Lógico:

7. En la suma que se muestra abajo, letras diferentes representan dígitos diferentes. El número de cinco dígitos que representa SERVE es: $VCR + VCCT = SERVE$

(a) $S = 1, E = 1, V = 9, C = 4, R = 2$
(b) $S = 1, E = 0, V = 9, C = 4, R = 3$
(c) $S = 2, E = 0, V = 7, C = 4, R = 3$
(d) $S = 1, E = 0, V = 9, C = 3, R = 3$
(e) Ninguna de las anteriores

La opción correcta es la (b) la cual fue elegida por 256 estudiantes. Para encontrar la respuesta una forma sencilla consistía en tomar los valores dados y reemplazarlos en la expresión (Ver Solución Anexos).La opción más contestada fue la (e) (Ver Tabla4), esto se pudo deber a que los estudiantes cometieron errores de tipo aritmético al reemplazar los valores en la expresión algebraica.

- Problema de Combinatoria:

11. En Colombia, una placa de automóvil contiene tres letras del alfabeto(26 letras) seguidas de tres dígitos. El número de placas que hay si se permite repetir tanto las letras como los dígitos es:

(a) $26^3 \times 10^3$ (b) $3^{26} \times 3^{10}$ (c) $(26^3) + (10^3)$
(d) $26^3 \times 10^3$ (e) $3 \times 26 \times 3 \times 10$

La respuesta correcta es la (a) para lo cual es necesario aplicar la ley del producto (Ver Solución Anexo). Los estudiantes, para este caso, en el que hay tres espacios y cada espacio se puede llenar con 10 números diferentes, eligen3^{10}; errando en su razonamiento, la misma deducción hacen para las letras por lo que la opción (b) la cual fue la más contestada (Ver Tabla 4).

- Problema de Álgebra:

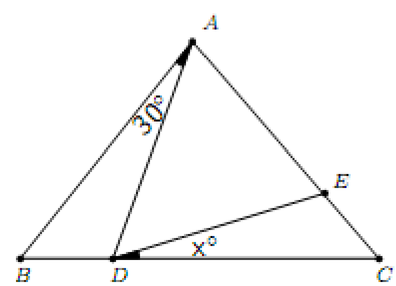
8. Pedro emprendió una caminata a un pueblo vecino de Bucaramanga. El primer día viajó $\frac{1}{3}$ de lo que tenía que recorrer, el segundo $\frac{1}{3}$ del resto de la distancia, el tercer día viajó $\frac{1}{3}$ de la distancia que le quedaba y todavía le quedaban 32 km por recorrer. La distancia en kilómetros de Bucaramanga al pueblo al que viaja Pedro es:

(a) 64 (b) 216 (c) 864 (d) 108 (e) 32

La respuesta correcta es la (e) elegida por 302 estudiantes. Para la solución de este problema el estudiante debía tener claro la definición de una fracción como operador, además de plantear una ecuación de una incógnita (Ver Solución Anexos). En este problema la opción más contestada fue la (a) (Ver Tabla 4), la dificultad se puede deber a la mala interpretación del problema y al no operar adecuadamente con las fracciones.

- Problema Geométrico:

2. En la figura $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, el ángulo $B\hat{A}D = 30°$ y $\overline{AE} \cong \overline{AD}$, el valor de x es:



(a) $7\frac{1}{2}°$ (b) $10°$ (c) $20°$ (d) $12\frac{1}{2}°$ (e) $15°$

La opción correcta es la (e) la cual fue elegida por 304 estudiantes. Para la solución era necesario utilizar la propiedad de la suma de los ángulos internos de un triángulo, las características de un triángulo isósceles y el planteamiento de ecuaciones (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron fue la (c) (Ver

Tabla 4) esto ocurrió posiblemente por la comparación visual que hicieron del ángulo x° y 30°, decidiendo que el ángulo x° media un poco menos que el otro ángulo o por el planteamiento inadecuado de las ecuaciones.

- Problema de Teoría de Números:

1. El mayor número por el que la expresión $n^3 - n$ es divisible para todos los divisores de n es :

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

La respuesta correcta es la opción (e) (Ver Tabla 4). Para resolver este problema el estudiante debía saber factorizar y manejar los criterios de divisibilidad (Ver Solución Anexos). La opción más contestada fue la (a) por 399 estudiantes, posiblemente al factorizar no se dieron cuenta que era un polinomio de tercer grado.

CATEGORÍA 4: Fácil

Los ítems que se presentaron en este nivel fueron de geometría y de razonamiento lógico con un 37% y 40% de respuestas correctas, respectivamente (Ver Figura 2).El ítem de geometría fue el siguiente:

12. Dos lados de un triángulo miden 120 cm y 130 cm. De las siguientes, la longitud en cm del tercer lado no puede ser:

(a)40 (b) 99 (c) 100 (d) 150 (e) 260

La opción correcta es la (e) la cual fue la más contestada (Ver Tabla 4). Para resolver este problema se debía conocer la desigualdad triangular (Ver Solución Anexos). La dificultad se pudo deber a que se preguntó por la longitud que no podía tomar el tercer lado, lo más probable es que los estudiantes se confundieron y buscaban en encontrar la posible longitud para el tercer lado.

El ítem de Razonamiento Lógico fue el siguiente problema:

3. En un torneo la mitad de los competidores se eliminan cada ronda. Si al principio de cada ronda el número de competidores es impar, uno de los competidores se elige al azar y permanece para la siguiente ronda. Si empezaron 100 competidores. ¿cuántas rondas deberán pasar para que quede un ganador?

(a)11 (b)10 (c) 8 (d) 7 (e) 6

Primera Ronda	Segunda Ronda	Tercera Ronda	Cuarta Ronda	Quinta Ronda	Sexta Ronda
100	50	25+1	13+1	7+1	4

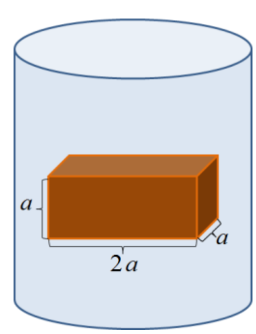
Para la solución de este problema solo hay que hacer una eliminación sencilla en cada una de las rondas, luego los estudiantes solo tenían que eliminar la mitad de los competidores en cada una de las rondas teniendo en cuenta que si el número de competidores es impar, uno de los competidores se elegía al azar para la siguiente ronda; llegando a que el número de rondas por la que deberá pasar el ganador es 6; la cual fue la opción más contestada. (Ver Tabla 4). Los demás estudiantes que no respondieron correctamente, pudo ser debido a que realizaron una mala interpretación del problema o cometieron errores en las operaciones.

CATEGORÍA 6: Demasiado fácil

En esta categoría se presentó un ítem de Geometría, el cual fue respondido correctamente por el 68% de los estudiantes. (Ver Figura 2). Este ítem fue el siguiente problema geométrico:

10. Se tiene una cubeta llena de agua y se introduce un ladrillo que desalojó 54 centímetros cúbicos de agua. Si el largo del ladrillo es el doble del ancho y el ancho y el alto son iguales, las dimensiones largo, ancho y alto del ladrillo respectivamente son:

(a) 6 cm, 9cm y 1cm (b) 3 cm, 6cm y 3cm
(c) 6cm, 3cm y 3cm (d) 3cm, 3cm y 6cm
(e) Ninguna de las anteriores



La opción correcta es la (c) la cual fue la más contestada (Ver Tabla 4). Para resolver este problema el estudiante debía manejar el concepto de volumen y conocer las características de un cubo, además debía plantear y resolver una ecuación con una sola incógnita. Los demás estudiantes que no respondieron correctamente, ocurrió posiblemente porque no identificaron que el volumen del ladrillo era $54\ cm^3$ y realizaron una mala interpretación de las condiciones dadas para las dimensiones del ladrillo.

NIVEL AVANZADO 2009

En el nivel avanzado se presentaron 1254 estudiantes.

La Figura 3 muestra el porcentaje de respuestas correctas para cada ítem de la prueba clasificatoria correspondiente al nivel medio.

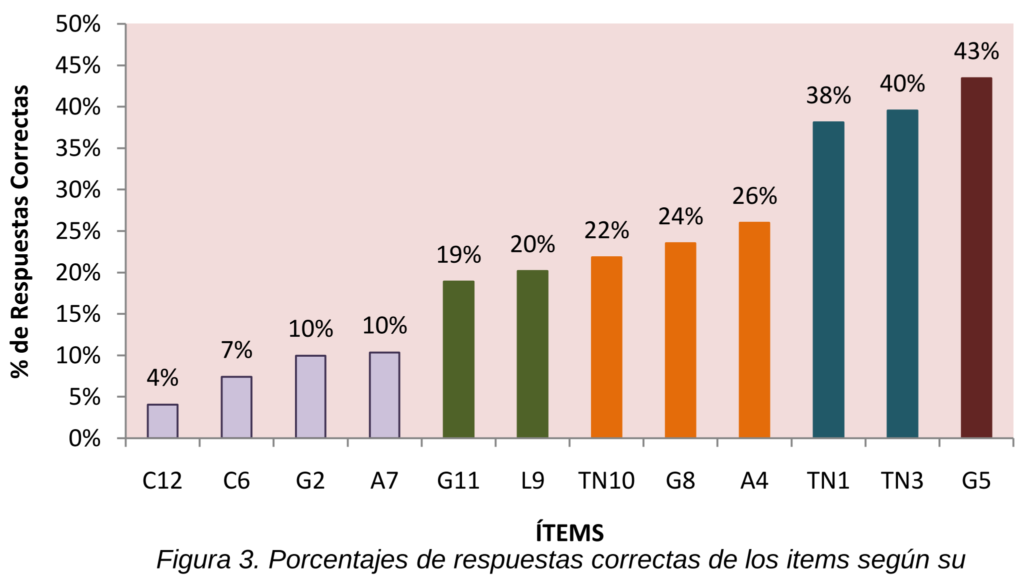


Figura 3. Porcentajes de respuestas correctas de los items según su categoria correspondiente a la prueba clasificatoria nivel avanzado del año 2009

En la Tabla 6 se presentan los ítems junto a su respectiva área, frecuencia y porcentaje de respuestas correctas, y por último a la categoría en la que se ubica:

ÍTEMS	Área	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas	CATEGORÍA
C12	Combinatoria	51	4%	Demasiado difícil
C6	Combinatoria	93	7%	Demasiado difícil
G2	Geometría Resolución de triángulos	125	10%	Demasiado difícil
A7	Algebraico división de Polinomios	130	10%	Demasiado difícil
G11	Geométrico: Área del Rombo	237	19%	Muy difícil
L9	Lógica	253	20%	Muy difícil
TN10	Teoría de números: Números primos	274	22%	Difícil
G8	Geométrico: áreas	295	24%	Difícil
A4	Algebraico Valor numérico	326	26%	Difícil
TN1	Teoría de Números: Divisibilidad	478	38%	Fácil
TN3	Teoría de números: Cuadrados perfectos	496	40%	Fácil
G5	Geométrico: área	545	43%	Muy fácil

Tabla 5. Clasificación de los ítems según su categoría en la prueba clasificatoria nivel avanzado 2009.

En la Tabla 8 se muestra el número de estudiantes que respondieron cada opción en los ítems, además se resalta la opción correcta y la opción más contestada.

	TN1	G2	TN3	A4	G5	C6	A7	G8	L9	TN10	G11	C12
a	94	130	263	145	96	155	156	461	492	125	279	89
b	487	771	220	619	183	99	125	217	253	265	228	150
c	103	126	496	80	545	87	223	295	115	433	244	771
d	478	63	147	326	249	121	227	89	89	132	218	95
e	90	113	80	36	171	694	393	138	253	102	98	51
NO Respondieron	2	51	48	48	10	98	130	54	52	197	187	98

Tabla 6. Número de estudiantes que respondieron cada opción para los ítems de la prueba clasificatoria nivel avanzado 2009

Opción Correcta

Opción más contestada

En este nivel se no presentaron ítems de categoría 6 demasiado difícil, los ítems de este nivel se ubican en las siguientes categorías:

CATEGORÍA 1: Demasiado difícil

Como se observa en la Figura 3 se presentaron cuatro ítems en esta categoría, dos de ellos de combinatoria. Los otros dos ítems fueron uno de geometría y el otro de álgebra cada uno con un 10% de respuestas correctas. El ítem de combinatoria que solo obtuvo el 4% de respuestas correctas fue el siguiente:

12. El número de formas que se puede expresar 5 como la suma de 4 enteros no negativos es:

(a) 35 (b) 23 (c) 20 (d) 70 (e) 56

La opción correcta es la (e) Como solo hay 4 números para hallar la suma de 5, estos son el 1, 2,3 y 4; por lo que el estudiante multiplica $4 \times 5 = 20$; es así como la opción (c) fue la más contestada (Ver tabla 6).

- Problema de Combinatoria:

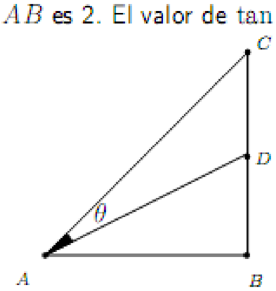
6. El número de formas distintas en que se pueden colocar 15 pelotas en una fila, si 4 son rojas, 3 son amarillas, 6 son negras y 2 azules es:

(a) $15\times14\times13\times12\times11$ (b) $15\times14\times13\times12\times11\times10$
(c) $15\times14\times13\times11\times10\times7$ (d) $15\times14\times13$
(e) Ninguna de las anteriores

La respuesta correcta es la opción (c) la cual eligieron 87 estudiantes. Para la solución de este problema se debían interpretar los datos para conformar las combinatorias. (Ver Solución Anexos). La opción (e) fue la más contestada (Ver Tabla 6) debido a que los estudiantes asumieron que como habían cuatro colores, entonces la combinación debía ser $15 \times 14 \times 13 \times 12$, como vemos esta expresión no está dentro de las opciones dadas por lo que escogieron la opción (e).

- Problema de Geometría:

2. En la figura, el ángulo $A\hat{B}C$ es rectángulo y las longitudes de los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{DC}$ es 1. La longitud del segmento AB es 2. El valor de $\tan(\theta)$ es:



(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{2}$ (e) $\frac{1}{5}$

La opción (a) es la respuesta correcta, la cual fue elegida por 125 estudiantes, es decir el 10%. Para la solución se debía realizar una interpretación gráfica del problema y aplicar identidades trigonométricas o el teorema del seno (Ver Solución Anexos). La opción (b) fue la más contestada (Ver Tabla 6), probablemente como el triángulo ABC es rectángulo e isósceles los ángulos A y C son de 45°, además recordemos que la tangente de 45° es igual a 1 y como el segmento $\overline{AD}$ divide al segmento $\overline{BC}$ en dos parte iguales los estudiantes piensan que sucede igual con el ángulo, luego dividen la tangente de 45° es dos lo cual es erróneo.

- Problema de Álgebra:

7. La cantidad de valores de x que hacen que la expresión $\dfrac{x+98}{x+18}$ sea un número entero es:

(a) 18 (b) 20 (c) 80 (d) 10 (e) 5

La respuesta correcta es la opción (b) la cual fue elegida por 125 estudiantes. Para resolver este problema se debía realizar la división entre los dos binomios e interpretar el resultado (Ver Solución Anexos). La opción (e) fue la más contesta; el error que tienden a cometer los estudiantes es el de cancelar las x y luego dividir 98 entre 18 lo que aproximadamente da 5, por lo que eligieron esta respuesta.

CATEGORÍA 2: Muy difícil

En esta categoría se presentaron dos ítems, los cuales fueron de geometría y razonamiento lógico con un porcentaje de 19% y 20% de respuestas correctas, respectivamente (Ver Figura 3).

- Problema de Geometría:

> **11.** Sea $ABCD$ un rombo de lado 61 tal que sus diagonales AC y BD verifican que $AC = 98 + BD$. El área del rombo es:
>
> (a) 2640 (b) 1320 (c) 660 (d) 1220 (e) 1200

La opción (b) es la respuesta correcta la cual fue elegida por 228 estudiantes. Para llegar a la solución, los estudiantes debían realizar una interpretación gráfica del problema, además debían utilizar el teorema de Pitágoras y la expresión del área del rombo (Ver Solución Anexos). La opción (a) fue la más contestada (Ver Tabla 6) lo cual se pudo deber a que los estudiantes asumieron que la expresión para hallar el área del rombo es diagonal por diagonal, omitiendo que debían dividir entre dos.

- Problema de Razonamiento Lógico:

> **9.** Un hombre nacido en la primera mitad del siglo diecinueve, tenía x años en él año x^2. Entonces él nació en:
>
> (a) 1849 (b) 1825 (c) 1812 (d) 1836 (e) 1806

La opción (e) es la respuesta correcta la cual eligieron 253 estudiantes. Para encontrar la respuesta el estudiante debía descomponer los números que aparecen en las opciones dadas (Ver Solución Anexos). La opción más contestada fue la (a) (Ver Tabla 6) esto se pudo deber a que los estudiantes vieron que este número era el único con raíz exacta $1849 = 43^2$, llegando a que 43es la edad del hombre, olvidándose que preguntaban por el año en que nació.

CATEGORÍA 3: Difícil

Se presentaron tres ítems en esta categoría 3 (Ver Figura 3), con un porcentaje menor de 30% de respuestas correctas.

- Problema de Teoría de Números:

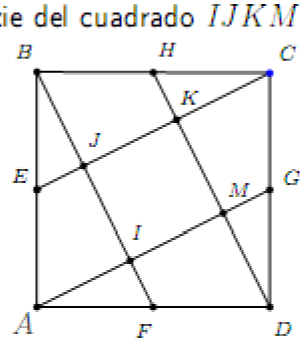
10. El último año del siglo XX fue especial. Existen enteros positivos a y b tales que $1999 = a^2 - b^2$. Un valor de $a^2 + b^2$ es:

(a) 1998000 (b) 1998001 (c) 1999000
(d) 1995001 (e) 1996001

La opción (b) es la respuesta correcta la cual eligieron 265 estudiantes. Para la solución de este problema los estudiantes debían conocer el concepto de número primo y factorizar (Ver Solución Anexos). La opción (c) fue la más contestada debido a que los estudiantes asumieron que si la diferencia era igual a 1999 la suma de los cuadrados debía comenzar por este mismo número pero ser mayor, por lo que contestaron 1999000. (Ver Tabla 6).

- Problema de Geometría:

8. Si en la figura, el cuadrado $ABCD$ tiene de lado 4 cm, la superficie del cuadrado $IJKM$ es:



(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{16}{5}$ (d) $\frac{12}{5}$ (e) $\frac{2}{5}$

La respuesta correcta es la (c) la cual eligieron 295 estudiantes. Para resolver este problema los estudiantes debían realizar una interpretación gráfica, además debían tener claro el concepto del área de un cuadrado (Ver Solución Anexos). La opción (a) fue la más contestada (Ver Tabla 6) esto se dio posiblemente porque los estudiantes notan que el área del cuadrado $IJKM$ es la quinta parte del cuadrado $ABCD$ sin tener en cuenta que se pregunta cuál es el área del cuadrado $IJKM$ y no que proporción del área con respecto a la del cuadrado $ABCD$.

- Problema de Álgebra:

4. Sea f una función cuyo dominio y recorrido es el conjunto de los números naturales. Si f se define por $f(1) = 1$ y $f(n) = (n-1)f(n-1)$, el valor de $f(4)$ es:

(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

La respuesta correcta es la opción (d) la cual fue elegida por 326 estudiantes. Para encontrar la solución a este problema los estudiantes debían encontrar los valores numéricos basándose en la expresión dada (Ver Solución Anexos). La opción más contestada fue la (b) (Ver Tabla 6), probablemente fue debido a que como $f(1) = 1$, piensan que todo número tiene como imagen a si mismo para dicha función.

CATEGORÍA 4: Fácil

En esta categoría se presentaron dos ítems de teoría de números con un 38% y 40% de respuestas correctas (Ver Figura 3).

- Teoría de Números:

1. El número de enteros positivos que no exceden a 70, que son divisibles por 2 y 3 es:

(a) 47 (b) 36 (c) 10 (d) 11 (e) 58

La opción (d) es la respuesta correcta la cual fue elegida por 478 estudiantes. Para la solución de este problema se debía aplicar los criterios de divisibilidad (Ver Solución Anexos). La opción más contestada fue la (b) (Ver Tabla 6) esto posiblemente ocurrió porque los estudiantes descompusieron en factores primos las opciones dadas y el único número cuyos factores eran $2^2 \times 3^2$ es 36.

- Teoría de Números:

3. ¿Cuántos números de 1 al 1000 son cuadrados perfectos?

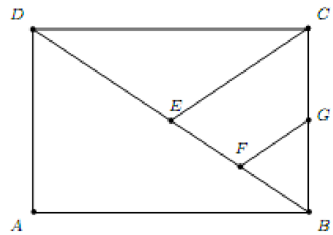
(a) 25 (b) 30 (c) 31 (d) 35 (e) 21

La opción (c) fue la más contestada y es la respuesta correcta, la cual respondieron 496 estudiantes. La elección de las demás opciones se pudo deber a que los estudiantes no manipulan bien los conceptos de número cuadrado perfecto y de potenciación. (Ver Solución Anexos).

CATEGORÍA 5: Muy fácil

En esta categoría se presentó un ítem con el 43% de respuestas correctas (Ver Figura 3), el cual fue el siguiente problema geométrico:

5. Sea $ABCD$ un rectángulo. Sea E el punto medio del segmento $\overline{BD}$, F el punto medio del segmento $\overline{EB}$ y G el punto medio del segmento $\overline{BC}$. ¿Qué fracción del área del rectángulo $ABCD$ es el área del triángulo BGF?



(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{16}$ (d) $\frac{1}{8}$
(e) Ninguna de las anteriores

La respuesta correcta es la (c) la cual fue la más contestada (Ver Tabla 6), Este problema fue muy fácil ya que requiere concepto que se vienen manejando desde primaria como son las propiedades de un rectángulo, el punto medio de un segmento, el área del rectángulo y del triángulo (Ver Solución Anexos). Independientemente de la solución que se da en los Anexos, se pudo presentar el siguiente razonamiento por parte de los estudiantes: El segmento $\overline{BD}$ divide el rectángulo en dos partes, luego se pasa el segmento $\overline{EC}$ al triángulo restante, queda la cuarta parte del área del rectángulo y si tomamos la mitad del triángulo restante y de manera semejante razonamos tenemos la octava parte y finalmente utilizando el mismo razonamiento obtenemos la dieciseisava parte, que es la respuesta correcta.

NIVEL BÁSICO 2010

En el nivel básico se presentaron 857 estudiantes.

La Figura 4 muestra el porcentaje de respuestas correctas para cada ítem de la prueba clasificatoria correspondiente al nivel básico del año 2010.

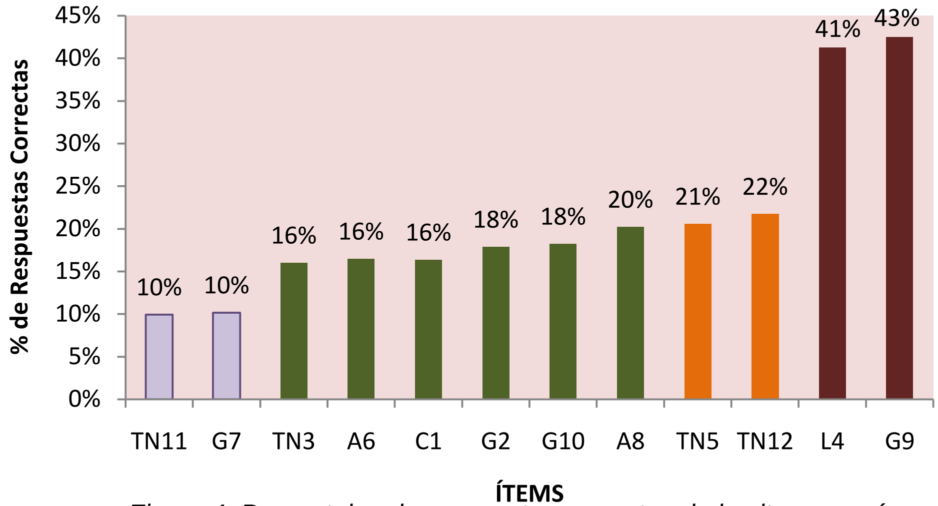


Figura 4. Porcentajes de respuestas correctas de los items según la categoria para la prueba clasificatoria correspondiente al nivel básico del año 2010

Demasiado difícil: TN11 y G7.

Difícil: TN5 y TN12.

Muy difícil: TN3, A6, C1, G2, G10 y A8.

Muy fácil: L4 y G9.

En este nivel se presentaron ítems que se ubican en las siguientes categorías:

ÍTEMS	Tipo de Problema	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas	CATEGORÍA
TN11	Teoría de números: Conteo	85	10%	Demasiado difícil
G7	Geometría: Área y perímetro	87	10%	Demasiado difícil
TN3	Teoría de números: Sucesiones	137	16%	Muy difícil
A6	Álgebra: Valor numérico	141	16%	Muy difícil
C1	Combinatoria: Regla del producto	140	16%	Muy difícil
G10	Geometría: T. de Pitágoras, radio y segmento circular	156	18%	Muy difícil

G2	Geometría	153	18%	Muy difícil	
A8	Álgebra: Planteamiento y resolución de una ecuación	173	20%	Muy difícil	
TN5	Teoría de Número: Producto entre decimales y potencias de 10	176	21%	Difícil	
TN12	Teoría de Números: Propiedades de enteros	186	22%	Difícil	
L4	Lógica	354	41%	Muy fácil	
G9	Geometría: Teorema suma de ángulos internos de un triángulo y definición de ángulos suplementarios	364	43%	Muy fácil	

Tabla 7. Clasificación de los ítems según su categoría en la prueba clasificatoria nivel básico 2010

En la Tabla 8 se muestra el número de respuestas que obtuvo cada opción para los ítems, además de resaltar la opción correcta y la opción más contestada.

	C1	**G2**	**TN3**	**L4**	**TN5**	**A6**	**G7**	**A8**	**G9**	**G10**	**TN11**	**TN12**
A	117	153	229	105	113	196	88	84	181	156	74	119
B	481	186	124	63	118	293	55	141	117	89	109	156
C	140	58	255	78	52	140	330	225	93	160	85	186
D	38	52	75	249	176	70	87	190	92	153	434	243
E	63	386	137	354	352	141	281	173	364	246	139	100
NO Respondieron	18	22	37	8	46	17	16	44	10	53	16	53

Tabla 8. Número de estudiantes que respondieron cada opción para los ítems de la prueba clasificatoria nivel básico 2010.

Opción Correcta

Opción más contestada

A continuación se presenta un análisis de los ítems por categorías:

CATERGORIA 1: Demasiado difícil

En la Figura 4 se observa que los dos ítems con menor porcentaje de respuesta correcta son el TN11 y el G7 que son de teoría de números y geometría respectivamente, cada uno de estos tiene un porcentaje de 10%, lo cual nos permite clasificarlos dentro de la escala en la categoría 1 reflejando un grado de dificultad alto en comparación con los demás ítems. Estos ítems son los siguientes:

- Problema de Teoría de Números:

> **11.** Para enumerar las páginas de un libro, un tipógrafo ha empleado 207 números dígitos. El número de páginas que tiene el libro es:
>
> (a) 106 (b) 104 (c) 105 (d) 207 (e) 103

La respuesta correcta de este ítem es la (c), la cual respondieron 85 estudiantes (Ver Tabla 8), para la solución de este ítem se requería de un conteo de los dígitos por unidades y decenas (Ver Solución Anexos). La opción (d) fue la respuesta de 434 estudiantes, es decir la que más eligieron los alumnos, lo que refleja que ellos no comprendieron bien el enunciado, ya que asumieron que al haber empleado 207 números dígitos para numerar las páginas del libro ese mismo era el número de páginas, es decir, asimilaron "número dígito" con "número". De todas maneras, este tipo de problemas donde se pueden generar confusiones por la terminología utilizada, creemos no es aconsejable colocarlos ya que pueden dar una imagen falsa de la habilidad matemática de los estudiantes concursantes.

- Problema de Geometría:

7. Sea $PQRS$ una hoja cuadrada de papel. Se dobla la hoja hasta que P coincida con R y luego sin desdoblar, se dobla nuevamente hasta que Q coincida con S. El área de la figura que resulta es de $9cm^2$. El perímetro del cuadrado $PQRS$ es:

(a) 9 (b) 16 (c) 18 (d) 24 (e) 36

La respuesta correcta de este ítem era la (d), la cual respondieron 87 estudiantes. Para resolver este ítem el estudiante necesitaba conocer el concepto de área y el perímetro del cuadrado (Ver Solución Anexos). En la Tabla 7 se observa que la cantidad de estudiantes que eligieron la opción (c) fueron 330, que posiblemente asumieron como área del triángulo $PQS 9cm^2$ y después hallaron el área del cuadrado $PQRS$, siendo ésta el doble del área del triángulo PQS, es decir $18\ cm^2$. La segunda opción que más eligieron 281 estudiantes fue la (e), lo cual muestra que no tienen claro la definición de perímetro y área pues $36\ cm^2$es el área del cuadrado $PQRS$ y no su perímetro.

CATEGORIA 2: Muy difícil

En la Figura 4 se observa que en la categoría 2 se encuentran seis de los doce ítems, lo cual muestra claramente que el nivel estuvo alto para los estudiantes que presentaron la prueba. Los ítems TN3, A6 y C1 los respondieron correctamente el 16% de los estudiantes, los ítems G10 y G2 el 18% y el ítem A8. La descripción y análisis de las respuestas de los ítems de esta categoría se observan a continuación:

- Problema de Teoría de Números:

3. Mi calculadora está dañada. Sólo muestra la cifra en las unidades de la suma cuando efectúo una adición. Por ejemplo, 6+7 produce 3 en la pantalla de mi calculadora. Conseguí que apareciera la sucesión de dígitos 8,6,4,0,4,4,8,...., de la siguiente manera. Cada término después de la segunda es la suma, en mi calculadora, de los dos dígitos inmediatamente anteriores. ¿Cuál es el dígito que ocupa la posición 99 en la sucesión?

(a) 8 (b) 6 (c) 4 (d) 2 (e) 0

La respuesta es cero, es decir la opción (e), la cual respondieron correctamente 137 estudiantes. Para resolver este ítem debían escribir la sucesión de los números que se producían en la pantalla de la calculadora, teniendo en cuenta las indicaciones dadas en el problema de manera que pudieran encontrar una secuencia que les permitiera identificar el dígito 99 sin escribirlos todos (Ver Solución Anexos). La opción que eligieron 255 estudiantes como solución del problema fue la (c) y 229 estudiantes eligieron la (a) (Ver Tabla 8), lo que muestra que ellos tal vez no escribieron la sucesión correctamente con las indicaciones, escribieron la sucesión pero no encontraron una relación o contaron mal el dígito que ocupaba la posición 99 en la sucesión que escribieron.

- Problema de Álgebra:

6. Cada una de las letras w, x, y y z, representa un entero diferente del conjunto $\{1, 2, 3, 4\}$, pero no necesariamente es ese orden. Si $\frac{w}{x} - \frac{y}{z} = 1$, entonces la suma de w y y es:

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

En el ítem anterior la respuesta correcta es la (e), la cual respondieron 141 estudiantes, para la solución de este problema se requería que los alumnos tuvieran claro cómo realizar la diferencia entre dos números fraccionarios y una sustitución de las variables por los números que se mencionaban en el enunciado (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron los estudiantes fue la (b) (Ver Tabla 8), lo que refleja que ellos probablemente sumaron las letras equivocadas, hicieron un reemplazo de las variables que no cumplían con la igualdad o hicieron la diferencia de las fracciones de manera incorrecta.

- Problema de Combinatoria:

> **1.** ¿Cuántos números de cuatro dígitos son tales que contienen solamente los dígitos 1 y 2, y cada uno de estos dígitos aparece al menos una vez?
>
> (a)10 (b) 12 (c) 14 (d) 15 (e)16

La respuesta correcta del ítem uno es la (c), la cual eligieron 140 estudiantes. Para resolver este ítem los alumnos podían escribir la lista de las diferentes combinaciones que cumplieran con la condición o simplemente aplicar el principio del producto, lo que les daba un total de 16 combinaciones posibles pero al quitarle las dos que tienen los cuatro dígitos iguales como 1111 y 2222 les quedaban los 14 números que era la respuesta (Ver Solución Anexos). Es de resaltar que 481 estudiantes eligieron la opción (b) (Ver Tabla 8), dando como respuesta a este problema 12, lo cual muestra que posiblemente la estrategia utilizada fue la de hacer la lista de todos los números sin utilizar el principio fundamental de conteo, lo que, como se sabe, conduce muchas veces a olvidar combinaciones posibles.

- Problema de Geometría:

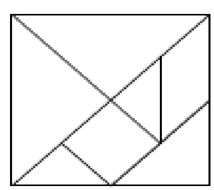
10. Una ventana tiene la forma de un cuadrado de lado 60 cm con un segmento de círculo de radio 50 cm montado encima. El segmento de círculo es menor que un semicírculo. ¿Cuál es la altura máxima en centímetros de la ventana?

(a) 70 (b) 80 (c) 85 (d) 90 (e) 100.

La respuesta correcta para el anterior ítem es la (a), la cual eligieron156 estudiantes. La solución de este problema requería que los alumnos tuvieran clara la definición de radio, diámetro y segmento circular, y el conocimiento del teorema de Pitágoras (Ver Solución Anexos). La opción que eligieron 246 estudiantes fue la (e), lo cual posiblemente sea porque los alumnos tomaron como altura máxima de la ventana el diámetro del círculo o no hicieron una representación gráfica que les ayudara a tener una mejor comprensión del problema.

- Problema de Geometría:

2. Se construye un rompecabezas llamado tangram recortando un cuadrado en 5 triángulos, un cuadrado y un paralelogramo tal como se muestra en la figura. El área del cuadrado original es de una unidad cuadrada. El área del paralelogramo, en unidades cuadradas es:



(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{1}{16}$ (e) $\frac{1}{7}$

En el anterior ítem la respuesta correcta es la (a), que fue seleccionada por 153 estudiantes. Para resolver este problema se requería que el alumno dividiera el cuadrado en figuras de igual tamaño, en este caso iguales al triángulo pequeño, así se daría cuenta que el paralelogramo está formado por dos de estos triángulos y de esta manera encontrar que el área de ésta figura es$1/8\ cm^2$, (Ver Solución anexos). La opción que eligieron 386 estudiantes fue la (e) (Ver Tabla 8), lo que permite ver que no tienen claro que para una de las representaciones de las fracciones como parte de un todo es necesario que la figura esté dividida en partes iguales, cosa que asumieron para este problema.

- Problema de Álgebra:

> **8.** Hay dos bloques de oro, uno de los cuales pesa $\frac{3}{4}$ del otro. Si se coloca el bloque más pesado en uno de los platillos de una balanza, para equilibrarla es necesario colocar en el otro platillo el otro bloque de oro y 215 gramos más. ¿Cuál es el peso en gramos del bloque más liviano?
>
> (a) $\frac{860}{3}gr$ (b) $860gr$ (c) $215gr$ (d) $\frac{645}{4}gr$ (e) 645

La respuesta correcta del anterior ítem es la opción (e), que fue escogida por 173 estudiantes. Para la solución debían plantear una ecuación que les permitiera encontrar los valores del bloque más pesado y con ello el del bloque más liviano (Ver Solución Anexos). Se observa que los estudiantes no comprendieron el enunciado del problema ya que la opción que más eligieron fue la (c) (Ver Tabla 8), es decir 215gr mostrando así que pasaron por alto la parte del problema en que decía que para quedar equilibrados en la balanza debían agregarle 215gr no que ese era peso del bloque liviano.

CATEGORÍA 3: Difícil

En la Figura 4 se observa que en esta categoría se encuentran los ítems TN5 y TN12 que son de Teoría de Números. Estos ítems tuvieron un porcentaje de 21% y 22% respectivamente de buenas respuestas. La descripción y análisis de los ítems ubicados en esta categoría se encuentra a continuación:

- Problema de Teoría de Números:

5. $100 \times 20,10 \times 2,010 \times 1000 =$

(a) $(2,010)^2$ (b) $(20,10)^2$ (c) $(201)^2$
(d) $(2010)^2$ (e) $(20100)^2$

La respuesta correcta del ítem cinco es la (d), la cual eligieron 176 estudiantes. Para la solución de este problema se requería que ellos tuvieran en cuenta cómo se realizan multiplicaciones abreviadas de potencias de diez con números decimales (Ver Solución Anexos). La opción (e) la eligieron 352 estudiantes lo cual evidencia que no tienen claro cómo realizar operaciones, en este caso el producto entre números decimales y las potencias de diez, ya que asumieron que esa operación era igual a $(20100)^2$.

- Problema de Teoría de Números:

12. El resultado de la operación $1 - 2 + 3 - 4 + \cdots - 2010 + 2011$, donde el signo alterna entre $-$ y $+$ después de cada número es:

(a) -1005 (b) 2011 (c) 1006 (d) 2010 (e) -1006

En el anterior ítem la respuesta correcta es la opción (c), la cual respondieron 186 estudiantes, para la solución de este problema el alumno debía agrupar un número impar y uno par y darse cuenta que el resultado de esa expresión es la mitad del número par pero negativo, entonces al final tendrá la mitad de 2010 negativa más 2011 lo cual le dará como resultado 1006 (Ver Solución Anexos). La opción (d) la eligieron 243 estudiantes lo que muestra que no tenían claro cómo realizar la operación, que cometieron un error al operar con números enteros, la falta de aplicación de las propiedades de los números enteros o porque al realizar la operación entre los primeros números el resultado es el número anterior luego en este caso como el último número es 2011 entonces asumieron que el resultado de la expresión era 2010.

CATEGORÍA 5: Muy fácil

En la Figura 4 se observa que los ítems con menor dificultad para los estudiantes fueron el L4 y el G9 de razonamiento lógico y geometría respectivamente, con un porcentaje de 41% y 43 %, lo que permite ubicar a estos ítems en la categoría 5 de muy fáciles. El análisis de los resultados de los ítems se encuentra a continuación:

- Problema de Razonamiento Lógico:

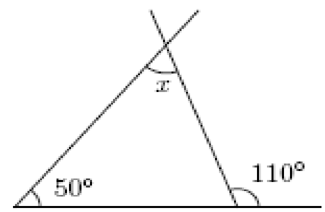
4. Si $\begin{array}{c|c} a & b \\ \hline c & d \end{array} = a \cdot d - b \cdot c$ ¿Cuál es el valor de $\begin{array}{c|c} 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$?

(a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 1 (e) 2.

En el anterior ítem la respuesta correcta es la (e), la cual respondieron 354 estudiantes que en este caso fue la mayoría (Ver Tabla 8), Resolver este problema requería que el alumno interpretara cómo realizar las operaciones entre las variables y después efectuar un reemplazo por los números que aparecían en el anunciado (Ver Solución Anexos). Los alumnos que no respondieron correctamente a este ítem pudieron haber cometido errores como: no realizaron los productos, multiplicaron mal o realizaron otra operación en vez de la multiplicación.

- Problema de Geometría:

9. En el diagrama, el valor de x es:



(a) 20° (b) 45° (c) 70° (d) 55° (e) 60°

La respuesta correcta en el anterior ítem es 60°, es decir la opción (e), la cual fue elegida por 364 estudiantes, en este caso la mayoría (Ver Tabla 8). Para la solución de este problema se requería que el estudiante utilizara el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo y la definición de ángulos suplementarios (Ver Solución Anexos). La segunda opción que más eligieron los estudiantes fue la (a) (Ver Tabla 8), lo que refleja que ellos posiblemente asumieron que como el ángulo suplementario de 110° es 70° entonces 50°+ x debía sumar 70°, así que entonces x debía ser 20°.

NIVEL MEDIO 2010

En el nivel medio se presentaron 1051 estudiantes.

En la Figura 5 se observa el porcentaje de respuestas correctas para cada ítem de la prueba clasificatoria correspondiente al nivel medio.

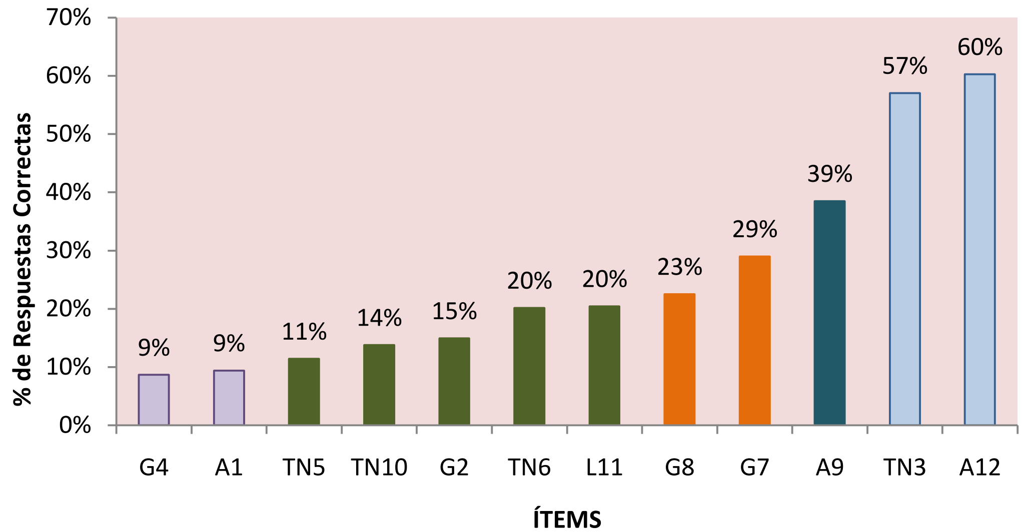


Figura 5. Porcentajes de respuestas correctas de los items segun la categoria para la prueba clasificatoria correspondiente al nivel medio del año 2010

- Demasiado difícil: G4 y A1.
- Muy difícil: TN5, TN10, G2, TN6 y L11
- Difícil: G8 y G7.
- Fácil: A9.
- Demasiado fácil: TN3 y A12.

En este nivel se presentaron ítems que se ubican en las siguientes categorías:

ÍTEMS	Tipo de Problema	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas	CATEGORÍA
G4	Geometría: Definición de vértice	91	9%	Demasiado difícil
A1	Álgebra: Valor numérico	98	9%	Demasiado difícil
TN5	Teoría de números	120	11%	Muy difícil
TN10	Teoría de números: Teorema fundamental de la aritmética	144	14%	Muy difícil
G2	Geometría: Desigualdad triangular	156	15%	Muy difícil
TN6	Teoría de números: Teorema fundamental de la aritmética	211	20%	Muy difícil

L11	Razonamiento lógico	214	20%	Muy difícil	
G8	Geometría: Teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo, definición de bisectriz y ángulos suplementarios	237	23%	Difícil	
G7	Geometría: Definición de bisectriz y propiedades del Incentro	304	29%	Difícil	
A9	Álgebra: Planteamiento de ecuación	405	39%	Fácil	
TN3	Teoría de números	600	57%	Demasiado fácil	
A12	Álgebra: Resolución de ecuaciones	633	60%	Demasiado fácil	

Tabla 9. Clasificación de los ítems según su categoría en la prueba clasificatoria nivel medio 2010

En la Tabla 10 se muestra el número de respuestas que obtuvo cada opción para los ítems, además de resaltar la opción correcta y la opción más contestada.

	A1	**G2**	**TN3**	**G4**	**TN5**	**TN6**	**G7**	**G8**	**A9**	**TN10**	**L11**	**A12**
A	187	162	72	141	177	213	211	92	122	87	91	66
B	98	102	600	348	410	190	218	129	405	95	214	78
C	548	156	175	300	120	153	304	239	143	558	358	183
D	87	260	124	91	116	205	101	237	193	105	211	76
E	98	313	59	100	156	211	89	252	146	144	116	633
NO Respondieron	33	58	21	71	72	79	128	102	42	62	61	15

Tabla10. Número de estudiantes que respondieron cada opción para los ítems de la prueba clasificatoria nivel medio 2010

Opción Correcta

Opción más contestada

A continuación se encuentra la descripción de los ítems y el análisis de los resultados de acuerdo a cada categoría:

CATEGORÍA 1: Demasiado difícil

En la Figura 5 se observa que los ítems con mayor dificultad para los estudiantes fueron el G4 y el A1, los cuales están clasificados en las áreas de geometría y algebra respectivamente, con un porcentaje del 9%, esto permite ubicarlos en la categoría 1, lo que refleja un grado alto de dificultad para los estudiantes al momento de solucionarlos.

- Problema de Geometría:

> **4.** Sea R un rectángulo. ¿Cuántos círculos que están en el mismo plano que R tienen un diámetro cuyos dos extremos son vértices de R?
>
> (a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 5 (e) 6.

La respuesta correcta a este ítem es la (d), esta fue la elección de 91 estudiantes. Para la solución de este problema se requería tener claro el concepto de vértice, diámetro de un círculo y plano (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron los alumnos fue la (b) (Ver Tabla 10), lo que refleja que ellos sólo contaron los círculos que tenían como diámetro la base y la altura del rectángulo pero como resultan dos círculos iguales con la base entonces lo contaron como uno sólo, de igual manera para los círculos que se forman con la altura del rectángulo. La opción (c) fue la segunda que más eligieron ya que contaron los cuatro círculos que tienen como diámetro los cuatro lados del rectángulo. Los resultados reflejan que ellos omitieron el círculo que tiene como diámetro la diagonal del rectángulo.

- Problema de Álgebra:

> **1.** Si $[a, b, c]$ representa la operación $\frac{a+b}{c}$, donde $c \neq 0$, ¿Cuál es el valor de $[[60, 30, 90], [2, 1, 3], [10, 5, 15]]$?
>
> (a) 0 (b) 0,5 (c) 1 (d) 1,5 (e) 2

La respuesta correcta del ítem uno es la (e), la cual respondieron 98 estudiantes. Para la solución de este ítem el estudiante requería interpretar la expresión que aparecía en el enunciado y reemplazarla por los valores que éste contenía (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron los alumnos fue la (c) (Ver Tabla 10), la cual evidencia una buena interpretación de la expresión que aparece en el enunciado pero hubo un error al momento de realizar el cociente entre $a + b$ y c.

CATEGORIA 2: Muy difícil

En la Figura 5 se observa que en esta categoría 2 se encuentran cinco ítems los cuales son: TN5, TN10, G2, TN6 y L11, éstos problemas tuvieron porcentajes de 11%, 14%, 15%, 20% y 20% respectivamente de respuesta correcta (Ver Tabla 9). Esto evidencia que en esta categoría se encuentran la mayoría de los ítems reflejando cierta dificultad para la resolución. La descripción de los ítems se encuentra a continuación.

- Problema de Teoría de Números:

> **5.** Existen números enteros positivos que tienen las siguientes propiedades: la suma de los cuadrados de sus dígitos es 50 y cada dígito es mayor que el dígito a su izquierda, el producto de los dígitos del mayor entero con ambas propiedades es:
>
> (a) 7 (b) 25 (c) 36 (d) 48 (e) 60

La respuesta correcta de este ítem es la (c), la cual marcaron 120 estudiantes.Para resolver este problema se requería que los estudiantes hicieran una lista de los números cuadrados que hay de 1 a 50 y encontrar los diferentes grupos de cuadrados que al sumarlos diera como resultado 50 y así encontrar el producto de los dígitos de este número (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron los estudiantes fue la (b) (Ver Tabla 10), esta respuesta cumple con las características que se mencionan en el enunciado, pero no tuvieron en cuenta que tenían que encontrar el producto de los dígitos del **mayor entero** que cumpla con las condiciones.

- Problema de Teoría de Números:

10. Los números de 1 a 2010 se han organizado en columnas de la siguiente forma:

1	2	3	4	5	6	7	$\cdots$	?
1	2	3						
	4	5	6					
		7	8	9				
			10	11	12			
						$\vdots$		
								2010

¿En qué columna se encuentra el 2010?

(a) 668 (b) 669 (c) 670 (d) 671 (e) 672.

La respuesta correcta es la (e), la cual eligieron 144 estudiantes. Para la solución de este ítem se requería aplicar el teorema fundamental de la aritmética y con este encontrar un factor que multiplicado por tres dé como resultado 2010 y a este número sumarle dos (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron los estudiantes fue la (c) (Ver Tabla 10), lo que refleja que ellos encontraron que 670*3=2010 y asumieron que 2010 se encontraba en la columna 670, pero no se fijaron que los múltiplos de tres iniciaban en la tercera columna lo que implicaba agregarle a 2 a 670.

- Problema de Geometría:

2. Los tres lados de un triángulo tienen longitudes de a cm, $(a+1)$ cm, $(a+2)$ cm Los valores posibles que a puede tomar son:

(a) $a > 0$ (b) $0 \leq a < 1$ (c) $a > 1$
(d) $0 < a < 2$ (e) $a = 1$

En el anterior ítem la respuesta correcta es la (c), la cual eligieron 156 estudiantes. Para la solución de este ítem se requería el uso de la desigualdad triangular (Ver Solución Anexos). La opción que eligieron 313 estudiantes es la (e), esto parece indicar que ellos están acostumbrados a encontrar una única respuesta en las situaciones problemas que les presentan, y como está es la única opción que tiene un solo número como solución por eso fue la opción que mayor frecuencia tuvo.

- Problema de Teoría de Números:

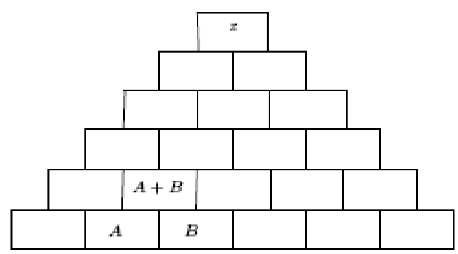
6. Iris lanza cuatro dados (comunes de 6 caras) y resulta que el producto de los números que muestran las cuatro caras superiores de los dados es 144. ¿Cuál de los siguientes números no puede ser la suma de los números en las cuatro caras superiores?

(a) 14 (b) 15 (c) 16 (d) 17 (e) 18

La respuesta correcta del ítem seis es la (e), la cual eligieron 211 estudiantes. Para la solución de este ítem se requería aplicar el teorema fundamental de la aritmética para encontrar las diferentes combinaciones de números y al sumarlos poder hallar la suma de las caras superiores que no puede ser posible (Ver Solución Anexos). En general la frecuencia de respuesta correcta para los ítems estuvo muy similar y no hubo una marcada tendencia hacia alguna de las opciones, ya que marcaron la (a) 213 y la (d) 205 (Ver Tabla 10), de lo cual se puede concluir que los estudiantes posiblemente no encontraron los cuatro números que al multiplicarlos diera como resultado 144 y al sumarlos diera alguna de las opciones que allí aparecía.

- Problema de Razonamiento Lógico:

11. Se escribe cada uno de los números 1, 2, 3, 4, 5 y 6 en una de las casillas de la base de la pirámide. En cada una de las casillas superiores se pone la suma de los números de las dos casillas que las sostiene, tal y como se ilustra en el diagrama. Se sigue así hasta obtener un sólo número x en la casilla superior. El menor valor que puede tomar x es:



(a) 148 (b) 76 (c) 110 (d) 96 (e) 67

En el anterior ítem la respuesta correcta es la (b), la cual eligieron 214 estudiantes. Para la solución de este problema se requería que los alumnos analizaran los números que les convendrían que fueran Ay B para obtener el menor valor de x(Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron los estudiantes fue la (c) (Ver Tabla 10), lo que refleja que los estudiantes al intentar resolver el problema por ensayo y error y posiblemente las veces que lo intentaron, el valor de x fue superior a 110 obteniendo así este como el menor valor que puede tomar x.

CATEGORÍA 3: Difícil

En la Figura 5 se observa que en esta categoría se encuentran dos ítems que son: el G8 y el G7 de geometría, los porcentajes que obtuvieron fue 23% y 29%

respectivamente, evidenciando cierta dificultad que se le presenta a los estudiantes del nivel medio la resolución de problemas geométricos. La descripción de los ítems y un análisis de las respuestas de los estudiantes se encuentran a continuación.

- Problema de Geometría:

8. En el triángulo ABC, $\angle A = 60°$, $\angle B = 45°$ y $AC = 30\ cm$. D es un punto de lado BC tal que AD es la bisectriz del ángulo A. Si b es la longitud en centímetros de AD. El valor de b es :

(a) 60 cm (b) 75 cm (c) 45 cm (d) 30 cm (e) $15cm$

La respuesta correcta de este ítem es la (d), esta fue la opción que eligieron 237 estudiantes. Para la solución de este ítem se requería usar el Teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo, la definición de bisectriz, de ángulos suplementarios y de triángulo isósceles (Ver Solución Anexos). En este ítem se observa que no hay una marcada tendencia hacia una respuesta, ya que la opción (c) la eligieron 239 dos más que la opción correcta (Ver Tabla 10), esto evidencia que hubo una confusión entre los valores de los ángulos que ellos hallaron y la longitud de los lados del triángulo.

- Problema de Geometría:

7. Las longitudes de los lados del triángulo PQR son $PQ = 2, QR = 3$, y $RP = 4$. Las bisectrices de los ángulos P y Q se intersecan en el punto I. ¿Cuál es la razón entre el área del triángulo PIQ y PQR?

(a) $1:3$ (b) $1:4$ (c) $2:9$ (d) $2:11$ (e) $3:19$

La respuesta correcta del anterior ítem es la (c), la cual fue la opción de 304 estudiantes y fue la que más eligieron ellos (Ver Tabla 10). Para la solución de este ítem se requería hacer una construcción que permitiera ilustrar la situación, además del conocimiento de la definición de bisectriz y las propiedades del incentro (Ver Solución Anexos). Los demás estudiantes posiblemente eligieron las otras opciones debido a que asumieron que el triángulo era equilátero entonces al trazar las bisectrices quedarían tres triángulos equiláteros, lo cual refleja la respuesta de la opción (a).

CATEGORIA 4: Fácil

En la Figura 5 se observa que en esta categoría se encuentra ubicado un solo ítem que es el A9 de álgebra, con un porcentaje de 39%. A continuación se presenta un análisis de las respuestas de este ítem:

> **9.** Alix selecciona un número de dos dígitos, luego resta el número que ella ha escogido de 200 y finalmente duplica este último resultado. El mayor número que Alix puede obtener como respuesta es:
>
> (a) 398 (b) 380 (c) 220 (d) 202 (e) 200

La respuesta correcta del anterior ítem es la (b), la cual respondieron 405 estudiantes, en este caso la mayoría (Ver Tabla 10). Para la solución de este ítem se requería del planteamiento una ecuación (Ver Solución Anexos). En cuanto a los estudiantes que no respondieron correctamente a este ítem, es posible que ellos no hayan tenido en cuenta que en el enunciado les pedían el mayor número que Alix puede obtener como respuesta o simplemente hayan elegido la opción (a) por ser el mayor de los números sin tener en cuenta que este número no cumple con las condiciones del enunciado.

CATEGORÍA 6: Demasiado fácil

En la Figura 5 se observa que los ítems que presentaron menos dificultad para los estudiantes fueron el TN3 y el A12 correspondientes a las áreas de teoría de números y algebra respectivamente, los cuales obtuvieron unos porcentajes de 57% y 60%, así estos ítem quedan ubicados según la escala en la categoría 6 reflejando el manejo de los estudiantes de los conceptos requeridos para la solución. A continuación se presenta una descripción y análisis de las respuestas de los ítems.

- Problema de Teoría de Números:

3. Consideramos el conjunto de los 17 primeros enteros positivos, $\{1, 2, 3, \ldots, 17\}$. Hay que elegir dos números de este conjunto tales que la multiplicación de esos dos números sea igual a la suma de los restantes 15 números.

(a) 10 y 11 (b) 10 y 13 (c) 10 y 12
(d) 10 y 15 (e) 10 y 14

La respuesta correcta de este ítem es la (b), la cual eligieron 600 estudiantes. La solución de este ítem se podríahaber hecho por ensayo y error, realizando las multiplicaciones entre los números y la suma entre el resto de números (Ver Solución Anexos). Los estudiantes que no respondieron correctamente a este ítem posiblemente fueron por errores de cálculo.

- Problema de Álgebra:

12. A, B, C, D y E representan dígitos distintos si:

$$\begin{aligned} A+A+A &= B \\ C+C+C &= D \\ B+D &= E \end{aligned}$$

El valor de E es:

(a) 0 (b) 2 (c) 6 (d) 8 (e) 9

La respuesta correcta del este ítem es la (e), la cual eligieron 633 estudiantes. Para la solución de este ítem se requería que el estudiante reemplazara las variables de una ecuación con respecto a las otras ecuaciones y reemplazar los posibles valores que le permitieran encontrar el valor de E que cumpliera con las condiciones del enunciado (Ver Solución Anexos). Los demás estudiantes no lo resolvieron correctamente debido a errores en los cálculos o a no tener en cuenta las condiciones del problema.

NIVEL AVANZADO 2010

En el nivel avanzado se presentaron 1101 estudiantes.
La Figura 6 muestra el porcentaje de respuestas correctas para cada ítem de la prueba clasificatoria correspondiente al nivel avanzado.

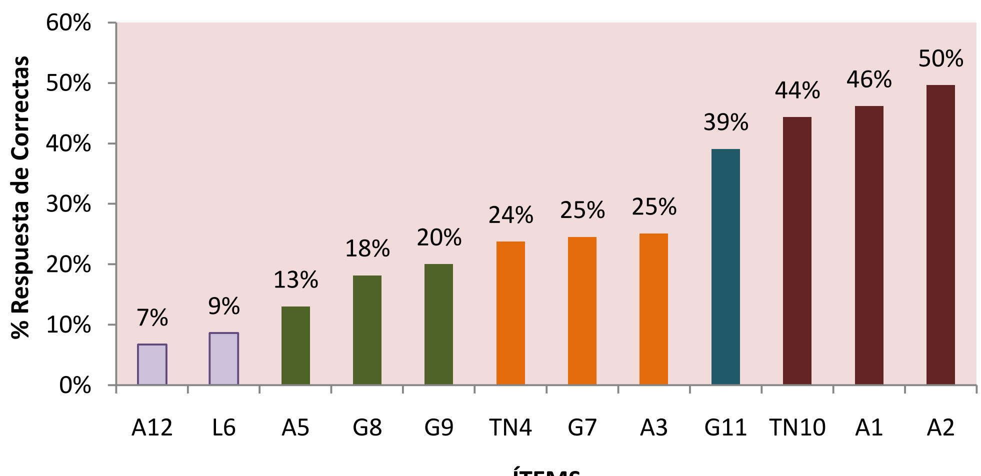


Figura 6. Porcentajes de respuestas correctas de los items según la categoria para la prueba clasificatoria correspondiente al nivel avanzado del año 2010

Demasiado difícil: A12 y L6.

Fácil: G11.

Muy difícil: A5, G8 y G9.

Muy fácil: TN10, A1 y A2

Difícil: TN4, G7 y A3.

En este nivel se presentaron ítems que se ubican en las siguientes categorías:

ÍTEMS	Tipo de Problema	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas	CATEGORÍA
A12	Álgebra: Planteamiento de ecuaciones	74	7%	Demasiado difícil
L6	Razonamiento Lógico	95	9%	Demasiado difícil
A5	Álgebra: Trinomio de la forma $ax^{2n} + bx^n + c$ con $a = 1$	143	13%	Muy difícil
G8	Geometría: Área del triángulo, ecuación de una recta	200	18%	Muy difícil
G9	Geometría: Movimientos en el plano	220	20%	Muy difícil
TN4	Teoría de Números: Sucesión de Fibonacci	261	24%	Difícil
G7	Geometría: Definición de tangencia y área del triángulo	270	25%	Difícil
A3	Álgebra: Resolución de una ecuación	276	25%	Difícil
G11	Geometría: Planteamiento de ecuaciones, área de un triángulo y de un trapecio	430	39%	Fácil
TN10	Teoría de Números	488	44%	Muy fácil
A1	Álgebra: Resolución de una ecuación y suma de Fracciones	508	46%	Muy fácil
A2	Álgebra: Factorización	546	50%	Muy fácil

Tabla 11. Clasificación de los ítems según su categoría en la prueba clasificatoria nivel avanzado 2010

En la Tabla 12 se muestra el número de respuestas que obtuvo cada opción para los ítems, además de resaltar la opción correcta y la opción más contestada.

	A1	A2	A3	TN4	A5	L6	G7	G8	G9	TN10	G11	A12
A	508	34	150	210	441	95	183	294	170	57	107	74
B	256	103	150	233	77	45	227	238	192	488	430	138
C	108	271	208	261	126	229	206	133	189	107	159	303
D	119	124	220	185	170	189	270	200	171	288	150	182
E	64	546	276	166	143	473	54	110	220	121	202	270
NO Respondieron	46	23	97	46	144	70	161	126	15	40	53	134

Tabla 12. Número de estudiantes que respondieron cada opción para los ítems de la prueba clasificatoria nivel avanzado 2010

Opción Correcta

Opción más contestada

A continuación se presenta una descripción y análisis de los resultados de los ítems por categorías:

CATEGORÍA 1: Demasiado difícil

En la Figura 6 se observa que los ítems que presentaron mayor dificultad fueron el A12 y el L6 clasificados según las áreas en álgebra y razonamiento lógico, estos tuvieron un porcentaje de respuestas correctas de 7% y 9% respectivamente, lo que permite ubicarlos en la escala en la categoría 1, evidenciando su grado de complejidad con respecto a los otros ítems.

- Problema de Álgebra:

12. Las caras de un paralelepípedo tiene áreas $2x$, $\frac{y}{2}$ y xy centímetros cuadrados respectivamente. El volumen del sólido en centímetros cúbicos es:

(a) xy (b) $2xy$ (c) x^2y^2 (d) $4xy$ (e) $4x^2y$

La respuesta correcta de este ítem es la (a), la cual eligieron 74 estudiantes. Para la solución de este ítem el estudiante necesitaba conocer la definición de un paralelepípedo, la expresión con la cual puede encontrar el volumen de este sólido y aplicar procedimientos algebraicos de despeje y sustitución de variables (Ver Solución Anexos). Las opciones que más eligieron ellos fueron la (c) y la (d) (Ver Tabla 12), lo cual evidencia errores al despejar y sustituir o tal vez por el desconocimiento de la clase de figura.

- Problema de Razonamiento Lógico:

6. En el año N, el día 300 del año cae en martes. En el año $N+1$, el día 200 del año también cae un martes. ¿Qué día de la semana cae el día 100 del año $N-1$?

(a) Jueves (b) Viernes (c) Sábado
(d) Domingo (e) Lunes

La respuesta correcta del anterior ítem es la (a), la cual eligieron 95 estudiantes. Para la solución de este ítem se requería que el estudiante realizara una secuencia lógica donde tuviera en cuenta la posibilidad de que el año $N-1$, N o $N+1$ fueran bisiestos (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron fue la (e), la cual marcaron como solución del problema 473 estudiantes (Ver Tabla 12), lo cual muestra que ellos asumieron que como $N-1$ era el año anterior al año N entonces los días del año $N-1$ se correrían un día en comparación con el año N, luego de ahí es que la respuesta para ellos fuera lunes por ser el día anterior al martes.

CATEGORÍA 2: Muy difícil

En la Figura 6 se observa que en esta categoría se encuentran dos ítem los cuales son: A5, G8 y G9 de las áreas de álgebra y geometría respectivamente, con unos porcentajes de respuesta correcta de 13%, 18% y 20%.

- Problema de Álgebra:

5. Si las soluciones de la ecuación $x^2 + bx + 36 = 0$, son números enteros, entonces la cantidad de valores enteros que b puede tomar es:

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

La respuesta correcta de este es la (e), la cual eligieron 143 estudiantes. Para la solución de este problema se requería que los estudiantes identificaran que esa expresión es el caso de factorización "Trinomio de la forma $ax^2 + bx + c$ con$a = 1$" y así encontrar los dos factores que le dieran como resultado 36 y con ello la suma de estos dos factores (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron los estudiantes fue la (a) (Ver Tabla 12), lo cual muestra que encontraron todos los factores como los son: 1×36; 2×18; 3×12; 4×9 y 6×6 , contaron uno doble vez y no consideraron los mismos factores negativos o consideraron los factores negativos pero no encontraron todos los factores que al multiplicarlos diera 36.

- Problema de Geometría:

8. Por un punto sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo se trazan líneas rectas paralelas a los catetos del triángulo de tal modo que se subdivide el triángulo en un cuadrado y dos triángulos rectángulos más pequeños. El área de uno de los triángulos rectángulos pequeños es igual a m por el área del cuadrado. La razón entre el área del otro triángulo rectángulo pequeño y el área del cuadrado es:

(a) $\frac{1}{2m+1}$ (b) m (c) $1-m$ (d) $\frac{1}{4m}$ (e) $\frac{1}{8m^2}$

La respuesta correcta de este ítem es la (d), la cual eligieron 200 estudiantes. Para la solución de este problema se requería hacer una representación gráfica de la situación sobre un plano cartesiano, para ubicar los puntos de los vértices del triángulo y así encontrar la ecuación de la recta que forma la hipotenusa (Ver Solución Anexos). En cuanto a las demás opciones no hubo una tendencia hacia alguna en especial, pero la (a) y la (b) presentan las frecuencias mayores (Ver Tabla 12), lo cual refleja que los estudiantes encontraron que el punto de corte con el eje y es $\frac{1}{2m+1}$ y así la respuesta sería la (a) y para la otra opción asumieron como solución la información que daba el enunciado del problema.

- Problema de Geometría:

9. Se refleja el punto $P(1,2,3)$ en el plano xy. Luego su imagen Q se rota por un ángulo de $180°$ alrededor del eje x para obtener el punto R. Finalmente se traslada R cinco unidades en la dirección positiva del eje y para obtener el punto S. ¿Cuáles son las coordenadas de S?

(a) $(1,7,-3)$ (b) $(-1,7,-3)$ (c) $(-1,-2,8)$
(d) $(-1,3,3)$ (e) $(1,3,3)$

La respuesta correcta de este ítem es la (e), la cual fue seleccionada por 220 estudiantes. Para la solución de este problema se requería tener en cuenta el significado de la palabra reflexión, rotación y traslación. Los estudiantes que no respondieron correctamente a este ítem posiblemente fue por errores al hacer los diferentes movimientos del punto P, pues si eligieron la opción (b) se pudo deber a que rotaron sobre el eje y y luego hicieron la traslación en dirección positiva del eje y, si eligieron la opción (c) se pudo deber a que hicieron la reflexión sobre el eje z y luego hicieron la traslación pero en dirección positiva del eje z, si eligieron la opción (a) se pudo deber a que hicieron la reflexión bien pero al momento de hacer la rotación sólo cambiaron la coordenada del eje z y luego hicieron la traslación de la manera que indicaba el enunciado, lo cual muestra dificultad para hacer esos movimientos en el plano y la identificación de los ejes en un plano tridimensional.

CATEGORÍA 3: Difícil

En la Figura 6 se observa que en esta categoría se encuentran ubicados cuatro ítems los cuales son: TN4, G7 y A3, que requieren de conocimientos de las áreas de teoría de números,geometría y álgebra. Los porcentajes de respuesta correcta para estos ítems son: 24% para el TN4, 25% para el G7 y el A3. La descripción y análisis de los resultados se encuentra a continuación.

- Problema de Teoría de Números:

4. La sucesión de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ comienza por dos unos y cada término a partir del tercero es la suma de los dos términos anteriores. ¿Cuál de los diez dígitos es el último en aparecer en la posición de las unidades de un número de la sucesión de Fibonacci?

(a) 0 (b) 4 (c) 6 (d) 7 (d) 9.

La respuesta correcta de este ítem es la (c), la cual fue seleccionada por 261 estudiantes. Para la solución de este ítem se requería continuar escribiendo la sucesión de Fibonacci (Ver Solución Anexos). Con respecto a los estudiantes que no respondieron correctamente este ítem, se observa en la Tabla 12 que no hubo una tendencia marcada hacia alguna respuesta en particular, esto muestra que ellos posiblemente no escribieron la sucesión de manera correcta, cometieron errores al hacer los cálculos o no tuvieron en cuenta que les pedían el último de los diez dígitos en ocupar la **posición de las unidades**.

- Problema de Geometría:

7. Tres esferas de radios $1, 2$ y 3 unidades son tangentes dos a dos. ¿Cuál es el área en unidades cuadradas, del triángulo que une sus centros?.

(a) 2π (b) $3\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{6}$ (d) 6 (e) $\sqrt{60}$

La respuesta correcta de este ítem es la (d), la cual eligieron 270 estudiantes. Para la solución de este problema se requería conocer la definición de círculos tangentes y radios y así poder hacer una representación gráfica de la situación que les permitiera encontrar las longitudes de los lados del triángulo y con ello el área (Ver Solución Anexos). En cuanto a las otras opciones no hay una tendencia hacia alguna en particular, lo cual refleja que los estudiantes que no respondieron correctamente este ítem posiblemente fue porque no hicieron una representación gráfica de la situación o porque al hallar el área del triángulo no hallaron la longitud de la base y la altura.

- Problema de Álgebra:

3. Si $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+x}}$, entonces x es igual a:

(a) $\sqrt{2} - 2$ (b) $\sqrt{2} + 2$ (c) $\sqrt{2}$
(d) $\sqrt{2} + 1$ (e) $\sqrt{2} - 1$

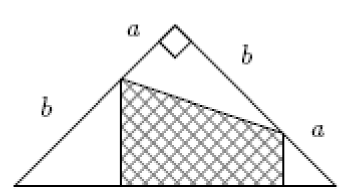
La respuesta correcta de este ítem es la (e), la cual eligieron 276 estudiantes. Para la solución de este problema se requería racionalizar para poder resolver la ecuación (Ver Solución Anexos). Los estudiantes que no respondieron este ítem correctamente posiblemente fue por errores al despejar la ecuación y al realizar cálculos, además se les pudo dificultar operar con $\sqrt{2}$ y por tener la incógnita en el denominador o lo resolvieron por ensayo y error.

CATEGORÍA 4: Fácil

En la Figura 6 se observa que en esta categoría solo se encuentra el ítem G11 con un porcentaje de respuestas correctas de 39%, éste es un problema geométrico y a continuación se encuentra el enunciado y un análisis de las respuestas.

- Problema de Geometría:

11. ¿Cuál es la razón del área de la región sombreada al área de la región no sombreada en el triángulo?



(a) 2 : 1 (b) 1 : 1 (c) 1 : 2 (d) 3 : 1 (e) 1 : 3

La respuesta correcta es la opción (b), la cual fue seleccionada por 430 estudiantes, además de ser la que más eligieron (Ver Tabla 12). Para la solución se requería conocer las características de un triángulo isósceles, el teorema de Pitágoras, las expresiones para hallar el área de un triángulo y un trapecio (Ver Solución Anexos). La dificultad de este problema se pudo presentar porque no identificaron la figura que representaba la región sombreada y por eso algunos asumieron que como el triángulo está formado por cuatro regiones y tres no están sombreadas entonces la opción bajo este razonamiento sería la (e) con una razón $1{:}\,3$ o la opción (d) si no tuvieron en cuenta el orden en que les pedían la razón.

CATEGORÍA 5: Muy fácil

En la Figura 6 se observa que los ítems que presentaron menos dificultad fueron el TN10, el A1 y el A2 que están clasificados según las áreas en Teoría de Números y Álgebra con un porcentaje de 44%, 46% y 50% respectivamente, lo que nos permite ubicarlos en la escala en la categoría 5, evidenciando cierta facilidad para su solución.

- Problema de Teoría de Números:

10. Se tiene un edificio de cinco pisos con los apartamentos numerados como se indica en la siguiente figura. Algunos apartamentos no se numeran pues son lugares de almacenamiento. El apartamento número 2010 se localiza en el piso:

Piso 5		5		13		21		
Piso 4	4	6	12	14	20	22	28	···
Piso 3	3	7	11	15	19	23	27	···
Piso 2	2	8	10	16	18	24	26	···
Piso 1	1		9		17		25	···

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

La respuesta correcta de este ítem es la (b), la cual eligieron 488 estudiantes. Para la solución de este ítem se requería tener en cuenta la relación existente entre los números que aparecen en cada piso, además de observar que cada ocho números se encuentra un número nuevamente en el piso 1(Ver Solución Anexos). Los estudiantes que no respondieron correctamente a este ítem posiblemente fue porque no se fijaron si había una relación entre los números de cada piso.

- Problema de Álgebra:

1. Si $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=10, x+y=2$. ¿Cuál es el valor de xy?

(a)$\frac{1}{5}$ (b) 1 (c) 2 (d) 5 (e)10

La respuesta correcta de este ítem es la (a), la cual fue la más elegida por los estudiantes (Ver Tabla 12). Para la solución de este ítem se requería que el estudiante realizara una suma entre fracciones y después reemplazos en la ecuación (Ver Solución Anexos). Los estudiantes que no resolvieron este ítem correctamente posiblemente se debió a que hicieron la suma de las fracciones de manera incorrecta, luego ellos pudieron asumir que la suma se realizaba así:$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2}{2}=1$, el cual sería el razonamiento para la opción (b) y de igual manera para la opción (c) solo que asumen que $\frac{2}{2}=2$.

- Problema de Álgebra:

2. Sean A, M y C enteros no negativos tales que $A+M+C=12$. ¿Cuál es el valor máximo de $A\cdot M\cdot C+A\cdot M+M\cdot C+C\cdot A$?

(a) 62 (b) 72 (c) 92 (d) 102 (e) 112

La respuesta correcta de este ítem es la (e), la cual eligieron 546 estudiantes. Para resolver este ítem el estudiante necesitaba factorizar (Ver Solución Anexos). La opción (e) fue la más elegida posiblemente esto también se debió a que entre las opciones ésta es la de mayor valor y como les piden el valor máximo entonces esto pudo influir en la respuesta de algunos.

2.2 Prueba de bondad de ajuste para los datos de la fase clasificatoria de los años 2009 y 2010

Como se observó en el análisis descriptivo el nivel de dificultad de los ítems fue alto, por lo cual nos surgió la siguiente pregunta: ¿Los estudiantes respondieron la prueba a conciencia o su elección pudo haber sido producto del azar? (utilizando la estrategia del tin marín). Ya que si los estudiantes contestaron las pruebas al azar la distribución de los resultados va a tender a comportarse como una distribución binomial con probabilidad igual a 0.2, la cual es la probabilidad de acertar. Esto se verificará mediante una prueba de bondad de ajuste utilizando la prueba chi- cuadrado.

Con la prueba chi-cuadrado se quiere comparar las frecuencias observadas que en este caso son la cantidad de estudiantes que respondieron el mismo número de ítems con las frecuencias esperadas (teóricas). Para poder decidir si estas frecuencias están o no en concordancia, el estadístico de contraste es:

$$X^2 = \sum \frac{(Valor\ observado - Valor\ esperado)^2}{Valor\ esperado}$$

Con grado de libertad (gl): $n-1$ donde n es tamaño de la muestra (12 ítems)

Las hipótesis de la prueba son:

H_o: Los datos se ajustan a una distribución binomial.

H_a:Los datos no se ajustan a una distribución binomial.

Para decidir si se acepta o se rechaza la hipótesis nula se tomara como nivel de significación igual o menor que 0.05.

NIVEL BÁSICO 2009

En la Figura 7, la gráfica de la izquierda corresponde a la distribución binomial de probabilidad de 0,2 y la gráfica de la derecha corresponde a la distribución de probabilidad de los datos reales, de la cual vemos que gráficamente los datos presenta un comportamiento aproximadamente binomial.

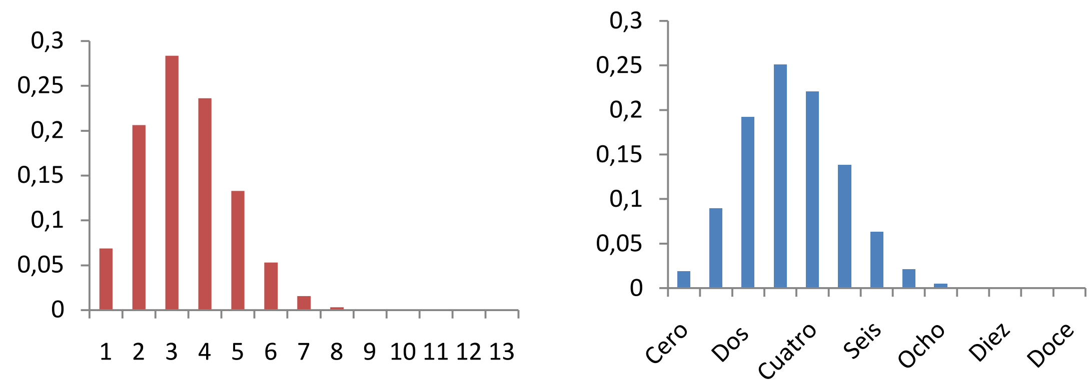


Figura 7. Distribución de probabilidadde los datos de la fase clasificatoria nivel básico 2009 (derecha) y distribución binomial con probabilidad de 0,2 (izquierda)

La prueba chi-cuadrado para este nivel arrojó los siguientes valores:

Goodness of Fit Test	
,03	chi-square
11	df
1,0000	p-value

Tabla 13. Prueba chi-cuadrado para la bondad de ajuste de los resultados de la fase clasificatoria nivel básico 2009.

Como observamos en la Tabla 13, el p-valor es de 1,0000 lo cual no da evidencia para rechazar la hipótesis nula, es decir, los datos se ajustan a una distribución binomial, lo que nos indica que los estudiantes pudieron haber respondido al azar.

NIVEL MEDIO 2009

En la Figura 8 la gráfica de la izquierda corresponde a la distribución binomial de probabilidad de 0,2 y la gráfica de la derecha corresponde a la distribución de probabilidad de los datos reales, como observamos gráficamente los datos presenta un comportamiento muy similar.

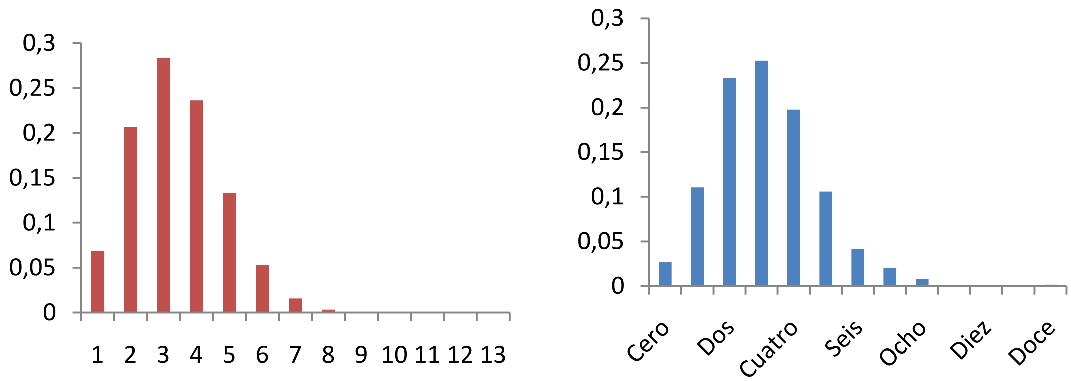


Figura 8. Distribución de probabilidadde los datos de la fase clasificatoria nivel medio 2009 (derecha) y distribución binomial con probabilidad de 0,2 (izquierda)

La prueba chi-cuadrado para este nivel arrojó lo siguiente:

Goodness of Fit Test	
23,43	chi-square
11	df
0,0152	p-value

Tabla 14. Prueba chi-cuadrado para la bondad de ajuste de los resultados de la fase clasificatoria nivel medio 2009.

Como observamos en la Tabla 14, el p-valor es de 0, 0152, por lo cual hay evidencia para rechazar la hipótesis nula, es decir, los datos no se ajustan a una distribución binomial, lo que nos indica que los estudiantes pudieron haber respondido la prueba a conciencia.

NIVEL AVANZADO 2009

En la Figura 9 la gráfica de la izquierda corresponde a la distribución binomial de probabilidad de 0,2 y la gráfica de la derecha corresponde a la distribución de probabilidad de los datos reales, lo cual corrobora gráficamente que los datos presenta un comportamiento aproximadamente binomial.

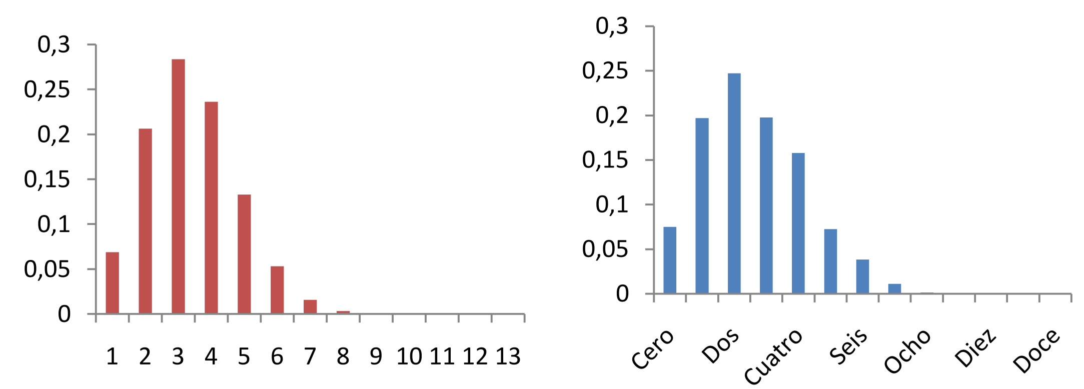


Figura 9. Distribución de probabilidadde los datos de la fase clasificatoria nivel avanzado 2009 (derecha) y distribución binomial con probabilidad de 0,2 (izquierda)

La prueba chi-cuadrado para este nivel arrojó lo siguiente:

Goodness of Fit Test	
0,11	chi-square
11	df
1,0000	p-value

Tabla 15. Prueba chi-cuadrado para la bondad de ajuste de los resultados de la fase clasificatoria nivel avanzado 2009.

En la Tabla 15 vemos que el p-valor es de 1,0000 lo cual no da evidencia para rechazar la hipótesis nula, es decir, los datos se ajustan a una distribución binomial, lo que nos indica que los estudiantes pudieron haber respondido al azar.

NIVEL BÁSICO 2010

En la Figura 10 la gráfica de la izquierda corresponde a la distribución binomial de probabilidad de 0,2 y la gráfica de la derecha corresponde a la distribución de probabilidad de los datos reales, gráficamente se observa que los datos presentan un comportamiento aproximadamente binomial.

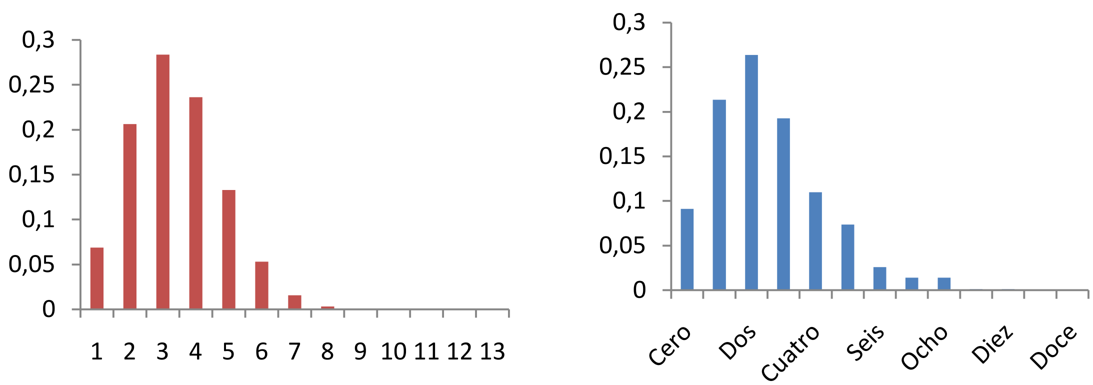


Figura 10. Distribución de probabilidadde los datos de la fase clasificatoria nivel básico 2010 (derecha) y distribución binomial con probabilidad de 0,2 (izquierda)

La prueba chi-cuadrado para este nivel arrojó lo siguiente:

Goodness of Fit Test	
0,53	chi-square
11	df
1,0000	p-value

Tabla 16. Prueba chi-cuadrado para la bondad de ajuste de los resultados de la fase clasificatoria nivel básico 2010.

Se observa en la Tabla 16 que el p-valor es de 1,0000, lo cual no da evidencia para rechazar la hipótesis nula, es decir, los datos se ajustan a una distribución binomial, lo que nos indica que los estudiantes pudieron haber respondido los problemas al azar.

NIVEL MEDIO 2010

En la Figura 11 la gráfica de la izquierda corresponde a la distribución binomial de probabilidad de 0,2 y la gráfica de la derecha corresponde a la distribución de probabilidad de los datos reales, como vemos gráficamente los datos presenta un comportamiento similar.

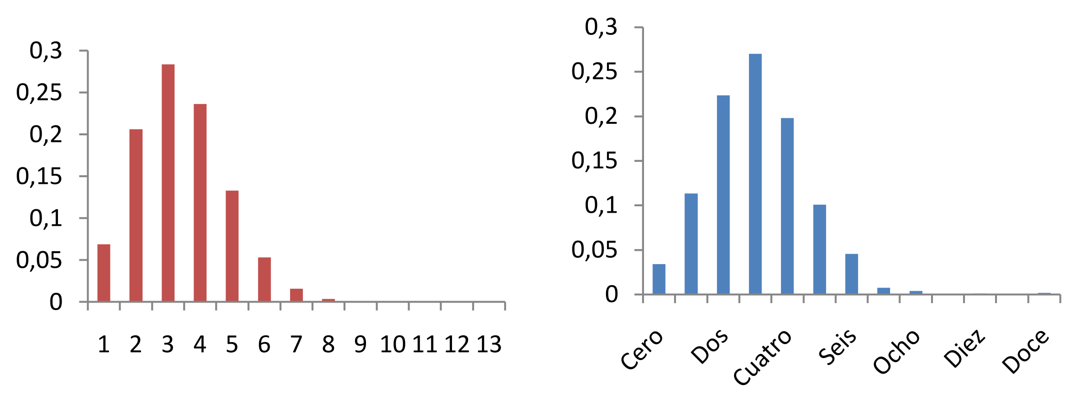


Figura 11. Distribución de probabilidadde los datos de la fase clasificatoria nivel medio 2010 (derecha) y distribución binomial con probabilidad de 0,2 (izquierda)

La prueba chi-cuadrado para este nivel arrojó lo siguiente:

Goodness of Fit Test	
48,38	chi-square
11	df
1,22E-06	p-value

Tabla 17. Prueba chi-cuadrado para la bondad de ajuste de los resultados de la fase clasificatoria nivel medio 2010.

Se observa en la Tabla 17 que el p-valor es de 1,22E-06 lo cual da evidencia contundente para rechazar la hipótesis nula, es decir, los datos no se ajustan a una distribución binomial, lo que nos indica que los estudiantes resolvieron los problemas a conciencia evitando elegir opciones al azar.

NIVEL AVANZADO 2010

La gráfica de la izquierda corresponde a la distribución binomial de probabilidad de 0,2 y la gráfica de la derecha corresponde a la distribución de probabilidad de los datos reales, como observamos gráficamente los datos presenta un comportamiento aproximadamente binomial.

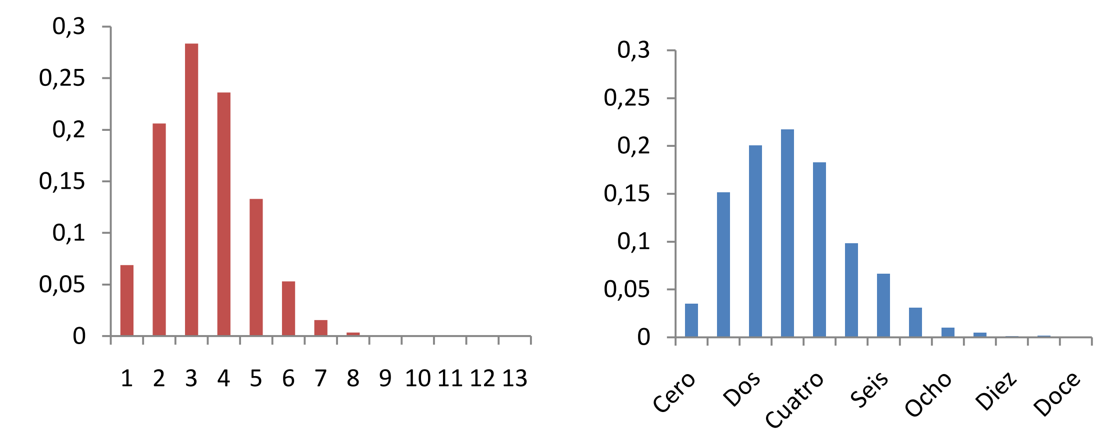


Figura 12. Distribución de probabilidadde los datos de la fase clasificatoria nivel avanzado 2010 (derecha) y distribución binomial con probabilidad de 0,2 (izquierda)

La prueba chi-cuadrado para este nivel arrojó lo siguiente:

Goodness of Fit Test	
,91	chi-square
11	df
1,0000	p-value

Tabla 18. Prueba chi-cuadrado para la bondad de ajuste de los resultados de la fase clasificatoria nivel avanzado 2010.

Se observa en la Tabla 18 que el p-valor es de 1,0000, lo cual no da evidencia para rechazar la hipótesis nula, es decir, los datos del nivel básico 2010 se ajustan a una distribución binomial, lo que nos indica que los estudiantes pudieron haber marcado las respuestas de los problemas al azar.

2.3 Correlación y análisis de varianza de la fase clasificatoria por sedes para los años 2009 y 2010

Para analizar el comportamiento de los resultados por sedes de la fase clasificatoria, se considerarán las asociaciones entre las sedes de Barbosa, Barrancabermeja, Bucaramanga, Málaga y Socorro, con el fin de establecer el grado de asociación entre ellas.

Se implementará el software estadístico SPSS para encontrar la matriz de correlaciones y el gráfico de dispersión que relacione todas las sedes. Las asociaciones están dadas en términos del coeficiente de correlación que se encuentra entre -1 y +1, siendo $r = +1$, una correlación perfecta positiva, $r = -1$ una correlación perfecta negativa y $r = 0$ una ausencia de correlación. Para determinar si el valor del coeficiente de correlación que se obtuvo nos muestra una relación real entre las sedes o simplemente una relación consecuencia del azar, tendremos en cuenta el nivel de significación.

De otro lado, se realizará un análisis de varianza (Anova) utilizando el programa EXCEL para probar la hipótesis de que los resultados en todas las sedes son iguales.

Finalmente se compararán los resultados de las sedes de los dos años para cada nivel por medio de una prueba t.

2.3.1 Análisis de las asociaciones y comparaciones entre sedes

A continuación se presenta un análisis de la matriz de correlación, la matriz de dispersión, la prueba ANOVA y su gráfico asociado para cada uno de los niveles. Para estos análisis se calcularon los porcentajes de buenas respuestas para cada uno de los ítems propuestos en cada una de las sedes en los años 2009 y 2010.

NIVEL BÁSICO AÑO 2009

En la Figura 13 se observa la matriz de dispersión entre las sedes y su respectivo coeficiente de correlación.

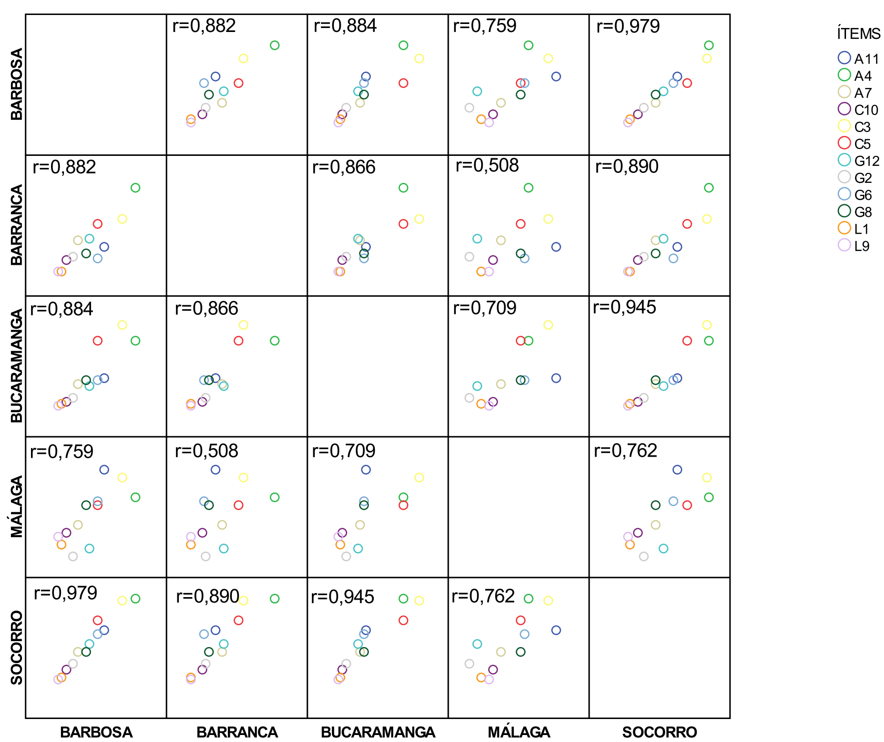


Figura 13. Matriz de dispersión entre las sedes para la prueba clasificatoria nivel básico 2009.

En la Tabla 13 se muestran los coeficientes de correlación y el nivel de significación entre cada una de las sedes.

Correlaciones

		BARBOSA	BARRANCA	BUCARAMANGA	MÁLAGA	SOCORRO
BARBOSA	Correlación de Pearson	1	.882**	.884**	.759**	.979**
	Sig. (bilateral)		.000	.000	.004	.000
BARRANCA	Correlación de Pearson	.882**	1	.866**	.508	.890**
	Sig. (bilateral)	.000		.000	.091	.000
BUCARAMANGA	Correlación de Pearson	.884**	.866**	1	.709**	.945**
	Sig. (bilateral)	.000	.000		.010	.000
MÁLAGA	Correlación de Pearson	.759**	.508	.709**	1	.762**
	Sig. (bilateral)	.004	.091	.010		.004
SOCORRO	Correlación de Pearson	.979**	.890**	.945**	.762**	1
	Sig. (bilateral)	.000	.000	.000	.004	

**. La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

Tabla 19. Matriz de correlación de Pearson y sus niveles de significación entre las sedes para la prueba clasificatoria nivel básico 2009.

En la Figura 13 lo primero que se nota es que los coeficientes de correlación son positivos y significativos con valores entre 0,508 y 0,979. Las sedes con mayor correlación son las de Barbosa y Socorro, Bucaramanga y Barbosa y Bucaramanga y Socorro con un coeficiente de correlación de 0,979, 0,884 y 0,945 respectivamente, con un nivel de significancia de 0,00 (Ver Tabla 19) de lo cual podemos deducir que su comportamiento es prácticamente el mismo, es decir, el comportamiento de los porcentajes de buenas respuestas en esas sedes son muy semejantes, al menos en términos de las diferencias entre los porcentajes de buenas respuestas para cada una de los ítems propuestos. En otras palabras, el orden de dificultad de los ítems fue muy semejante en las sedes mencionadas. Por otro lado, la correlación más baja se da entre las sedes de Barranca y Málaga con un coeficiente de correlación de 0,508 y un valor p de 0,091; por lo que se deduce que aunque la correlación es significativa el comportamiento de los ítems no fue muy similar.

A continuación en la Tabla 20 se muestra la prueba ANOVA para las sedes en este nivel con un diagrama de puntos asociado a la prueba:

One factor ANOVA

Mean	n	Std. Dev	
25,8	12	14,50	BARBOSA
28,8	12	14,77	BARRANCA
29,6	12	13,76	BUCARAMANGA
20,3	12	13,87	MÁLAGA
27,3	12	13,96	SOCORRO
26,4	60	14,08	Total

ANOVA table

Source	SS	df	MS	F	p-value
Treatment	641,90	4	160,475	0,80	,5316
Error	11.057,75	55	201,050		
Total	11.699,65	59			

Tabla 20. Anova para las sedes de la prueba clasificatoria nivel básico 2009.

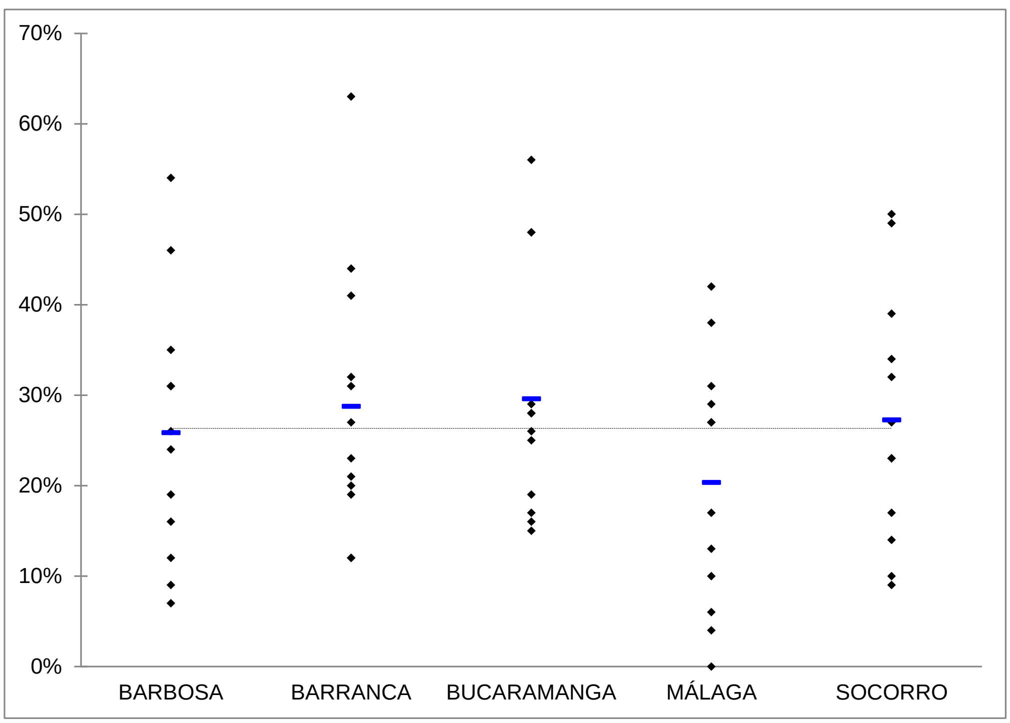


Figura 14. Diagrama de puntos y medias de las sedes prueba clasificatoria nivel básico año 2009.

Como el p-valor que se obtuvo es de 0,5316 se puede concluir que no hay evidencia para rechazar la hipotesis nula, es decir, la media de todas lassedes prácticamente es la misma. La Figura 14, da una evidencia gráfica de este hecho y muestra además que las dispersiones son muy semejantes tal como se corrobora con los valores dados en la Tabla 20.

NIVEL BÁSICO AÑO 2010

En la Figura 15 se observa la matriz de dispersión y la correlación entre las sedes:

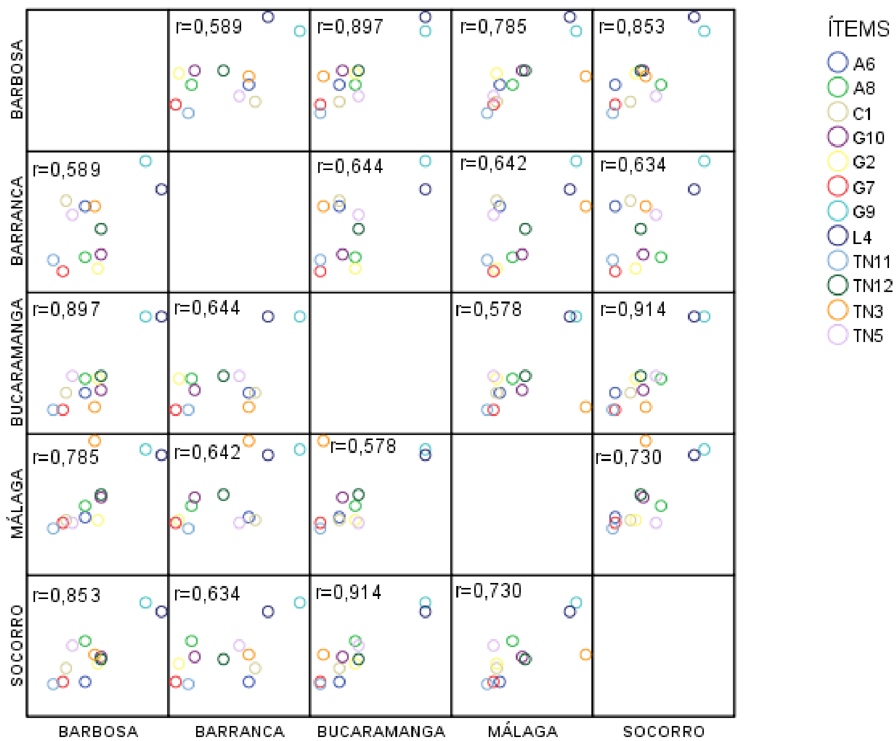


Figura 15. Matriz de dispersión entre las sedes para la prueba clasificatoria nivel básico 2010.

En la Tabla 21 se muestran los coeficiente de correlación entre cada una de las sedes y el nivel de significancia.

		BARBOSA	BARRANCA	BUCARAMANGA	MÁLAGA	SOCORRO
BARBOSA	Correlación de Pearson	1	,589*	,897**	,785**	,853**
	Sig. (bilateral)		,044	,000	,002	,000
BARRANCA	Correlación de Pearson	,589*	1	,644*	,642*	,634*
	Sig. (bilateral)	,044		,024	,024	,027
BUCARAMANGA	Correlación de Pearson	,897**	,644*	1	,578*	,914**
	Sig. (bilateral)	,000	,024		,049	,000
MÁLAGA	Correlación de Pearson	,785**	,642*	,578*	1	,730**
	Sig. (bilateral)	,002	,024	,049		,007
SOCORRO	Correlación de Pearson	,853**	,634*	,914**	,730**	1
	Sig. (bilateral)	,000	,027	,000	,007	

*. La correlación es significante al nivel 0.05 (bilateral).

**. La correlación es significante al nivel 0.01 level (bilateral).

Tabla 21. Matriz de correlación de Pearson y sus niveles de significación entre cada una de las sedes para la prueba clasificatoria nivel básico 2010.

En la Figura 15 se observa que entre todas las sedes existe una correlación positiva. Se presenta una correlación alta entre las sedes de Bucaramanga y Socorro y Bucaramanga y Barbosa con un coeficiente de correlación de 0,914 y 0,897 respectivamente y un nivel de significancia de 0,01 (Ver Tabla 21), lo cual nos permite deducir que el comportamiento de los resultados entre estas sedes fue similar, es decir, el comportamiento de los porcentajes de buenas respuestas en esas sedes son muy semejantes, al menos en términos de las diferencias entre los porcentajes de buenas respuestas para cada una de los ítems planteados. Por otro lado la correlación más baja se da entre las sedes de Bucaramanga y Málaga con un coeficiente de correlación de 0,578 y una probabilidad asociada de 0,049; por lo que hay poca relación.

A continuación en la Tabla 22 se muestra la prueba ANOVA para las sedes en este nivel con un diagrama de puntos asociado a la prueba:

One factor ANOVA

Mean	n	Std. Dev	
18,8	12	10,10	BARBOSA
25,8	12	12,69	BARRANCA
22,2	12	11,55	BUCARAMANGA
19,8	12	11,22	MÁLAGA
18,2	12	11,50	SOCORRO
20,9	60	11,39	Total

ANOVA table

Source	SS	df	MS	F	p-value
Treatment	460,23	4	115,058	0,88	,4826
Error	7.199,50	55	130,900		
Total	7.659,73	59			

Tabla 22. Anova para las sedes de la prueba clasificatoria nivel básico 2010

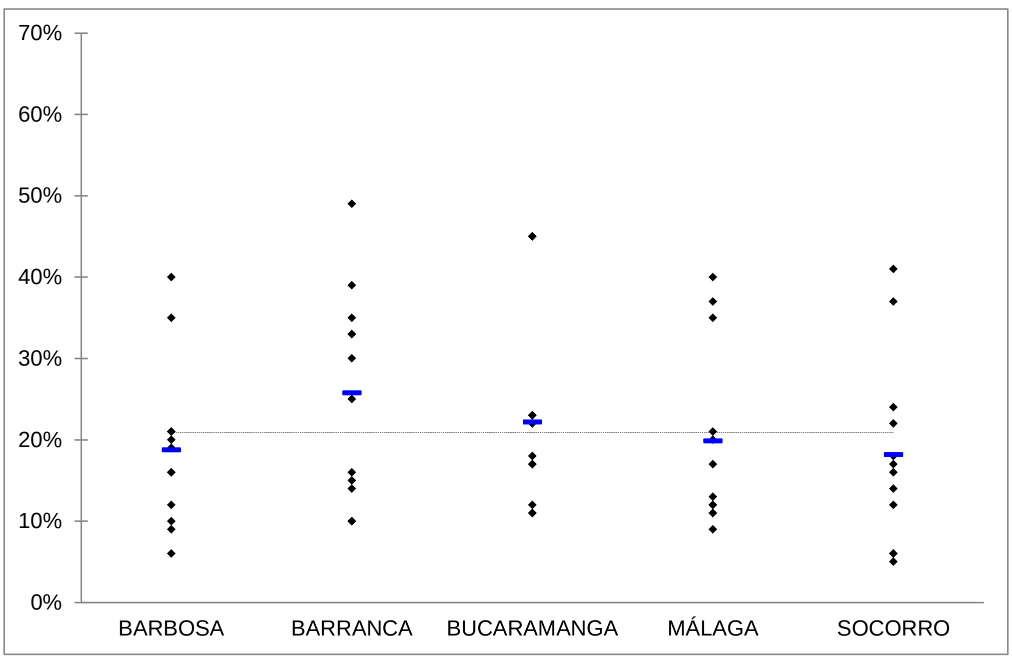


Figura 16. Diagrama de puntos y medias de las sedes prueba clasificatoria nivel básico año 2010.

Como el p-valor que se obtuvo es de 0,4826 se puede concluir que no hay evidencia para rechazar la hipotesis nula, es decir, la media de las todas sedes prácticamente es la misma. La Figura 16, da una evidencia gráfica de este hecho y muestra además que las dispersiones son muy semejantes tal como se corrobora con los valores dados en la Tabla 22.

Basándose en los estadísticos descriptivos como las medias que representan el porcentaje promedio de respuestas correctas y las desviaciones estándar como indicador de dispersión de los datos, se realizará un análisis comparativo de las distintas sedes para el nivel básico de los dos años.

Estadísticos de muestras relacionadas

		Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Par 1	BARBOSA2009	25.83	14.503	4.187
	BARBOSA2010	18.75	10.101	2.916
Par 2	BARRANCA2009	28.75	14.772	4.264
	BARRANCA2010	25.75	12.686	3.662
Par 3	BUCARAMANGA2009	29.58	13.761	3.972
	BUCARAMANGA2010	22.17	11.551	3.334
Par 4	MÁLAGA2009	20.33	13.872	4.004
	MÁLAGA2010	19.83	11.216	3.238
Par 5	SOCORRO2009	27.25	13.962	4.030
	SOCORRO2010	18.17	11.504	3.321

Tabla 23. Estadísticos descriptivos de la prueba clasificatoria por sedes del nivel básico 2009 y 2010

En la Tabla 23 se observa que para las cinco sedes las medias del año 2009 fueron mayores con respecto a las del año 2010, pero en cuanto a las desviaciones estándar ocurrió lo contrario, ya que hubo menos dispersión en el año 2010, lo que nos permite deducir que en el año 2009 hubo mejores resultados pero con mayores dispersiones, en tanto que en el 2010 los grupos fueron más homogéneos en sus respuestas. Es de resaltar que la sede de Socorro fue la que tuvo la mayor diferencia entre las medias de los años y la sede de Málaga presentó prácticamente la misma media, luego sus resultados se mantuvieron.

La prueba t que se presenta a continuación muestra que no existen diferencias significativas entre las medias de las respuestas correctas para cada sede del nivel básico en los dos años.

Las hipótesis de la prueba son:

$H_o: \mu_1 = \mu_2$

$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$

μ_1: Media de la sede para el año 2009

μ_2: Media de la sede para el año 2010

Prueba de muestras relacionadas

		Diferencias relacionadas				
			95% Intervalo de confianza para la diferencia			
		Media	Inferior	Superior	t	Sig. (bilateral)
Par 1	BARBOSA2009 - BARBOSA2010	7.083	-7.540	21.707	1.066	.309
Par 2	BARRANCA2009 - BARRANCA2010	3.000	-12.443	18.443	.428	.677
Par 3	BUCARAMANGA2009 - BUCARAMANGA2010	7.417	-6.737	21.571	1.153	.273
Par 4	MÁLAGA2009 - MÁLAGA2010	.500	-13.077	14.077	.081	.937
Par 5	SOCORRO2009 - SOCORRO2010	9.083	-5.568	23.734	1.365	.200

Tabla 24.Prueba t para el nivel básico de los años 2009 y 2010.

En la prueba se observa que las diferencias de las medias son positivas de lo que se deduce que las medias del 2009 fueron mayores que las del 2010. En los intervalos de confianza el extremo inferior es un entero negativo y el extremo superior un entero positivo, por lo que el cero se encuentra dentro estos intervalos, además vemos que el Sig. (Bilateral) es mayor que 0,05 determinando así que no hay evidencia para rechazar la hipótesis nula, en otras palabras el comportamiento de los resultados en las sedes en los dos años considerados fueron muy similares.

NIVEL MEDIO AÑO 2009

.En la Figura 17 se observa la matriz de dispersión entre las sedes y su respectivo coeficiente de correlación.

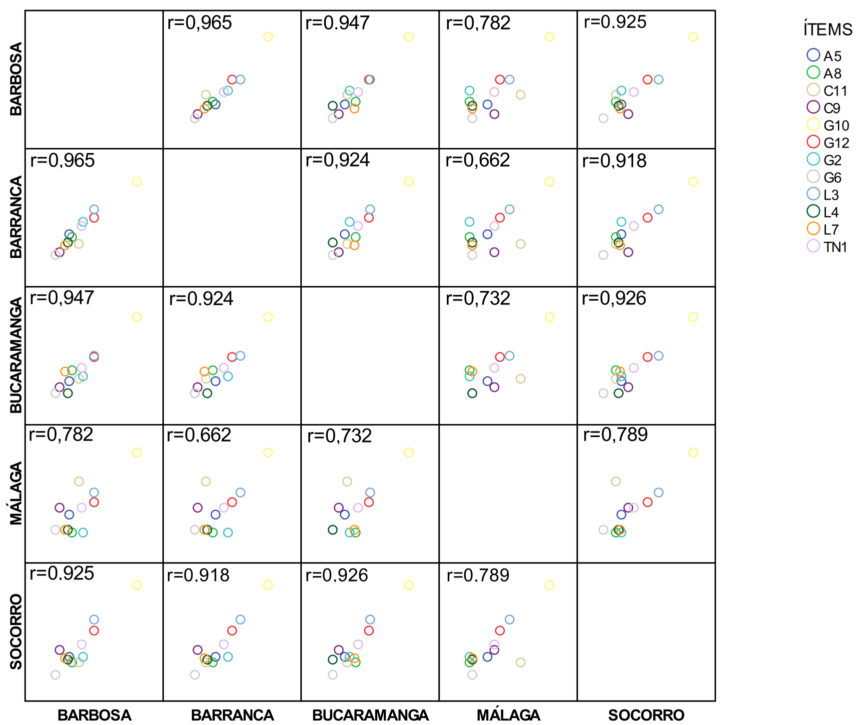


Figura 17. Matriz de dispersión entre las sedes para la prueba clasificatoria nivel medio 2009.

En la Tabla 25 se muestran los coeficientes de correlación y el nivel de significación entre cada una de las sedes.

Correlaciones

		BARBOSA	BARRANCA	BUCARAMANGA	MÁLAGA	SOCORRO
BARBOSA	Correlación de Pearson	1	.965**	.947**	.782**	.925**
	Sig. (bilateral)		.000	.000	.003	.000
BARRANCA	Correlación de Pearson	.965**	1	.924**	.662*	.918**
	Sig. (bilateral)	.000		.000	.019	.000
BUCARAMANGA	Correlación de Pearson	.947**	.924**	1	.732**	.926**
	Sig. (bilateral)	.000	.000		.007	.000
MÁLAGA	Correlación de Pearson	.782**	.662*	.732**	1	.789**
	Sig. (bilateral)	.003	.019	.007		.002
SOCORRO	Correlación de Pearson	.925**	.918**	.926**	.789**	1
	Sig. (bilateral)	.000	.000	.000	.002	

**. La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

*. La correlación es significante al nivel 0,05 (bilateral).

Tabla 25. Matriz de correlación de Pearson y sus niveles de significación entre las sedes para la prueba clasificatoria nivel medio 2009.

Se observa en la Figura 17 que todas las sedes presentan correlaciones positivas y significativas con valores entre 0,782 y 0,965. Las sedes con mayor correlación son las de Barbosa y Barranca con un coeficiente de 0,965 y un nivel de significancia de 0,01 (Ver Tabla 25), luego el comportamiento de estos resultados es similar, es decir el comportamiento de los porcentajes de repuestas correctas en esas sedes son prácticamente el mismo. Lo cual quiere decir que el orden de dificultad de los ítems fue muy semejanteal menos en términos de las diferencias entre los porcentajes de buenas respuestas para cada una de los ítems propuestos. Por otro lado, la correlación más baja se da entre las sedes de Barranca y Málaga con un coeficiente de correlación de 0,662 y un valor p de 0,019; por lo que se deduce que la correlación es significativa y el comportamiento de los ítems es semejante.

A continuación en la Tabla 26 se muestra la prueba ANOVA para las sedes en este nivel con un diagrama de puntos asociado a la prueba:

One factor ANOVA

Mean	n	Std. Dev	
24,7	12	15,77	BARBOSA
25,7	12	15,05	BARRANCA
27,6	12	17,26	BUCARAMANGA
23,8	12	17,90	MÁLAGA
24,3	12	17,74	SOCORRO
25,2	60	16,26	Total

ANOVA table

Source	SS	df	MS	F	p-value
Treatment	105,60	4	26,400	0,09	,9841
Error	15.490,58	55	281,647		
Total	15.596,18	59			

Tabla 26. Anova para las sedes de la prueba clasificatoria nivel medio 2009.

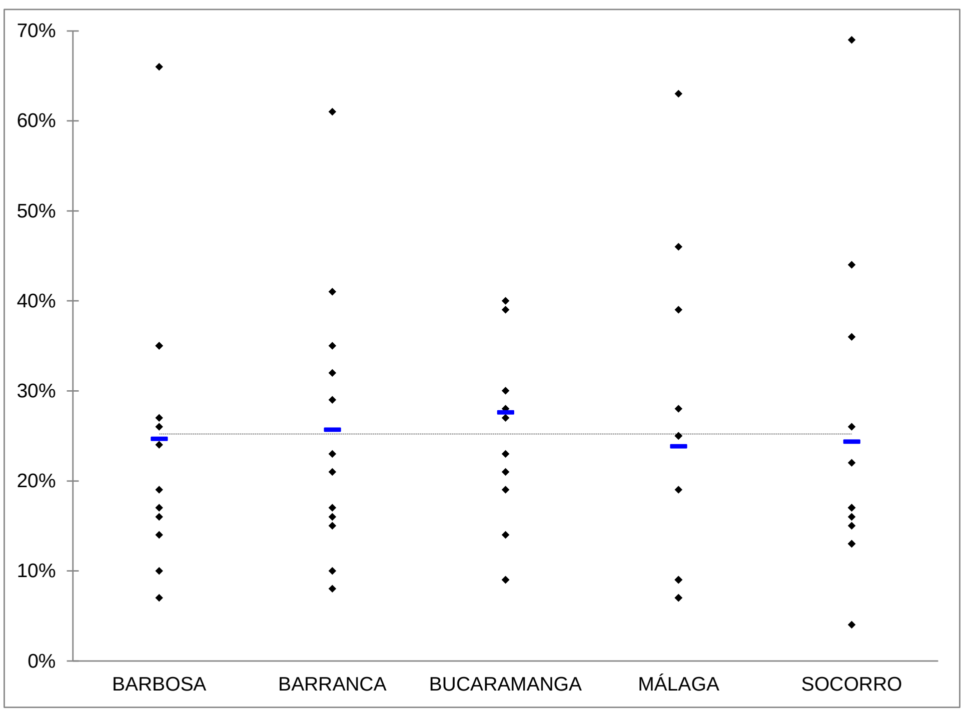


Figura 18.Diagrama de puntos y medias de las sedes prueba clasificatoria nivel medio año 2009.

En la Tabla 26 se observa que las medias de las cinco sedes son muy similares, ya que se encuentran entre 23,8 y 27,6; lo cual se evidencia gráficamente en la Figura 18 debido a que las medias prácticamente están alineadas sobre la línea punteada, la cual representa la media de toda la población de estudiantes que presentaron la prueba. El p-valor de 0,9841 en este nivel refleja una aceptación de la hipótesis nula, es decir, la media de las todas sedes es prácticamente la misma.

NIVEL MEDIO AÑO 2010

En la Figura 19 se observa la matriz de dispersión y la correlación entre las sedes:

Figura 19. Matriz de dispersión entre las sedes para la prueba clasificatoria nivel medio 2010.

En la Tabla 27 se muestran los coeficiente de correlación entre cada una de las sedes y el nivel de significancia.

		BARBOSA	BARRANCA	BUCARAMANGA	MÁLAGA	SOCORRO
BARBOSA	Correlación de Pearson	1	,916**	,971**	,924**	,977**
	Sig. (bilateral)		,000	,000	,000	,000
BARRANCA	Correlación de Pearson	,916**	1	,860**	,864**	,900**
	Sig. (bilateral)	,000		,000	,000	,000
BUCARAMANGA	Correlación de Pearson	,971**	,860**	1	,925**	,981**
	Sig. (bilateral)	,000	,000		,000	,000
MÁLAGA	Correlación de Pearson	,924**	,864**	,925**	1	,891**
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,000		,000
SOCORRO	Correlación de Pearson	,977**	,900**	,981**	,891**	1
	Sig. (bilateral)	,000	,000	,000	,000	

**. La correlación es significante al nivel 0.01(bilateral).

Tabla 27. Matriz de correlación de Pearson y sus niveles de significación entre cada una de las sedes para la prueba clasificatoria nivel medio 2010.

En la Figura 19 se observa que entre todas las sedes existe una correlación positiva fuerte. Se presenta una correlación muy fuerte entre las sedes de Bucaramanga y Socorro; y Barbosa y Socorro con un coeficiente de correlación de 0,981 y 0,977 respectivamente y un nivel de significancia de 0,01 (Ver Tabla 27), lo cual nos permite deducir que el comportamiento de los resultados entre estas sedes fue muy similar, es decir, el comportamiento de los porcentajes de buenas respuestas en esas sedes son muy semejantes, al menos en términos de las diferencias entre los porcentajes de buenas respuestas para cada una de los ítems propuestos. Por otro lado, la correlación más baja se da entre las sedes de Barrancabermeja y Bucaramanga con un coeficiente de correlación de 0,860 y un nivel de significancia de 0.01. De lo anterior se puede decir que los resultados de las cinco sedes tuvieron prácticamente la misma distribución de los datos

A continuación en la Tabla 28 se muestra la prueba ANOVA para las sedes en este nivel con un diagrama de puntos asociado a la prueba:

One factor ANOVA

Mean	n	Std. Dev	
25,8	12	19,42	BARBOSA
23,3	12	14,21	BARRANCA
25,8	12	19,20	BUCARAMANGA
27,6	12	17,36	MÁLAGA
22,3	12	13,79	SOCORRO
24,9	60	16,50	Total

ANOVA table

Source	SS	df	MS	F	p-value
Treatment	222,40	4	55,600	0,19	,9410
Error	15.835,33	55	287,915		
Total	16.057,73	59			

Tabla 28. Anova para las sedes de la prueba clasificatoria nivel medio 2010.

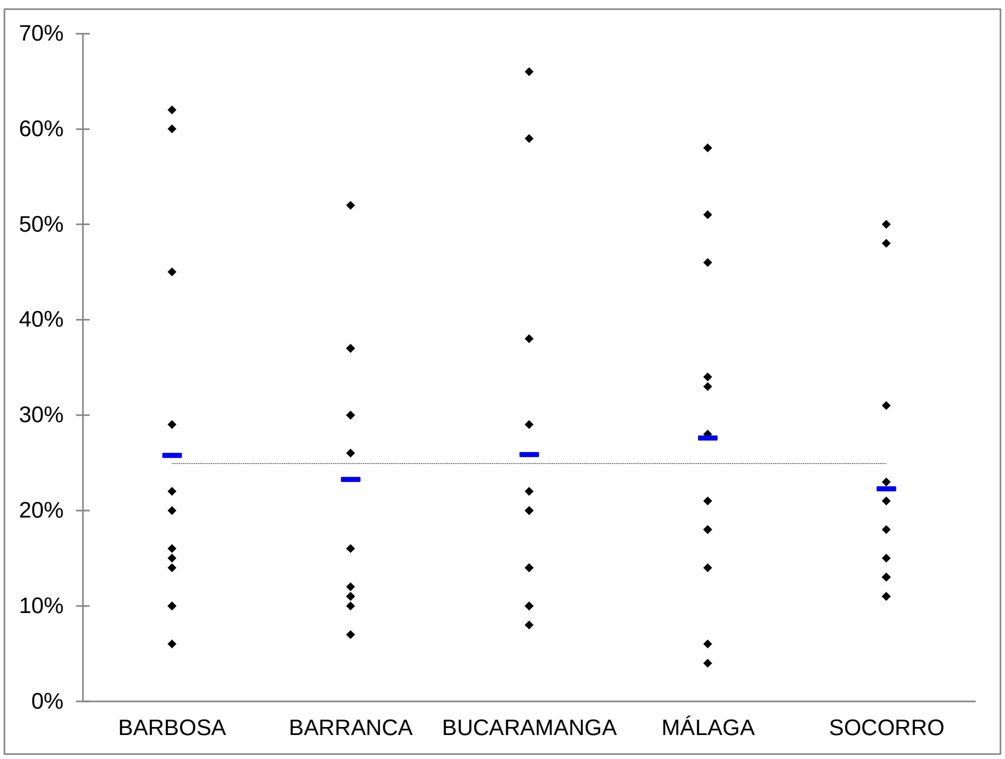


Figura 20. Diagrama de puntos y medias de las sedes prueba clasificatoria nivel medio año 2010.

En la Tabla 28 se observa que las medias de las cinco sedes son muy similares, ya que se encuentran entre 22,3 y 27,6; lo cual se evidencia gráficamente en la Figura 20 debido a que las medias prácticamente están alineadas sobre la línea punteada, la cual representa la media de toda la población de estudiantes que presentaron la prueba. El p-valor de 0,9410 no hay evidencia para rechazar la hipótesis nula luego no existen diferencias significativas entre las medias de las cinco sedes para este nivel.

A continuación se muestra el análisis comparativo de las distintas sedes para el nivel medio de los dos años, teniendo en cuenta la media y la desviación estándar.

Estadísticos de muestras relacionadas

		Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Par 1	BARBOSA2009	24.67	15.773	4.553
	BARBOSA2010	25.75	19.424	5.607
Par 2	BARRANCA2009	25.67	15.047	4.344
	BARRANCA2010	23.25	14.213	4.103
Par 3	BUCARAMANGA2009	27.58	17.260	4.982
	BUCARAMANGA2010	25.83	19.197	5.542
Par 4	MÁLAGA2009	23.83	17.903	5.168
	MÁLAGA2010	27.58	17.365	5.013
Par 5	SOCORRO2009	24.33	17.737	5.120
	SOCORRO2010	22.25	13.791	3.981

Tabla 29. Estadísticos descriptivos de la prueba clasificatoria por sedes del nivel medio 2009 y 2010

Se observa en la Tabla 29 que para las cinco sedes sus medias fueron muy similares y sus desviaciones estándar no cambiaron notablemente. Es de notar que la media de la sede de Málaga fue la mayor para el año 2010 mientras que en el año 2009 fue la menor y su desviación estándar se mantuvo, por lo que refleja mejores resultados en el año 2010.La prueba t que se presenta a continuación muestra que no existen diferencias significativas entre las medias de las respuestas correctas para cada sede del nivel medio en los dos años.

Las hipótesis de la prueba son:

$H_o: \mu_1 = \mu_2$

$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$

μ_1: Media de la sede para el año 2009

μ_2: Media de la sede para el año 2010

Prueba de muestras relacionadas

		Diferencias relacionadas				
			95% Intervalo de confianza para la diferencia			
		Media	Inferior	Superior	t	Sig. (bilateral)
Par 1	BARBOSA2009 - BARBOSA2010	-1.083	-10.237	8.070	-.260	.799
Par 2	BARRANCA2009 - BARRANCA2010	2.417	-7.152	11.985	.556	.589
Par 3	BUCARAMANGA2009 - BUCARAMANGA2010	1.750	-7.783	11.283	.404	.694
Par 4	MÁLAGA2009 - MÁLAGA2010	-3.750	-8.194	.694	-1.857	.090
Par 5	SOCORRO2009 - SOCORRO2010	2.083	-7.034	11.200	.503	.625

Tabla 30. Prueba t para el nivel medio del año 2009 y 2010.

En la Tabla 30 vemos que las diferencias de las medias para las sedes de Barbosa y de Málaga son negativas lo que nos indica que en el año 2010 estas sedes obtuvieron mejores resultados. Dentro de los intervalos de confianza se encuentra el cero y el Sig. (Bilateral) es mayor que 0,05 por lo que se infiere que no hay evidencia para rechazar la hipótesis nula, luego el comportamiento de los resultados en las sedes en los dos años considerados fue muy similar.

NIVEL AVANZADO AÑO 2009

En la Figura 21 se observa la matriz de dispersión entre las sedes y su respectivo coeficiente de correlación.

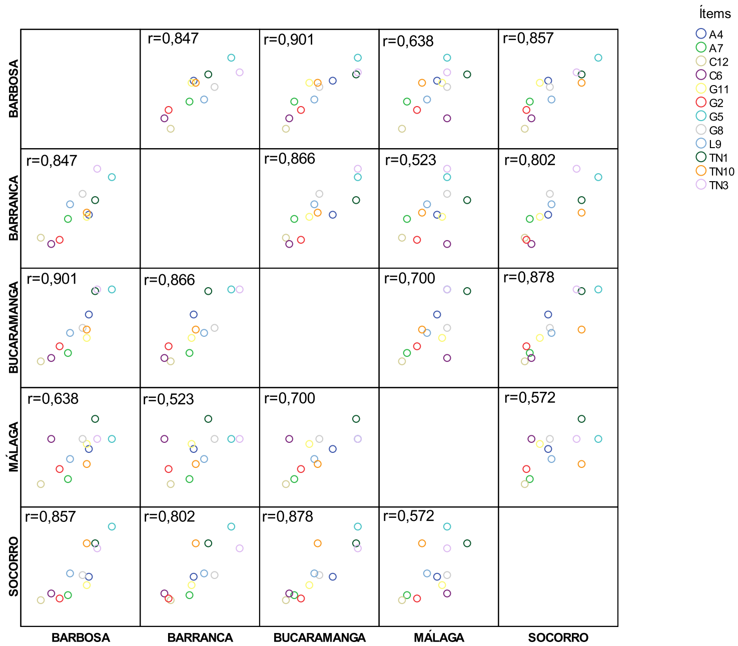


Figura 21. Matriz de dispersión entre las sedes para la prueba clasificatoria nivel avanzado 2009.

En la Tabla 31 se muestran los coeficientes de correlación y el nivel de significación entre cada una de las sedes.

		BARBOSA	BARRANCA	BUCARAMANGA	MÁLAGA	SOCORRO
BARBOSA	Correlación de Pearson	1	.847**	.901**	.638*	.857**
	Sig. (bilateral)		.001	.000	.025	.000
BARRANCA	Correlación de Pearson	.847**	1	.866**	.523	.802**
	Sig. (bilateral)	.001		.000	.081	.002
BUCARAMANGA	Correlación de Pearson	.901**	.866**	1	.700*	.878**
	Sig. (bilateral)	.000	.000		.011	.000
MÁLAGA	Correlación de Pearson	.638*	.523	.700*	1	.572
	Sig. (bilateral)	.025	.081	.011		.052
SOCORRO	Correlación de Pearson	.857**	.802**	.878**	.572	1
	Sig. (bilateral)	.000	.002	.000	.052	

**. La correlación es significativa al nivel 0,01 (bilateral).

*. La correlación es significante al nivel 0,05 (bilateral).

Tabla 31. Matriz de correlación de Pearson y sus niveles de significación entre las sedes para la prueba clasificatoria nivel avanzado 2009.

La Figura 21 muestra las correlaciones por sedes correspondiente al nivel avanzado. En comparación con los otros niveles, en este se presentaron correlaciones moderadas con valores entre 0,523 y 0,901. La mayor correlación fue entre las sedes de Barbosa y Bucaramanga con un coeficiente de correlación de 0.901 y un nivel de significancia del 0,01 (Ver Tabla 31) lo cual muestra que el comportamiento de sus resultados fue semejante, es decir, el comportamiento de porcentajes de repuestas correctas en estas sedes son prácticamente el mismo, por lo que se deduce que el orden de dificultad de los ítems fue muy parecido, es decir, el comportamiento de los porcentajes de buenas respuestas en esas sedes son muy semejantes, al menos en términos de las diferencias entre los porcentajes de buenas respuestas para cada una de los ítems propuestos. La correlación más baja se dio entre las sedes de Málaga y Barranca con un coeficiente de correlación de 0,523 y un valor p de 0,081; por lo que no se puede establecer si existe alguna relación en estas sedes, en otras palabras el comportamiento de los ítems no fue muy similar.

En la Tabla 32 se muestra la prueba ANOVA para las sedes en este nivel con un diagrama de puntos asociado a la prueba:

One factor ANOVA

Mean	*n*	*Std. Dev*	
18,9	12	9,89	BARBOSA
18,9	12	11,30	BARRANCA
25,2	12	15,73	BUCARAMANGA
22,3	12	11,55	MÁLAGA
22,1	12	15,05	SOCORRO
21,5	60	12,68	Total

ANOVA table

Source	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*p-value*
Treatment	332,27	4	83,067	0,50	,7367
Error	9.160,67	55	166,558		
Total	9.492,93	59			

Tabla 32. Anova para las sedes de la prueba clasificatoria nivel avanzado 2009.

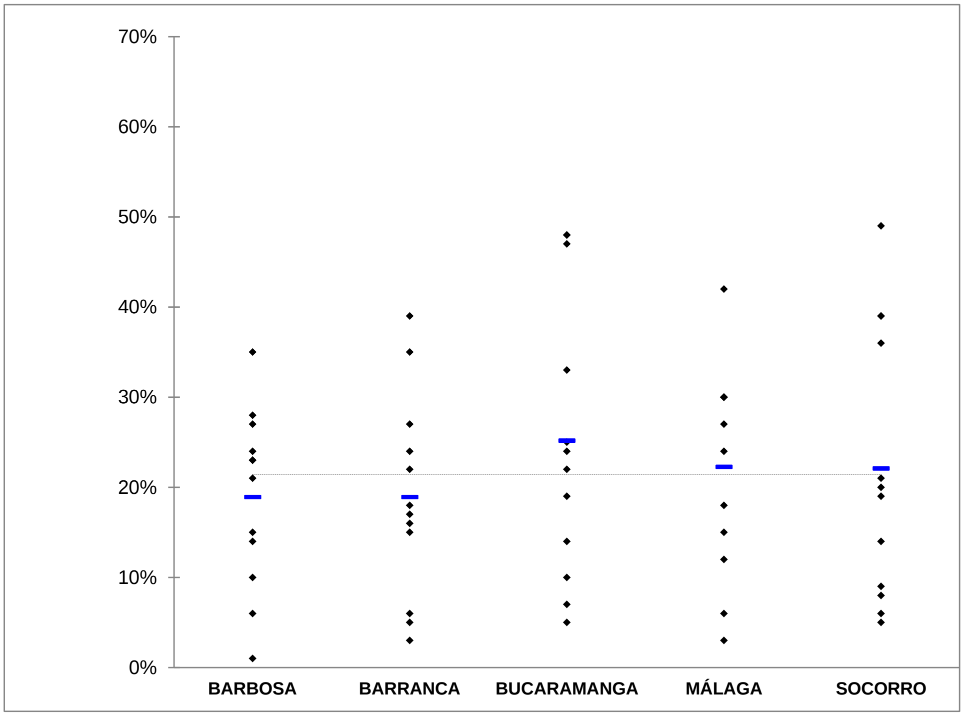


Figura 22. Diagrama de puntos y medias de las sedes prueba clasificatoria nivel avanzado año 2009.

El p-valor de 0,7367 nos indica que no hay evidencia para rechazar la hipótesis nula luego hay cierta similitud entre las medias .La Figura 22 da una evidencia gráfica de este hecho y refleja un comportamiento semejante en la variabilidad, tal como se corrobora con los valores dados en la Tabla 32.

NIVEL AVANZADO AÑO 2010

En la Figura 23 se observa la matriz de dispersión y la correlación entre las sedes:

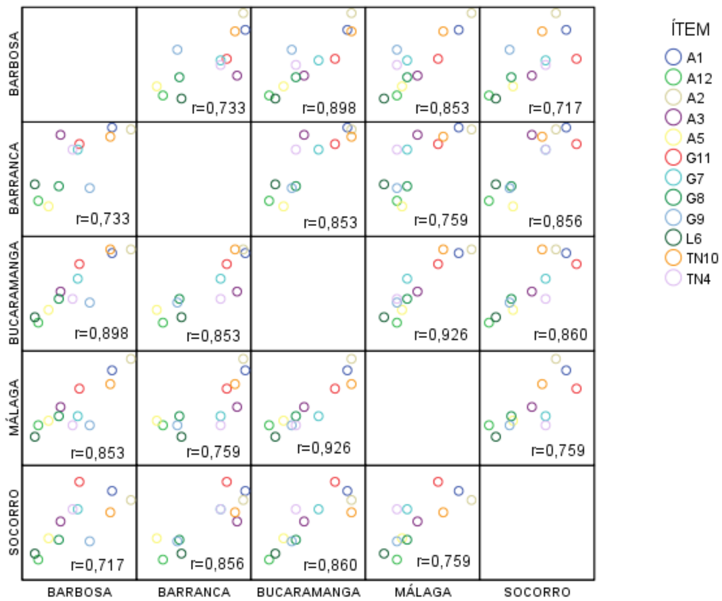


Figura 23. Matriz de dispersión entre las sedes para la prueba clasificatoria nivel avanzado 2010

En la Tabla 33 se muestran los coeficiente de correlación entre cada una de las sedes y el nivel de significancia.

		BARBOSA	BARRANCA	BUCARAMANGA	MÁLAGA	SOCORRO
BARBOSA	Correlación de Pearson	1	,733**	,898**	,853**	,717**
	Sig. (bilateral)		,007	,000	,000	,009
BARRANCA	Correlación de Pearson	,733**	1	,853**	,759**	,856**
	Sig. (bilateral)	,007		,000	,004	,000
BUCARAMANGA	Correlación de Pearson	,898**	,853**	1	,926**	,860**
	Sig. (bilateral)	,000	,000		,000	,000
MÁLAGA	Correlación de Pearson	,853**	,759**	,926**	1	,759**
	Sig. (bilateral)	,000	,004	,000		,004
SOCORRO	Correlación de Pearson	,717**	,856**	,860**	,759**	1
	Sig. (bilateral)	,009	,000	,000	,004	

**. La correlación es significante al nivel 0.01 (bilateral).

Tabla 33. Matriz de correlación de Pearson y sus niveles de significación entre cada una de las sedes para la prueba clasificatoria nivel avanzado 2010.

En la Figura 23 se observa que todas las sedes tienen una correlación positiva fuerte, entre las sedes que tuvieron la correlación más fuerte se encuentra Bucaramanga y Málaga; y Bucaramanga y Barbosa con un coeficiente de correlación de 0,926 y 0,898 respectivamente y un nivel de significancia de 0,01(Ver Tabla 33). Las sedes de menor correlación fueron Barbosa y Socorro; y Barbosa y Barrancabermeja con un coeficiente de correlación de 0,717 y 0,733 respectivamente y un nivel de significancia de 0,01, lo cual nos permite deducir que el comportamiento de los resultados entre estas sedes fue similar, es decir, el comportamiento de los porcentajes de buenas respuestas en esas sedes son muy semejantes, al menos en términos de las diferencias entre los porcentajes de buenas respuestas para cada una de los ítems propuestos.

A continuación en la Tabla 34 se muestra la prueba ANOVA para las sedes en este nivel con un diagrama de puntos asociado a la prueba:

One factor ANOVA

Mean	*n*	*Std. Dev*	
28,1	12	17,67	BARBOSA
31,5	12	16,03	BARRANCA
25,8	12	14,61	BUCARAMANGA
18,3	12	10,82	MÁLAGA
27,0	12	16,34	SOCORRO
26,1	60	15,39	Total

ANOVA table

Source	*SS*	*df*	*MS*	*F*	*p-value*
Treatment	1.132,10	4	283,025	1,21	,3159
Error	12.834,83	55	233,361		
Total	13.966,93	59			

Tabla 34. Anova para las sedes de la prueba clasificatoria nivel avanzado 2010.

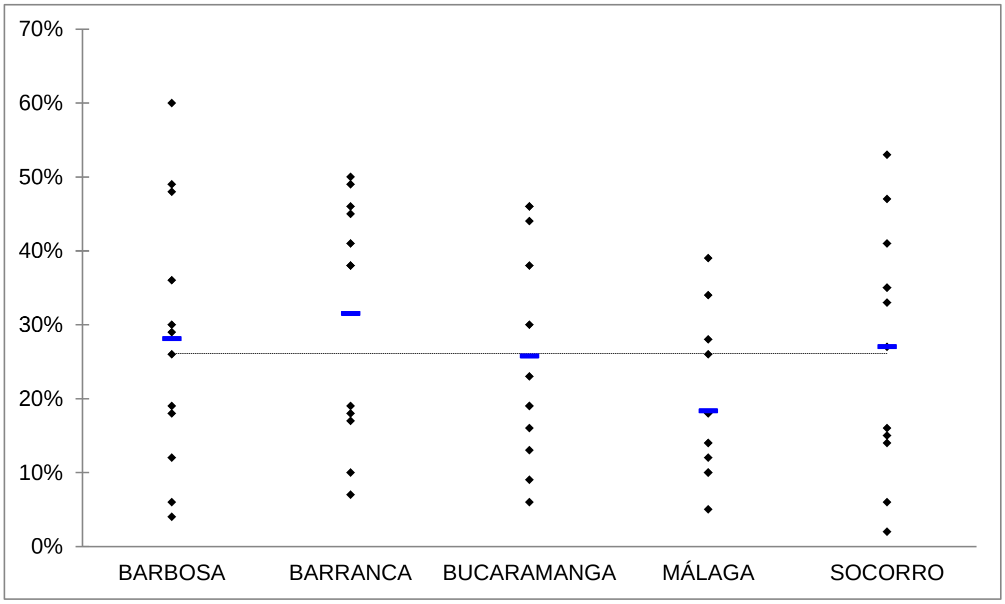


Figura 24. Diagrama de puntos y medias de las sedes prueba clasificatoria nivel avanzado año 2010.

En la Tabla 34 se observa el p-valor de 0,3159, lo cual nos indica que no hay evidencia para aceptar que existe diferencia entre las medias de los resultados de las sedes sino que por el contrario hay cierta similitud, luego esto refleja un comportamiento semejante en cuanto a la distribución de los datos, además que este hecho se evidencia gráficamente en la Figura 24.

Teniendo en cuenta la media y la desviación estándar se muestra el análisis comparativo de las distintas sedes para el nivel avanzado de los dos años.

Estadísticos de muestras relacionadas

		Media	Desviación típ.	Error típ. de la media
Par 1	BARBOSA2009	18.92	9.895	2.856
	BARBOSA2010	28.08	17.671	5.101
Par 2	BARRANCA2009	18.92	11.301	3.262
	BARRANCA2010	31.50	16.031	4.628
Par 3	BUCARAMANGA2009	25.17	15.730	4.541
	BUCARAMANGA2010	25.75	14.611	4.218
Par 4	MÁLAGA2009	22.25	11.545	3.333
	MÁLAGA2010	18.33	10.824	3.125
Par 5	SOCORRO2009	22.08	15.048	4.344
	SOCORRO2010	27.00	16.337	4.716

Tabla 35. Estadísticos descriptivos de la prueba clasificatoria por sedes del nivel avanzado 2009 y 2010

En la Tabla 35 se observa que la media de la sede de Barbosa para el año 2009 fue de 18,95 y para el año 2010 de 28,1 lo que muestra un aumento del porcentaje de respuestas correctas, con respecto a las desviaciones se nota una mayor dispersión en el año 2010. La sede de Barranca presenta el mayor cambio en su media comparado con las demás sedes, ya que aumentó de 18,9 en el año 2009 a 31,5 en año 2010, además de destacarse por ser la mayor media en los dos años. La sede de Bucaramanga mantuvo su media y desviación, es decir sus resultados se conservaron sin aumentar ni disminuir. La sede de Málaga fue la única que disminuyó su media de 22,3 en el año 2009 a 18,3 en el año 2010 con relación a las demás sedes, mientras que sus desviaciones no tuvieron mayor cambio. La sede de Socorro presentó un aumento en sus medias de 22,1 a 27 y sus deviaciones estándar se mantuvieron; es decir, sus resultados mejoraron notablemente.

La prueba t que se presenta a continuación muestra que no existen diferencias significativas entre las medias de las respuestas correctas para cada sede de Bucaramanga, Málaga y Socorro del nivel avanzado en los dos años.

Las hipótesis de la prueba son:

$H_o: \mu_1 = \mu_2$

$H_a: \mu_1 \neq \mu_2$

μ_1: Media de la sede para el año 2009

μ_2: Media de la sede para el año 2010

Prueba de muestras relacionadas

		Diferencias relacionadas				
			95% Intervalo de confianza para la diferencia			
		Media	Inferior	Superior	t	Sig. (bilateral)
Par 1	BARBOSA2009 - BARBOSA2010	-9.167	-16.516	-1.818	-2.745	.019
Par 2	BARRANCA2009 - BARRANCA2010	-12.583	-18.276	-6.891	-4.865	.000
Par 3	BUCARAMANGA2009 - BUCARAMANGA2010	-.583	-6.391	5.224	-.221	.829
Par 4	MÁLAGA2009 - MÁLAGA2010	3.917	-3.777	11.610	1.120	.286
Par 5	SOCORRO2009 - SOCORRO2010	-4.917	-10.010	.177	-2.125	.057

Tabla 36.Prueba t para el nivel avanzado del año 2009 y 2010.

En la prueba de la Tabla 36 vemos que la única diferencia positiva corresponde a la sede de Málaga, en las demás sedes se presentó una diferencia negativa por lo que se podría pensar que en el 2010 los resultados mejoraron. En los intervalos de confianza para las sedes de Bucaramanga, Málaga y Socorro se encuentra el cero y el Sig. (Bilateral) es mayor que 0,05 por lo que se infiere que no hay evidencia para rechazar la hipótesis nula, luego el comportamiento de los resultados en las sedes en los dos años considerados fue prácticamente el mismo. Lo contrario ocurre en las sedes de Barbosa y Barrancabermeja ya que sus intervalos de confianza tienen sus extremos negativos y el Sig. (Bilateral) menor que 0.05, luego esto nos da evidencia para rechazar la hipótesis nula y aceptar la alternativa, la cual nos indica que existe una diferencia entre las medias de estas sedes para los dos años, indicando que los resultados del 2010 fueron superiores a los del 2009.

2.4 Análisis de las pruebas mediante el modelo Rasch para la fase clasificatoria de los años 2009 y 2010

Para analizar los ítems implementando el modelo Rasch se inició con la fase clasificatoria de los años 2009 y 2010, para ello los resultados se codificaron de manera dicotómica, 0 si no respondió o si eligió una opción incorrecta y 1 si respondió correctamente. Por medio del software WINSTEP se obtuvieron los estadísticos OUTFIT e INFIT para analizar el ajuste de los datos al modelo y los estadísticos separabilidad y confiablidad, los cuales nos permitirán hacer un análisis de la dificultad de los ítems y de la habilidad de los estudiantes.

A continuación en la Figura 25 se presenta los estadísticos para el nivel básico del año 2009:

```
Prueba Clasificatoria Nivel Básico 2009
--------------------------------------------------------------------------------
| ESTUDIANTES    1186 INPUT    1186 MEASURED          INFIT         OUTFIT    |
|          SCORE     COUNT     MEASURE   ERROR     IMNSQ   ZSTD  OMNSQ   ZSTD|
| MEAN       3.4      12.0       -1.12     .76      1.00     .1   1.00     .1|
| S.D.       1.6        .0         .79     .13       .20     .7    .39     .8|
| REAL RMSE    .77  ADJ.SD     .18  SEPARATION   .23  ESTUDI RELIABILITY  .05|
|-------------------------------------------------------------------------------|
| ITEMS       12 INPUT      12 MEASURED               INFIT         OUTFIT    |
| MEAN     333.7    1186.0         .00     .07      1.00     .0   1.00     .1|
| S.D.     152.9        .0         .74     .01       .05    1.8    .09    2.1|
| REAL RMSE    .07  ADJ.SD     .73  SEPARATION  9.81  ITEM   RELIABILITY  .99|
--------------------------------------------------------------------------------
```

Figura 25: Estadísticos generales de los ítems y los estudiantes de la prueba clasificatoria para el nivel básico 2009.

De la Figura 25 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: INFIT (Estudiantes: media=1.00, Desviación Estándar=0.20); (Ítems: media=1.00, Desviación Estándar=0.05); e OUTFIT(Estudiantes: media=1.00, Desviación Estándar=0.39)(Ítems: media=1.00, Desviación Estándar=0.09), además se consideró los estadísticos Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 0.23 y 0.05) e (ítems: 9.81 y 0.99). Debido al gran número de estudiantes y la poca cantidad de ítems, no se podrá estimar la habilidad de los estudiantes para todos los niveles. Por otra parte la estimación de la dificultad de los ítems es de muy buena calidad así que nos centraremos en estudiar solo los ítems.

A continuación se muestra en la Figura 26 los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems en el nivel básico del año 2009:

Prueba Clasificatoria Nivel Básico 2009

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
9	143	1186	1.07	.09	1.00	.0	.97	-.3	L9
1	157	1186	.95	.09	.94	-1.1	.84	-1.9	L1
10	189	1186	.72	.08	1.01	.3	1.08	1.1	C10
2	208	1186	.59	.08	.94	-1.2	.91	-1.2	G2
7	292	1186	.11	.07	.95	-1.6	.91	-1.8	A7
12	302	1186	.06	.07	1.03	.8	1.02	.4	G12
8	310	1186	.02	.07	.99	-.2	.97	-.7	G8
6	332	1186	-.08	.07	1.09	2.9	1.15	3.2	G6
11	367	1186	-.24	.07	1.06	2.1	1.09	2.2	A11
5	499	1186	-.79	.06	.97	-1.4	.96	-1.5	C5
4	600	1186	-1.19	.06	1.06	2.9	1.11	4.3	A4
3	605	1186	-1.21	.06	.94	-3.2	.93	-3.0	C3
MEAN	333.7	1186.0	.00	.07	1.00	.0	1.00	.1	
S.D.	152.9	.0	.74	.01	.05	1.8	.09	2.1	

Figura 26: Estadísticos descriptivos de los ítems de la prueba clasificatoria para el nivel básico 2009.

La medida de dificultad de los ítems va desde -1.21 lógitos a 1.07 lógitos. Se observan 7 ítems por encima y 5 ítems pordebajo de la dificultad de la media de los ítems. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) fluctúa entre 0.09 para ítems de mayor dificultad, hasta 0.06 lógitos para ítems de menor dificultad. Es de notar que el error estándar de los estimados decrece a medida que disminuye la dificultad de los ítems. Los valores MNSQ INFIT Y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste al modelo ya que ninguna medida es mayor que 1.3.

A continuación en la Figura 27 se presenta los estadísticos generados por WINSTEP para el nivel básico del año 2010:

```
Prueba Clasificatoria Nivel Básico 2010
-------------------------------------------------------------------------------
| ESTUDIANTES     857 INPUT     857 MEASURED          INFIT         OUTFIT    |
|           SCORE     COUNT     MEASURE   ERROR     IMNSQ   ZSTD  OMNSQ   ZSTD|
| MEAN       2.8       12.0       -1.47      .83      1.00     .1   1.00     .1|
| S.D.       1.6         .0         .85      .18       .21     .6    .43     .7|
| REAL RMSE    .85  ADJ.SD     .00  SEPARATION   .00  ESTUDI RELIABILITY  .00|
|-----------------------------------------------------------------------------|
| ITEMS      12 INPUT      12 MEASURED                INFIT         OUTFIT    |
| MEAN     179.3     857.0         .00      .10      1.00    -.1   1.00    -.1|
| S.D.      85.7        .0         .66      .01       .07    1.3    .11    1.4|
| REAL RMSE    .10  ADJ.SD     .65  SEPARATION  6.65  ITEM   RELIABILITY  .98|
-------------------------------------------------------------------------------
```

Figura 27: Estadísticos generales de los ítems y los estudiantes de la prueba clasificatoria para el nivel básico 2010.

En la Figura 27 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: OUTFIT (Estudiantes: media=1.00, Desviación Estándar=0.43); (Ítems: media=1.00, Desviación Estándar=0.11) e INFIT (Estudiantes: media=1.00, Desviación Estándar=0.21); (Ítems: media=1.00, Desviación Estándar=0.07), además se consideró los estadísticos Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 0.00 y 0.00) e (ítems: 6.65 y 0.98). Estos resultados son el reflejo de una mala estimación de la habilidad de los estudiantes y una buena estimación de la dificultad de los ítems.

A continuación se muestra en la Figura 28 los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems en el nivel básico del año 2010:

Prueba Clasificatoria Nivel Básico 2010

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
11	85	857	.90	.12	.98	-.2	.97	-.2	TN11
7	87	857	.88	.12	1.03	.4	1.06	.5	G7
3	137	857	.29	.10	1.08	1.3	1.16	1.7	TN3
1	140	857	.26	.10	.92	-1.3	.91	-1.0	C1
6	141	857	.25	.10	.96	-.7	.98	-.2	A6
2	153	857	.14	.10	.92	-1.4	.82	-2.3	G2
10	156	857	.11	.10	1.20	3.5	1.28	3.3	G10
8	173	857	-.04	.09	1.00	.0	.95	-.7	A8
5	176	857	-.06	.09	.95	-1.0	.97	-.4	TN5
12	186	857	-.14	.09	1.01	.1	1.01	.2	TN12
4	354	857	-1.27	.08	.96	-1.4	.95	-1.4	L4
9	364	857	-1.33	.08	1.00	-.1	.98	-.5	G9
MEAN	179.3	857.0	.00	.10	1.00	-.1	1.00	-.1	
S.D.	85.7	.0	.66	.01	.07	1.3	.11	1.4	

Figura 28: Estadísticos descriptivos de los ítems de la prueba clasificatoria para el nivel básico 2010.

La medida de dificultad de los ítems va desde -1.33 lógitos a 0.90 lógitos. Se observan 7 ítems por encima y 5 ítems por debajo de la dificultad media de los ítems. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) se encuentra entre 0.12 para ítems de mayor dificultad, hasta 0.08 lógitos para ítems de menor dificultad. Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste ya que ninguno se encuentra por encima de 1.3.

A continuación mostramos el mapa 1 que presenta la interacción entre la habilidad de las personas y la dificultad de los ítems. A la izquierda de la línea punteada se muestra la distribución de los estudiantes y su media M. En la parte derecha se encuentra la distribución de la dificultad de los ítems con media estándar 0, considerada por el software WINSTEPS. Los mapas que se encuentran a continuación son los correspondientes al nivel básico de la prueba clasificatoria para el año 2009(izquierda) y el año 2010(derecha).

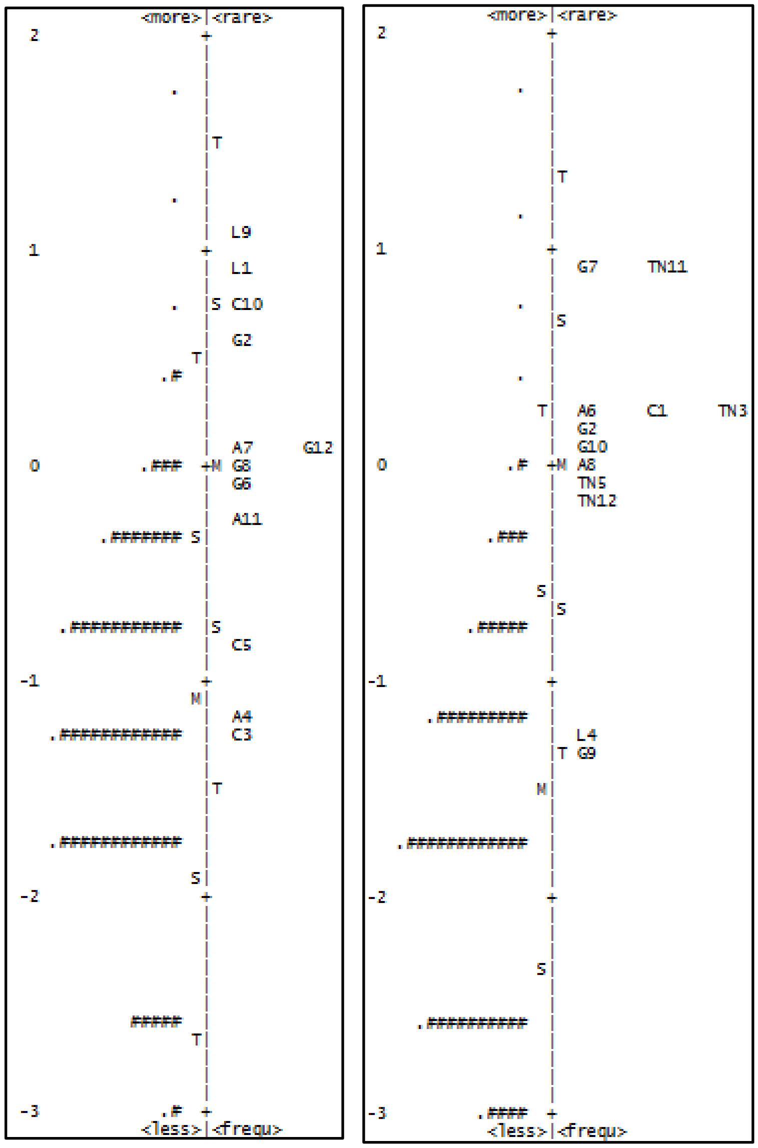


Figura 29. Mapas de ítems de la prueba clasificatoria para el nivel básico 2009 (izquierda) y 2010 (derecha).

En el año 2009 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media -1.18 y desviación estándar 0.88 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 y desviación estándar 0.74. Como se observa en la Figura 29 la media de la dificultad de los ítems es mayor a la media de la habilidad de los estudiantes por lo que se infiere que los ítems son de un grado de dificultad mayor a la capacidad de los estudiantes. Los únicos ítems que estuvieron por debajo de la media de la habilidad de las personas fue A4 Y C3. Los ítems A7 y G12 presentaron la misma dificultad, además en este año los ítems de lógica fueron los de mayor dificultad. En el año 2010 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media -1.69 y desviación estándar 1.07 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 ydesviación estándar 0.66. Varios ítems presentaron la misma dificultad como es el caso de G10 y G2; A6, C1 y TN3; G7 y TN11 lo cual muestra cierta homogeneidad, la media de la habilidad de los estudiantes estuvo por debajo de la dificultad de todos los ítems, lo cual significa que los ítems presentaron mayor dificultad respecto a la habilidad promedio de los estudiantes. Comparando la distribución de los ítems de los dos años se observa que se mantiene el nivel de dificultad de los ítems el cual es alto, además vemos que el ítem de Lógica (L4) del año 2010 fue de menor dificultad con respecto a los ítems de lógica del año 2009 a más de 2 lógitos de diferencia y los ítems de geometría mantuvieron el mismo nivel de dificultad en los dos años.

En la siguiente Figura 30 se presenta los estadísticos para el nivel medio del año 2009:

```
Prueba Clasificatoria Nivel Medio 2009
------------------------------------------------------------------------------
| ESTUDIANTES    1274 INPUT    1274 MEASURED          INFIT          OUTFIT   |
|           SCORE     COUNT     MEASURE   ERROR      IMNSQ   ZSTD  OMNSQ   ZSTD|
| MEAN       3.2      12.0      -1.27      .81       1.00     .1   1.02     .1|
| S.D.       1.5        .0        .81      .18        .28     .7    .61     .8|
| REAL RMSE    .83  ADJ.SD      .00  SEPARATION   .00  ESTUDI RELIABILITY  .00|
|-----------------------------------------------------------------------------|
| ITEMS       12 INPUT      12 MEASURED                  INFIT          OUTFIT   |
| MEAN     333.9    1274.0        .00      .08       1.00    -.1   1.02     .1|
| S.D.     197.6        .0        .91      .01        .04     .9    .11    1.2|
| REAL RMSE    .08  ADJ.SD      .91  SEPARATION 11.83  ITEM   RELIABILITY  .99|
------------------------------------------------------------------------------
```

Figura 30. Estadísticos generales de los ítems y las personas de la prueba clasificatoria para el nivel medio 2009.

De la Figura 30 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: INFIT (Estudiantes: media=1.00, Desviación Estándar=0.28); (Ítems: media=1.00, Desviación Estándar=0.04); e OUTFIT (Estudiantes: media=1.02, Desviación Estándar=0.61)(Ítems: media=1.02, Desviación Estándar=0.11), además se consideró los estadísticos Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 0.00 y 0.00) e (ítems: 11.83 y 0.99). Por estos estadísticos tenemos que la estimación de la dificultad de los ítems presenta un buen ajuste al modelo.

La Figura 31 presenta los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems para el nivel medio del año 2009:

Prueba Clasificatoria Nivel Medio 2009

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
6	98	1274	1.47	.11	1.04	.5	1.30	2.2	G6
4	156	1274	.92	.09	1.05	.7	1.04	.4	L4
9	180	1274	.73	.08	.96	-.8	.85	-1.9	C9
5	239	1274	.36	.08	1.04	.9	1.02	.3	A5
7	257	1274	.26	.07	.99	-.2	.98	-.3	L7
11	268	1274	.20	.07	.99	-.2	1.02	.4	C11
8	300	1274	.04	.07	.95	-1.5	.95	-1.0	A8
2	304	1274	.02	.07	1.04	1.1	1.11	2.0	G2
1	359	1274	-.24	.07	1.01	.2	1.00	.0	TN1
12	469	1274	-.69	.06	1.01	.7	1.03	1.0	G12
3	507	1274	-.84	.06	.99	-.5	.98	-.5	L3
10	870	1274	-2.24	.07	.94	-1.9	.93	-1.8	G10
MEAN	333.9	1274.0	.00	.08	1.00	-.1	1.02	.1	
S.D.	197.6	.0	.91	.01	.04	.9	.11	1.2	

Figura 31. Estadísticos descriptivos de los ítems de la prueba clasificatoria para el nivel medio 2009.

Los ítems tienen una medida que va desde -2.24 lógitos a 1.47 lógitos en su dificultad. Se observan 6 ítems por encimay 6 ítems por debajo de la dificultad media de los ítems. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) fluctúa entre 0.06 para ítems de menor dificultad y 0.11para ítems de mayor dificultad. Es de notar que el error estándar de los estimados varía a medida que disminuye la dificultad de los ítems. Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste al igual que los estandarizados ZSTD INFIT y ZSTD OUTFIT ya que ninguno se encuentra por encima de 1.3. En este nivel todos los ítems se comportan dentro de la expectativa del modelo.

A continuación en la Figura 32 se presenta los estadísticos generados por WINSTEP para el nivel medio del año 2010:

```
Prueba Clasificatoria Nivel Medio 2010
-------------------------------------------------------------------------------
| ESTUDIANTES    1051 INPUT    1051 MEASURED          INFIT         OUTFIT    |
|           SCORE     COUNT     MEASURE   ERROR     IMNSQ   ZSTD  OMNSQ   ZSTD|
| MEAN       3.1      12.0       -1.35     .83      1.00     .0   1.05     .1|
| S.D.       1.4        .0         .81     .17       .35     .9    .73     .9|
| REAL RMSE    .85  ADJ.SD     .00  SEPARATION   .00  ESTUDI RELIABILITY  .00|
|-----------------------------------------------------------------------------|
| ITEMS      12 INPUT      12 MEASURED                INFIT         OUTFIT    |
| MEAN     267.8    1051.0         .00     .09      1.00    -.3   1.05     .3|
| S.D.     178.1        .0        1.01     .02       .03    1.2    .09    1.4|
| REAL RMSE    .09  ADJ.SD    1.00  SEPARATION 11.47  ITEM   RELIABILITY  .99|
-------------------------------------------------------------------------------
```

Figura 32. Estadísticos generales de los ítems y las personas de la prueba clasificatoria para el nivel medio 2010.

En la Figura 32 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: OUTFIT (Estudiantes: media=1.05, Desviación Estándar=0.73); (Ítems: media=1.05, Desviación Estándar=0.09) e INFIT (Estudiantes: media=1.00, Desviación Estándar=0.35); (Ítems: media=1.00, Desviación Estándar=0.03), además se consideró los estadísticos Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 0.00 y 0.00) e (ítems: 11.47 y 0.99). Lo anterior evidencia una vez más la buena estimación de la dificultad de los ítems.

La Figura 33 presenta los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems para el nivel medio del año 2010:

Prueba Clasificatoria Nivel Medio 2010

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
4	91	1051	1.24	.11	1.02	.3	1.15	1.2	G4
1	98	1051	1.15	.11	.99	-.1	1.18	1.5	A1
5	120	1051	.91	.10	1.00	.1	1.11	1.0	TN5
10	144	1051	.68	.09	1.03	.5	1.16	1.7	TN10
2	156	1051	.58	.09	1.00	.1	1.10	1.2	G2
6	211	1051	.18	.08	1.02	.4	1.08	1.2	TN6
11	214	1051	.16	.08	1.01	.2	1.04	.7	L11
8	237	1051	.01	.08	.98	-.5	.94	-.9	G8
7	304	1051	-.37	.07	1.04	1.4	1.03	.7	G7
9	405	1051	-.87	.07	.92	-3.5	.89	-3.4	A9
3	600	1051	-1.76	.07	.97	-1.3	.98	-.7	TN3
12	633	1051	-1.91	.07	.97	-1.0	.97	-1.0	A12
MEAN	267.8	1051.0	.00	.09	1.00	-.3	1.05	.3	
S.D.	178.1	.0	1.01	.02	.03	1.2	.09	1.4	

Figura 33: Estadísticos descriptivos de los ítems de la prueba clasificatoria para el nivel medio 2010.

Los ítems tienen una medida de dificultad que va desde -1.91 lógitos a 1.24 lógitos. Se observan 8 ítems por encima y 4 por debajo de la media de la dificultad de los ítems. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) se encuentra entre 0.07 y 0.11. Es de notar que el error estándar de los valores estimados varía a medida que disminuye la dificultad de los ítems. Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste.

Los mapas que se encuentran a continuación son los correspondientes al nivel medio de la prueba clasificatoria para el año 2009(izquierda) y el año 2010(derecha):

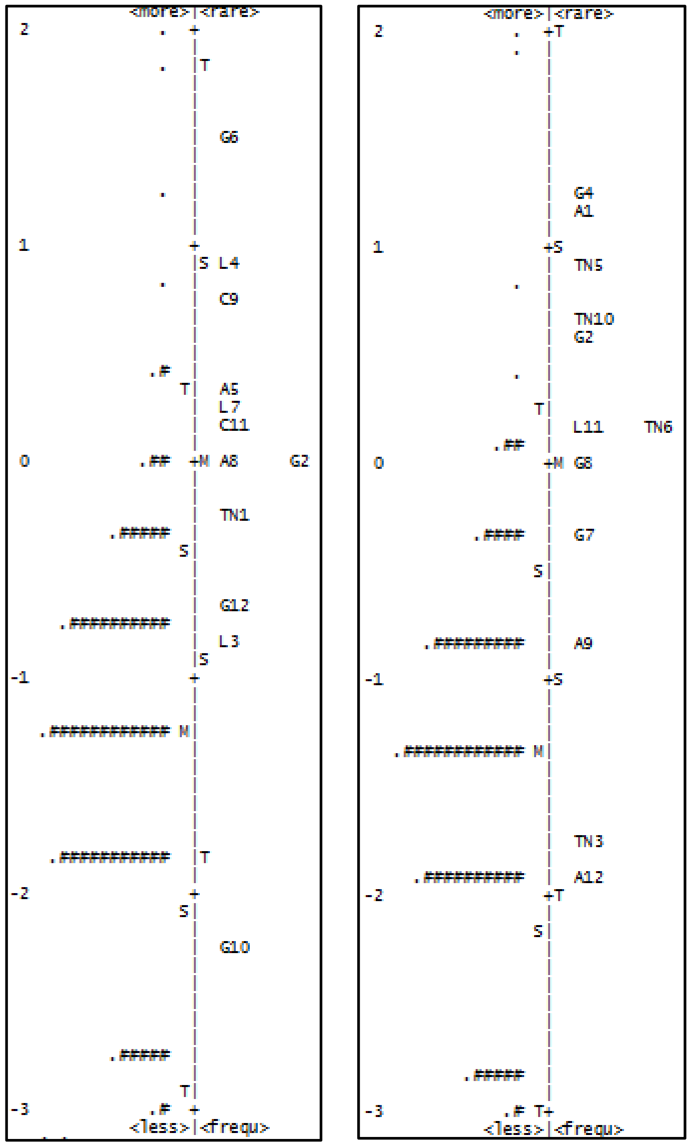


Figura 34. Mapa de ítems de la prueba clasificatoria para el nivel medio 2009 (izquierda) y 2010 (derecha).

En el año 2009 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media -1.33y desviación estándar 0.95 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 y desviación estándar 0.91. Como se nota en la Figura 34 la media de la dificultad de los ítems se encuentra a 1.5 lógitos por encima de la media de la habilidad de los estudiantes por lo que se infiere que los ítems son de un grado de dificultad mayor a la habilidad de los estudiantes. El único ítem que estuvo por debajo de la media de la habilidad de las personas fue el G10. Los ítems que presentaron la misma dificultad fueron el A8 y G2. En el año 2010 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media -1.43 y desviación estándar 0.98 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 ydesviación estándar1.01. Los ítems L11 y TN6 presentaron la misma dificultad. Por debajo de la media de la habilidad de los estudiantes estuvieron los ítems TN3 y A12. Comparando la distribución de los ítems de los años se observa que dentro de los ítems de mayor dificultad para los dos años estuvo un problema de geometría. En general los ítems presentaron una gran dificultad para los estudiantes.

La Figura 35muestra los estadísticos para el nivel avanzado del año 2009:

```
Prueba Clasificatoria Nivel Avanzado 2009
-------------------------------------------------------------------------------
| ESTUDIANTES    1254 INPUT    1254 MEASURED         INFIT         OUTFIT    |
|           SCORE     COUNT     MEASURE   ERROR     IMNSQ   ZSTD  OMNSQ   ZSTD|
| MEAN       2.8      12.0       -1.66     .83       .99     .1   1.05     .2|
| S.D.       1.6        .0         .83     .18       .23     .6    .77     .7|
| REAL RMSE    .85  ADJ.SD     .00  SEPARATION   .00  ESTUDI RELIABILITY  .00|
|-----------------------------------------------------------------------------|
| ITEMS      12 INPUT      12 MEASURED                   INFIT         OUTFIT    |
| MEAN     275.3    1254.0         .00     .08       .98    -.7   1.05    -.1|
| S.D.     156.7        .0         .99     .02       .07    1.9    .15    2.4|
| REAL RMSE    .09  ADJ.SD     .98  SEPARATION 11.45  ITEM   RELIABILITY  .99|
-------------------------------------------------------------------------------
```

Figura 35: Estadísticos generales de los ítems y las personas de la prueba clasificatoria para el nivel avanzado 2009.

De la Figura 35 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: INFIT (Estudiantes: media=0.99, Desviación Estándar=0.23); (Ítems: media=0.98, Desviación Estándar=0.07); e OUTFIT (Estudiantes: media=1.05, Desviación Estándar=0.77)(Ítems: media=1.05, Desviación Estándar=0.15), además se consideró los estadísticos Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 0.00 y 0.00) e (ítems: 11.45 y 0.99). Como observamos la estimación de la dificultad de los ítems es de muy buena calidad.

La Figura 36 muestra los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems para el nivel avanzado del año 2009:

Prueba Clasificatoria Nivel Avanzado 2009

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
12	51	1254	1.73	.15	.99	.0	1.01	.1	C12
6	93	1254	.85	.10	1.09	.5	1.33	2.1	C6
7	125	1254	.72	.10	1.05	.8	1.24	2.1	A7
2	130	1254	.67	.10	1.01	.1	1.03	.3	G2
11	237	1254	.66	.07	.93	-.3	1.24	2.9	G11
10	274	1254	.65	.07	.85	-.8	.91	-1.3	TN10
9	253	1254	-.20	.08	.94	-1.6	.89	-1.9	L9
8	295	1254	-.42	.07	1.11	3.0	1.21	3.8	G8
4	326	1254	-.58	.07	.97	-.8	.96	-.8	A4
1	478	1254	-1.25	.06	.92	-3.8	.90	-3.4	TN1
3	496	1254	-1.32	.06	.91	-4.2	.89	-4.0	TN3
5	545	1254	-1.52	.06	.98	-.9	.97	-1.0	G5
MEAN	275.3	1254.0	.00	.08	.98	-.7	1.05	-.1	
S.D.	156.7	.0	.99	.02	.07	1.9	.15	2.4	

Figura 36: Estadísticos descriptivos de los ítems de la prueba clasificatoria para el nivel avanzado 2009.

La medida de dificultad de los ítems va desde -1.52 lógitos a 1.73 lógitos. Se observan 6 ítems por encimay 6 ítems por debajo de la dificultad media de los ítems la cual es de 0 lógitos. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) fluctúa entre 0.15para ítems de mayor dificultad y 0.06 para ítems de menor dificultad. Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste ya que ninguno se encuentra por encima de 1,3.

La Figura 37muestra los estadísticos para el nivel avanzado del año 2010:

```
Prueba Clasificatoria Nivel Avanzado 2010
--------------------------------------------------------------------------------
| ESTUDIANTES    1101 INPUT    1101 MEASURED          INFIT          OUTFIT    |
|          SCORE     COUNT     MEASURE   ERROR     IMNSQ   ZSTD  OMNSQ   ZSTD|
| MEAN       3.3      12.0       -1.28     .80      1.00     .1   1.04     .1|
| S.D.       1.8        .0         .92     .16       .23     .8    .64     .8|
| REAL RMSE    .82  ADJ.SD     .42  SEPARATION   .51  ESTUDI RELIABILITY  .21|
|------------------------------------------------------------------------------|
| ITEMS      12 INPUT      12 MEASURED                INFIT          OUTFIT    |
| MEAN     292.6    1101.0         .00     .08      1.00    -.4   1.04     .0|
| S.D.     156.1        .0         .95     .02       .07    2.0    .14    2.0|
| REAL RMSE    .09  ADJ.SD     .94  SEPARATION 10.95  ITEM   RELIABILITY  .99|
--------------------------------------------------------------------------------
```

Figura 37: Estadísticos generales de los ítems y las personas de la prueba clasificatoria para el nivel avanzado 2010.

En la Figura 37 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: OUTFIT (Estudiantes: media=1.04, Desviación Estándar=0.64); (Ítems: media=1.04, Desviación Estándar=0.14) e INFIT (Estudiantes: media=1.00, Desviación Estándar=0.23); (Ítems: media=1.00, Desviación Estándar=0.07), además se consideró los estadísticos Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 0.51 y 0.21) e (ítems: 10.95 y 0.99). Con respecto a las anteriores medidas se afirma que como los estadísticos Separación y Confiabilidad son tan bajos no se distingue las habilidades de los estudiantes mientras que los ítems están bien estimados.

La Figura 38 muestra los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems para el nivel avanzado del año 2010:

Prueba Clasificatoria Nivel Avanzado 2010:

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
12	74	1101	1.66	.13	.97	-.3	.93	-.4	A12
6	95	1101	1.36	.11	1.03	.4	1.29	2.0	L6
5	143	1101	.86	.09	1.10	1.6	1.15	1.5	A5
8	200	1101	.41	.08	1.12	2.4	1.21	2.6	G8
9	220	1101	.27	.08	1.08	1.8	1.24	3.2	G9
4	261	1101	.02	.08	.96	-1.1	.97	-.4	TN4
7	270	1101	-.03	.08	.93	-1.9	.90	-1.8	G7
3	276	1101	-.06	.08	.95	-1.3	.97	-.5	A3
11	430	1101	-.84	.07	.94	-2.4	.94	-1.8	G11
10	488	1101	-1.10	.07	.97	-1.1	.96	-1.1	TN10
1	508	1101	-1.19	.07	.90	-4.5	.87	-4.1	A1
2	546	1101	-1.36	.07	1.04	1.7	1.04	1.3	A2
MEAN	292.6	1101.0	.00	.08	1.00	-.4	1.04	.0	
S.D.	156.1	.0	.95	.02	.07	2.0	.14	2.0	

Figura 38: Estadísticos descriptivos de los ítems de la prueba clasificatoria para el nivel avanzado 2010.

La medida de dificultad de los ítems va desde +1.66 lógitos a -1.36 lógitos. Se observan 6 ítems por encima y 6 ítems por debajo de la dificultad media de los ítems. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) se encuentra entre 0.07 y 0.13. Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste ya que ninguno se encuentra por encima de 1,3.

Los mapas que se encuentran a continuación son los correspondientes al nivel avanzado de la prueba clasificatoria para el año 2009(izquierda) y el año 2010(derecha):

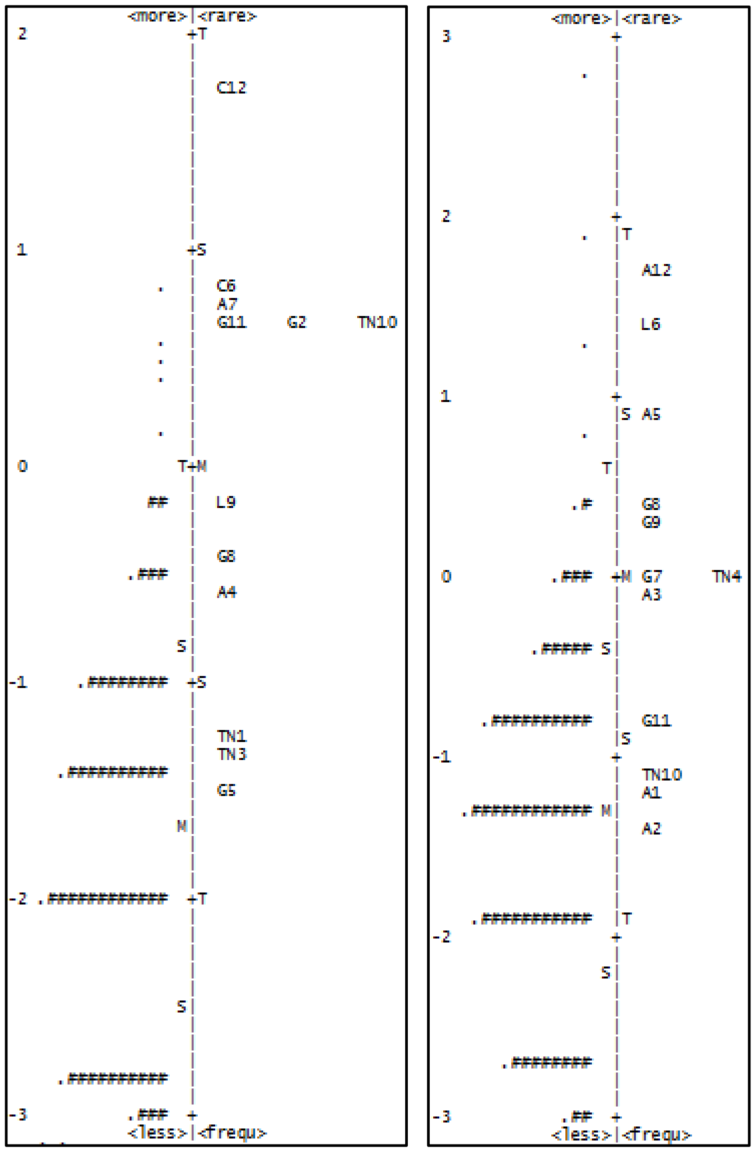


Figura 39. Mapa de ítems de la prueba clasificatoria para el nivel avanzado 2009 (izquierda) y 2010 (derecha).

En el año 2009 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media -1.84y desviación estándar 1.04 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 y desviación estándar 0.99. Como se nota la media de la dificultad de los ítems se encuentra a 1.8 lógitos por encima de la media de la habilidad de los estudiantes por lo que se infiere que los ítems son de un grado de dificultad mayor a la habilidad de los estudiantes. No se presentaron ítems por debajo de la media de la habilidad de los estudiantes. Los ítems que presentaron la misma dificultad son el G11, G2 y TN10. En el año 2010 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media -1.38 y desviación estándar 1.04 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 ydesviación estándar0.95. Los ítems G7 y TN4 tuvieron la misma dificultad, la cual fue la media de la dificultad de los ítems. Por debajo de la media de la habilidad de los estudiantes estuvo el ítem A2. Comparando la distribución de los ítems de los dos años se observa que en el año 2009 se presentó el ítem C12 con una medida de dificultad mayor de aproximadamente un lógito con respecto a los demás ítems. En la Figura 39 se vemos que la distribución de la dificultad de los ítems para el 2010 fue más uniforme que la del 2009.

2.5 Análisis de los ítems con Rasch para las sedes de la fase clasificatoria de los años 2009 y 2010

En este apartado donde se analizará los ítems para cada sede y nivel, se empleará el gráfico DIF. Measure, tomado de WINSTEPS, en donde el eje Y representa la medida de la dificultad de los ítems en lógitos y el eje X representa los ítems.

A continuación,en la Figura 40, se muestra la dificultad de los ítemspara el nivel básico del año 2009 por sedes:

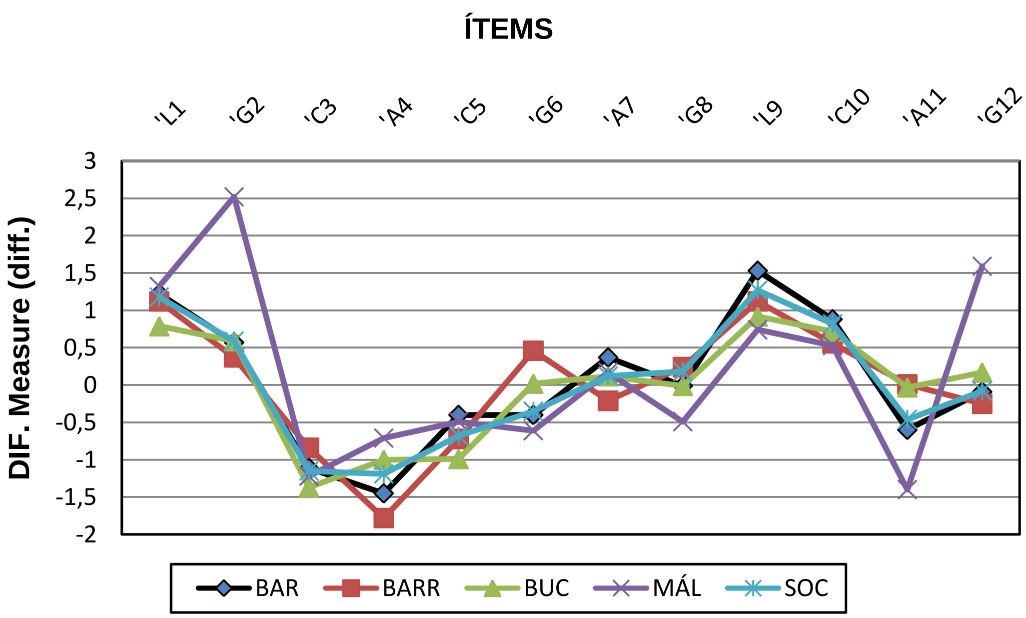


Figura 40:Dificultad de los ítems para cada sede de la prueba clasificatoria nivel básico año 2009

Se observa que la sede de Málaga presenta una dificultad de 2,52lógitos en el ítem de geometría G2 en comparación con las demás sedes que presentaron una dificultad entre -1,78 y 0,59 lógitos, otro ítem que presentó una dificultad alta en esta misma sede fue el G12 cuya medida fue de 1,59 lógitos mientras que las otras sedes estuvieron entre -0,25 y 0,17; el ítem de algebra A11 muestra una medida de dificultad menor para esta sede ya que obtuvo una medida de dificultad de -1,4 lógitos. En los demás ítems no se presentan diferencias significativas en su dificultad. Además, como mostramos en el análisis descriptivo el ítem L9 fue muy difícil y los ítems A4 Y C3 fueron demasiado fáciles, lo cual se corrobora una vez más en la Figura 40.

A continuación,en la Figura 41 se muestra la dificultad de los ítemspara el nivel básico del año 2010 por sedes:

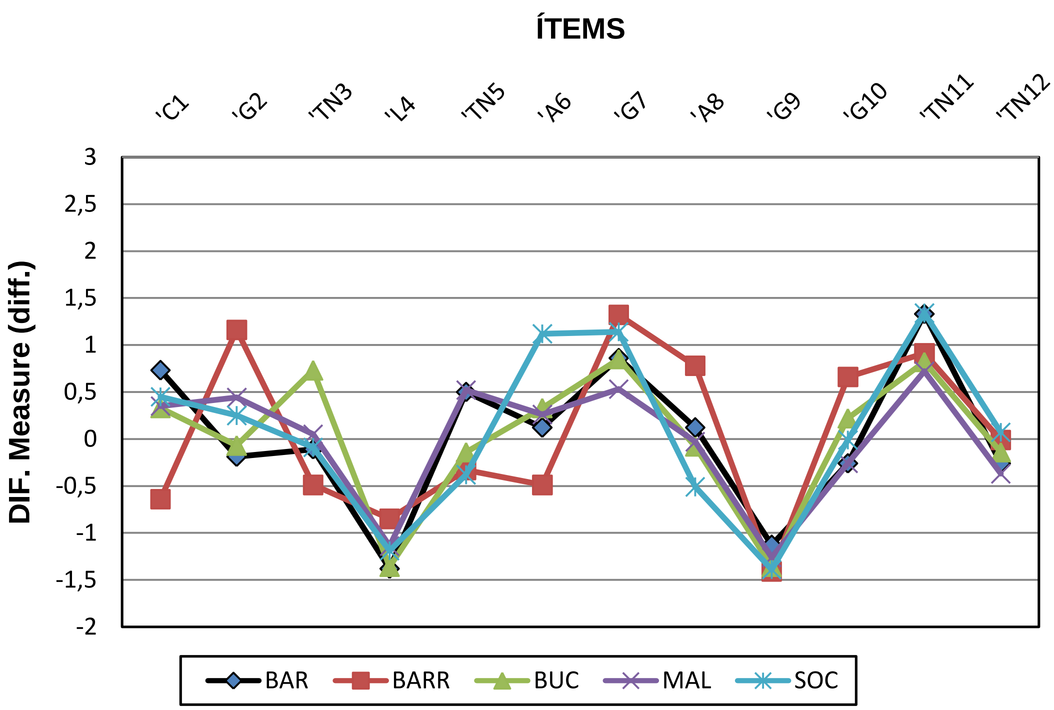


Figura 41:Dificultad de los ítems para cada sede de la prueba clasificatoria nivel básico año 2010

Se observa que no hubo diferencias significativas en cuanto a la dificultad de los ítems. Se nota que los ítems de menor dificultad para todas las sedes fueron el G9 con medidas de dificultad entre -1,39 y -1,26 lógitos y el L4 medidas entre -1,36 y -0,84 lógitos respectivamente, además los ítems de mayor dificultad fueron el TN11 con medidas entre 0,72 y 1,34 lógitos y el G7 con medidas entre 0,53 y 1,32 lógitos lo cual se corrobora en el análisis descriptivo, ya que estos ítems quedaron clasificados en las categorías muy fácil y demasiado difícil.

En la Figura 42, se muestra la dificultad de los ítemspara el nivel mediodel año 2009 por sedes:

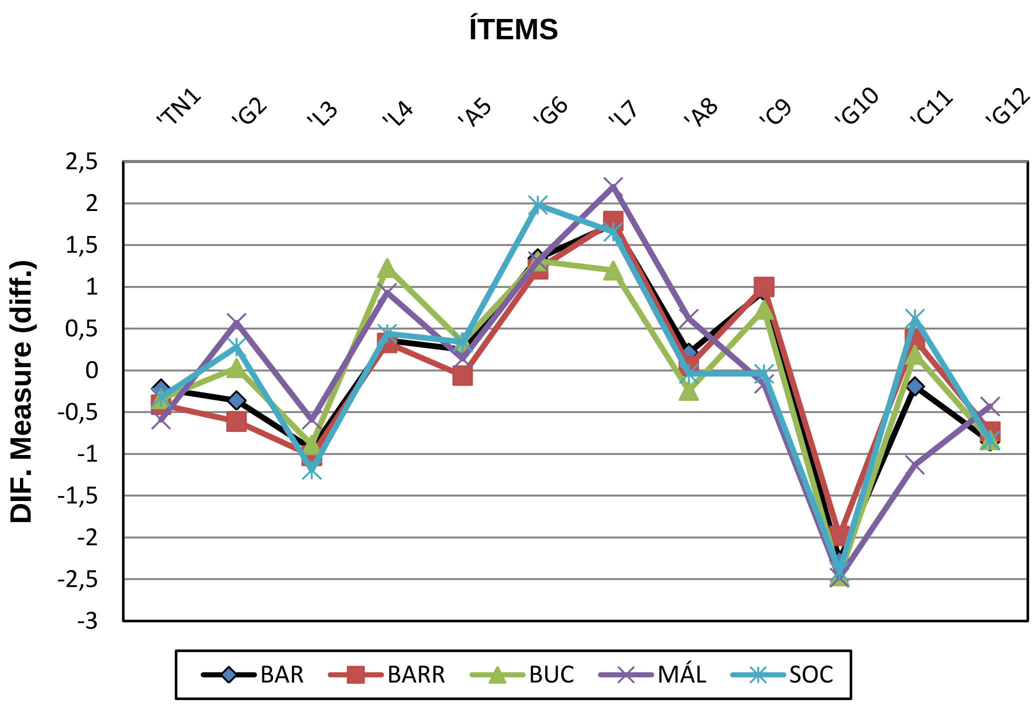


Figura 42:Dificultad de los ítems para cada sede de la prueba clasificatoria nivel medio año 2009

Como se observa no existen diferencias significativas entre las dificultades estimadas de los ítems por sedes. Algo para apreciar es que al igual que se mostró en el análisis descriptivo el ítem de Geometría G10 fue demasiado fácil presentando su medida de dificultad entre -2,41 y -1,98, además, los ítems G6 y L7, se ubicaron entre las categorías demasiado difícil y muy difícil, lo cual se corrobora una vez más en la Figura 42, mostrando una medida de dificultad entre 1 y 2,5 lógitos.

A continuación,en la Figura 43, se muestra la dificultad de los ítemspara el nivel mediodel año 2010 por sedes:

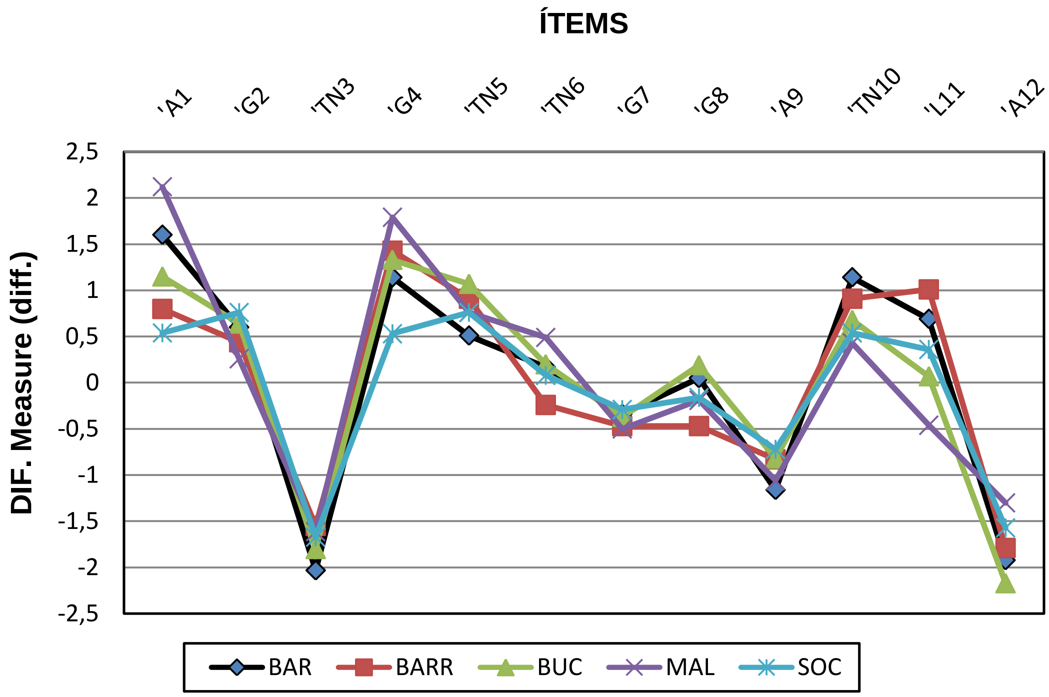


Figura 43:Dificultad de los ítems para cada sede de la prueba clasificatoria nivel medio año 2010

Se observa que los ítems de menor dificultad fueron el TN3 con medidas entre -2,03 y -1,55 lógitos y el A12 con medidas -2,17 y -1,3 lógitos, además el ítem de mayor dificultad es el G4 con medidas entre 0,53 y 1,79 lógitos, lo cual corrobora lo descrito en el análisis descriptivo ya que estos ítems quedaron ubicado en las categorías demasiado fácil y demasiado difícil. En el ítem A1 se presentan diferencias de más de un lógito entre la sede de Málaga y Socorro, y Málaga y Barrancabermeja, lo cual muestra que este ítem fue más difícil para los estudiantes de Málaga que para los de las demás sedes. Lo mismo ocurrió con el ítem L11 puesto que tuvo diferencias de más de un lógito entre la sede de Barrancabermeja y Málaga, lo cual muestra que este ítem le produjo mayor dificultad a los estudiantes de Barrancabermeja. En los demás ítems no se presentan diferencias significativas.

La Figura 44, muestra la dificultad de los ítemspara el nivel avanzadodel año 2009 por sedes:

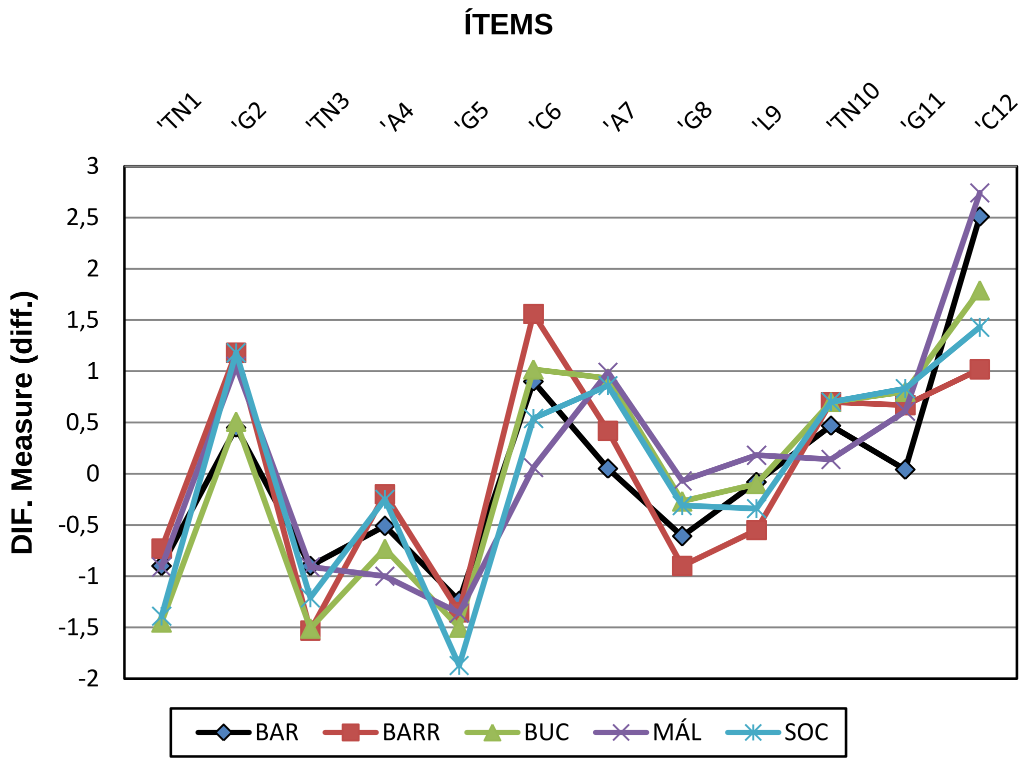


Figura 44. Dificultad de los ítems para cada sede de la prueba clasificatoria nivel avanzado año 2009

Se observa que en el ítem de combinatoria C12 su medida de dificultad en la sede de Barranca presenta una diferencia de 1,49 lógitos con la sede de Barbosa y de 1,72 lógitos con la sede de Málaga, de lo que se infiere que la dificultad de este ítem fue menor para la sede de Barranca que para la sedes de Barbosa y Málaga donde presentó una medida de dificultad de 2,51 y 2,74 lógitos respectivamente. Los demás ítems no presentan diferencias significativas: además, es de resaltar que como mostramos en el análisis descriptivo los ítems G2, C6 y C12 fueron demasiado difíciles lo cual se corrobora una vez más en la Figura 44.

A continuación,en la Figura 45, se muestra la dificultad de los ítemspara el nivel avanzadodel año 2010 por sedes:

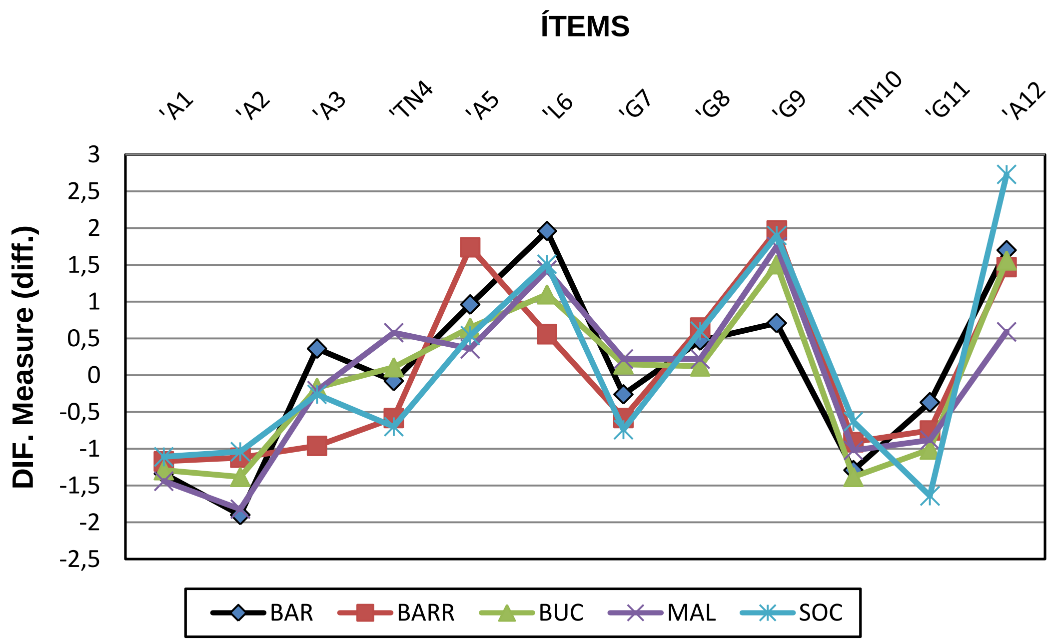


Figura 45:Dificultad de los ítems para cada sede de la prueba clasificatoria nivel avanzado año 2010

Se observa que en el ítem A12 la diferencia entre la sede de Socorro y las demás es de un lógito o más, lo cual muestra que este ítem presentó mayor dificultad en esta sede que en las demás. Los ítems de menor dificultad para la mayoría de los estudiantes fueron el A2 con medidas entre -1,9 y -1,04 y el A1 con medidas entre -1,44 y -1,11, el ítem de mayor dificultad fue el A12 con medidas de dificultad entre 0,59 y 2,73 mostrando una diferencia de más de dos lógitos entre las sedes de Málaga y Socorro, esto se corrobora en el análisis descriptivo puesto que estos ítem están clasificados en las categorías de muy difícil y demasiado fácil. En general los ítems no presentaron diferencias significativas.

3. Fase Selectiva

3.1 Análisis descriptivo de los ítems de la fase selectiva de los años 2009 y 2010

En la Fase Selectiva de los años 2009 y 2010, se estudiará la dificultad de los 9 ítems que se presentaron. En esta fase hay 6 ítems de opción múltiple y 3 ítems tipo ensayo para cada nivel, por lo que en un primer momento se estudiarán los 6 primeros ítems teniendo en cuenta las categorías definidas en el capítulo dos para el análisis de los ítems de la prueba clasificatoria; posteriormente, se analizarán los 3 ítems de acuerdo a la escala de calificación establecida por el grupo de olimpiadas de 0 a 6, que responde al nivel de completes de la respuesta. Los criterios de evaluación son:

0. No escribió algo.
1. Escribió una expresión.
2. Escribió la expresión e hizo un despeje
3. Desarrolló pero cometió errores.
4. Resolvió pero no escribió la conclusión
5. Resolvió pero escribió la conclusión incompleta.
6. Resolvió y escribió la conclusión completa.

Figura 46. Escala de calificación para los ítems tipo ensayo

NIVEL BÁSICO 2009

En este nivel se presentaron 139 estudiantes.

La Figura 47 muestra el porcentaje de respuestas correctas para los 6 primeros ítems de la prueba selectiva correspondiente al nivel básico.

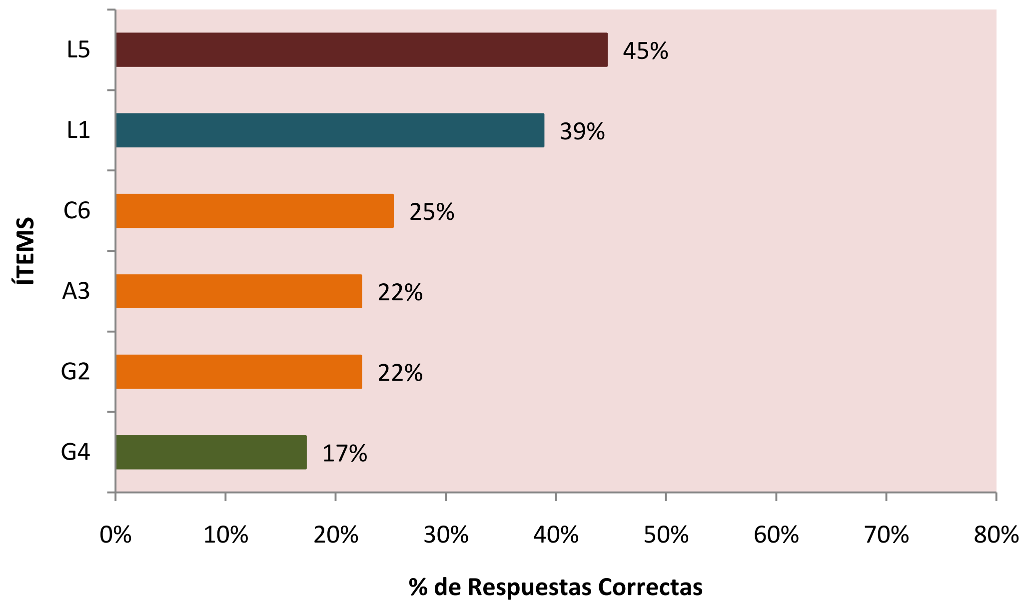


Figura 47. Porcentajes de respuestas correctas de los items según su categoria correspondiente a la prueba selectiva nivel básico del año 2009

- Muy difícil: G4.
- Fácil: L1.
- Difícil: G2, A3 y C6.
- Muy fácil: L5.

En la Tabla 37 se presentan los ítems junto a su respectiva área, frecuencia y porcentaje de respuestas correctas, y por último a la categoría en la que se ubica:

ÍTEMS	**Área**	**Cantidad de Respuestas Correctas**	**% de Respuestas Correctas**	**CATEGORÍA**
G4	Geometría: Volumen	24	17%	Muy difícil
G2	Geometría: Rectángulos	31	22%	Difícil
A3	Álgebra: Regla de Tres	31	22%	Difícil
C6	Combinatoria: Conteo	35	25%	Difícil
L1	Razonamiento Lógico	54	39%	Fácil
L5	Razonamiento Lógico	62	45%	Muy fácil

Tabla 37. Clasificación de los ítems según su categoría en la prueba selectiva nivel básico 2009.

En la Tabla 38 se muestra el número de estudiantes que respondieron cada opción en los ítems, además se resalta la opción correcta y la opción más contestada.

	L1	**G2**	**A3**	**G4**	**L5**	**C6**
a	9	32	8	9	12	40
b	12	30	12	24	24	56
c	49	45	31	4	62	35
d	15	31	55	18	5	4
e	54	0	23	76	10	3
NO Respondieron	0	1	10	8	26	1

Tabla 38. Número de respuestas que respondieron cada opción para los ítems de la prueba selectivanivel básico 2009

Opción Correcta

Opción más contestada

En este nivel no se presentaron ítems de categoría 1, demasiado difícil ni de categoría 6, demasiado fácil. Los ítems de este nivel se ubican dentro de las siguientes categorías:

CATEGORÍA 2: Muy difícil

Se presentó un solo ítem en esta categoría con el 17% respuestas correctas (Ver Figura 47), el cual fue el siguiente problema geométrico:

> **4.** El volumen de un sólido rectangular, cuya base mide $12cm^2$ y dos de sus caras laterales miden 8 y 6 cm^2 respectivamente es:
>
> (a) $756cm^3$ (b) $24cm^3$ (c) $9cm^3$
> (d) $104cm^3$ (e) Ninguna de las anteriores

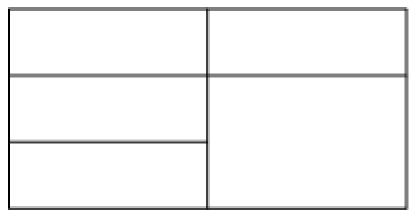
La opción correcta es la (b) la cual respondieron 24 estudiantes. Para la solución de este problema se debía manejar el concepto de volumen, además de saber identificar el largo, ancho y alto de un sólido rectangular (Ver Solución Anexos). La opción (e) fue las más contestada (Ver Tabla 38), esto se pudo deber a que los estudiantes asumieron que las medidas dadas en el enunciado correspondían al largo, ancho y alto del sólido, luego ellos multiplicaron $12 \times 8 \times 6 = 576$ y como este resultado no aparecía en las opciones, eligieron ninguna de las anteriores sin tener en cuenta que las medidas estaban en cm^2.

CATEGORÍA 3: Difícil

En la Figura 47 se observa que se presentaron tres ítems en esta categoría, uno de geometría y otro de álgebra con un 22% de respuestas correctas cada uno y un ítem de combinatoria con el 25% de respuestas correctas.

- Problema de Geometría:

2. ¿Cuántos rectángulos hay en la figura?



(a) 9 (b) 11 (c) 6 (d) 12 (e) 21

La opción correcta es la (d) la cual respondieron 31 estudiantes. Para la solución a este problema se debía conocer e identificar la figura geométrica del rectángulo, además de recordar que el cuadrado también es un rectángulo (Ver Solución Anexos). En la Tabla 32, vemos que la opción (c) fue la más contestada, lo cual pudo deberse a que los estudiantes solo identificaron los rectángulos que se definen a simple vista siendo 5 más el rectángulo grande que encierra los demás.

- Problema de Álgebra:

3. Si h hombres hacen un trabajo en d días, entonces $h+r$ hombres pueden hacer el trabajo en:

(a) $d+r$ días (b) $d-r$ días (c) $\frac{hd}{h+r}$ días
(d) $\frac{d}{h+r}$ días (e) Ninguna de las anteriores.

La opción (d) fue la más contestada (Ver Tabla 38). Para la solución a este problema el estudiante debía interpretar las variables dadas y plantear un regla de tres inversa (Ver Solución Anexos). La opción (d) fue la más contestada por 55 estudiantes, esto se pudo deber a que el estudiante asumió que si h hombres hace un trabajo en d días, entonces debían hacer una división entre los d días y los $h + r$ hombres para obtener el tiempo necesario para terminar el trabajo, mostrando así que no manejan el concepto de magnitudes inversamente proporcionales.

- Problema de Combinatoria:

> **6.** Cinco caminos conducen a la cumbre de una montaña. ¿De cuántas maneras puede subir un turista a la montaña y descender de ella, si el ascenso y descenso tienen lugar por caminos diferentes?
>
> (a) 25 (b) 10 (c) 20 (d) 9 (e) 15

Para resolver este problema se debía realizar un conteo (Ver Solución Anexos). La opción correcta es la (c) la cual respondieron 35 estudiantes. La opción más contestada fue la (b) (Ver Tabla 38), esto pudo deberse a que el estudiante tomó los cinco caminos y conto dos veces como uno el subir y otro el descender, por lo que multiplico $5 \times 2 = 10$, sin tener en cuenta que se preguntaba era de cuantas maneras se puede subir y descender, si el ascenso y el descenso tiene lugar por caminos diferentes.

CATEGORÍA 4: Fácil

Se presentó un ítem de Razonamiento Lógico (L1) con un porcentaje del 39% respuestas correctas (Ver Figura 47). Este ítem fue el siguiente problema:

> **1.** Mariano dobla una hoja de papel cinco veces siempre a la mitad, luego atraviesa el papel así doblado con un lápiz justo en el centro y finalmente desdobla el papel. El número de agujeros que aparecen en el papel desdoblado es:
>
> (a) 5 (b) 16 (c) 10 (d) 25 (e) 32

La opción correcta es la (e) la cual fue la más contestada (Ver Tabla 38). Para resolver este problema se debía aplicar el concepto de potenciación. La opción (c) la respondieron 49 estudiantes, esto se pudo deber a que el estudiante interpreto que como se doblaba la hoja cinco veces siempre a la mitad, luego multiplicaba $5 \times 2 = 10$ para tener la respuesta.

CATEGORÍA 4: Muy fácil

En esta categoría se presentó un ítem de Razonamiento Lógico (L1) el cual obtuvo un 45% de respuestas correctas (Ver Figura 47). Este ítem fue el siguiente problema:

5. Andrés miente los días miércoles, jueves y viernes y dice la verdad el resto de la semana. Pedro miente los domingos, lunes y martes y dice la verdad los otros días de la semana. Si ambos dicen " mañana es un día en el cual yo miento ". ¿Cuál día de la semana será mañana?

(a) Lunes (b) Martes (c) Miércoles (d) Jueves (e) Viernes

La opción (c) es la correcta y fue la más contestada (Ver Tabla 38). Para la solución del problema se debía hacer un análisis lógico de la situación que permitiera encontrar el día en el que la proposición sea verdadera (Ver Solución Anexos). Los estudiantes que contestaron las demás opciones posiblemente tuvieron en cuenta solo la información de uno de los dos personajes, es decir Andrés o Pedro.

A continuación se analizarán los problemas tipo ensayo que se presentaron en la prueba para este nivel.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

En la Figura 48 se presenta los porcentajes de estudiantes que contestaron los problemas tipo ensayo del nivel básico.

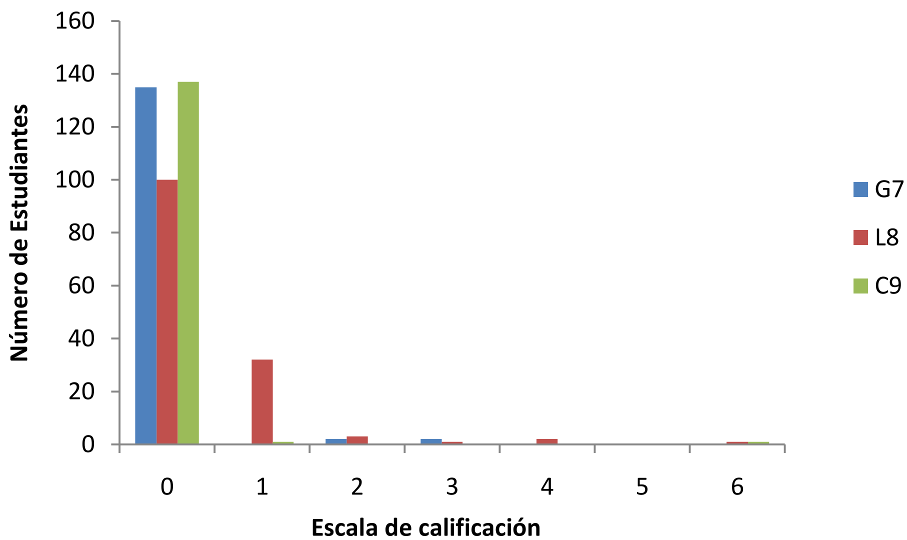


Figura 48. Número de estudiantes y puntuación de los ítems tipo ensayo de la prueba selectiva nivel básico 2009

Los problemas tipo ensayo de este nivel fueron los siguientes:

- Problema de Geometría:

> **7.** El perímetro de un triángulo isósceles rectángulo es $2p$. ¿Cuál es su área?.

Para la solución de este problema el estudiante debía implementar el Teorema de Pitágoras, saber cómo encontrar el área del triángulo y además plantear ecuaciones y resolverlas (Ver Solución Anexos). Como vemos en la Figura 48 en este ítem 135 estudiantes no escribieron nada, 2 estudiantes escribieron alguna expresión y despejaron una ecuación, y otros 2 desarrollaron pero cometieron errores en las operaciones. La dificultad de este problema se pudo deber a que no conocen que es un triángulo isósceles rectángulo o no saben diferenciar el área del perímetro.

- Problema de Razonamiento Lógico:

8. Tres animalitos, el gusano, el gato y el murciélago, amigos de Alicia en el País de las Maravillas, fueron acusados de haberse robado la sal y habérsela comido. Al ser interrogados, declararon:

Gusano: El gato se comió la sal.
Gato: Eso es cierto.
Murciélago: Nunca comí sal.

Si se sabe que al menos una de sus declaraciones es verdadera y al menos una es falsa. ¿Quién se comió la sal?.

Para resolver este problema se debía plantear proposiciones basadas en las dadas en el problema y realizar un proceso lógico que permitiera llegar a la respuesta (Ver Solución Anexos). 100 estudiantes no escribieron nada, 32 escribieron algo, pero solo un estudiante lo resolvió completamente (Ver Figura 48). La dificultad se pudo deber a la falta de comprensión del enunciado o que era ilógico pensar algunos de los animales comen sal en la realidad.

- Problema de Combinatoria:

9. Para evitar la detección electrónica, un barco puede mandar mensajes cifrados a los barcos vecinos desplegando una serie de banderas de señal con distintas formas. Si se dispone de 12 banderas de esas, ¿Cuantos mensajes se pueden desplegar con un conjunto de 4 banderas?

Para resolver este problema el estudiante debía identificar que se requería contar el número de permutaciones, para lo cual debía plantear la fórmula que define esta permutación y resolverla (Ver Solución Anexos). 137 estudiantes no escribieron nada, solamente un estudiante lo resolvió correctamente (Ver Figura 48). La dificultad se pudo deber a que el estudiante no identifico que se debía hacer una permutación o no conocía la definición de una permutación para selecciones ordenadas.

NIVEL MEDIO 2009

En este nivel se presentaron 129 estudiantes.

La Figura 49 muestra el porcentaje de respuestas correctas para los 6 primeros ítems de la prueba selectiva correspondiente al nivel medio.

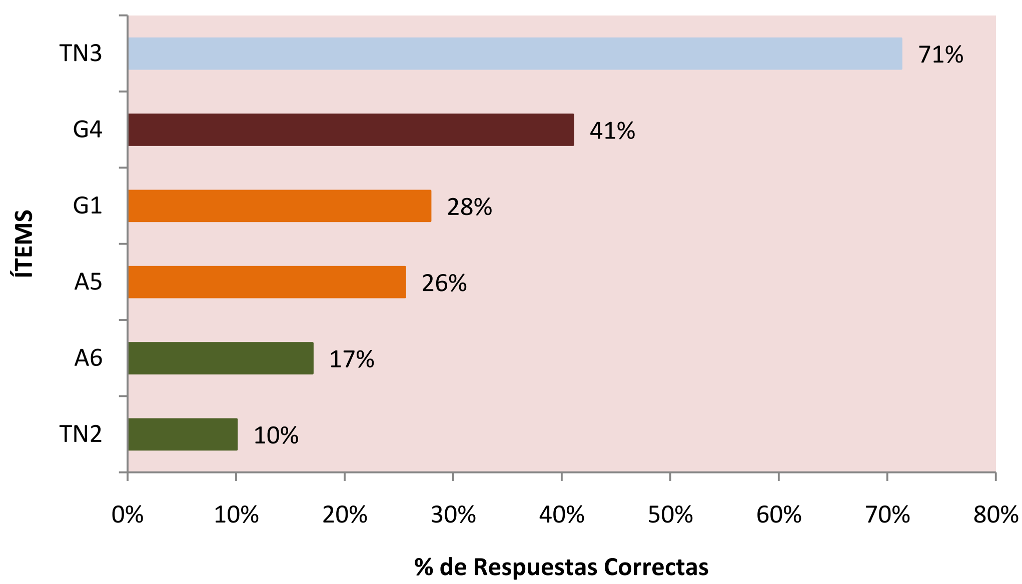


Figura 49. Porcentajes de respuestas correctas de los ítems según su categoría correspondiente a la prueba selectiva nivel medio del año 2009

- Muy difícil: TN2 y A6.
- Muy fácil: G4.
- Difícil: A5 y G1
- Demasiado fácil: TN3.

En la Tabla 39 se presentan los ítems junto a su respectiva área, frecuencia y porcentaje de respuestas correctas, y por último a la categoría en la que se ubica:

ÍTEMS	**Área**	**Cantidad de Respuestas Correctas**	**% de Respuestas Correctas**	**CATEGORÍA**
TN2	Teoría de Números: Potenciación	13	10%	Muy difícil
A6	Álgebra: Factorización y raíces de un polinomio	22	17%	Muy difícil
A5	Álgebra: Factorización y planteamiento de ecuaciones	33	26%	Difícil
G1	Geometría: Diámetro y área de un Circulo	36	28%	Difícil
G4	Geometría: Semejanza de triángulos	53	41%	Fácil
TN3	Teoría de Números: Propiedades de la Potenciación	92	71%	Demasiado fácil

Tabla 39. Clasificación de los ítems según su categoría en la prueba clasificatoria nivel medio 2009.

En la Tabla 40 se muestra el número de estudiantes que respondieron cada opción en los ítems, además se resalta la opción correcta y la opción más contestada.

	G1	TN2	TN3	G4	A5	A6
a	61	13	18	49	33	12
b	36	4	6	10	26	22
c	5	11	4	53	20	53
d	6	12	8	8	21	20
e	20	73	92	7	16	10
NO Respondieron	1	16	1	2	13	12

Tabla 40. Número de estudiantes que respondieron cada opción para los ítems de la prueba selectivanivel medio 2009

Opción Correcta

Opción más contestada

En este nivel no se presentaron ítems de categoría 1: demasiado difícil, ni de categoría 4: fácil. Los ítems de este nivel que se ubicaron en las siguientes categorías:

CATEGORÍA 2: Muy difícil

Se presentaron dos ítems en esta categoría, uno de Teoría de Números (TN2) con un 10% de respuestas correctas y otro de Álgebra (A6) con un 17 % de respuestas correctas (Ver Figura 49).

- Problema de Teoría de Números:

2. ¿Cuál es el máximo número de potencias de 5 que tiene el número 100!?

(a)24 (b)23 (c) 22 (d) 21 (e) 20

La opción correcta es la (a) (Ver Tabla 40). Para solucionar este problema el estudiante debía manejar los conceptos de factorial, potenciación y múltiplos de un número (Ver Solución Anexos). La opción (e) fue la más contestada por 73 estudiantes, lo cual se pudo deber a que el estudiante solo tomó los múltiplos de 5 entre 1 y 100 los cuales son 20, olvidándose de tomar los múltiplos de 5^2 entre 1 y 100.

- Problema de Álgebra:

6. Si r y s son las raíces de $x^2 - px + q = 0$ entonces $r^2 + s^2$ es igual a:

(a) $p^2 + 2q$ (b) $p^2 - 2q$ (c) $p^2 + q^2$
(d) $p^2 - q^2$ (e) p^2

Para solucionar este problema el estudiante debía manejar el concepto de productos notables y saber interpretar las raíces de un polinomio de segundo grado (Ver Solución Anexos). La opción (b) es la correcta. La opción más contestada fue la (c) por 53 estudiantes, por lo que se puede deducir que el estudiante simplemente tomó los coeficientes del polinomio y los reemplazo en la expresión $r^2 + s^2$.

CATEGORÍA 3: Difícil

Dos ítems pertenecen a esta categoria con un porcentaje de respuestas correctas menor del 30% (Ver Figura 49). Estos items fueron los siguientes:

- Problema de Álgebra:

5. Observe que

$$3^2 + 4^2 = 5^2$$
$$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$$
$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$$

Cuál es el menor valor posible para la suma $x + y$ con x, y enteros positivos tales que
$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + x^2 = y^2$$

a) 289 (b) 250 (c) 425 (d)103 (e) 795

La opción correcta es la (a) y fue la más contestada (Ver Tabla 40). Para la solución a este problema se requería plantear ecuaciones y manejar el concepto de factores primos (Ver Solución Anexos). Las demás opciones no variaron mucho de acuerdo a la cantidad de respuestas que obtuvieron. La dificultad se puedo deber a la complejidad del sistema de ecuación que se plantea para resolver el ítem.

- Problema de Geometría:

1. Los diámetros de dos círculos son 8 y 12 centímetros respectivamente. La razón entre el área del círculo menor y la del mayor es:

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{4}{9}$ (c) $\frac{9}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$
(e) Ninguna de las anteriores

En la Tabla 40 vemos que la opción correcta es la (b). Para solucionar este problema geométrico se debía saber diferenciar entre diámetro y radio, además de manejar el concepto de área de un círculo y saber que es una razón entre medidas (Ver Solución Anexos). La opción (a) fue la más contestada por 61 estudiantes, de lo que se deduce que los estudiantes hallaron fue la razón entre los diámetros de los círculos la cual es de $\frac{2}{3}$, más no la razón entre las áreas.

CATEGORÍA 5: Muy fácil

En esta categoría se presentó un ítem de Geometría (G1), el cual obtuvo un 41% de respuestas correctas (Ver Figura 49), es decir 53 estudiantes lo contestaron correctamente.

- Problema de Geometría:

4. Si un ángulo de un triángulo permanece invariable pero los lados que los incluyen se duplican, entonces el área queda multiplicada por:

a) 2 (b) 3 (c) 4 (d)6 (e) 8

La opción (c) es la correcta y fue la más contestada (Ver Tabla 40). Para la solución a este problema el estudiante debía manipular los conceptos de área de un triángulo y semejanza entre triángulos (Ver Solución Anexos). 49 estudiantes respondieron la opción (a), esto se pudo deber a que los estudiantes asociaron la condición del problema, la cual era que los lados del triángulo se duplicaban errando al multiplicar el área por dos.

CATEGORÍA 6: Demasiado fácil

En la Figura 49 observamos que se presentó un ítem de Teoría de Números (TN3) en esta categoría con un 71% de respuestas correctas, es decir 92 estudiantes lo contestaron bien. Este ítem fue el siguiente problema:

3. ¿Cuál es la raíz quinta de 5^{5^5}?

(a) $\sqrt{5^5}$ (b) $5^{(5^5-1)}$ (c) 5^{4^5} (d) $5^{5^5/2}$ (e) 5^5

Para la solucionar este problema el estudiantes debía manejar el concepto de potenciación y sus propiedades (Ver Solución Anexos). La opción correcta es la (e) y fue la más contestada (Ver Tabla 40). De la demás opciones la opción (a) la respondieron 18 estudiantes, esto se pudo deber a que los estudiantes asumen que al preguntar por la raíz quinta debe aparecer el símbolo radical $\sqrt{\ }$ y eliminarse un 5, sin tener en cuenta que en este caso el índice del radical es 2.

A continuación se analizarán los problemas tipo ensayo que se presentaron en la prueba para el nivel medio.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

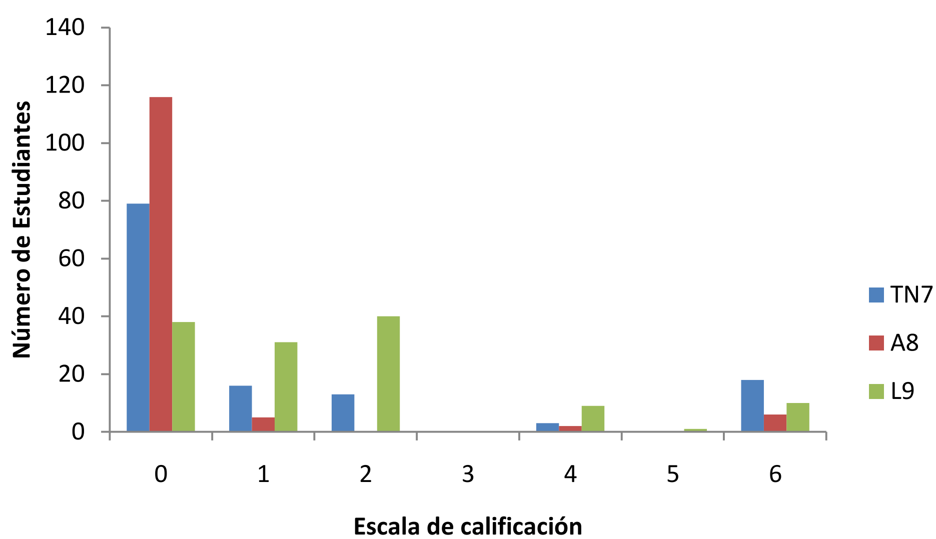


Figura 50. Número de estudiantes y puntuación de los ítems tipo ensayo prueba selectiva nivel medio 2009

Los problemas tipo ensayo de este nivel fueron:

- Problema de Teoría de Números:

7. Un bosque tiene 528 árboles. Si el primero de enero se tumba un árbol y cada día sucesivo se tumba uno más que el día anterior. ¿En qué fecha se acabará el bosque?

Para resolver este problema el estudiante debía manejar el concepto de sumatoria y saber factorizar (Ver Solución Anexos). La dificultad se pudo deber a que no identificaron cual era el proceso de la sumatoria, las cual era la suma de los primeros $n$números que dieran 528. 79 estudiantes no escribieron nada, solo el 14% de los estudiantes respondieron este ítem correctamente (Ver Figura 50).

- Problema de Álgebra:

8. Una solución de la ecuación $x^3 - 7x + 6 = 0$ es $x = 1$. ¿Cuál es la suma de las otras soluciones?

Para encontrar la solucióнel estudiante debía factorizar el polinomio de tercer grado e identificar cuáles eran las raíces de este polinomio. El 90% de los estudiantes no escribieron nada, 5 estudiantes escribieron una expresión, 2 estudiantes llegaron a resolverlo pero no escribieron la conclusión y solo 6 estudiantes lo resolvieron correctamente (Ver Figura 50).

- Problema de Razonamiento Lógico:

9. El Sr. Blanco, el Sr. Rojo y el Sr. Azul se encuentran en un camino. Qué curioso, dice el que lleva la corbata roja, los colores de nuestras corbatas corresponde a nuestros apellidos, pero ninguno lleva el color del propio. Tiene usted razón, comenta el Sr. Blanco. ¿Cuál es el color de la corbata del Sr. Azul ?

El estudiante debía leer detenidamente e interpretar los datos del problema (Ver Solución Anexos). En este problema 38 estudiantes no escribieron nada, 40 estudiantes plantearon un proceso para la solución, y solo 10 estudiantes contestaron bien este ítem (Ver Figura 50). La dificultad de este problema se pudo deber a que es difícil de comprender el enunciado ya que se torna un poco confuso.

NIVEL AVANZADO 2009

En este nivel se presentaron 94 estudiantes.

La Figura 51 muestra el porcentaje de respuestas correctas para los 6 primeros ítems de la prueba selectiva correspondiente al nivel avanzado.

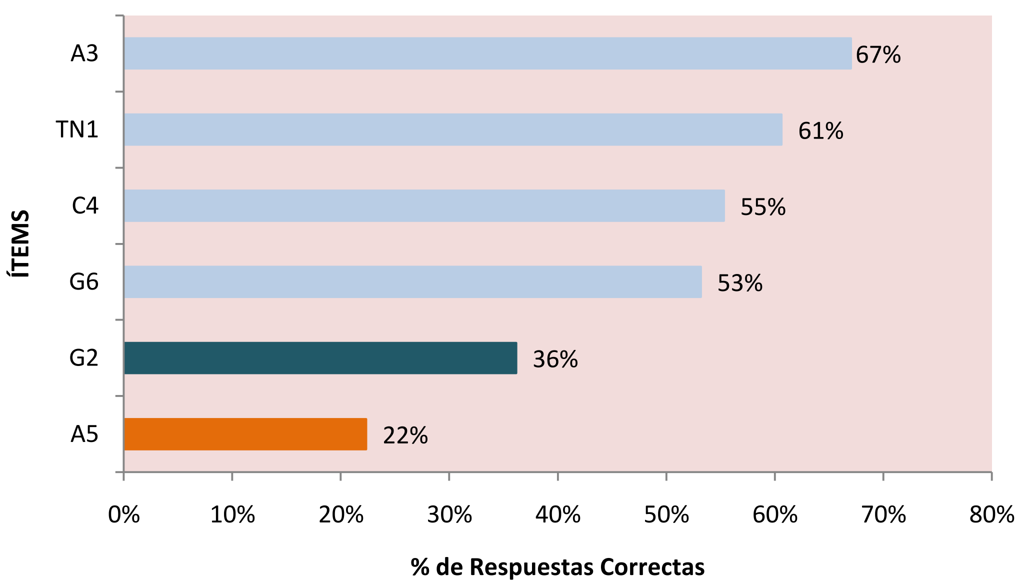


Figura 51. Porcentajes de respuestas correctas de los ítems según su categoría correspondiente a la prueba selectiva nivel avanzado del año 2009

Difícil: A5.

Fácil: G2.

.

Demasiado fácil: G6, C4 TN1 y A3.

En la Tabla 41 se presentan los ítems junto a su respectiva área, frecuencia y porcentaje de respuestas correctas, y por último a la categoría en la que se ubica:

ÍTEMS	Área	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas	CATEGORÍA
A5	Álgebra: Solución de Ecuaciones	21	22%	Difícil
G2	Geometría: Área del circulo y cuadrado	34	36%	Fácil
G6	Geometría: Perímetro y área	50	53%	Demasiado fácil
C4	Combinatoria: Conteo	52	55%	Demasiado fácil
TN1	Teoría de Número: Dígitos	57	61%	Demasiado fácil
A3	Álgebra: Factorización	63	67%	Demasiado fácil

Tabla 41. Clasificación de los ítems según su categoría en la prueba clasificatoria nivel avanzado 2009.

En la Tabla 42 se muestra el número de estudiantes que respondieron cada opción en los ítems, además se resalta la opción correcta y la opción más contestada.

	TN1	G2	A3	C4	A5	G6
a	6	5	63	2	21	13
b	57	23	2	26	8	50
c	7	34	3	52	9	11
d	15	16	2	6	21	12
e	7	2	24	8	9	4
NO Respondieron	2	14	0	0	26	4

Tabla 42. Número de estudiantes que respondieron cada opción para los ítems de la prueba selectivanivel avanzado 2009

Opción Correcta

Opción más contestada

En este nivel los ítems que se presentaron se ubicaron dentro de las categoría 3, 4 y 6 es decir difícil, fácil y demasiado fácil. Veamos cuales fueron estos ítems.

CATEGORÍA 3: Difícil

En la Figura 51 vemos que se presentó un ítem de algebra (A5) de esta categoría con un 22% de respuestas correctas. Este ítem fue el siguiente problema:

5. La gráfica de la recta $2x - 2y + 1 = 0$ interseca a la gráfica de la curva $y = x^2$ en los puntos A y B. La abcisa de los puntos A y B son la soluciones de la ecuación:

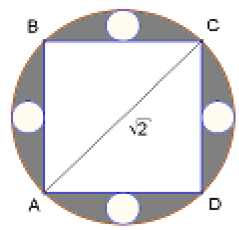
(a) $2x^2 - 2x - 1 = 0$ (b) $2x^2 + 1 = 0$ (c) $2x^2 - 1 = 0$
(d) $x^2 - 2x + 1 = 0$ (e) $2x + 1 = 0$

La opción (a) es la correcta (Ver Tabla 42). Para la solución a este problema el estudiante requería saber encontrar los puntos de corte de las dos graficas en el plano cartesiano (Ver Solución Anexos). 26 estudiantes no respondieron ninguna de las opciones debido posiblemente a que tuvieron dificultades al igualar las ecuaciones de la curva y de la recta para encontrar los puntos de corte.

CATEGORÍA 4: Fácil

En esta categoría se presentó un ítem de geometría (G2) el cual fue contestado correctamente por el 36% de los estudiantes (Ver Figura 51). Este ítem fue el siguiente problema:

2. Un fabricante de turrones decide embalar sus productos en cajas circulares de $\sqrt{2}$ metros de diámetro, tal y como se muestra en la figura. Si la parte sombreada representa la parte ocupada por el papel de embalaje, la superficie útil para el turrón es:



(a) $1+\frac{\pi\sqrt{2}-1}{4}$ (b) $1+\pi(\frac{\sqrt{2}-1}{4})^2$ (c) $1+\pi(\frac{\sqrt{2}-1}{2})^2$
(d) $\pi(\frac{\sqrt{2}}{2})^2$ (e) $1-2\pi$

La opción correcta es la (c) la cual fue la más contestada (Ver Tabla 42). Para la solución de este ítem el estudiante debía manejar los siguientes conceptos: área de un círculo, radio, diámetro, área de un cuadrado y distancia entre dos puntos (Ver Solución Anexos). La dificultad de este problema se pudo deber a que los estudiantes tienen mecanizados problemas con figuras geométricas sencillas y cuando se enfrentan a problemas con figuras superpuestas no reconocen las diferencias entre dichas figuras.

CATEGORÍA 6: Demasiado fácil

Se presentaron cuatro ítems dentro de esta categoría, un ítem de geometría (G6) con el 53% de respuestas correctas, un ítem de combinatoria (C4) con el 55% de respuestas correctas, un ítem de teoría de números (TN1) con el 61% de respuestas correctas y un ítem de álgebra (A3) el cual el 67% de los estudiantes lo contestaron correctamente (Ver Figura 51).

- Problema de Geometría:

6. Un círculo y un cuadrado tienen el mismo perímetro, entonces:

(a) Sus áreas son iguales (b) El área del círculo es mayor (c) El área del cuadrado es mayor (d) El área del círculo es π veces el área del cuadrado (e)Ninguna de las anteriores.

La opción correcta es la (b) la cual fue la más contestada (Ver Tabla 42). Para resolver este problema se requería manejar los conceptos de perímetro, área del círculo y área del cuadrado (Ver Solución Anexos). Los demás estudiantes que no respondieron correctamente, se pudo deber a que asumen que si las figuras tienen igual perímetro lo mismo sucede con el área.

- Problema de Combinatoria:

4. Un número capicúa es un número natural que es igual leerlo de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, como por ejemplo 838 y 43634. Teniendo en cuenta que cero no puede quedar como primer dígito. ¿Cuántos números capicúas de tres dígitos existen?

(a) 10 (b) 81 (c) 90 (d) 99 (e) 100

La opción (c) es la correcta y fue la más contestada (Ver Tabla 42). Para solucionar este problema se requería realizar un conteo (Ver Solución Anexos). Los estudiantes que contestaron la opción (e) posiblemente se debió a que no tuvieron en cuenta que el cero no debía quedar como primer dígito, luego contaron 10 números en el primer digito y como había 10 posibilidades para el segundo digito multiplicaron 10×10 resultándoles 100 números capicúas. Los que contestaron la opción (d) fue probablemente porque hicieron el mismo razonamiento anterior pero quitaron el cero como una de las posibilidades. Para los que contestaron la opción (b) el razonamiento pudo haber sido el siguiente: Ya que el cero no puede estar, entonces en el primer dígito quedan 9 posibilidades, igualmente para el segundo digito por lo que les resultó 81 números capicúas. La opción (a) fue contestada por aquellos estudiantes que posiblemente pensaron que el cero era el primer digito luego les resulto 10 posibilidades.

- Problema de Teoría de Números:

1. Consideremos el número natural formado por los primeros 2007 números naturales, es decir: $1234567891011\cdots200520062007$. El número de dígitos que tiene ese número es:

(a) 4032 (b) 6921 (c) 7001 (d) 6732 (e) 2889

La opción correcta es la (b) la cual fue la más contestada (Ver Tabla 42). Para solucionar este problema se debía realizar un conteo por dígitos (Ver Solución Anexos). La dificultad de este ítem fue posiblemente debido a que el estudiantes no dedujo que la manera más fácil para contar era separar los números de acuerdo a sus dígitos es decir, primero los de un digito, luego los de dos dígitos y así sucesivamente.

- Problema de Álgebra:

3. Si x, y son enteros positivos y $x+y+xy=34$ entonces $x+y$ es igual a:

(a) 10 (b) 12 (c) 20 (d) 34
(e) No se puede determinar

La opción (a) es la correcta y fue la más contestada (Ver Tabla 42). Para resolver este problema se debía realizar una factorización (Ver Solución Anexos). Los estudiantes que contestaron la opción (e) probablemente pensaron que no se podían determinar la solución debido a que es una ecuación lineal de dos variables. Los estudiantes que contestaron las demás opciones posiblemente cometieron errores de tipo algebraico.

A continuación se analizarán los problemas tipo ensayo que se presentaron en la prueba para el nivel medio.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

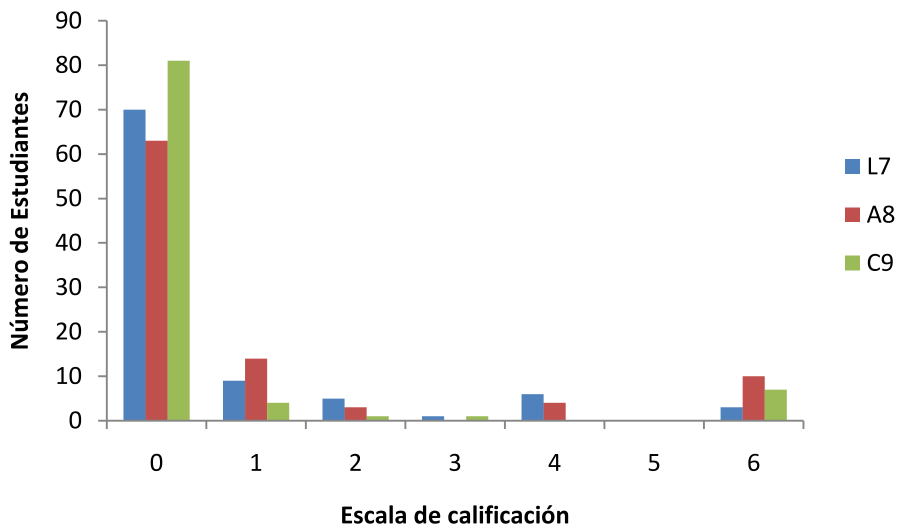


Figura 52. Número de estudiantes y puntuación de los ítems tipo ensayo prueba selectiva nivel avanzado 2009

Los problemas tipo ensayo del nivel avanzado fueron:

- Problema de Razonamiento Lógico:

> **7.** Si en la fórmula $C = \frac{en}{R+nr}$, n aumenta mientras que e, R y r se conservan constantes. ¿Que se puede afirmar de C?

Para solucionar este problema el estudiante debía manejar los conceptos de variable y constante. 70 estudiantes no escribieron, 9 de los estudiantes escribieron una expresión, 5 estudiantes formularon y despejaron una expresión, 6 estudiantes resolvieron la ecuación pero no concluyeron, solo 3 estudiantes los contestaron correctamente (Ver Figura 52).

- Problema de Álgebra:

> **8.** Dos corredores A y B parten simultáneamente en viaje de una ciudad a otra distantes 60 kilómetros. La velocidad de A es 4 kilómetros por hora, menor que la de B. Después de llegar B a la segunda población y regresar de ésta se encuentra con A a 12 kilómetros. ¿Cuál era la velocidad promedio de A?

El estudiante en este problema debía plantear ecuaciones y resolverlas, además debía interpretar la solución basándose en las condiciones dadas en el enunciado (Ver solución Anexos). 63 estudiantes no escribieron nada, 14 escribieron una expresión, 3 estudiantes formularon y despejaron una ecuación, 4 estudiantes resolvieron las ecuaciones pero no concluyeron, solo 10 estudiantes respondieron correctamente (Ver Figura 52).

- Problema de Combinatoria:

> **9.** ¿Cuántos diseños diferentes se pueden hacer si se acomodan en línea recta cinco pelotas blancas y tres negras, de tal manera que no estén dos pelotas negras juntas?

Para este problema el estudiante debía manejar el concepto de combinatoria (Ver solución Anexos). La dificultad se pudo deber a que no manejan el concepto de combinatoria o interpretaron mal el problema planteando incorrectamente la combinatoria. 81 estudiantes no escribieron nada, solo 7 estudiantes los resolvieron correctamente (Ver Figura 52).

NIVEL BÁSICO 2010:

En el nivel básico se presentaron 88 estudiantes.

La Figura 53 muestra el porcentaje de respuestas correctas para cada ítem de la prueba selectiva correspondiente al nivel básico del año 2010.

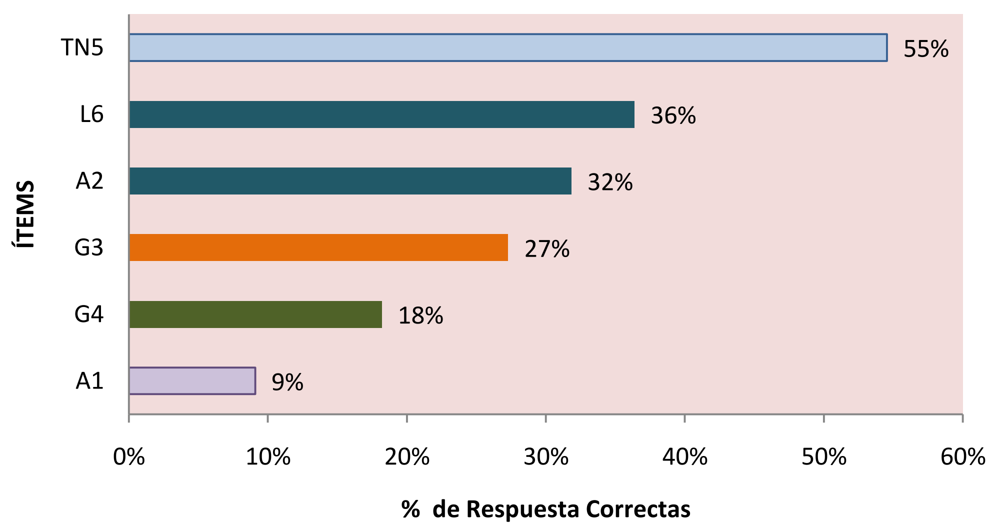


Figura 53. Porcentajes de respuestas correctas de los items según su categoria correspondiente a la prueba selectiva nivel básico del año 2010

Demasiado difícil: A1

Fácil: A2 y L6.

Muy difícil: G4.

Demasiado fácil: TN5.

Difícil: G3.

En la Tabla 43 se presentan los ítems junto a su respectiva área, frecuencia y porcentaje de respuestas correctas, y por último a la categoría en la que se ubica:

ÍTEMS	**Área**	**Cantidad de Respuestas Correctas**	**% de Respuestas Correctas**	**CATEGORÍA**
A1	Álgebra: Planteamiento de ecuación y definición de promedio	8	9%	Demasiado difícil
G4	Geometría: Desigualdad triangular, definición de perímetro y triángulo isósceles	16	18%	Muy difícil
G3	Geometría	24	27%	Difícil
A2	Álgebra: Planteamiento de una ecuación	28	32%	Fácil
L6	Razonamiento Lógico	32	36%	Fácil
TN5	Teoría de Números	48	55%	Demasiado fácil

Tabla 43. Clasificación de los ítems según su categoría en la prueba selectiva nivel básico 2010.

En la Tabla 44 se muestra el número de estudiantes que respondieron cada opción en los ítems, además se resalta la opción correcta y la opción más contestada:

	A1	A2	G3	G4	TN5	L6
a	29	9	8	26	9	8
b	14	28	7	16	48	32
c	8	23	38	16	9	6
d	7	18	24	8	11	18
e	26	7	9	18	3	16
NO Respondieron	4	3	2	4	8	8

Tabla 44. Número de estudiantes que respondieron cada opción para los ítems de la prueba selectivanivel básico 2010

Opción Correcta

Opción más contestada

A continuación se encuentra la descripción de los ítems y el análisis de los resultados de acuerdo a cada categoría:

CATEGORÍA 1: Demasiado difícil

En la Figura 53 se observa que en esta categoría se encuentra ubicado el ítem A1 de algebra con un porcentaje de respuestas correctas de 9%. La descripción y análisis del problema se encuentra a continuación:

1. Plinio escribió un número en cada una de las cuatro casillas de una tabla como la que se muestra en la figura, pero se borró el segundo y cuarto número. Si se sabe que tanto el segundo como el tercer número de esta tabla es igual al promedio de sus dos vecinos, hallar el número que ocupa la casilla marcada con $*$.

1	2010	$*$

(a) 4020 (b) $1005,5$ (c) $3014,5$ (d) $4019,0$ (e) 2010

La respuesta correcta es la (c), la cual fue seleccionada por 8 estudiantes. Para la solución de este problema se requería el uso del promedio y el planteamiento de una ecuación (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron los estudiantes fue la (a) (Ver Tabla 44), esto se dio debido a que ellos simplemente multiplicaron por dos 2010, debido a que al hallar el promedio entre dos números dividen entre dos. Pero quizás hubo un factor que influyó en que este ítem les causara dificultad a los estudiantes y es que no habían las cuatro casillas.

CATEGORÍA 2: Muy difícil

En la Figura 53 se observa que en ésta categoría se encuentra un solo ítem el cual es G4 de geometría con un porcentaje de respuesta correcta de 18%. El análisis de las respuestas y la descripción del problema se encuentran a continuación:

4. ¿Cuántos diferentes triángulos isósceles de perímetro 25 cm y lados de longitudes enteros pueden formarse?

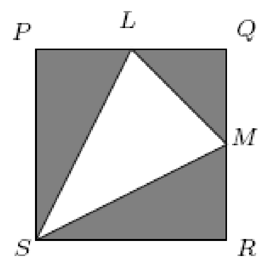
(a) 0 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 12

La respuesta correcta del anterior ítem es la (c), la cual eligieron 16 estudiantes. Para resolver este problema se requería tener conocimiento de la desigualdad triangular, la definición de perímetro y de triángulo isósceles (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron fue la (a) (Ver Tabla 44), lo cual se pudo deber a que los estudiantes asumen que sólo se puede formar un triángulo isósceles con lados de longitud enteros y perímetro 25.

CATEGORÍA 3: Difícil

En la Figura 53 se observa que en la categoría 3 se encuentra el ítem G3 de geometría con un porcentaje de respuestas buenas de 27%. La descripción del ítem y el análisis se encuentra a continuación:

3. $PQRS$ es un cuadrado, L y M son los puntos medios de PQ y QR respectivamente. ¿Qué parte del área del cuadrado corresponde a la región sombreada?



(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{5}{8}$ (e) $\frac{1}{4}$

En el ítem anterior la respuesta correcta es la (d), la cual fue seleccionada por 24 estudiantes. Para la solución de este problema se requería dividir el cuadrado en figuras de igual área en este caso iguales al triángulo LQM(Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron los estudiantes fue la (c) (Ver Tabla 44), lo que se pudo deber a que ellos asumieron que como el cuadrado estaba divido en cuatro triángulos y tres de ellos están sombreados entonces el área de la región sombreada es igual a $\frac{3}{4}$, luego se observa que ellos no tienen en cuenta que para usar la fracción deben ser regiones de igual área.

CATEGORÍA 4: Fácil

En la Figura 53 se observa que en la categoría 4 se encuentran ubicados los ítems A2 y L6, los cuales son de las áreas de álgebra y geometría respetivamente con porcentajes de respuesta correcta de 32% y 36%. A continuación se encuentra la descripción y análisis de estos problemas.

- Problema de Álgebra:

2. La calculadora de Ulises tiene dos teclas especiales. Una tecla resta 98 al número que está en pantalla y la otra tecla lo divide por 19. Oscar oprimió las teclas 6 veces en total y oprimió cada tecla al menos una vez. Si el resultado fue un número positivo. ¿Cuál es el menor número que pudo estar inicialmente en la pantalla?

(a) 508 (b) 509 (c) 1018 (d) 196 (e) 510

La respuesta correcta de este ítem es la (b), la cual fue seleccionada por 28 estudiantes. Para resolver este problema se requería el planteamiento de una ecuación con una incógnita (Ver Solución Anexos). Los estudiantes que no resolvieron correctamente el problema se pudo deber a que ellos no tuvieron en cuenta que les estaban pidiendo el menor número que pudo estar inicialmente y por eso la segunda opción más elegida fue la (c) ya que como es el número mayor de todas las opciones pues asumieron que de este se podía restar 98 y dividir entre 19 sin problema y obtendrían como resultado un entero positivo.

- Problema de Razonamiento Lógico:

6. En una cárcel hay 32 presos repartidos en 8 celdas de planta cuadrada. En cada celda de las esquinas hay un preso y en cada una de las centrales hay siete presos de tal manera que sumen 9 presos por hilera. Si los presos están planeando una fuga. ¿Cuál sería la menor cantidad de presos que deben quedar después de la fuga dentro de la planta para que el carcelero no se percate del escape y sigan sumando nueve presos por hilera?

(a) 20 (b) 18 (c) 19 (d) 16 (e) 24

La opción correcta es la (b), la cual fue elegida por 32 estudiantes. Para la solución de este problema se requería hacer una representación gráfica de la situación que cumpliera con las condiciones del enunciado (Ver Solución Anexos). Los estudiantes que no respondieron correctamente este ítem se pudo deber a una mala ubicación de los números en las casillas y por ende la no consideración de otro caso donde encontrara el mínimo número de presos.

CATEGORÍA 6: Demasiado fácil

En la Figura 53 se observa que en la categoría 6 se encuentra el ítem TN5 de teoría de números con un porcentaje de respuestas buenas de 55%. La descripción y análisis de este problema es el siguiente.

5. $N^2 = aabb$, donde a y b son dígitos, hallar N.

(a) 87 (b) 88 (c) 89 (d) 90 (e) 91

La respuesta correcta de este ítem es la (b), la cual eligieron 48 estudiantes. Para la solución de este problema se requería tener claro el concepto de potenciación (Ver Solución Anexos). No hubo una tendencia marcada hacia alguna opción en particular

(Ver Tabla 44), luego los estudiantes que no respondieron correctamente este ítem se debió a una mala interpretación de la expresión ya que algunos de ellos asumieron que había una multiplicación entre $aabb$.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

La Figura 54 muestra la cantidad de estudiantes que obtuvieron 0,1, 2,3, 4, 5 o 6 como calificación en los problemas tipo ensayo.

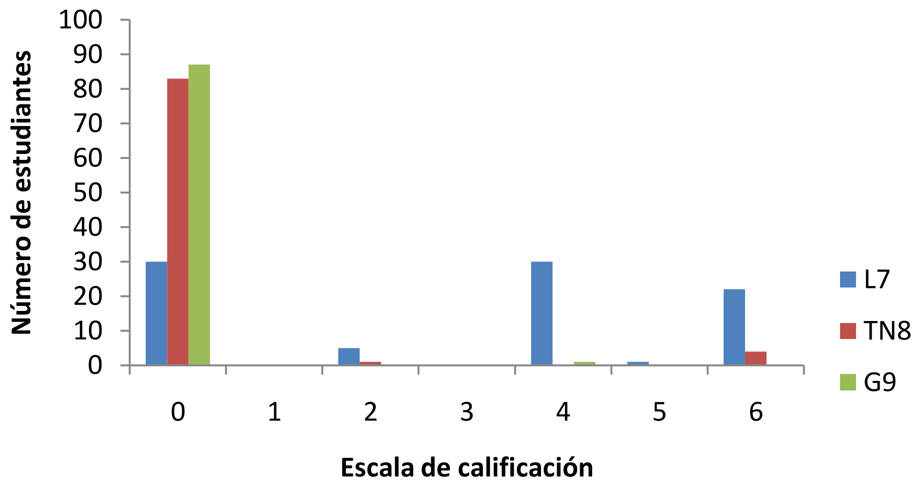


Figura 54. Número de estudiantes y puntuación de los ítems tipo ensayo prueba selectiva nivel básico 2010

A continuación se encuentra la descripción y análisis de los ítems:

- Problema de Razonamiento Lógico:

> **7.** Enrique tiene tres hermanas y cinco hermanos varones. Su hermana Enriqueta tiene s hermanas y b hermanos varones. ¿Cuál es el producto de s y b?

En la Figura 54 se observa que en el ítem siete hubo personas 30 estudiantes que no escribieron nada, 5 estudiantes que hicieron una formulación y despejaron, 30 estudiantes resolvieron el ítem pero no concluyeron, 1 estudiante resolvió el ítem pero escribió la conclusión incompleta y 22 estudiantes lo resolvieron y escribieron la conclusión completa. Para la solución de este problema se requería tener interpretar las condiciones para encontrar el número de hermanas y hermanos de Enriqueta (Ver Solución Anexos).

- Problema de Teoría de Números:

8. En una caja hay cuatro tipos de canicas: 20 rojas, 12 amarillas, 8 azules y 6 verdes. ¿cuál es el mínimo número de canicas que hay que sacar de la caja para estar seguro que hay 10 canicas del mismo color?

En la Figura 54 se observa que en el ítem ocho hubo 83 estudiantes que no escribieron nada, 1 estudiante que escribió una formula y la despejó y 4 estudiantes que los resolvieron y escribieron la conclusión completa. Para la solución de este ítem se requería hacer un conteo del número de canicas de los colores amarillo y rojo que son las que tienen cantidades superiores a 10 y mirara cual debería ser la cantidad de cada color para estar sacar las diez del mismo color (Ver Solución Anexos). Los estudiantes posiblemente se les dificulto hacer el conteo del número de canicas.

- Problema de Geometría

9. En un cuadrilátero $ABCD$, los ángulos B y D son rectos. Las longitudes de los lados son $BC = 1\ cm$, $CD = 4\ cm$, y $DA = 3\ cm$. Si el área del cuadrilátero en cm^2, se escribe como $a + \sqrt{b}$, con a, y b números enteros. ¿A qué es igual $a + b$?

En la Figura 54 se observa que 87 estudiantes no escribieron nada y un estudiante resolvió el problema pero no concluyó. Para la solución de este problema se requería usar el teorema de Pitágoras y la expresión para hallar el área de un triángulo (Ver Solución Anexos). La dificultad que se les pudo presentar a los estudiantes fue la representación gráfica de la situación y con ello la comprensión del problema.

NIVEL MEDIO 2010

En el nivel medio se presentaron 112 estudiantes.

La Figura 55 muestra el porcentaje de respuestas correctas para cada ítem de la prueba selectiva correspondiente al nivel medio del año 2010.

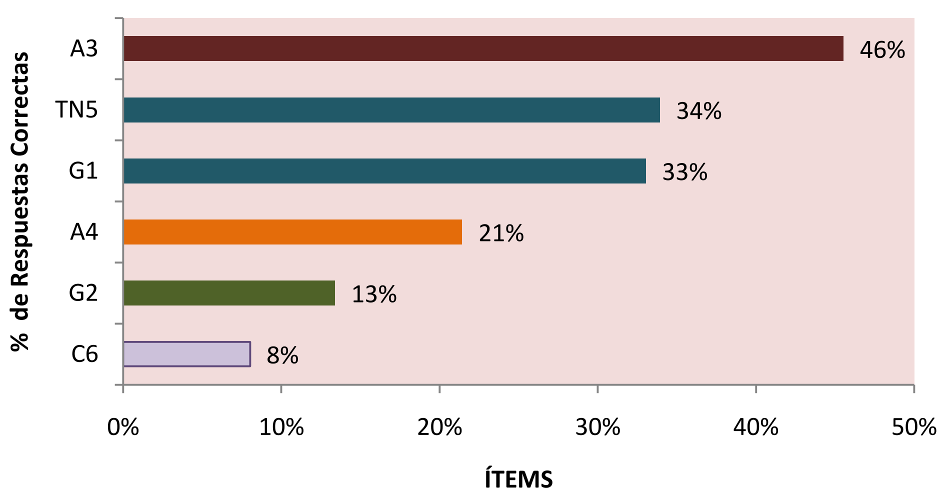


Figura 55. Porcentajes de respuestas correctas de los items según la categoria para la prueba selectiva correspondiente al nivel medio del año 2010

Demasiado difícil: C6.

Fácil: G1 y TN5.

Muy difícil: G2.

Muy fácil: A3.

Difícil: A4.

En la Tabla 45 se presentan los ítems junto a su respectiva área, frecuencia y porcentaje de respuestas correctas, y por último a la categoría en la que se ubica:

ÍTEMS	**Área**	**Cantidad de Respuestas Correctas**	**% de Respuestas Correctas**	**CATEGORÍA**
C6	Combinatoria: Regla de producto y probabilidad	9	8%	Demasiado difícil
G2	Geometría: Teorema de Pitágoras y área	15	13%	Muy difícil
A4	Álgebra: Despeje de una ecuación	24	21%	Difícil
G1	Geometría: Área de un cuadrado y radio de un círculo	37	33%	Fácil
TN5	Teoría de Números: Definición de número primo, los múltiplos de 5 y 6	38	34%	Fácil
A3	Álgebra: Despeje de ecuaciones	51	46%	Muy fácil

Tabla 45 Clasificación de los ítems según su categoría en la prueba selectiva nivel medio 2010.

En la Tabla 46 se muestra el número de estudiantes que respondieron cada opción en los ítems, además se resalta la opción correcta y la opción más contestada:

	G1	G2	A3	A4	TN5	C6
a	0	8	4	12	12	9
b	37	15	51	11	15	56
c	6	61	17	14	38	29
d	42	12	13	24	16	9
e	27	6	25	31	24	6
NO Respondieron	0	10	2	20	7	3

Tabla 46. Número de estudiantes que respondieron cada opción para los ítems de la prueba selectivanivel medio 2010

Opción Correcta

Opción más contestada

A continuación se presenta una descripción y análisis de los resultados de los ítems por categorías:

CATEGORÍA 1: Demasiado difícil

En la Figura 55 se observa que en la categoría 1 se encuentra el ítem C6 de combinatoria con un porcentaje de respuestas correctas de 8%, lo cual muestra que este ítem fue el de mayor dificultad entre los ítems de selección múltiple.

- Problema de Combinatoria:

6. Un cartero reparte al azar tres cartas entre tres destinatarios ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las cartas llegue a su destino correcto?

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) 1 (d) $\frac{2}{9}$ (e) 3

La respuesta correcta de este ítem es la (a), la cual eligieron 9 estudiantes. Para la solución de este problema se requería el uso de la regla del producto (Ver Solución Anexos). La mayoría de estudiantes eligió la opción (b) (Ver Tabla 46), lo cual muestra que ellos posiblemente encontraron solo algunas de las opciones como se podrían repartir las cartas o no tuvieron en cuenta que les pedían la probabilidad de que al menos una de las cartas llegará al destino correcto luego omitieron algún caso que cumpliera esta condición.

CATEGORÍA 2: Muy difícil

En la Figura 55 se observa que en la categoría 2 se encuentra el ítem G2 de geometría con un porcentaje de respuestas buenas de 13%. El análisis de este ítem se encuentra a continuación.

2. La diagonal de un rectángulo es de longitud x, y ese rectángulo mide el doble de largo que de ancho. ¿Cuál es el área del rectángulo?

(a) $\frac{1}{4}x^2$ (b) $\frac{2}{5}x^2$ (c) $\frac{1}{2}x^2$ (d) x^2 (e) $\frac{3}{2}x^2$

La respuesta correcta de este ítem es la opción (b), la cual fue seleccionada por 15 estudiantes. Para la solución de este ítem se requería el uso del teorema de Pitágoras y la expresión para hallar el área de un rectángulo (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron los estudiantes fue la (c) (Ver Tabla 46), lo cual se pudo deber a que ellos asumieron una relación entre el área del rectángulo y la longitud de los lados, ya que el largo es el doble del ancho entonces el área sería estaría dividida en dos o por posibles errores en el despeje de la longitud de los lados en términos de x.

CATEGORÍA 3: Difícil

La Figura 55 muestra que en la categoría 3 se encuentra ubicado el ítem A4 de Álgebra con un porcentaje de respuesta correcta de 21%. El enunciado del problema y el análisis de los resultados se encuentran a continuación.

4. Para todos los números enteros positivos x y y tales que $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{12}$, el mayor valor que y puede tomar es:

a) 60 (b) 84 (c) 96 (d) 156 (e) 288

La respuesta correcta de este ítem es la (d), la cual eligieron 24 estudiantes. Para resolver este ítem se requería despejar a y en la ecuación y luego evaluar los casos en los cuales y tomaría el máximo valor. La opción que más eligieron los estudiantes fue la (e) (Ver Tabla 46), lo cual se pudo deber a que de las cinco opciones de respuesta la de mayor valor es 288.

CATEGORÍA 4: Fácil

En la Figura 55 se observa que en la categoría 4 se encuentran los ítems G1 y TN5 de las áreas de geometría y teoría de números con un porcentaje de respuesta correcta de 33% y 34% respectivamente. A continuación se encuentra el análisis y descripción de estos ítems.

- Problema de Geometría:

1. El área (en cm^2) del cuadrado más pequeño que puede contener un círculo de radio $4\ cm$ es: (a) 128 (b) 64 (c) 32 (d) 16 (e) 8

La respuesta correcta del ítem anterior es la opción (b), la cual eligieron 37 estudiantes. Para la solución de este problema se requería el uso de la expresión para hallar el área del cuadrado y la definición de radio (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron los estudiantes fue la (d) (Ver Tabla 46), esto se debió a una confusión en la palabra contener ya que ellos interpretaron muy seguramente que el cuadrado estaba dentro del círculo, luego el cuadrado más pequeño tendría de área $16cm^2$.

- Problema de Teoría de Números:

5. Hallar la suma de todos los números primos entre 2 y 100 que son a la vez uno más que un múltiplo de 5 y uno menos que un múltiplo de 6. a) 52 (b) 82 (c) 123 (d) 143 (e) 214

La respuesta correcta del anterior ítem es la opción (c), la cual fue seleccionada por 38 estudiantes. Para resolver este ítem se requería el concepto de número primo y los múltiplos de 5 y 6 (Ver Solución Anexos). Los estudiantes que no resolvieron correctamente este ítem fue posiblemente porque no encontraron todos los números primos que cumplieran con las condiciones mencionadas en el problema o sumaron otros que no cumplían con las condiciones.

CATEGORÍA 5: Muy fácil

En la Figura 55 se observa que en esta categoría sólo se encuentra el ítem A3, el cual es del área de álgebra y tuvo un porcentaje de respuestas correctas de 46%. El análisis de este problema es el siguiente:

3. Las ecuaciones $2x+7=3$ y $bx-10=-2$, tienen la misma solución x. ¿Cuál es el valor de b?

(a) -8 (b) -4 (c) -2 (d) 4 (e) 8

La respuesta correcta de este ítem es la opción (b), la cual eligieron 51 estudiantes. Para la solución de este ítem se requería despejar la primera ecuación y el reemplazo del valor de x en la segunda ecuación (Ver Solución Anexos). Los estudiantes que no respondieron a este ítem fue posiblemente por errores en el despeje de las ecuaciones o por ejemplo en el caso de la opción (e) se debió a que ellos asumieron que resolviendo la expresión $b-10=-2$ obtendrían el valor$b$, el cual en este caso sería 8.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

La Figura 56 muestra la cantidad de estudiantes que obtuvieron 0,1, 2,3, 4, 5 o 6 como calificación en los problemas tipo ensayo.

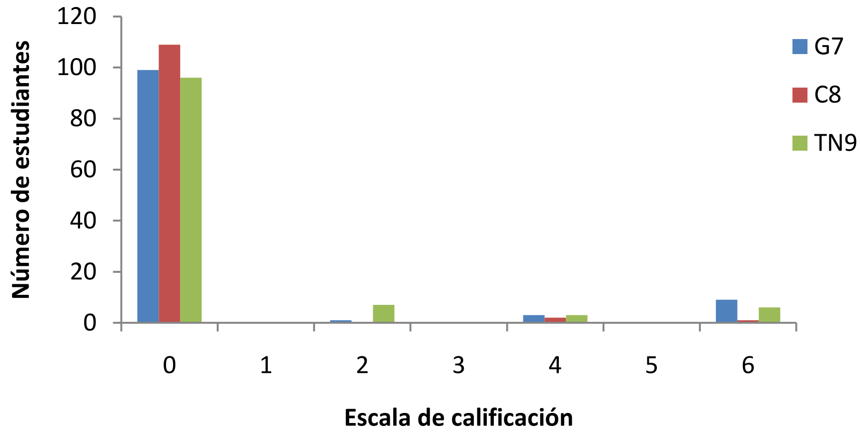
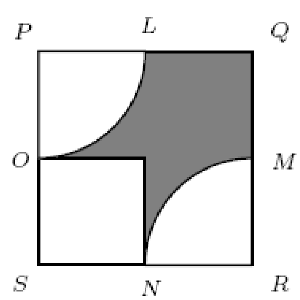


Figura 56. Número de estudiantes y puntuación de los ítems tipo ensayo prueba selectiva nivel medio 2010

A continuación se encuentra la descripción de los ítems y su respectivo análisis:

- Problema de Geometría:

7. $PQRS$ es un cuadrado de lado 8 cm. L, M, N y O son puntos medios de PQ, QR, RS y SP respectivamente. Calcular el área de la parte sombreada.



En la Figura 56 se observa que 99 estudiantes no escribieron nada, 1 estudianteescribió una formula y la despejó, 3 estudiantes resolvieron el ítem pero no concluyeron y nueve lo resolvieron y dieron la conclusión completa. Para la solución de este problema se requería la expresión para hallar el área de un cuadrado y de un cuarto de círculo (Ver Solución Anexos). A los estudiantes se les pudo dificultar el hecho de que la región sombreada es una figura la cual no tiene una expresión fija para hallar el área.

- Problema de Combinatoria:

8. ¿Cuántas iniciales diferentes podemos hacer con dos o tres letras del alfabeto teniendo en cuenta que el alfabeto tiene 27 letras? y ¿cuántas letras debería mínimo tener el alfabeto para que un millón de personas diferentes se puedan identificar con iniciales de dos o tres letras respectivamente?

La Figura 56 muestra que 109 estudiantes no escribieron nada, 2 estudiantes resolvieron el ítem pero no concluyeron y un estudiante resolvió correctamente el ítem y escribió la conclusión. Para la solución de este problema se requería usar la regla del producto (Ver Solución Anexos). La dificultad de este problema se pudo deber a que muchos de los estudiantes tienen dificultad con la parte el concepto de combinatoria.

- Problema de Teoría de Números:

9. Evaluar la expresión $\dfrac{2+4+6+\cdots+34}{3+6+9+\cdots+51}$

La Figura 56 muestra que 96 estudiantes no escribieron nada, 7 estudiantes escribieron una expresión y la despejaron, 3 estudiantes resolvieron el problema pero no lo concluyeron y 6 estudiantes lo resolvieron y escribieron la conclusión completa. Para la solución de este problema se requería encontrar el factor común de la expresión que está en el numerador y en el denominador (Ver Solución Anexos). Los estudiantes posiblemente no lo resolvieron porque realizaron las sumas del numerador y el denominador, lo que los pudo llevar a cometer errores.

NIVEL AVANZADO 2010

En el nivel avanzado se presentaron 103 estudiantes.

La Figura 57 muestra el porcentaje de respuestas correctas para cada ítem de la prueba selectiva correspondiente al nivel avanzado del año 2010.

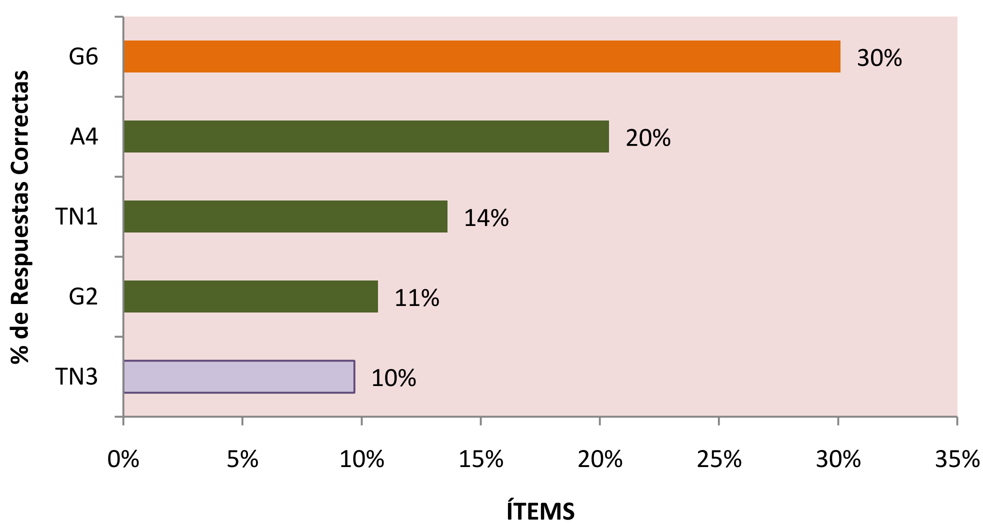


Figura 57. Porcentajes de respuestas correctas de los items según su categoria correspondiente a la prueba selectiva nivel avanzado del año 2010

Demasiado difícil: TN3.

Difícil: G6.

Muy difícil: G2, TN1 y A4.

En la Tabla 47 se presentan los ítems junto a su respectiva área, frecuencia y porcentaje de respuestas correctas, y por último a la categoría en la que se ubica:

ÍTEMS	Área	Cantidad de Respuestas Correctas	% de Respuestas Correctas	CATEGORÍA
TN3	Teoría de Números: Ecuación y desigualdad	10	10%	Demasiado difícil
G2	Geometría: Fórmula de Herón y la definición de bisectriz	11	11%	Muy difícil
TN1	Teoría de Números	14	14%	Muy difícil
A4	Álgebra: Despeje y sustitución de ecuaciones	21	20%	Muy difícil
G6	Geometría: Arco de una circunferencia y longitud de arco	31	30%	Difícil

Tabla 47. Clasificación de los ítems según su categoría en la prueba selectiva nivel avanzado 2010.

En la Tabla 48 se muestra el número de estudiantes que respondieron cada opción en los ítems, además se resalta la opción correcta y la opción más contestada:

	TN1	**G2**	**TN3**	**A4**	**G6**
a	2	4	9	23	21
b	12	25	10	45	11
c	14	11	13	21	31
d	10	32	43	5	21
e	55	19	8	9	17
NO Respondieron	10	12	20	0	2

Tabla 48. Número de respuestas que obtuvo cada opción para los ítems de la prueba selectivanivel avanzado 2010

Opción Correcta

Opción más contestada

A continuación se presenta una descripción y análisis de los resultados de los ítems por categorías:

CATEGORÍA 1: Demasiado difícil

En la Figura 57 se observa que en la categoría 1 se encuentra el ítem TN3 de Teoría de Números con un porcentaje de respuestas correctas de 10%. La descripción de este problema aparece a continuación:

- Problema de Teoría de Números

3. La notación $\lfloor x \rfloor$ significa, el mayor entero que no es mayor que x. La cantidad de enteros x entre 0 y 500 para los cuales $x - \lfloor x^{1/2} \rfloor = 10$ es:

(a)17 (b) 18 (c) 19 (d) 20 (e) 21

La respuesta correcta del ítem anterior es la opción (b), la cual eligieron 10 estudiantes. Para la solución de este problema se requería el planteamiento de una ecuación y una desigualdad (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron los estudiantes fue la (d) (Ver Tabla 48), esto se debió a que ellos realizaron el siguiente análisis $20 - \left[20^{\frac{1}{2}}\right] = 10$ asumiendo que $20^{\frac{1}{2}} = 10$, lo cual claramente evidencia el concepto incorrecto de la raíz cuadrada.

CATEGORÍA 2: Muy difícil

La Figura 57 muestra que en esta categoría se encuentra tres ítems los cuales son: G2, TN1 y A4 de las áreas de geometría, teoría de números y álgebra, con porcentajes de respuestas correctas de 11%, 14% y 21% respectivamente. A continuación se encuentra la descripción y análisis de los resultados.

- Problema de Geometría:

2. En el triángulo ABC, $AB = 13, BC = 14$ y $AC = 15$. Sean D el punto medio de $\overline{BC}$ y E el punto de intersección de $\overline{BC}$ con la bisectriz del ángulo $B\hat{A}C$. ¿Cuál de lo siguientes números es más próximo al área del triángulo ADE?

(a) 2 (b) $2{,}5$ (c) 3 (d) $3{,}5$ (e)4

La respuesta correcta de este ítem es la opción (c), la cual fue seleccionada por 11 estudiantes. Para resolver este problema se requería el uso de la fórmula de Herón y la definición de bisectriz (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron los estudiantes fue la (d) (Ver Tabla 48).

- Problema de Teoría de Números:

1. Sea f una función que satisface que $f(x\ y) = \frac{f(x)}{y}$ para cualesquiera x, y números reales positivos, si $f(500) = 3$, ¿cuál es el valor de $f(600)$?

(a) 1 (b) 2 (c) $\frac{5}{2}$ (d) 3 (e) $\frac{18}{5}$

La respuesta correcta de este ítem es la opción (c), la cual eligieron 14 estudiantes. Para la solución de este problema se requería descomponer 500 en dos de sus divisores de tal manera que se pudieran encontrar los valores de x y y (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron los estudiantes es la (e) (Ver Tabla 48). Lo que pudo deberse que los estudiantes hicieron una mala interpretación de la notación de la función.

- Problema de Álgebra:

4. Si $|x-2|=p$, donde $x<2$, entonces $x-p$ es:

(a) -2 (b) 2 (c) $2-2p$ (d) $2p-2$ (e) $|2p-2|$

La respuesta correcta de este ítem es la opción (c), la cual eligieron 21 estudiantes. Para resolver este problema se requería despejar y sustituir en la ecuación (Ver Solución Anexos). La opción que más eligieron fue la (b) (Ver Tabla 48), lo que se pudo deber a que cometieron errores en el despeje ya que no tuvieron en cuenta el valor absoluto y resolvieron la ecuación sin tenerlo en cuenta.

CATEGORÍA 3: Difícil

En esta categoría se encuentra el ítem G6 de geometría con un porcentaje de respuesta correcta de 31%. El enunciado y análisis de este problema es el siguiente:

6. Un arco de circunferencia mide $300°$ y su longitud es $2\ km$. ¿Cuál es el número entero más próximo a la medida del radio en metros?

(a) 157 (b) 284 (c) 382 (d) 628 (e) 764

La respuesta correcta de este ítem es la opción (c), la cual eligieron 31 estudiantes. Para resolver este problema se requería usar la expresión para hallar la longitud de un arco de circunferencia (Ver Solución Anexos). Los estudiantes que no respondieron este ítem correctamente fue porque multiplicaron la medida del arco de circunferencia con la longitud lo cual les daría 600 y sería la opción (d) la más cercana, sin tener en cuenta lo que les estaban pidiendo simplemente operaron los números que tenían en el enunciado.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

La Figura 58 muestra la cantidad de estudiantes que obtuvieron 0,1, 2,3, 4, 5 o 6 como calificación en los problemas tipo ensayo.

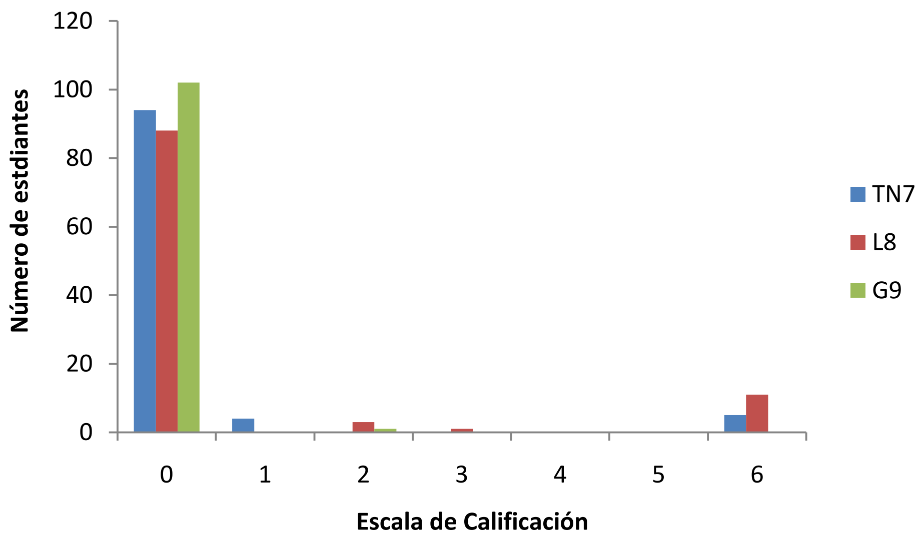


Figura 58. Número de estudiantes y puntuación de los ítems tipo ensayo prueba selectiva nivel avanzado 2010

A continuación se encuentra la descripción y análisis de los ítems tipo ensayo:

- Problema de Teoría de Números:

7. Sea $3, 4, a_3, a_4, ...a_n$ una lista de números enteros tal que la suma de los cuadrados de los primeros i términos $3^2 + 4^2 + a_3^2 + \cdots a_i^2$ es un cuadrado perfecto para todo i. Hallar el valor de a_4.

En la Figura 58 se observa que 94 estudiantes no escribieron nada en la hoja de solución, 4 estudiantes escribieron una expresión y 5 estudiantes lo resolvieron y escribieron la conclusión completa. Para la solución de este problema se requería encontrar la los primeros términos de la sucesión y con ello plantear un sistema de ecuaciones (Ver Solución Anexos). La dificultad que se les pudo presentar a los estudiantes fue encontrar el tercer término de la sucesión o el planteamiento del sistema de ecuaciones.

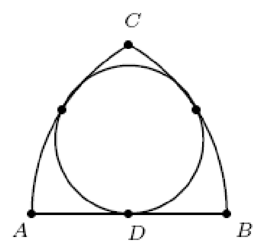
- Problema de Razonamiento Lógico:

8. ¿Cuál es el número máximo de reyes que se pueden colocar en un tablero de ajedrez de 40×40 de manera que no haya dos que se ataquen?

En la Figura 58 se observa que 88 estudiantes no escribieron nada en la hoja de respuestas, 3 estudiantes escribieron una expresión y la despejaron, un estudiante que desarrollo la expresión pero cometió un error y 11 estudiantes que lo resolvieron y la conclusión la escribieron completa. Para la solución de este ítem se requería tener conocimiento del movimiento del rey en el ajedrez y hacer un análisis de la ubicación de los reyes (Ver Solución Anexos). La dificultad del problema se pudo deber a que los estudiantes posiblemente no sabían los movimientos del rey.

- Problema de Geometría:

9. Si los arcos de circunferencia AC y BC tienen centros en B y A respectivamente, entonces existe una circunferencia que es tangente tanto a $\widehat{AC}$ como a $\widehat{BC}$ y a $\overline{AB}$. Si la longitud de $\widehat{BC}$ es 12, entonces la longitud de la circunferencia tangente es:



La Figura 58 muestra que 102 estudiantes no respondieron nada y tan solo un estudiante escribió una formula y la despejó, evidenciando estos resultados la alta dificultad de este ítem. Para la solución de este problema se requería la construcción de una circunferencia que con centro en A y radio AB y el teorema de potencia de un punto (Ver Solución Anexos). La dificultad que se pudo presentar en este ítem es que los estudiantes no hicieron la construcción de la situación planteada en el enunciado.

3.2 Análisis mediante el modelo Rasch de la fase clasificatoria junto con la selectiva de los años 2009 y 2010

Se implementará el modelo Rasch para analizar los resultados de la fase clasificatoria y selectivacon lo cual se tiene un total de 21 ítems, los primeros 12 corresponden a la fase clasificatoria y los ítems restantes son de la fase selectiva, los cuales estarán numerados a partir de 13. Esto se hará por medio del software WINSTEP en el cual se obtendrán los estadísticos OUTFIT e INFIT para analizar el ajuste de los datos al modelo y los estadísticos separabilidad y confiablidad, los cuales nos permitirán hacer un análisis de la dificultad de los ítems y de la habilidad de los estudiantes.

A continuación en la Figura 59 se presenta los estadísticos para el nivel básico de la prueba clasificatoria y selectiva del año 2009:

Prueba Clasificatoria y Selectiva Nivel Básico 2009

ESTUDIANTES	134 INPUT		134 MEASURED		INFIT		OUTFIT	
	SCORE	COUNT	MEASURE	ERROR	IMNSQ	ZSTD	OMNSQ	ZSTD
MEAN	28.4	21.0	-.06	.49	.98	.1	.93	.2
S.D.	1.7	.0	.37	.07	.59	.6	.41	.6
REAL RMSE	.49	ADJ.SD	.00	SEPARATION	.00	ESTUDI	RELIABILITY	.00
ITEMS	21 INPUT		21 MEASURED		INFIT		OUTFIT	
MEAN	181.3	134.0	.00	.19	1.00	.2	.93	.1
S.D.	300.8	.0	.98	.03	.05	1.1	.22	1.1
REAL RMSE	.19	ADJ.SD	.96	SEPARATION	4.97	ITEM	RELIABILITY	.96

Figura 59. Estadísticos generales de los ítems y los estudiantes de la prueba clasificatoria y junto con la selectiva para el nivel básico 2009.

De la Figura 59 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: INFIT (Estudiantes: media=0.98, Desviación Estándar=0.59); (Ítems: media=1.00, Desviación Estándar=0.05); e OUTFIT(Estudiantes: media=0.93, Desviación Estándar=0.41)(Ítems: media=0.93, Desviación Estándar=0.22), además se consideró los estadísticos Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 0.00 y 0.00) e (ítems: 4.97 y 0.96). A pesar que se contó con un número menor se estudiantes y más ítems no se podrá estimar la habilidad de los estudiantes para todos los niveles, ya que en la fase selectiva se dieron ítem tipo ensayo los cuales poco contestados como vimos en su análisis descriptivo en el capítulo anterior. Por otra parte la estimación de la dificultad de los ítems es de muy buena calidad así que nos centraremos en estudiar solo los ítems.

A continuación se muestra en la Figura 60 los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems en el nivel básico para estas dos fases del año 2009:

Prueba Clasificatoria y Selectiva Nivel Básico 2009

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
16	20	134	1.73	.24	1.01	.1	1.02	.2	G16
15	27	134	1.36	.22	1.03	.3	1.00	.1	A15
14	31	134	1.18	.21	.93	-.6	.90	-.8	G14
18	34	134	1.05	.20	.93	-.6	.92	-.7	C18
9	35	134	1.01	.20	.97	-.3	.94	-.6	L9
10	43	134	.72	.19	1.02	.4	1.03	.5	C10
1	51	134	.44	.18	.96	-.7	.97	-.6	L1
13	53	134	.38	.18	.93	-1.4	.94	-1.3	L13
6	58	134	.22	.18	1.07	1.8	1.08	1.8	G6
12	58	134	.22	.18	1.09	2.3	1.10	2.3	G12
17	59	134	.19	.18	.96	-1.1	.96	-.9	L17
11	68	134	-.09	.18	1.06	2.0	1.06	1.8	A11
2	70	134	-.15	.18	1.01	.4	1.01	.4	G2
8	70	134	-.15	.18	1.08	2.5	1.08	2.3	G8
7	78	134	-.40	.18	.94	-1.5	.93	-1.6	A7
4	92	134	-.87	.19	1.05	.6	1.10	1.2	A4
20	888	134	-1.11	.11	.98	.1	1.06	.3	L20
21	931	134	-1.19	.17	1.06	.4	.17	-.5	C21
5	102	134	-1.25	.20	.99	.0	.99	.0	C5
19	928	134	-1.62	.20	.95	.1	.39	-.8	G19
3	111	134	-1.68	.23	.98	-.1	.98	-.1	C3
MEAN	181.3	134.0	.00	.19	1.00	.2	.93	.1	
S.D.	300.8	.0	.98	.03	.05	1.1	.22	1.1	

Figura 60: Estadísticos descriptivos de los ítems de la prueba clasificatoria junto con la selectiva para el nivel básico 2009.

La medida de dificultad de los ítems va desde -1.68 lógitos a 1.73 lógitos. Se observan11 ítems por encima y 10 ítems pordebajo de la dificultad de la media de los ítems. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) fluctúa entre 0.24 para ítems de mayor dificultad y 0.11 para ítems de menor dificultad. Es de notar que el error estándar de los estimados decrece a medida que disminuye la dificultad de los ítems. Los valores MNSQ INFIT Y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste al modelo ya que ninguna medida es mayor que 1.3.

A continuación en la Figura 61 se presenta los estadísticos para el nivel básico de la prueba clasificatoria y selectiva del año 2010:

```
Prueba clasificatoria y Selectiva Nivel Básico 2010
--------------------------------------------------------------------------------
| ESTUDIANTES      88 INPUT      88 MEASURED          INFIT          OUTFIT    |
|          SCORE     COUNT     MEASURE   ERROR     IMNSQ   ZSTD  OMNSQ   ZSTD|
| MEAN      24.7      21.0        -.33      .36       .92     .0    .94     .2|
| S.D.       3.3        .0         .38      .06       .60     .7    .25     .4|
| REAL RMSE    .37  ADJ.SD     .09  SEPARATION   .23  ESTUDI RELIABILITY  .05|
|------------------------------------------------------------------------------|
| ITEMS      21 INPUT      21 MEASURED              INFIT          OUTFIT    |
| MEAN     103.5      88.0         .00      .23      1.00     .1    .94     .0|
| S.D.     175.2        .0         .84      .06       .08    1.3    .25    1.4|
| REAL RMSE    .24  ADJ.SD     .81  SEPARATION  3.44  ITEM   RELIABILITY  .92|
--------------------------------------------------------------------------------
```

Figura 61: Estadísticos generales de los ítems y los estudiantes de las pruebas clasificatoria junto con la selectiva para el nivel básico 2010.

De la Figura 61 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: OUFIT (Estudiantes: media=0.94, Desviación Estándar=0.25); (Ítems: media=0.94, Desviación Estándar=0.25); e INFIT (Estudiantes: media=0.92, Desviación Estándar=0.60) (Ítems: media=1.00, Desviación Estándar=0.08), en cuanto a la Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 0.23 y 0.05) e (ítems: 3.44 y 0.92). Los estadísticos mencionados anteriormente muestran el ajuste de los ítems al modelo.

La Figura 62 presenta los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems para el nivel básico del año 2010.

Prueba clasificatoria y Selectiva Nivel Básico 2010

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
13	8	88	2.03	.37	1.04	.2	1.16	.6	A13
16	16	88	1.22	.28	1.03	.2	1.05	.3	G16
10	22	88	.80	.25	1.07	.6	1.09	.7	G10
11	24	88	.68	.24	.95	-.4	.94	-.4	TN11
15	24	88	.68	.24	1.08	.8	1.13	1.0	G15
14	28	88	.46	.23	.96	-.4	.96	-.4	A14
7	30	88	.35	.23	1.05	.7	1.05	.6	G7
3	32	88	.25	.23	1.02	.3	1.01	.2	TN3
18	32	88	.25	.23	1.02	.3	1.01	.1	L18
1	34	88	.15	.22	.96	-.6	.96	-.6	C1
2	40	88	-.14	.22	1.05	1.2	1.06	1.3	G2
4	40	88	-.14	.22	.91	-2.2	.90	-2.1	L4
5	40	88	-.14	.22	.92	-1.9	.92	-1.8	TN5
6	44	88	-.33	.22	.93	-1.9	.92	-1.9	A6
19	349	88	-.39	.05	.87	-1.1	.77	-1.3	L19
8	47	88	-.47	.22	1.17	4.1	1.19	4.0	A8
12	47	88	-.47	.22	1.07	1.6	1.08	1.7	TN12
17	48	88	-.52	.22	.97	-.7	.96	-.8	TN17
20	590	88	-1.12	.10	.93	.0	.34	-.2	TN20
9	66	88	-1.46	.25	1.05	.4	1.09	.7	G9
21	612	88	-1.69	.26	.87	.2	.10	-.7	G21
MEAN	103.5	88.0	.00	.22	1.00	.1	.94	.0	
S.D.	175.2	.0	.84	.06	.08	1.3	.25	1.4	

Figura 62: Estadísticos descriptivos de los ítems de las pruebas clasificatoria junto con la selectiva para el nivel básico 2010.

Los ítems tienen una medida que va desde -1.69 lógitos a 2.03 lógitos en su dificultad. Se observan 10 ítems por encima y 11 ítems por debajo de la media de la dificultad de los ítems. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) fluctúa entre 0.5 y 0.37.Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste al igual que los estandarizados ZSTD INFIT y ZSTD OUTFIT ya que ninguno se encuentra por encima de 1.3. En este nivel todos los ítems se comportan dentro de la expectativa del modelo.

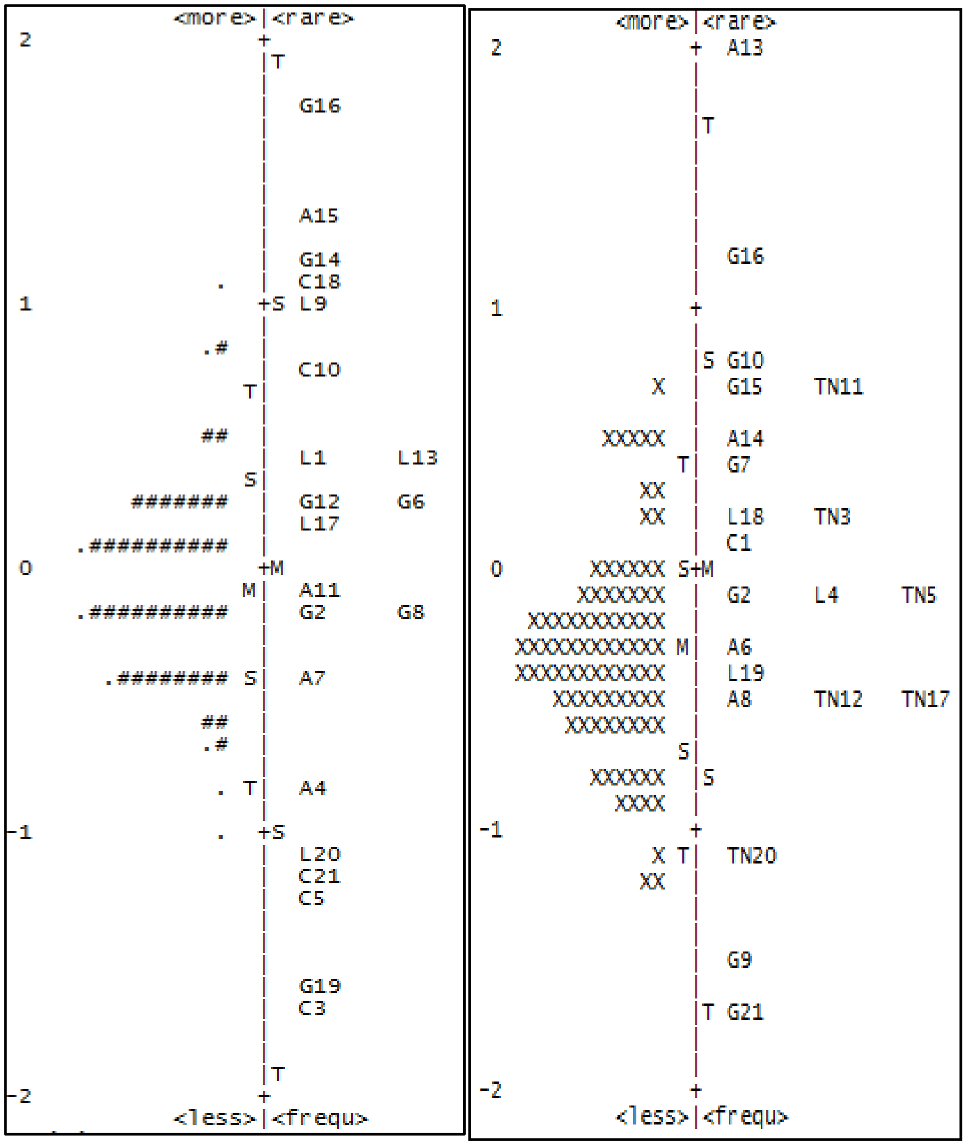


Figura 63. Mapas de ítems de la prueba clasificatoria junto con la selectiva para el nivel básico 2009 (izquierda) y 2010 (derecha).

En el año 2009 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media -0.06 y desviación estándar 0.37 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 y desviación estándar 0.98. Como se observa en la Figura 63 la media de la dificultad de los ítems es muy similar a la media de la habilidad de los estudiantes por lo que se infiere que los ítems están hechos a la medida de la habilidad de los estudiantes. Por otro lado se observa que los ítems de combinatoria presentaron menor dificultad a excepción del ítem C18. En el año 2010 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media -0.33 y desviación estándar 0.38 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 ydesviación estándar 0.84. Varios ítems presentaron la misma dificultad como es el caso de G15 y TN11;L18 y TN3; G2, L4 y TN5; A8, TN2 Y TN17 lo cual muestra cierta homogeneidad, la media de la habilidad de los estudiantes estuvo muy cerca de la media de la dificultad de todos los ítems, lo cual significa que los ítems tienen una medida de dificultad similar a la habilidad de los estudiantes. Comparando la distribución de los ítems de los dos años se observa que se mantiene el nivel de dificultad de los ítems, además vemos que la distribución de la dificultad de los ítems para el año 2010 es más homogénea en comparación a la del 2009. Es de notar que en el año 2009 no se presentaron ítems de Teoría de Números.

En la siguiente Figura se presenta los estadísticos para el nivel medio de la fase clasificatoria y selectiva del año 2009:

Prueba Clasificatoria y Selectiva Nivel Medio 2009

ESTUDIANTES	127 INPUT		127 MEASURED		INFIT		OUTFIT	
	SCORE	COUNT	MEASURE	ERROR	IMNSQ	ZSTD	OMNSQ	ZSTD
MEAN	25.6	21.0	-.16	.35	.83	-.1	.97	.0
S.D.	3.4	.0	.32	.09	.70	.7	.43	.9
REAL RMSE	.36	ADJ.SD	.00	SEPARATION	.00	ESTUDI	RELIABILITY	.00
ITEMS	21 INPUT		21 MEASURED		INFIT		OUTFIT	
MEAN	155.0	127.0	.00	.19	.99	.3	.97	.4
S.D.	245.2	.0	1.12	.07	.09	1.0	.16	1.0
REAL RMSE	.21	ADJ.SD	1.10	SEPARATION	5.31	ITEM	RELIABILITY	.97

Figura 64: Estadísticos generales de los ítems y los estudiantes de la prueba clasificatoria junto con la selectiva para el nivel medio 2009.

De la Figura 64 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: INFIT (Estudiantes: media=0.83, Desviación Estándar=0.70); (Ítems: media=0.99, Desviación Estándar=0.09); e OUTFIT (Estudiantes: media=0.97, Desviación Estándar=0.43)(Ítems: media=0.97, Desviación Estándar=0.16), además se consideró los estadísticos Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 0.00 y 0.00) e (ítems: 5.31 y 0.97). Estos resultados son el reflejo de una mala estimación de la habilidad de los estudiantes y una buena estimación de la dificultad de los ítems.

La Figura 65 presenta los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems para el nivel medio para estas fases del año 2009:

Prueba Clasificatoria y Selectiva Nivel Medio 2009

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
14	13	127	2.06	.29	.96	-.1	.90	-.3	TN14
6	17	127	1.75	.26	1.02	.2	1.05	.3	G6
18	21	127	1.50	.24	1.01	.1	1.09	.6	A18
4	33	127	.91	.20	1.08	.8	1.14	1.3	L4
17	33	127	.91	.20	1.00	.1	1.01	.2	A17
13	35	127	.83	.20	.99	-.1	1.00	.1	G13
9	45	127	.46	.19	1.05	.8	1.06	.9	C9
5	49	127	.32	.18	1.05	1.1	1.05	1.0	A5
16	51	127	.25	.18	1.01	.2	1.02	.5	G16
7	59	127	-.01	.18	1.06	1.9	1.06	2.0	L7
11	59	127	-.01	.18	.99	-.5	.99	-.5	C11
2	63	127	-.14	.18	1.05	1.8	1.05	1.7	G2
1	67	127	-.27	.18	1.06	2.1	1.07	2.1	TN1
21	679	127	-.49	.06	.82	-1.3	.78	-1.4	L21
19	728	127	-.54	.05	.70	-2.2	.58	-1.7	TN19
8	76	127	-.57	.18	.99	-.3	.98	-.3	A8
20	840	127	-.87	.07	.83	-.5	.48	-.6	A20
12	86	127	-.92	.19	1.04	.5	1.04	.5	G12
3	90	127	-1.07	.20	1.03	.4	1.04	.4	L3
15	90	127	-1.07	.20	1.05	.6	1.04	.5	TN15
10	120	127	-3.04	.39	1.01	.1	.99	.1	G10
MEAN	155.0	127.0	.00	.19	.99	.3	.97	.4	
S.D.	245.2	.0	1.12	.07	.09	1.0	.16	1.0	

Figura 65: Estadísticos descriptivos de los ítems de la prueba clasificatoria junto con la selectiva para el nivel medio 2009.

Los ítems tienen una medida que va desde -3.04 lógitos a 2.06 lógitos en su dificultad. Se observan 9 ítems por encimay 12 ítems por debajo de la dificultad media de los ítems. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) fluctúa entre 0.05 para ítems de menor dificultad y 0.29para ítems de mayor dificultad. Es de notar que el error estándar de los estimados varía a medida que disminuye la dificultad de los ítems. Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste al igual que los estandarizados ZSTD INFIT y ZSTD OUTFIT. En este nivel todos los ítems se comportan dentro de la expectativa del modelo.

La Figura 66 presenta los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems para el nivel medio para estas fases del año 2010:

```
Prueba Clasificatoria y Selectiva Nivel Medio 2010
-------------------------------------------------------------------------------
| ESTUDIANTES     112 INPUT     112 MEASURED          INFIT         OUTFIT    |
|          SCORE     COUNT     MEASURE   ERROR     IMNSQ   ZSTD  OMNSQ   ZSTD|
| MEAN      26.7      21.0        -.34     .43       .93     .1   1.03     .0|
| S.D.       2.7        .0         .47     .16      1.11     .7   1.03    1.0|
| REAL RMSE    .45  ADJ.SD     .13  SEPARATION   .29  ESTUDI RELIABILITY  .08|
|-----------------------------------------------------------------------------|
| ITEMS      21 INPUT      21 MEASURED                INFIT         OUTFIT    |
| MEAN     142.2     112.0         .00     .21       .99     .1   1.05     .2|
| S.D.     243.8        .0        1.20     .07       .06     .4    .12     .6|
| REAL RMSE    .22  ADJ.SD    1.18  SEPARATION  5.25  ITEM   RELIABILITY  .97|
-------------------------------------------------------------------------------
```

Figura 66: Estadísticos generales de los ítems y los estudiantes de las pruebas clasificatoria junto con la selectiva para el nivel medio 2010.

De la Figura 66 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: OUFIT (Estudiantes: media=1.03, Desviación Estándar=1.03); (Ítems: media=1.05, Desviación Estándar=0.12); e INFIT (Estudiantes: media=0.93, Desviación Estándar=1.11) (Ítems: media=0.99, Desviación Estándar=0.06), en cuanto a la Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 0.29 y 0.08) e (ítems: 5.25 y 0.97). Los estadísticos mencionados anteriormente muestran el ajuste de los ítems al modelo.

La Figura 67 presenta los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems para el nivel medio del año 2010.

Prueba Clasificatoria y Selectiva Nivel Medio 2010

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
18	9	112	2.20	.36	.95	-.1	.82	-.5	C18
14	15	112	1.60	.29	1.02	.2	1.12	.6	G14
4	17	112	1.45	.27	.99	.0	1.03	.2	G4
16	24	112	1.01	.24	.99	-.1	.98	-.1	A16
1	26	112	.90	.23	1.00	.0	1.01	.1	A1
5	30	112	.70	.22	.92	-.8	.88	-1.0	TN5
10	32	112	.60	.21	1.07	.8	1.12	1.1	TN10
2	36	112	.43	.21	1.02	.3	1.03	.3	G2
13	37	112	.38	.21	.99	-.1	.98	-.2	G13
17	38	112	.34	.20	.96	-.5	.96	-.4	TN17
11	39	112	.30	.20	.99	-.1	.99	-.1	L11
6	40	112	.26	.20	1.09	1.3	1.17	2.2	TN6
7	49	112	-.09	.19	1.00	.0	.99	-.2	G7
15	51	112	-.17	.19	1.00	.1	1.01	.2	A15
8	52	112	-.21	.19	1.02	.5	1.01	.2	G8
19	716	112	-.97	.06	.83	-.7	1.10	.4	C19
21	722	112	-1.04	.07	.95	-.1	1.22	.6	TN21
20	770	112	-1.39	.13	.90	.0	1.42	.7	G20
9	90	112	-1.81	.24	1.00	.1	1.00	.1	A9
3	94	112	-2.06	.26	1.03	.3	1.08	.4	TN3
12	99	112	-2.44	.30	1.02	.1	1.02	.2	A12
MEAN	142.2	112.0	.00	.21	.99	.1	1.05	.2	
S.D.	243.8	.0	1.20	.07	.06	.4	.12	.6	

Figura 67: Estadísticos descriptivos de los ítems de la prueba clasificatoria junto con la selectiva para el nivel medio 2010.

Los ítems tienen una medida que va desde -2.44 lógitos a 2.20 lógitos en su dificultad. Se observan 12 ítems por encima y 9 ítems por debajo de la media de la dificultad de los ítems. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) se encuentra entre 0.7 y 0.36.Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste al igual que los estandarizados ZSTD INFIT y ZSTD OUTFIT ya que ninguno se encuentra por encima de 1.3. En este nivel todos los ítems se comportan dentro de la expectativa del modelo.

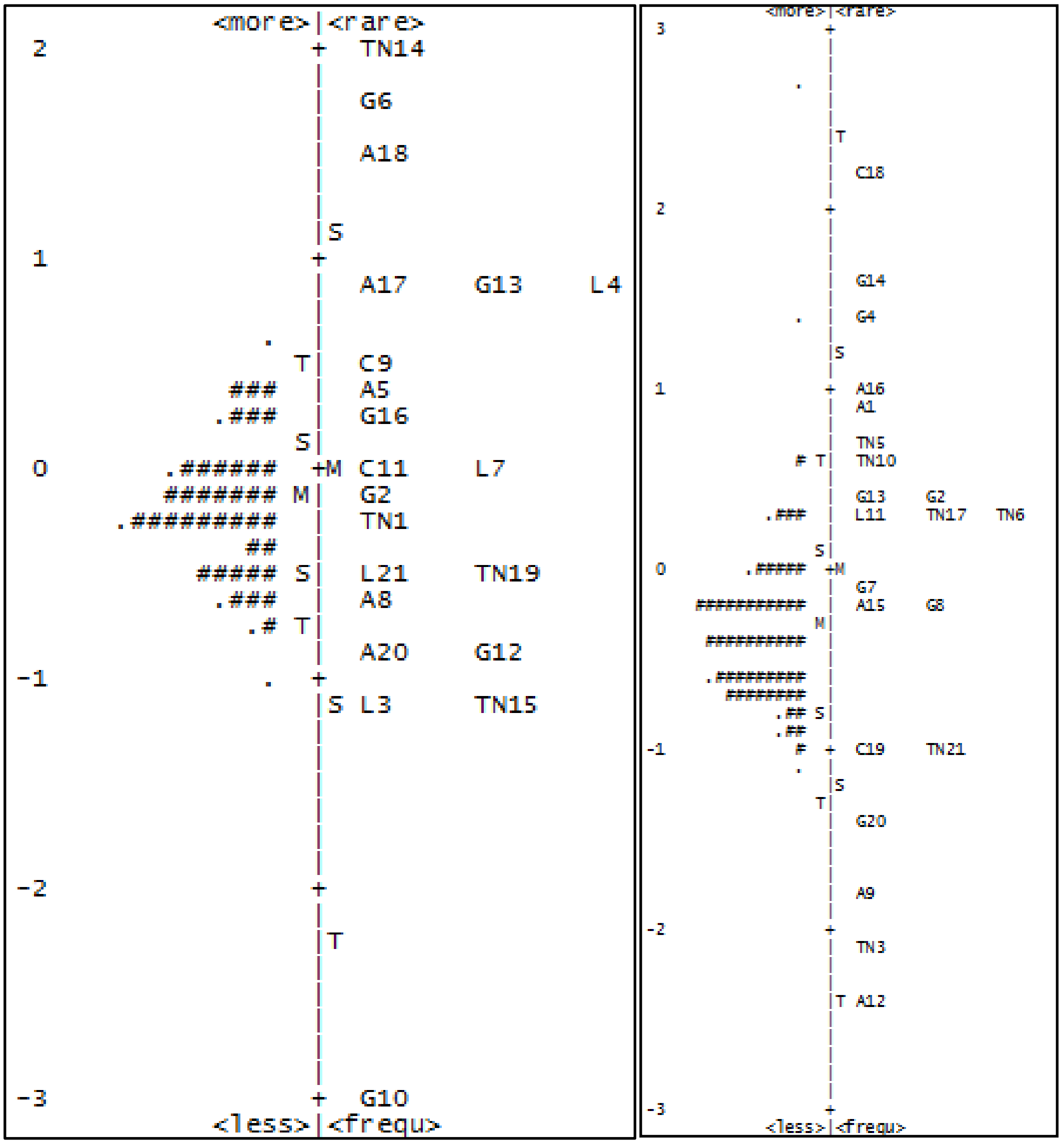


Figura 68. Mapas de ítems de la prueba clasificatoria junto con la selectiva para el nivel medio 2009 (izquierda) y 2010 (derecha).

En el año 2009 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media -0.16y desviación estándar 0.32 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 y desviación estándar 1.12. Como se nota en la Figura 68 la media de la dificultad de los ítems se encuentra cercana a la media de la habilidad de los estudiantes por lo que se infiere que los ítems son pertinentes para medir la habilidad de los estudiantes. La mayoría de los ítems se encuentran concentrados en la parte superior, a excepción del ítem G10 que se encuentra alejado a 1.8 lógitos El único ítem que estuvo por debajo de la media de la habilidad de las personas fue el G10. Varios ítems presentaron la misma dificultad como es el caso de A17, G13 Y L4; C11 y L7; L21 TN19; A20 y G12; L3 y TN15. En el año 2010 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media -0.34 y desviación estándar 0.47 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 ydesviación estándar1.20. En este año los ítems estuvieron más dispersos a lo largo de la escala. Comparando la distribución de los ítems de los dos años se observa que en el año 2010 se presentaron más ítems por debajo de la habilidad de los estudiantes. Es de notar que en el año 2010 un estudiante se ubica por encima de la dificultad de todos los ítems.

La Figura 69muestra los estadísticos para el nivel avanzado de las fases clasificatoria y selectiva del año 2009:

Prueba Clasificatoria y Selectiva Nivel Avanzado 2009

ESTUDIANTES	93 INPUT		93 MEASURED			INFIT		OUTFIT	
	SCORE	COUNT	MEASURE	ERROR		IMNSQ	ZSTD	OMNSQ	ZSTD
MEAN	27.4	21.0	.00	.38		.91	.0	1.07	.1
S.D.	3.4	.0	.37	.15		.93	.6	.96	1.0
REAL RMSE	.41	ADJ.SD	.00	SEPARATION	.00	ESTUDI	RELIABILITY		.00
ITEMS	21 INPUT		21 MEASURED			INFIT		OUTFIT	
MEAN	121.3	93.0	.00	.22		.99	.0	1.07	.2
S.D.	189.7	.0	1.09	.07		.08	.6	.43	.8
REAL RMSE	.23	ADJ.SD	1.06	SEPARATION	4.56	ITEM	RELIABILITY		.95

Figura 69: Estadísticos generales de los ítems y los estudiantes de la prueba clasificatoria junto con la selectiva para el nivel avanzado 2009.

De la Figura 69 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: INFIT (Estudiantes: media=0.91, Desviación Estándar=0.93); (Ítems: media=0.99, Desviación Estándar=0.08); e OUTFIT (Estudiantes: media=1.07, Desviación

Estándar=0.96)(Ítems: media=1.07, Desviación Estándar=0.43), además se consideró los estadísticos Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 0.00 y 0.00) e (ítems: 4.56 y 0.95). Como observamos la estimación de la dificultad de los ítems es de muy buena calidad.

La Figura 70 muestra los estadísticos descriptivos para los ítems de estas fases correspondientes al nivel avanzado del año 2009:

Prueba Clasificatoria y Selectiva Nivel Avanzado 2009

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
6	12	93	1.97	.31	.99	.0	.95	-.1	C6
12	12	93	1.97	.31	1.03	.2	1.10	.5	C12
7	21	93	1.28	.25	1.04	.3	1.06	.4	A7
17	21	93	1.28	.25	.95	-.3	.96	-.2	A17
2	27	93	.93	.23	1.04	.5	1.08	.7	G2
14	33	93	.62	.22	1.03	.4	1.04	.6	G14
8	35	93	.53	.22	1.07	1.2	1.09	1.3	G8
11	38	93	.39	.21	1.03	.5	1.03	.6	G11
10	42	93	.20	.21	1.01	.2	1.01	.1	TN10
4	48	93	-.06	.21	1.05	1.3	1.06	1.5	A4
18	49	93	-.11	.21	.96	-1.0	.96	-1.0	G18
9	51	93	-.20	.21	1.00	.1	1.01	.2	L9
16	51	93	-.20	.21	1.00	.0	1.00	.0	TN16
13	56	93	-.42	.22	.95	-.9	.94	-.9	L13
20	556	93	-.49	.06	.74	-1.5	.46	-1.6	A20
21	606	93	-.67	.08	.94	-.1	2.85	1.9	C21
19	587	93	-.74	.08	.80	-.9	.65	-.9	L19
15	63	93	-.76	.22	1.01	.1	.99	-.1	A15
5	78	93	-1.69	.28	1.04	.3	1.09	.5	G5
1	80	93	-1.86	.30	1.00	.1	.97	-.1	TN1
3	81	93	-1.95	.31	1.03	.2	1.09	.4	TN3
MEAN	121.3	93.0	.00	.22	.99	.0	1.07	.2	
S.D.	189.7	.0	1.09	.07	.08	.6	.43	.8	

Figura 70: Estadísticos descriptivos de los ítems de la prueba clasificatoria junto con la selectiva para el nivel avanzado 2009.

La medida de dificultad de los ítems va desde -1.95 lógitos a 1.97 lógitos. Se observan 9 ítems por encimay 12 ítems por debajo de la dificultad media de los ítems la cual es de 0 lógitos. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) fluctúa entre 0.31para ítems de mayor dificultad y 0.06 para ítems de menor dificultad. Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste.

La Figura 71muestra los estadísticos para el nivel avanzado de las fases clasificatoria y selectiva del año 2010:

```
Prueba Clasificatoria y Selectiva Nivel Avanzado 2010
-------------------------------------------------------------------------------
| ESTUDIANTES     103 INPUT     103 MEASURED         INFIT         OUTFIT    |
|          SCORE     COUNT     MEASURE   ERROR     IMNSQ   ZSTD  OMNSQ   ZSTD|
| MEAN      24.8      20.0        -.24     .45       .90     .1    .97     .2|
| S.D.       2.3        .0         .44     .09       .73     .6    .57     .7|
| REAL RMSE    .46  ADJ.SD     .00  SEPARATION   .00  ESTUDI RELIABILITY  .00|
|-----------------------------------------------------------------------------|
| ITEMS      20 INPUT      20 MEASURED                 INFIT         OUTFIT    |
| MEAN     127.8     103.0         .00     .25       .99     .1    .97     .2|
| S.D.     209.8        .0        1.42     .09       .07     .5    .18     .5|
| REAL RMSE    .26  ADJ.SD    1.40  SEPARATION  5.32  ITEM   RELIABILITY  .97|
-------------------------------------------------------------------------------
```

Figura 71: Estadísticos generales de los ítems y los estudiantes de las pruebas clasificatoria junto con la selectiva para el nivel avanzado 2010.

De la Figura 71 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: OUFIT (Estudiantes: media=0.97, Desviación Estándar=0.57); (Ítems: media=0.97, Desviación Estándar=0.18); e INFIT (Estudiantes: media=0.90, Desviación Estándar=0.73) (Ítems: media=0.99, Desviación Estándar=0.07), en cuanto a la Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 0.00 y 0.00) e (ítems: 5.32 y 0.97). Los estadísticos mencionados anteriormente muestran el ajuste de los ítems al modelo.

La Figura 72 presenta los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems para el nivel avanzado del año 2010.

Prueba Clasificatoria y Selectiva Nivel Avanzado 2010

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
15	10	103	2.08	.34	1.02	.2	1.07	.3	TN15
14	11	103	1.97	.32	.98	.0	1.02	.2	G14
13	14	103	1.69	.29	1.03	.2	1.05	.3	TN13
17	18	103	1.38	.26	1.01	.1	1.02	.2	A17
12	21	103	1.18	.25	1.00	.1	1.09	.6	A12
16	21	103	1.18	.25	.94	-.3	.97	-.1	A16
5	22	103	1.12	.24	1.09	.7	1.14	.9	A5
6	23	103	1.06	.24	1.03	.3	1.06	.4	L6
8	31	103	.64	.22	1.05	.5	1.06	.6	G8
18	416	103	.27	.08	.81	-1.7	.83	-1.4	G18
9	42	103	.15	.21	1.05	1.0	1.06	1.1	G9
3	61	103	-.63	.20	1.00	.0	1.01	.2	A3
4	63	103	-.71	.21	.98	-.3	1.00	.0	TN4
7	64	103	-.76	.21	1.01	.3	.99	-.1	G7
19	687	103	-1.03	.08	.78	-.6	.63	.0	TN19
2	78	103	-1.42	.23	1.08	.7	1.11	.9	A2
11	83	103	-1.71	.25	.98	-.1	1.01	.1	G11
10	85	103	-1.85	.26	.99	.0	.95	-.2	TN10
1	86	103	-1.92	.27	.97	-.1	.90	-.4	A1
20	719	103	-2.70	.50	.97	.3	.34	-.2	G20
MEAN	127.8	103.0	.00	.25	.99	.1	.97	.2	
S.D.	209.8	.0	1.42	.09	.07	.5	.18	.5	

Figura 72: Estadísticos descriptivos de los ítems de las pruebas clasificatorias junto con la selectiva para el nivel medio 2010.

Los ítems tienen una medida que va desde -2.70 lógitos a 2.08 lógitos en su dificultad. Se observan 11 ítems por encima y 10 ítems por debajo de la dificultad media de los ítems. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) se encuentra entre 0.8 y 0.50.Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste al igual que los estandarizados ZSTD INFIT y ZSTD OUTFIT ya que ninguno se encuentra por encima de 1.3. En este nivel todos los ítems se comportan dentro de lo esperado en el modelo.

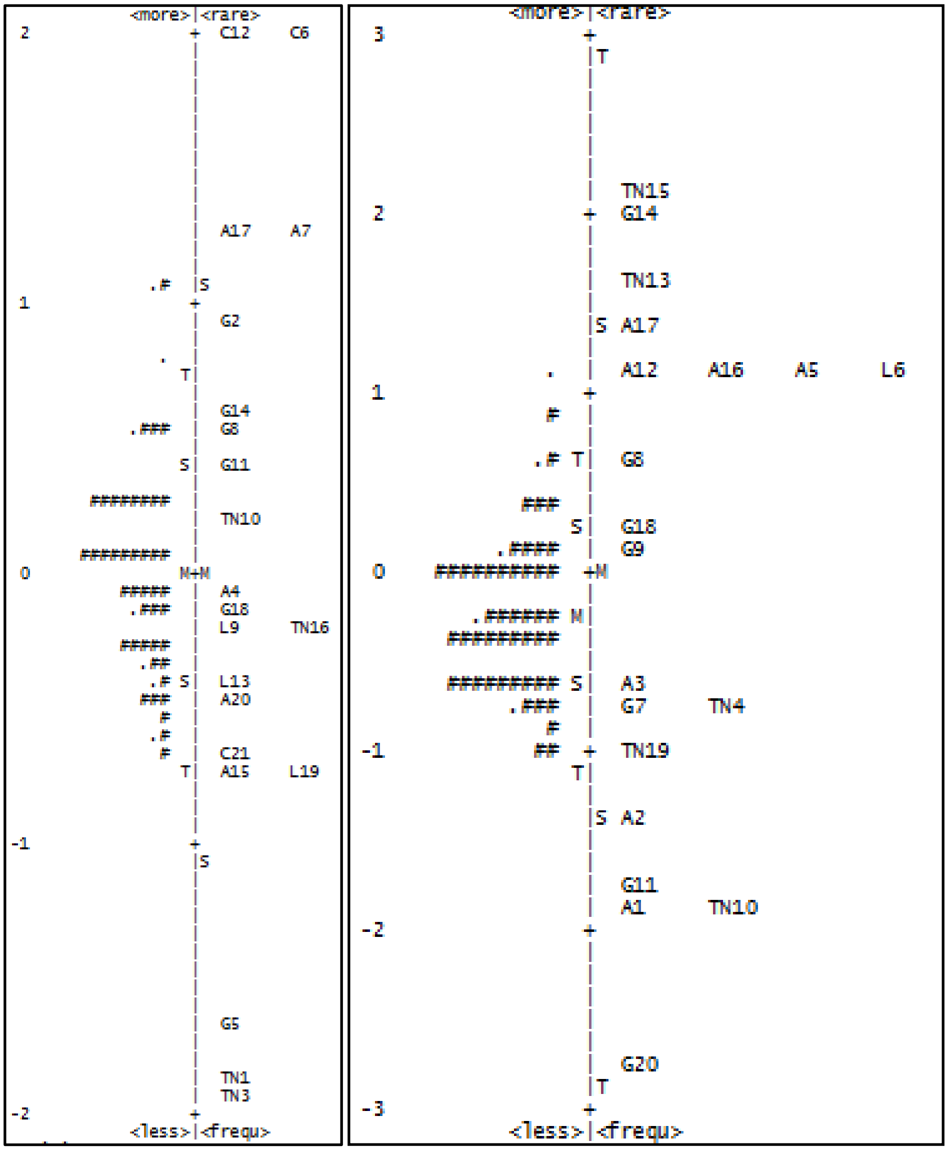


Figura 73. Mapas de ítems de la prueba clasificatoria junto con la selectiva para el nivel avanzado 2009 (izquierda) y 2010 (derecha).

En el año 2009 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media 0y desviación estándar 0.37 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 y desviación estándar 1.09. Como se nota la media de la dificultad de los ítems es igual a la media de la habilidad de los estudiantes por lo que ítems están midiendo la habilidad de los estudiantes. Así como se presentaron ítems difíciles como el C12 y C6, se presentaron ítems fáciles de teoría de números como el TN1 y TN10. En el año 2010 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media -0.24 y desviación estándar 0.44 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 ydesviación estándar1.42. La media de la habilidad de los ítems se encuentra cerca de la media de la dificultad de los ítems, por lo que se infiere que los ítems están hechos a la medida de la habilidad de los estudiantes. Es de observar que se presentaron tres ítems de algebra con la misma medida de dificultad los cuales fueron: A12, A16 y A5. Comparando la distribución de los ítems de los dos años se observa que en el año 2009 dos ítems de teoría de números fueron fáciles el TN1 y TN3, comparados con los que se presentaron en el año 2010 los cuales fueron el TN13 y el TN15, ya que estuvieron ubicados muy por encima de la habilidad de los estudiantes. Además, vemos que la distribución de la dificultad de los ítems para el 2009 fue más uniforme que la del 2010.

4. Fase Final

4.1 Análisis descriptivo de los ítems de la fase final de los años 2009 y 2010

En la Fase Final de los años 2009 y 2010, se estudiará la dificultad de los 6 ítems tipo ensayo que se presentaron en esta fase, esto se hará teniendo en cuenta la escala de calificación del grupo de Olimpiadas la cual es:

0. No escribió algo.
1. Escribió una expresión.
2. Escribió la expresión e hizo un despeje
3. Desarrollo pero cometió errores.
4. Resolvió pero no escribió la conclusión
5. Resolviópero escribió la conclusión incompleta.
6. Resolvió y escribió la conclusión completa.

Figura 46. Escala de calificación para los ítems tipo ensayo

Nivel Básico 2009

En este nivel se presentaron 17 estudiantes.
A continuación en la Tabla 49, se muestran los ítems de este nivel y el número de estudiantes de acuerdo a las calificaciones obtenidas.

	A1	TN2	G3	L4	TN5	G6
0	12	8	3	5	11	12
1	0	0	0	0	1	0
2	3	2	4	5	1	1
3	0	1	4	2	1	2
4	2	4	3	4	1	0
5	0	0	0	0	0	0
6	0	2	3	1	2	2

Tabla 49. Número de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en los ítems de la prueba final nivel básico 2009

En este nivel se presentaron los siguientes problemas tipo ensayo:

- Problema de Álgebra:

1. Cada letra representa un número en el siguiente arreglo. La suma de cualesquiera tres números en posiciones consecutivas es 18. ¿Cuánto vale H?

3	B	C	D	E	8	G	H	I

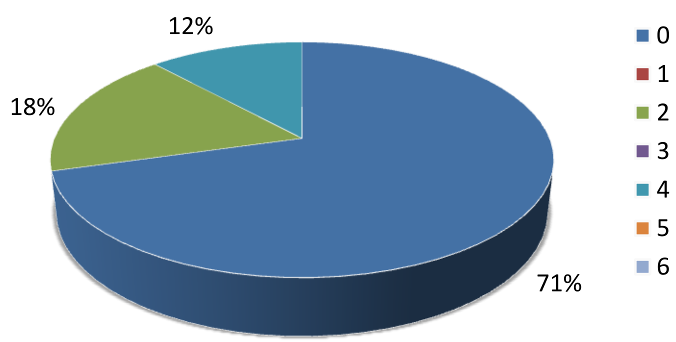


Figura 74. Porcentajes de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 1 en la fase final nivel básico 2009

Para la solución de este problema el estudiante debía plantear un sistema de ecuaciones y resolverlo (Ver Solución Anexos). La dificultad se pudo deber a que debían interpretar los datos para plantear el sistema de ecuaciones correctamente o se pudo deber a errores en las operaciones algebraicas al resolverlo. Como vemos en la Figura 74 el 71% de los estudiantes no escribieron algo, el 18% formularon y realizaron despejes, y el 12% es decir solo 2 estudiantes resolvieron las ecuaciones pero no concluyeron.

- Problema de Teoría de Números:

> **2.** Una rana salta sobre la recta numérica. Parte de cero con saltos de longitud 7 y 11 alternadamente, es decir, cae en $7, 18, 25, 36, \ldots$. ¿Cuál es el punto más cercano a 900 en el que la rana cae en alguno de sus saltos?

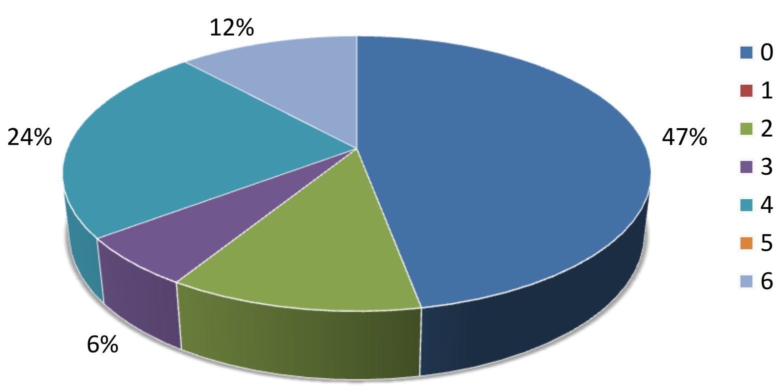
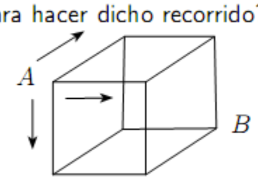


Figura 75. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 2 en la fase final nivel básico 2009

En este ítem el estudiante debía interpretar y deducir como varia la serie de números para poder encontrar la solución (Ver Solución Anexos). El 47% de los estudiantes no escribieron algo, lo cual se pudo deber a que no entendieron el problema. El 12% escribieron una formula y despejaron, el 6% de los estudiantes desarrollaron el problema pero cometieron un error, el 24% resolvieron el problema pero no concluyeron y solo el 12% de los estudiantes contestaron bien el problema (Ver Figura 75).

- Problema de Geometría:

3. Una hormiga se mueve por las aristas de un cubo del extremo A al extremo B como se muestra en la figura. Si solo se le permite moverse hacia la derecha, hacia abajo y hacia atras, ¿Cuántos caminos diferentes tiene para hacer dicho recorrido?



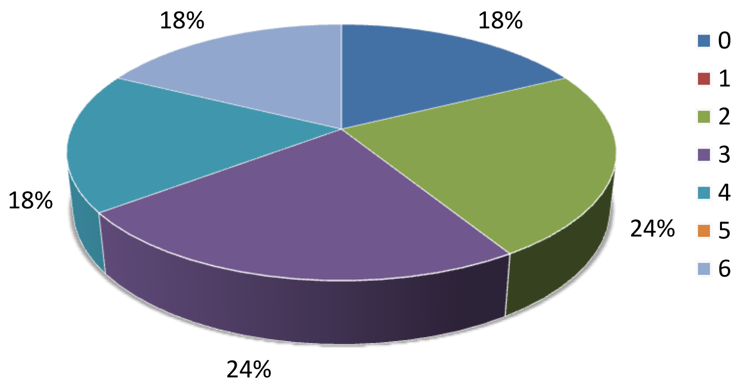


Figura 76. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 3 en la fase final nivel básico 2009

Para resolver este problema el estudiante debía identificar las aristas del cubo y valerse del pensamiento espacial (Ver Solución Anexos). El 18% de los estudiantes no escribieron algo, lo cual pudo deberse por que no comprendieron el problema o no sabían cuáles son las aristas del cubo. El 24 % formularon una posible solución pero no la completaron, el 24% desarrollaron pero cometieron algún error posiblemente en los movimientos, el 18% resolvieron el problema pero no concluyeron, solo 3 estudiantes, es decir el 18% resolvieron completamente bien este ítem.

- Problema de Razonamiento Lógico:

4. Están 4 personas jugando un juego con las siguientes reglas:

a) El primero puede sentarse (si está de pie) o pararse (si está sentado), en cualquier jugada.

b) El segundo puede sentarse o pararse únicamente cuando el primero está de pie.

c) El tercero puede sentarse o pararse únicamente cuando el primero esté sentado y el segundo de pie.

d) El cuarto puede cambiar de posición únicamente cuando el tercero esté de pie y los demás (primero y segundo) estén sentados.

Además en cada jugada sólo un jugador cambia de posición. Si al comenzar el juego todos están sentados, ¿cómo hacemos para que al final todos los jugadores estén de pie?

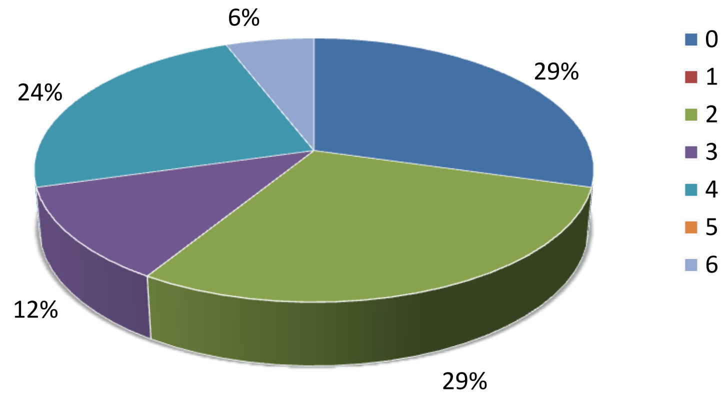


Figura 78. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 4 en la fase final nivel básico 2009

Para resolver este problema se debía comprender e interpretar los datos del enunciado (Ver Solución Anexos). El 29% de los estudiantes no escribieron algo, lo cual pudo ser debido a la falta de comprensión de las condiciones del problema, el 29% de los estudiantes formularon una posible solución pero no la terminaron, el 3% desarrollaron el problema pero cometieron un error, el 24% los resolvieron pero no concluyeron la solución, solo el 6% de los estudiantes lo contestaron bien.

- Problema de Teoría de Números:

5. ¿Cuantos enteros hay entre 2008^2 y 2009^2 (sin incluir estos dos números)?

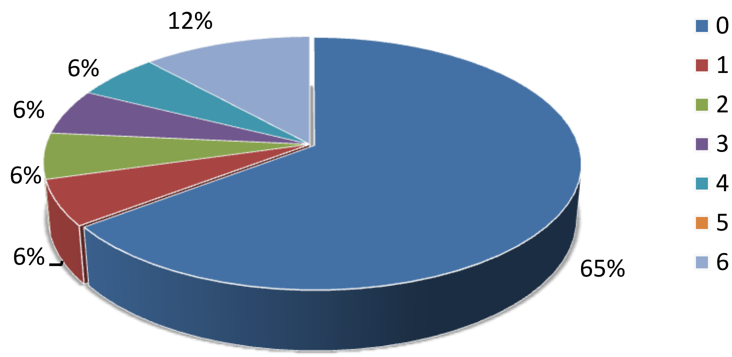


Figura 78. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 5 en la fase final nivel básico 2009

En este ítem para su solución solo se debía realizar operaciones aritméticas (Ver Solución Anexos). El 65% de los estudiantes no escribieron algo, posiblemente porque no entendieron el enunciado, el 6% escribieron alguna expresión, otro 6% de los estudiantes formularon y despejaron alguna expresión , otro 6% desarrollaron pero cometieron un error de tipo aritmético, otro 6% resolvieron pero no concluyeron y solo el 12% de los estudiantes lo respondieron bien.

- Problema de Geometría:

6. $ABCD$ es un cuadrado, P y Q son puntos fuera del cuadrado, tales que los triángulos ABP y BCQ son equiláteros. ¿Cuánto mide el ángulo PQB?

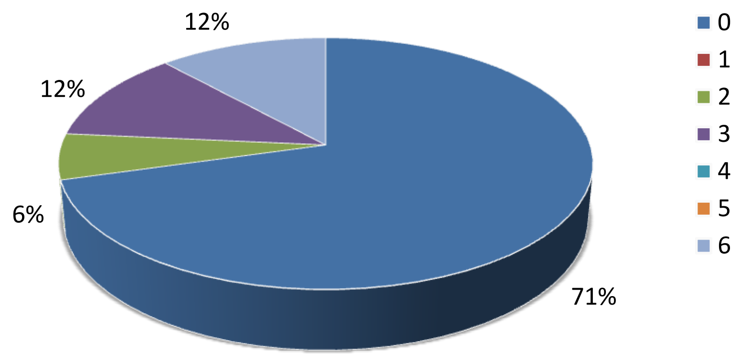


Figura 79. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 6 en la fase final nivel básico 2009

Para la resolver este ítem, el estudiantes debía hacer una interpretación gráfica del problema para lo cual debía conocer las características de un cuadrado y las propiedades de un triángulo equilátero (Ver Solución Anexos). La dificultad posiblemente ocurrió porque los estudiantes no manejaban los conceptos que se requerían para la solución. El 71% de los estudiantes no escribieron algo, el 6% formularon una expresión y la despejaron, el 12% desarrollo el problema pero cometieron un error y otro 12% lo resolvieron correctamente.

Nivel Medio 2009

En este nivel se presentaron 22 estudiantes.

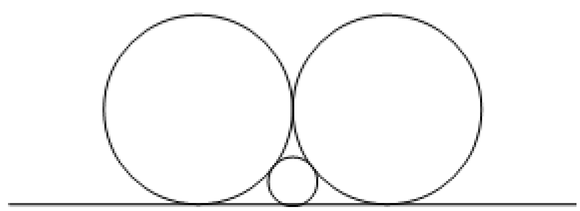
A continuación en la Tabla 50, se muestra los ítems de este nivel y el número de estudiantes que de acuerdo a lo que realizaron en cada ítem.

	G1	L2	TN3	G4	A5	A6
0	2	8	5	4	5	12
1	0	0	0	0	0	0
2	9	2	2	2	2	4
3	1	0	0	2	4	1
4	8	8	7	4	4	5
5	0	0	0	0	0	0
6	2	4	8	10	7	0

Tabla 50. Número de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en los ítems de la prueba final nivel medio 2009

- Problema de Geometría:

1. Se tienen dos circunferencias tangentes entre sí de radio dos y una linea tangente a las dos, además hay una tercera circunferencia tangente a las dos primeras y a la recta como se muestra en el dibujo. ¿Cuál es el radio de la tercera circunferencia?



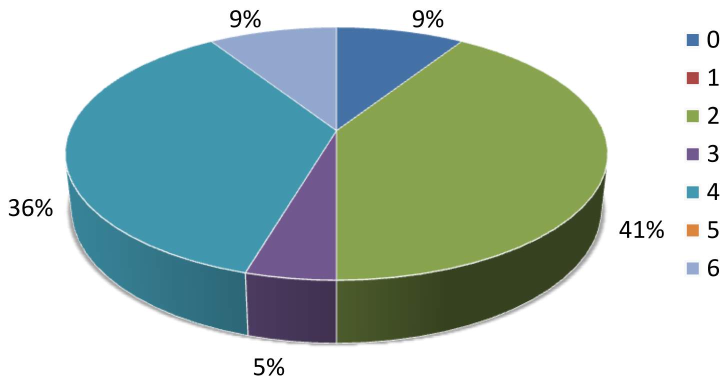
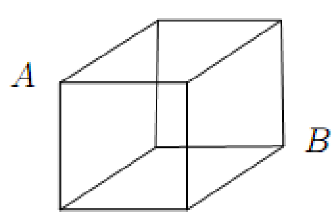


Figura 80. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 1 en la fase final nivel medio 2009

Para resolver este problema el estudiante debía saber la propiedad de tangencia en una circunferencia e identificar el radio y debía implementar el Teorema de Pitágoras, además debía plantear ecuaciones y resolverlas (Ver Solución Anexos). Es este ítem solo el 2% de los estudiantes no escribieron algo, el 41% formularon y despejaron, el 5% desarrollaron las ecuaciones pero cometieron algún error algebraico, el 36% resolvieron el problema pero no concluyeron, el 9% de los estudiantes, es decir 2 estudiantes lo contestaron bien.

- Problema de Razonamiento Lógico:

2. ¿Cuantos caminos distintos hay para pasar del vértice A al vértice B sobre las aristas del cubo en el siguiente dibujo, si no se vale pasar dos veces por el mismo vértice?



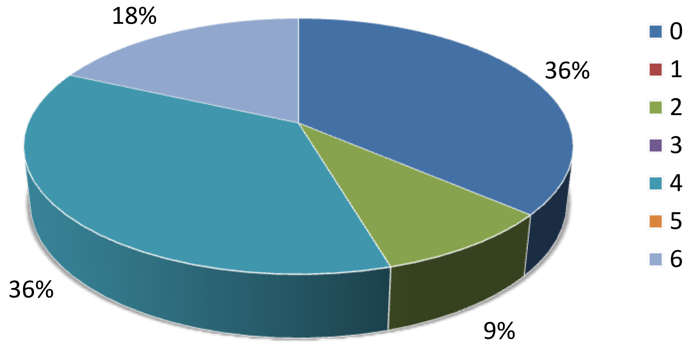


Figura 81. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 2 en la fase final nivel medio 2009

Para la solución de este problema el estudiante debía identificar las aristas del cubo y valerse del pensamiento espacial (Ver Solución Anexos). El 36% de los estudiantes no escribieron algo, lo cual pudo deberse a que no comprendieron el problema o no identificaron cuales son las aristas del cubo.

El 9% de los estudiantes formularon una posible solución, el 36 % resolvieron el problema pero no concluyeron, el 18% es decir, 4 estudiantes lo respondieron bien.

- Problema de Teoría de Números:

3. Si n es un número entero impar no divisible entre cinco, ¿Cuál es el último dígito de n^{100}?.

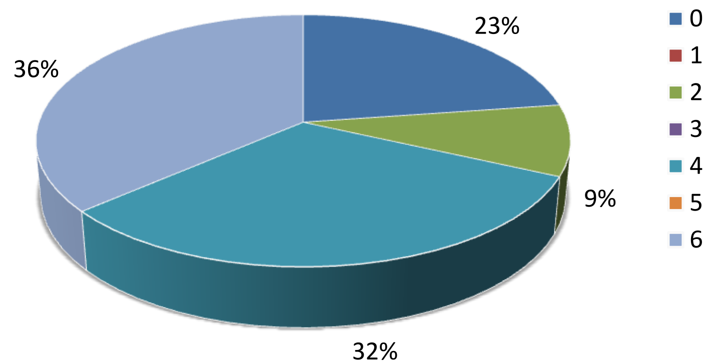
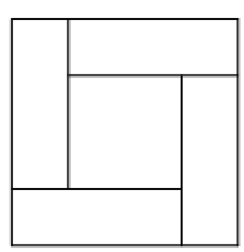


Figura 82. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron misma puntuación en el ítem 3 en la fase final nivel medio 2009

En este ítem el estudiante debía saber que es un número impar y además conocer los criterios de divisibilidad, en particular el criterio para el 5 (Ver Solución Anexos). El 23% de los estudiantes no escribieron algo, el 9% escribieron una expresión, el 32% lo resolvieron pero no concluyeron, el 36%, es decir 8 estudiantes lo respondieron bien. La dificultad se pudo deber a que el estudiante no dedujo un proceso adecuado para llegar a la solución.

- Problema de Geometría:

4. El cuadrado $ABCD$ cuya área es $180cm^2$, se divide en 4 rectángulos congruentes y un cuadrado. Cada rectángulo y el cuadradito tienen la misma área. ¿Cuanto miden los lados de los rectángulos?



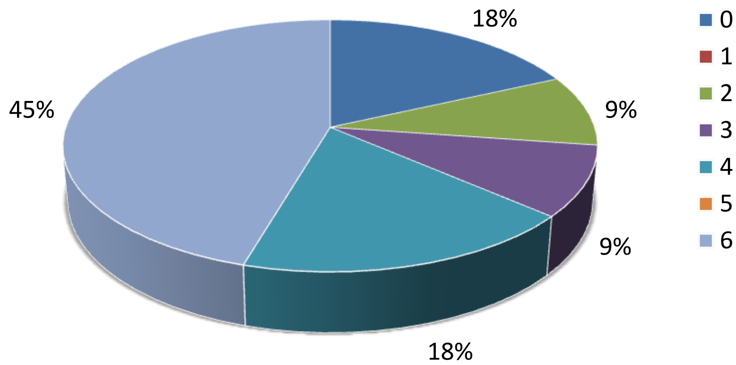


Figura 83. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 4 en la fase final nivel medio 2009

Para resolver este ítem el estudiante debía manejar los conceptos de área y congruencia, además debía plantear una ecuación y resolverla (Ver Solución Anexos). El 18% de estudiantes no escribieron algo, el 9% formularon y despejaron alguna expresión, otro 9% desarrollaron pero cometieron algún error algebraico, el 18% de los estudiantes resolvieron el problema pero no concluyeron, el 45% resolvieron el ítem completamente bien. La dificultad de este problema fue posiblemente a que se debía interpretar la figura para plantear la ecuación y resolverla.

- Problema de Álgebra:

5. Cuatro amigos deciden hacer una recolecta para una obra benéfica. El segundo da dos veces de lo que da el primero, el tercero da tres veces lo que da el segundo y el cuarto da cuatro veces lo que da el tercero. Si reunieron $26,400, ¿cuánto dio el primero?.

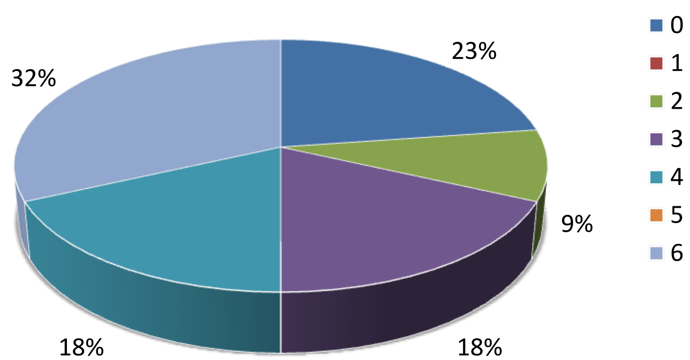


Figura 84. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 5 en la fase final nivel medio 2009

El estudiante para resolver este problema debía interpretar el enunciado y escribirlo en lenguaje algebraico de lo cual resultaba una ecuación con una sola incógnita que debía resolver (Ver Solución Anexos). El 23% de los estudiantes no escribieron algo, el 9% formularon, el 18% desarrollaron pero cometieron algún error algebraico, el 18% resolvieron pero no concluyeron, el 32% lo contestaron bien.

- Problema de Álgebra:

6. Supongamos que $2001 = (n-2)^n(n+1)^{n-1} + 1$,
¿Cuál es el valor de n, si n es un número entero?

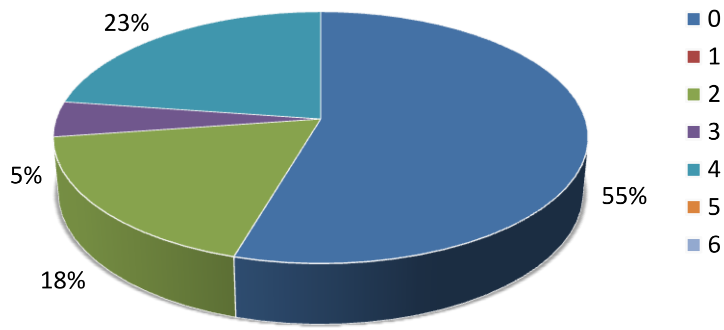


Figura 85. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 6 en la fase final nivel medio 2009

Para resolver este ítem el estudiante debía realizar operaciones algebraicas (Ver Solución Anexos). El 55% de los estudiantes no escribieron algo, el 18% formularon, el 5% desarrollaron pero cometieron algún error, el 23% resolvieron pero no concluyeron, como observamos en la Figura xx , este ítem ningún estudiante lo contesto bien.

Nivel Avanzado 2009

En este nivel se presentaron 19 estudiantes.

A continuación en la Tabla 51, se muestra los ítem de este nivel y el número de estudiantes que de acuerdo a lo que realizaron en cada ítem.

	C1	G2	A3	TN4	G5	TN6
0	4	8	9	5	8	8
1	0	0	0	0	1	0
2	11	4	4	4	2	8
3	1	3	0	3	2	0
4	0	2	3	4	4	2
5	0	0	0	0	0	0
6	3	2	3	3	2	1

Tabla 51. Número de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en los ítems de la prueba final nivel avanzado 2009

- Problema de Combinatoria:

> **1.** Supongamos que en la esfera de un reloj se altera arbitrariamente el orden usual de los números. Demuestre que cualquiera sea la permutación obtenida, siempre habrá una terna de números ocupando posiciones consecutivas de manera que la suma de los mismos sea mayor ó igual que 20.

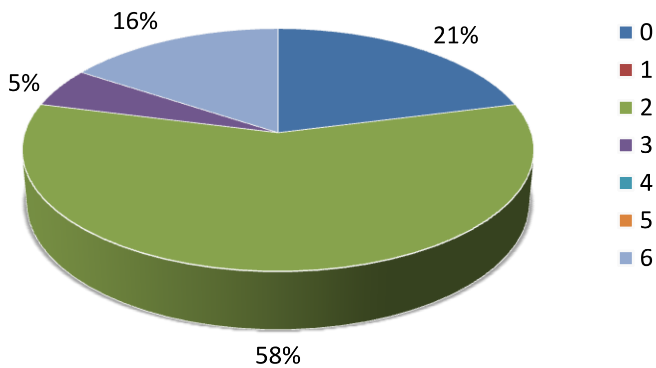
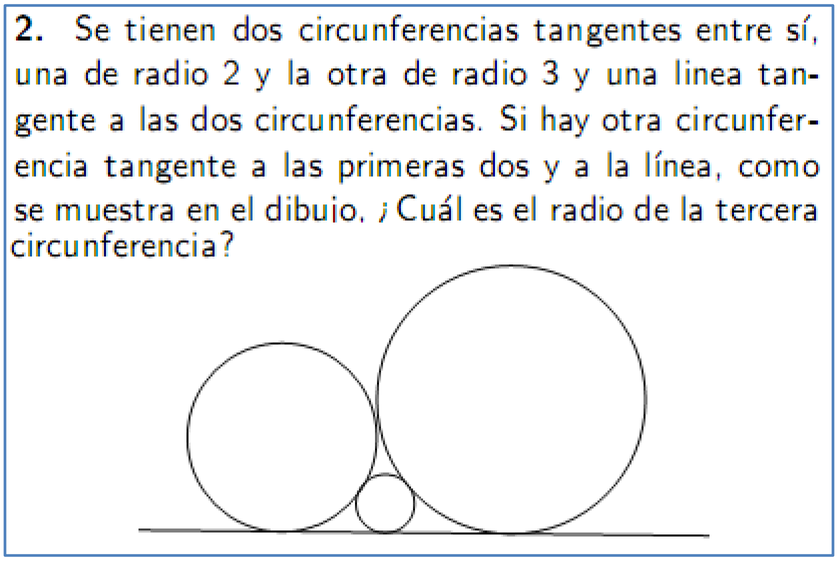


Figura 86. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 1 en la fase final nivel avanzado 2009

Para resolver este problema el estudiante debía conocer el concepto de permutación (Ver Solución Anexos). El 21% de los estudiantes no escribieron algo, el 58% formularon, el 5% desarrollaron pero cometieron algún error, el 16%, es decir 3 estudiantes contestaron bien. La dificultad se pudo deber a que no comprendieron el enunciado o no sabían cómo plantear un proceso para resolverlo.

- Problema de Geometría:



2. Se tienen dos circunferencias tangentes entre sí, una de radio 2 y la otra de radio 3 y una linea tangente a las dos circunferencias. Si hay otra circunferencia tangente a las primeras dos y a la línea, como se muestra en el dibujo. ¿Cuál es el radio de la tercera circunferencia?

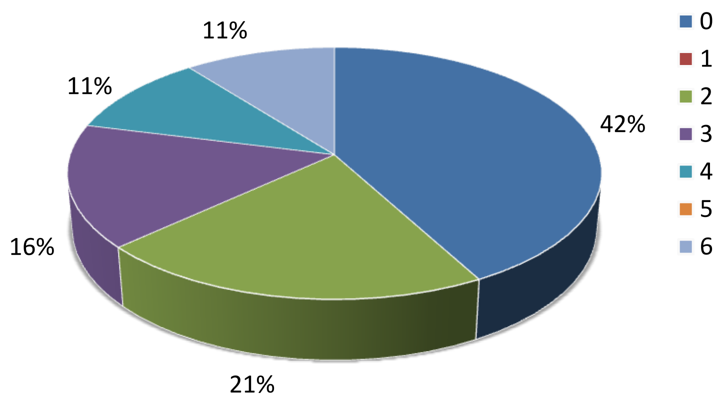


Figura 87. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 2 en la fase final nivel avanzado 2009

El estudiante para solucionar este problema debía manejar los conceptos de tangencia, radio y Teorema de Pitágoras, además debía saber identificar rectas paralelas y perpendiculares (Ver Solución Anexos). La dificultad pudo deberse a que se debía realizar una interpretación grafica antes de plantear alguna ecuación. El 42% de los estudiantes no escribieron algo, el 21% formularon y despejaron, el 16% desarrollaron pero cometieron un error, el 11% resolvieron pero no concluyeron y otro 11% lo resolvieron bien.

- Problema de Álgebra:

3. Calcula la suma de todas las fracciones $\frac{a}{b}$ tales que a y b son enteros positivos menores o iguales a 1000, y a es menor o igual a b.

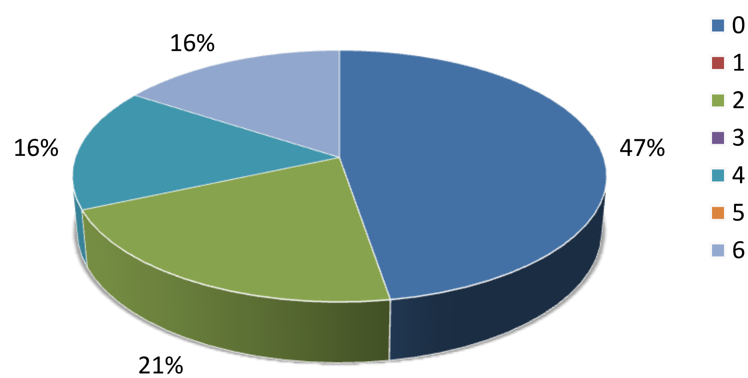


Figura 88. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 3 en la fase final nivel avanzado 2009

Para resolver este ítem era necesario manejar el concepto de fracción y suma de fraccionarios (Ver Solución Anexos). El 47% de los estudiantes no escribieron algo, el 21% de los estudiantes formularon y despejaron, el 16% resolvieron el problema pero no concluyeron, otro 16% contestaron bien.

- Problema de Teoría de Números:

> **4.** Un batallón de n soldados es tal que:
>
> a) n es un número capicúa.
>
> b) Si los soldados se forman de tres en tres, quedan dos soldados en la última fila; si se forman de cuatro en cuatro, quedan tres soldados en la última fila, y si se forman de cinco en cinco quedan cinco soldados en la última fila.
>
> ¿Cuál es el menor número de soldados que hay en el batallón?

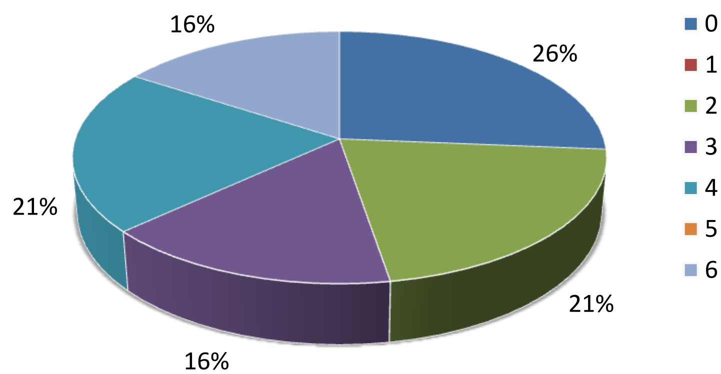


Figura 89. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 4 en la fase final nivel avanzado 2009

El estudiante para resolver este problema debía saber los criterios de divisibilidad (Ver Solución Anexos). El 26% de los estudiantes no escribieron algo, el 26% formularon y despejaron, el 16% desarrollaron pero cometieron un error, el 21% resolvieron pero no concluyeron, y el 16%, es decir 3 estudiantes contestaron bien.

- Problema de Geometría:

5. Sea P un punto interior de un hexágono regular. Se une P con cada vértice del hexágono, determinando así 6 triángulos, que coloreamos alternadamente de rojo y azul. Pruebe que la suma de las áreas de los 3 triángulos rojos coincide con la suma de las áreas de los 3 triángulos azules.

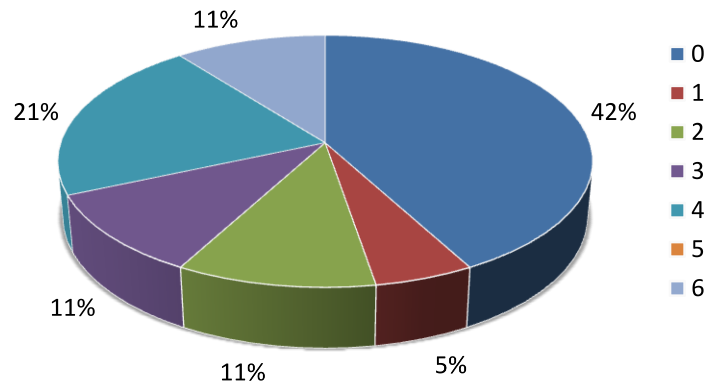


Figura 90. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 5 en la fase final nivel avanzado 2009

Para resolver este ítem, el estudiante debía realizar una interpretación gráfica del problema por lo que requería conocer el hexágono y manejar los conceptos de punto interior y vértice, además debía plantear ecuaciones y resolverlas (Ver Solución Anexos). El 42% de los estudiantes no escribieron algo, el 5% escribieron una expresión, el 11% formularon y despejaron, otro 11% desarrollaron pero cometieron un error, el 21% resolvieron pero no concluyeron, y un 11% lo contestaron bien.

- Problema de Teoría de Números:

6. ¿Para que números enteros n se cumple que su último dígito sea el mismo que que el ultimo dígito de n^{2009}?

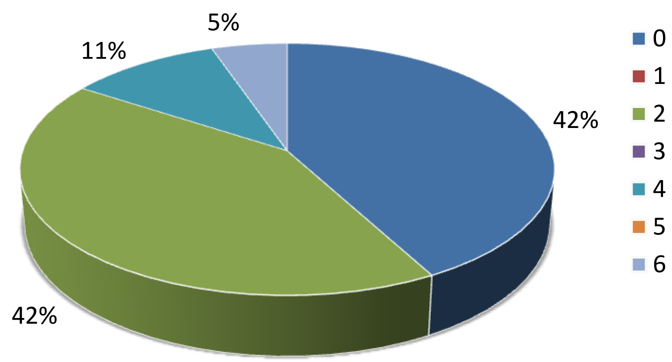


Figura 91. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 6 en la fase final avanzado 2009

Para resolver este ítem, el estudiante debíaescribir el número 2009 de la forma $4K + 1$(Ver Solución Anexos). El 42% de los estudiantes no escribieron algo, el 42% escribieron una expresión y desarrollaron, el 11% resolvieron pero no escribieron la conclusión, y el 5 % lo contestaron bien.

Nivel Básico 2010

En el nivel básico se presentaron 15 estudiantes.

A continuación en la Tabla 52, se muestra los ítems de este nivel y el número de estudiantes que de acuerdo a lo que realizaron en cada ítem.

	A1	L2	G3	C4	A5	G6
0	3	5	7	4	4	12
1	0	0	0	0	0	0
2	0	3	2	7	6	0
3	0	0	0	1	1	1
4	10	1	4	2	3	1
5	0	0	1	0	0	0
6	2	6	1	1	1	1

Tabla 52. Número de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en los ítems de la prueba final nivel básico 2010

A continuación se presenta el análisis y descripción de los problemas tipo ensayo de la prueba final para el nivel básico:

- Problema de Álgebra:

1. En la siguiente multiplicación a, b y c son dígitos

$$\begin{array}{ccccc}
 & & 1 & a & b & \times \\
 & & & b & 3 & \\
\hline
 & & * & * & * & \\
 & * & * & * & & \\
\hline
1 & c & c & 0 & 1 &
\end{array}$$

Calcule $a + b + c$.

La Figura 92 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem uno:

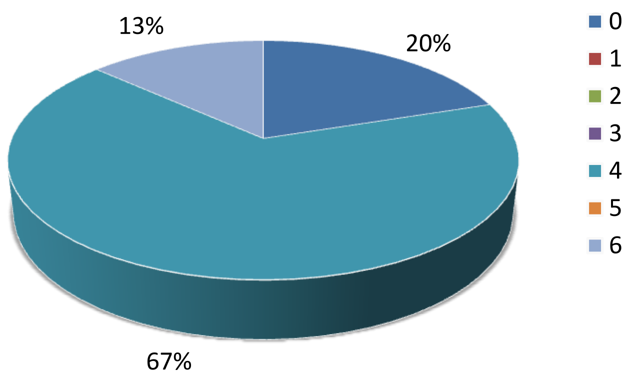
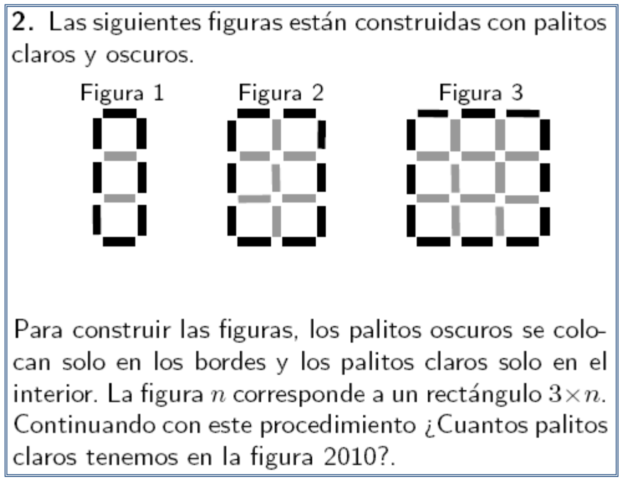


Figura 92. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 1 en la fase final nivel básico 2010

En la Figura 98 se observa que el 20% de los estudiantes no escribió nada en la hoja de respuestas, el 67% resolvió el problema pero no escribió la conclusión y el 13% resolvió y concluyó el ítem. Para la solución de este problema se requería tener en cuenta los múltiplos de los números que aparecen en la expresión (Ver Solución Anexos). Los estudiantes posiblemente empezaron a resolver este ítem al ensayo y error sin tener en cuenta las condiciones dadas por los números que aparecían en la multiplicación.

- Problema de Razonamiento Lógico:



2. Las siguientes figuras están construidas con palitos claros y oscuros.

Para construir las figuras, los palitos oscuros se colocan solo en los bordes y los palitos claros solo en el interior. La figura n corresponde a un rectángulo $3 \times n$. Continuando con este procedimiento ¿Cuantos palitos claros tenemos en la figura 2010?.

La Figura 93 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem dos:

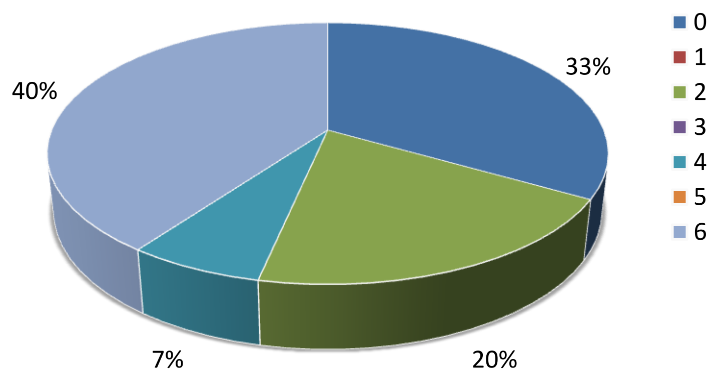
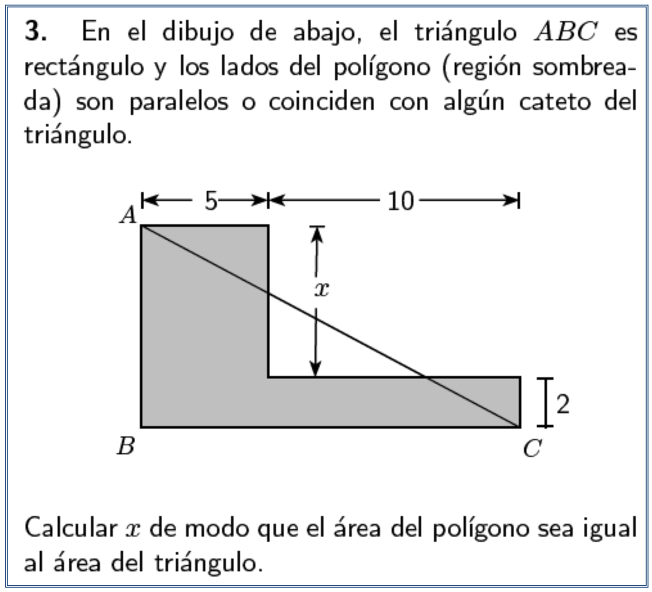


Figura 93. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 2 en la fase final nivel básico 2010

En la Figura 93 se observa que en el ítem dos el 33% de estudiantes no escribió nada en la hoja de respuestas, el 20% escribió una expresión e hizo algún procedimiento con esta, el 7% resolvió el problema pero no concluyó y el 40% resolvió el problema y concluyó. Para la solución de este ítem se requería encontrar la secuencia entre una figura y otra (Ver Solución Anexos). La dificultad que se pudo presentar es que los alumnos no encontraron la secuencia entre una figura y otra por lo que encontrar el número de palitos blancos en la figura 2010 les parecería un proceso largo.

- Problema de Geometría:


3. En el dibujo de abajo, el triángulo ABC es rectángulo y los lados del polígono (región sombreada) son paralelos o coinciden con algún cateto del triángulo.

Calcular x de modo que el área del polígono sea igual al área del triángulo.

La Figura 94 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem tres:

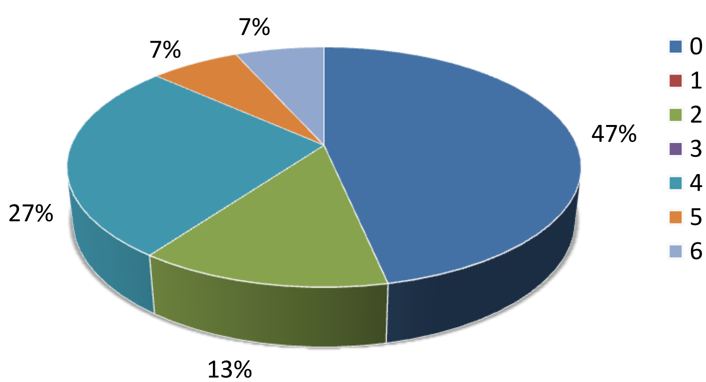


Figura 94. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 3 en la fase final nivel básico 2010

En la Figura 94 se observa que en el ítem tres el 47% de los estudiantes no escribió algo, el 13% escribió una expresión y realizo algún procedimiento con esta, el 27% resolvió el problema pero no concluyó, el 7% resolvió pero escribió una conclusión incompleta y el 7% lo resolvió y concluyó. Para la solución de este ítem se requería conocer la expresión para hallar el área del triángulo y de un polígono (Ver Solución Anexos). La dificultad se pudo presentar debido a que el polígono lo tenían que dividir en dos rectángulos para poder hallar el área.

- Problema de Combinatoria:

> **4.** En el juego *capturando - bolitas*, las bolitas verdes valen 5 puntos cada una, las azules valen 10 puntos, las amarillas valen 15, las rojas 20 y una bolita negra vale 50 puntos. Existen 5 bolitas verdes, 5 azules, 10 amarillas, 10 rojas y 1 negra. Carlitos consigue hacer 40 puntos en una jugada. Teniendo en cuenta solamente la cantidad de bolitas y sus colores. ¿De cuantas maneras diferentes podría haber conseguido Carlitos esa puntuación, suponiendo que en cada caso fue posible capturar las bolitas necesarias?

La Figura 95 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem cuatro:

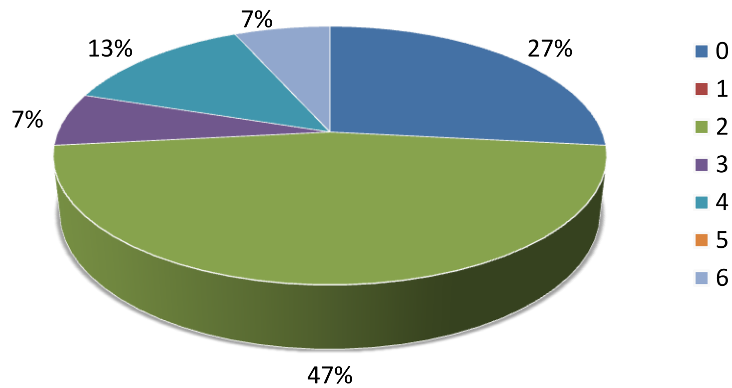


Figura 95. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 4 en la fase final nivel básico 2010

En la Figura 95 se observa que en el ítem cuatro el 27% de los estudiantes no escribió algo, el 47% escribió una expresión y realizo algunos procedimientos, el 7% desarrolló la expresión pero cometió algún error en el procedimiento, el 13% resolvió el problema pero no concluyó y el 7% lo resolvió y concluyó. Para la solución de este problema se requería hacer un diagrama con todas las posibles combinaciones (Ver Solución Anexos). La dificultad de este ítem se debió a que los estudiantes hicieron una lista de las combinaciones, lo cual como se sabe da la posibilidad de que el estudiante cometa algún error al olvidar alguna combinación o al repetirla.

- Problema de Álgebra:

> **5.** La suma de los números primos a y b es 34 y la suma de los números primos a y c es 33. Determine el valor de $a+b+c$.

La Figura 96 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem cinco:

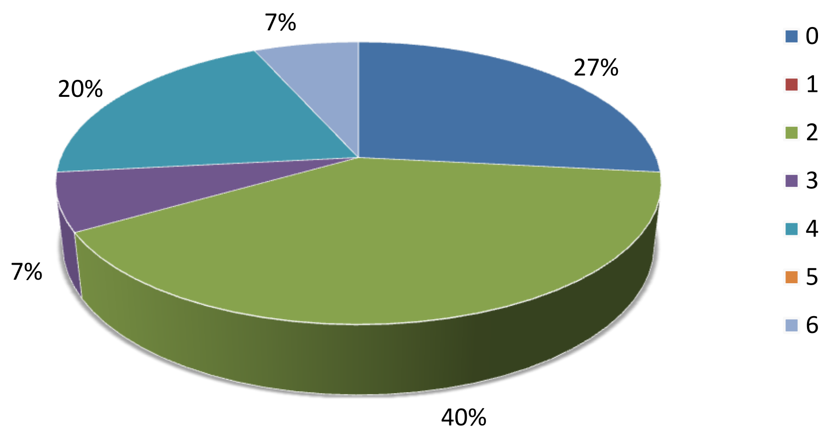
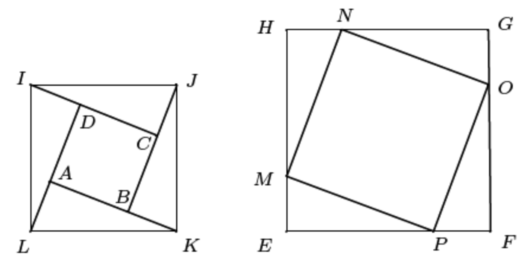


Figura 96. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 5 en la fase final nivel básico 2010

En la Figura 96 se observa que en el ítem cinco el 27% de los estudiantes no escribió algo, el 40 % de escribió una expresión y realizo algún procedimiento, el 7% hizo el procedimiento pero cometió un error, el 20% lo resolvió pero no escribió la conclusión, el 7% lo resolvió y concluyó el problema. Para la solución de este ítem se requería plantear dos ecuaciones y la definición de número primo (Ver Solución Anexos). La dificultad que se pudo presentar pudo ser al momento de escribir las ecuaciones con la información que da el enunciado o errores en el despeje.

- Problema de Geometría:

6. Cuatro triángulos iguales se organizan de dos formas diferentes, como se muestra en las figuras



El lado del cuadrado $EFGH$ mide 9 cm y el área del cuadrado $IJKL$ es 45 cm^2. Determine la medida del lado del cuadrado $ABCD$.

La Figura 97 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem seis:

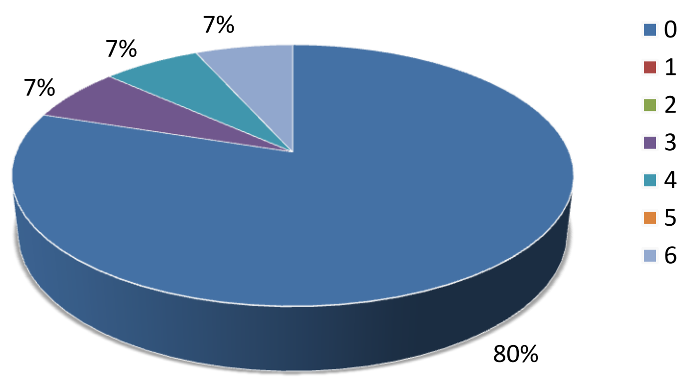


Figura 97. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 6 en la fase final nivel básico 2010

En la Figura 97 se observa que en el ítem seis el 80% de los estudiantes no escribió algo, el 7% hizo un procedimiento pero cometió errores, el 7% resolvió el problema pero no concluyó y el 7% resolvió y concluyó. Para la solución de este ítem se requería hallar el área de los triángulos y del cuadrado $ABCD$ (Ver Solución Anexos). La dificultad de este problema se pudo deber a que los estudiantes no tuvieron en cuenta que el cuadrado$MNOP$ y el cuadrado$IJKL$esigual.

Nivel Medio2009

En el nivel medio se presentaron 19 estudiantes.

A continuación en la Tabla 53, se muestra los ítems de este nivel y el número de estudiantes que de acuerdo a lo que realizaron en cada ítem.

	TN1	G2	TN3	A4	G5	A6
0	6	10	13	0	9	12
1	0	0	1	0	0	1
2	1	1	1	0	2	1
3	1	0	0	0	0	0
4	0	2	1	0	1	2
5	2	0	0	0	1	0
6	9	6	3	0	6	3

Tabla 53. Número de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en los ítems de la prueba final nivel medio 2010

A continuación se presenta el análisis y descripción de los problemas tipo ensayo de la prueba final para el nivel medio:

- Problema de Teoría de Números:

1. El primer número de una secuencia es 4. El próximo se obtiene de la siguiente manera: Calculamos el cuadrado del número anterior $4^2 = 16$ y en seguida calculamos la suma de sus dígitos y adicionamos 4, es decir el segundo número de la secuencia es $1 + 6 + 4 = 11$. repetimos este proceso, obteniendo $11^2 = 121$ y así el tercer número de la secuencia es $1 + 2 + 1 + 4 = 8$ y así sucesivamente. ¿Cuál es el elemento 2010 de esta secuencia?

La Figura 98 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem uno:

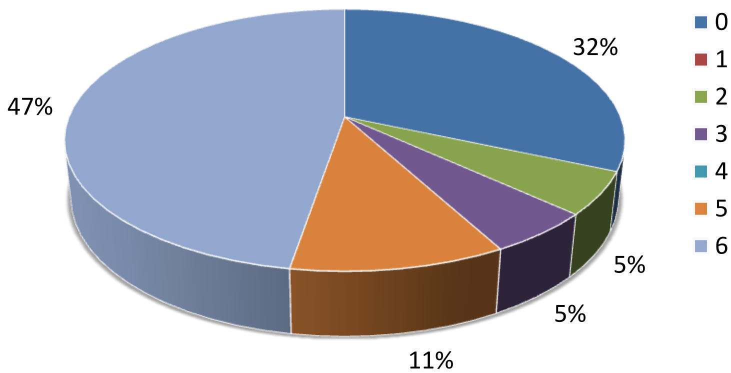
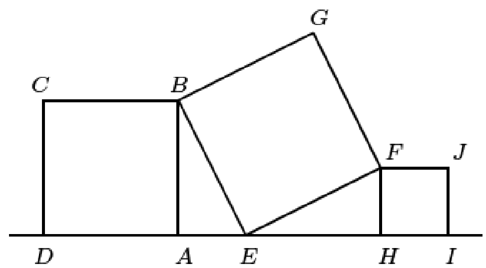


Figura 98. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 1 en la fase final nivel medio 2010

En la Figura 98 se observa que en el ítem uno el 32% de los estudiantes no escribió algo, el 5% escribió una expresión y realizo un despeje, el 5% realizó algunos procedimientos pero cometió errores, el 11% resolvió el problema pero escribió la conclusión incompleta y el 47% lo resolvió y escribió la conclusión completa. Para la solución de este ítem se requería encontrar los primeros términos de la secuencia para determinar alguna si se sigue un patrón (Ver Solución Anexos). La dificultad se pudo presentar debido a que los estudiantes hallaron algunos términos de la secuencia pero no lo suficiente para descubrir que es periódica y así poder encontrar una relación entre la posición de los términos repetidos.

- Problema de Geometría:

2. En la figura el cuadrado $ABCD$ tiene área de 30 cm^2 y el cuadrado $FHIJ$ tiene área de 20 cm^2. Los vértices A, B, E, H e I de los tres cuadrados están en una misma recta. Calcule al área del cuadrado $BEFG$.



La Figura 99 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem dos:

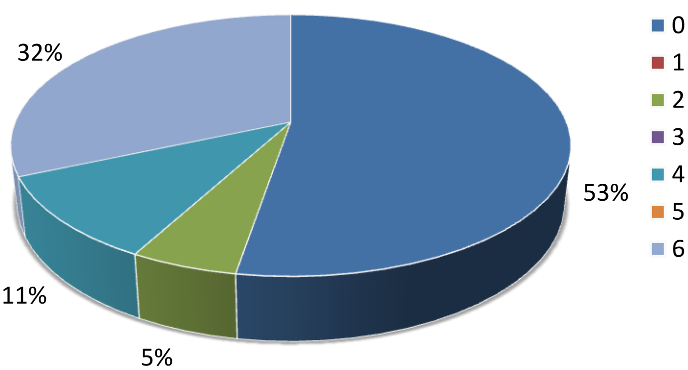


Figura 99. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 2 en la fase final nivel medio 2010

En la Figura 99 se observa que en el ítem dos el 53% de los estudiantes no escribió algo, el 5%escribió una expresión y realizo algún despeje, el 11% resolvió el problema pero no concluyó y el 32% lo resolvió y escribió la conclusión completa. Para la solución de este ítem se requería el uso del teorema de Pitágoras y el criterio de congruencia de triángulos (ALA)(Ver Solución Anexos). La dificultad que se le pudo presentar a los estudiantes fue identificar la congruencia existente entre los triángulos ABEy EHF.

- Problema de Teoría de Números:

> **3.** Decimos que un conjunto A formado por cuatro dígitos distintos no nulos es intercambiable si podemos forma dos pares de números , cada uno con 2 dígitos de A, de modo que el producto de los números de cada par sea el mismo y que, en cada par, todos los dígitos de A se utilicen. Por ejemplo, el conjunto $\{1,2,3,6\}$ es intercambiable pues $21 \cdot 36 = 12 \cdot 63$. Determine todos los conjuntos intercambiables.

La Figura 100 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem tres:

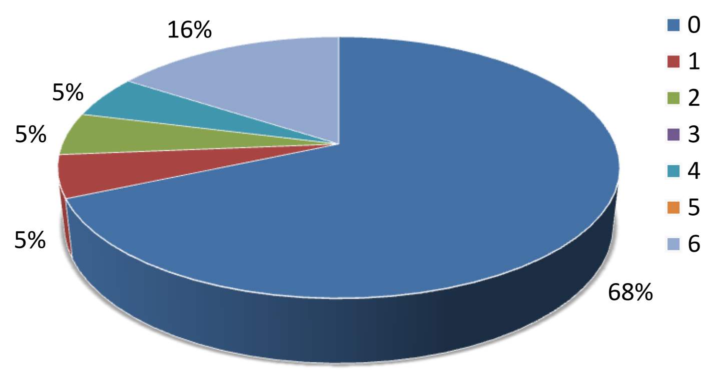
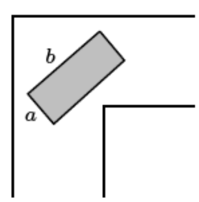


Figura 100. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 3 en la fase final nivel medio 2010

En la Figura 100 se observa que en el ítem tres el 68% de los estudiantes no escribió algo, el 5% escribió una expresión, el 5% escribió una expresión y realizó algún despeje, el 5% resolvió el problema pero no concluyó y el 16% lo resolvió y escribió la conclusión, lo anterior refleja el grado de dificultad del problema pues más de la mitad de las personas no respondió el ítem. Para la solución del problema se requería el planteamiento de una expresión general que cumpla con la igualdad del enunciado y permita establecer características de estos conjuntos intercambiables (Ver Solución Anexos). La dificultad pudo deberse a que los estudiantes empezaron a formar diferentes conjuntos con cuatro dígitos para probar si son intercambiables y muy seguramente la lista de conjuntos es un poco extensa, lo cual posiblemente hizo que los estudiantes no respondieran el ítem.

- Problema de Geometría:

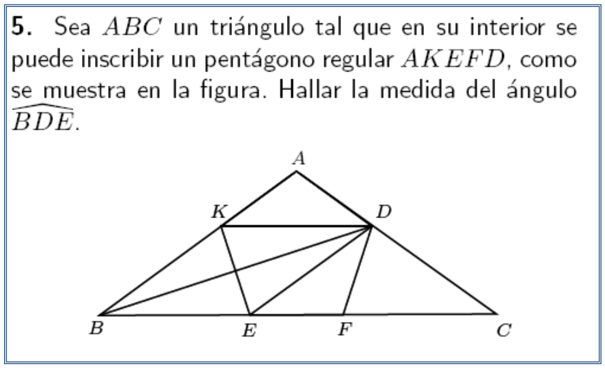
4. Una mesa rectangular, cuyas patas tienen ruedas, debe ser empujada por un pasillo de ancho constante, que forma un ángulo recto.



Si las dimensiones de la mesa son a y b (con $2a < b$), cual debe ser el ancho mínimo del pasillo para que la mesa pueda ser empujada a través de él.

En la Tabla 53 se observa que este ítem no lo respondió ningún estudiante, lo cual muestra su alto grado de dificultad. Para la solución de este problema se requería usar el teorema de Pitágoras (Ver Solución Anexos). La dificultad pudo deberse a una mala interpretación del dibujo o a que asumieron longitudes de triángulos que se formaban sin demostrar que efectivamente esa era la medida de los lados.

- Problema de Geometría:



5. Sea ABC un triángulo tal que en su interior se puede inscribir un pentágono regular $AKEFD$, como se muestra en la figura. Hallar la medida del ángulo $\widehat{BDE}$.

La Figura 101 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem cinco:

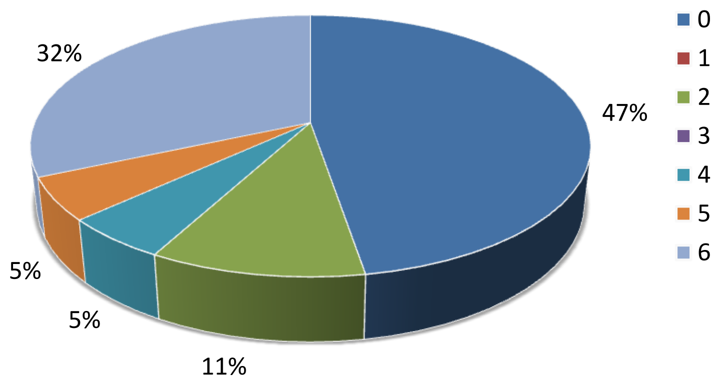


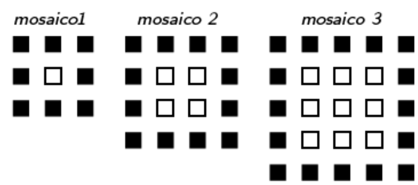
Figura 101. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 5 en la fase final nivel medio 2010

La Figura 101 muestra que en el ítem cinco el 47% de los estudiantes no escribió algo o le quedo incorrecto el proceso, el 11% escribió una expresión y realizó algún despeja, el 5% resolvió el problema pero no escribió la conclusión, el 5% lo resolvió pero escribió la conclusión incompleta y el 32% lo respondió correctamente. Para la solución de este ítem se requería el teorema de la suma de los ángulos internos de un triángulo, la definición de bisectriz y las características de un triángulo isósceles (Ver Solución

Anexos). La dificultad se pudo presentar ya que hay triángulos solapados, lo cual no les permitió identificar los ángulos de los triángulos.

- Problema de Álgebra:

6. Con Azulejos cuadrados blancos y negros del mismo tamaño, construimos los siguientes mosaicos:



la regla para construir estos mosaicos es la siguiente: inicialmente formamos un cuadrado con 1 azulejo blanco cercado por azulejos negro; y en seguida, otro cuadrado, éste con 4 azulejos blancos, también cercados por azulejos negros; y así sucesivamente. Con 80 azulejos negros, ¿Cuantos azulejos blancos serán necesarios para hacer una secuencia de mosaicos como ésta?

La Figura 102 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem seis:

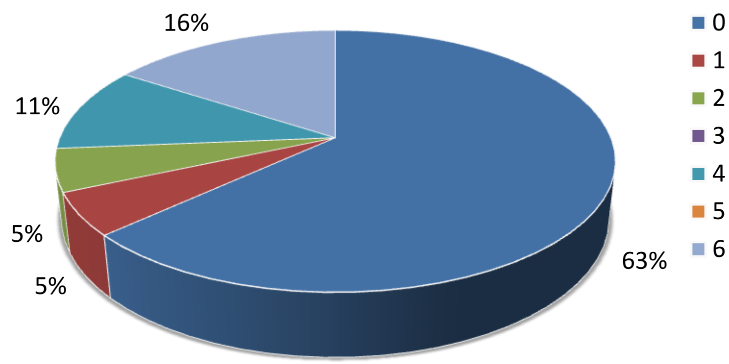


Figura 102. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 6 en la fase final nivel medio 2010

En la Figura 102 se observa que en el ítem seis el 63% de los estudiantes no respondió nada o lo hizo de manera incorrecta, el 5% escribió una expresión, el 5% escribió una expresión y realizó algún procedimiento, el 11% resolvió el ítem pero no concluyó y el 16% lo resolvió correctamente, lo anterior refleja un grado alto de dificultad de este ítem ya que más de la mitad de los estudiantes no respondió nada o lo hizo con un razonamiento incorrecto. Para la solución de este problema se requería que definir la sucesión de los mosaicos (Ver Solución Anexos). La dificultad se pudo deber a que no determinaron los términos de la sucesión con una expresión general, luego si construían la sucesión manualmente sería un trabajo extenuante que prefirieron no hacer.

Nivel Avanzado2010

En el nivel avanzado se presentaron 13 estudiantes.

A continuación en la Tabla 54, se muestra los ítems de este nivel y el número de estudiantes que de acuerdo a lo que realizaron en cada ítem.

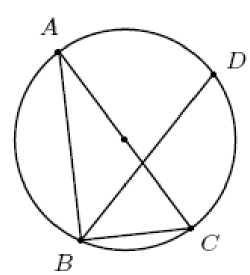
	G1	TN2	A3	G4	A5	C6
0	7	2	4	6	6	3
1	1	1	0	0	3	0
2	2	3	4	2	3	3
3	1	0	0	0	1	2
4	0	2	1	0	0	2
5	0	0	0	1	0	1
6	2	5	4	4	0	2

Tabla 54. Número de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en los ítems de la prueba final nivel avanzado 2010

A continuación se presenta el análisis y descripción de los problemas tipo ensayo de la prueba final para el nivel avanzado:

- Problema de Geometría:

1. En la circunferencia que se muestra en la figura, tenemos que: $AB = 4$, $BC = 2$, $\overline{AC}$ es el diámetro y los ángulos $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$ son congruentes. Determine la medida del segmento $\overline{BD}$.



La Figura 103 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem uno:

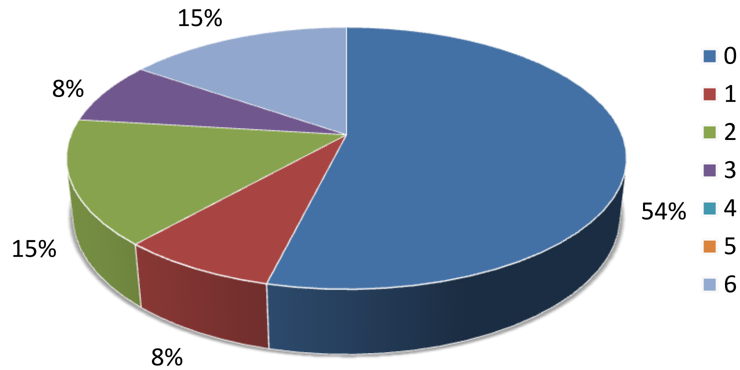


Figura 103. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 1 en la fase final nivel avanzado 2010

En la Figura 103 se observa que en el ítem uno el 54% de los estudiantes respondió el ítem incorrectamente o no escribió nada, el 8% escribió una expresión, el 15% escribió una expresión y realizó algún procedimiento, el 8% realizó procedimientos pero cometió errores y el 15 % resolvió el ítem y lo concluyó. Para la solución de este problema se requería el teorema de Pitágoras, teorema del coseno y el planteamiento de ecuaciones (Ver Solución Anexos). La dificultad de este problema se pudo deber a que no tenían la longitud del diámetro o radio del círculo.

- Problema de Teoría de Números:

> **2.** Dados los números enteros de 1 a 26, elegir 13 de ellos de modo que:
>
> a) El número 4 sea uno de los números elegidos.
>
> b) Ningún número elegido sea divisor de otro número elegido.

La Figura 104 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem dos:

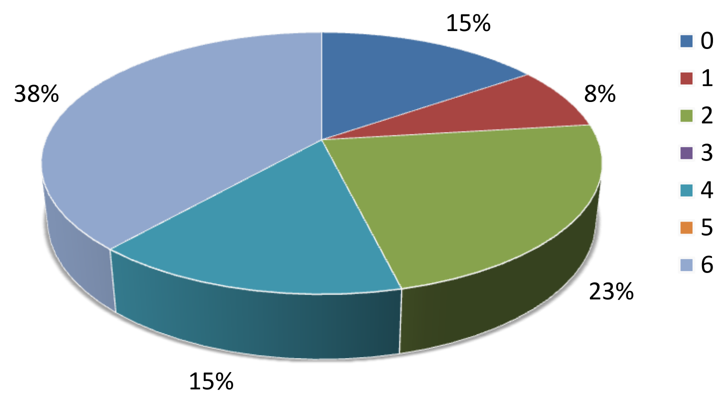


Figura 104. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 2 en la fase final nivel avanzado 2010

La Figura 104 muestra que en el ítem dos el 15% de los estudiantes respondió este ítem, el 8% escribió un expresión, el 23% escribió una expresión y realizó algún procedimiento, el 15% resolvió el problema pero no concluyó y el 38% lo resolvió correctamente, lo anterior evidencia que la mayoría de los estudiantes resolvieron el problema. Para la solución de este ítem se requería considerar los casos bajo los cuales se cumplan las condiciones dadas en el enunciado (Ver Solución Anexos). La dificultad se pudo presentar porque al considerar las posibles opciones incluyeron un número que no era o se les olvidó un número que cumplía con las condiciones.

- Problema de Álgebra:

3. Sean x y y números reales positivos tales que $x + y = 1$. Probar que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$$

La Figura 105 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem tres:

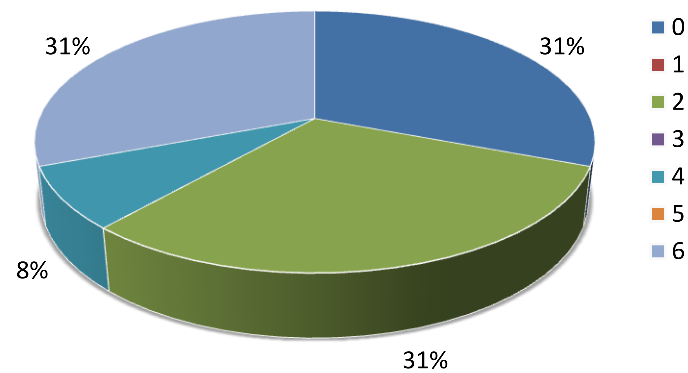
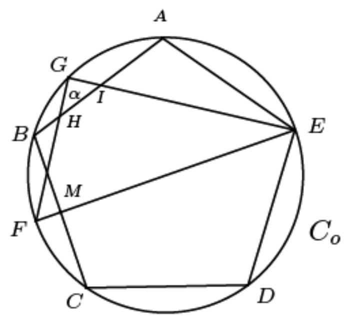


Figura 105. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 3 en la fase final nivel avanzado 2010

En la Figura 105 se observa que en el ítem 3 el 31% de los estudiantes no respondieron algo o hicieron un análisis incorrecto, el 31% de escribió una expresión y realizó algún procedimiento, el 8% resolvió el ítem pero no lo concluyó y el 31% lo respondió correctamente. Para la solución de este problema se requería resolver la inecuación (Ver Solución Anexos). La dificultad se pudo presentar porque el estudiante cometió errores en el despeje o en los cálculos.

- Problema de Geometría:

4. En la siguiente figura, el pentágono regular $ABCDE$ y el triángulo EFG están inscritos en la circunferencia C_o y M es el punto medio del segmento $\overline{BC}$. ¿Cuál es el valor de α (ángulo $\widehat{GHI}$), en grados, para el cual los triángulos EFG y HIG son semejantes?



La Figura 106 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem cuatro:

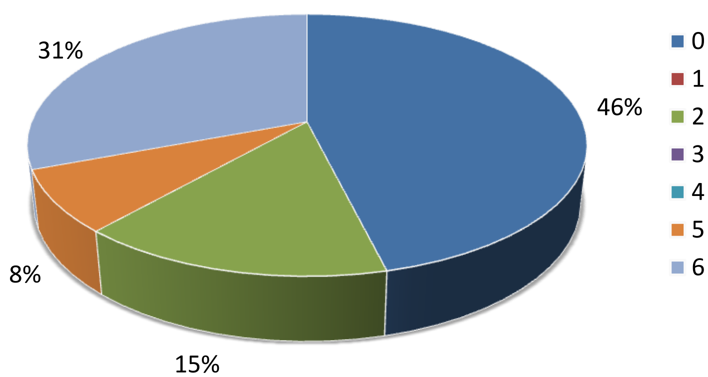


Figura 106. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 4 en la fase final nivel avanzado 2010

En la Figura 106 se observa que en el ítem cuatro el 46% de los estudiantes no escribió algo o hizo un análisis incorrecto de la situación, el 15% escribió una expresión y realizó algún procedimiento, el 8% resolvió pero escribió la conclusión incompleta y el 31% lo contesto correctamente. Para la solución de este problema se requería características de un pentágono regular, definición de un polígono inscrito en un círculo y semejanza de triángulos (Ver Solución Anexos). La dificultad se pudo deber a que los estudiantes no plantearon diferentes expresiones que involucraran a α y posiblemente asumiendo información que no da el problema pero que ellos toman como verdad simplemente por dar una impresión visual.

- Problema de Teoría de Números:

5. Los número naturales a y b son tales que

$$\frac{a+1}{b}+\frac{b+1}{a}$$

es un entero. Demuestre que el máximo común divisor de a y b es menor o igual que $\sqrt{a+b}$.

La Figura 107 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem cinco:

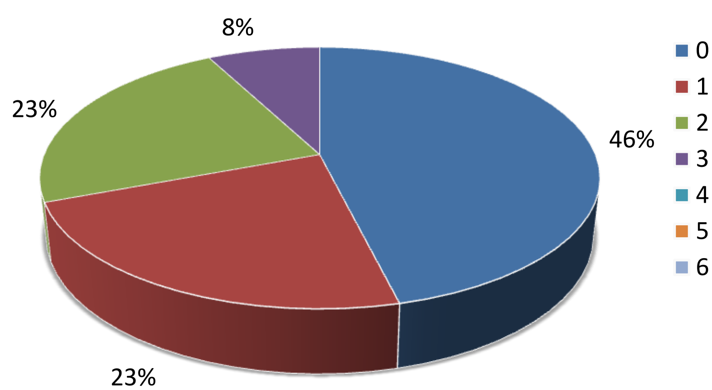


Figura 107. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 5 en la fase final nivel avanzado 2010

La Figura 107 muestra que en el ítem cinco el 46% de los estudiantes no respondió o hizo un análisis incorrecto, el 23% escribió una expresión, el 23% escribió una expresión y realizó algún procedimiento y el 8% realizó el procedimiento completo pero cometió errores, lo anterior muestra la gran dificultad de este ítem ya que ningún estudiante resolvió el problema completamente. Para la solución de este ítem se requería el uso del máximo común divisor (Ver Solución Anexos). La dificultad de este problema pudo estar en la palabra demostrar, ya que los estudiantes no están acostumbrados a este tipo de actividades.

- Problema de Combinatoria:

6. Se quiere colocar los naturales del 1 al 9 en las casillas de una tabla 3×3 (uno en cada casilla), de manera que la suma en cada columna y en cada fila de la tabla sea impar. ¿De cuantas formas se puede hacer esto?

La Figura 108 representa el porcentaje del número de estudiantes que obtuvieron determinada calificación en la escala de 0 a 6 en el ítem seis:

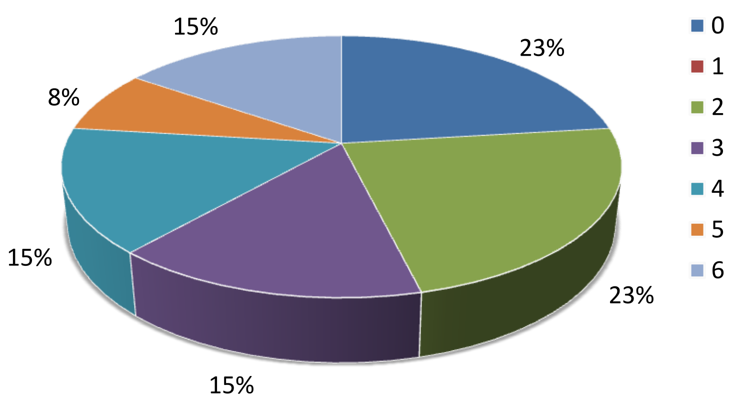


Figura 108. Porcentaje de estudiantes que obtuvieron la misma puntuación en el ítem 6 en la fase final nivel avanzado 2010

La Figura 108 muestra que en el ítem seis el 23% de los estudiantes no respondieron el problema, el 23% escribió una expresión y realizó algunos procedimientos, el 15% realizó procedimiento completo pero cometió errores, el 15% resolvió el ítem pero no concluyó, el 8% resolvió el ítem pero escribió la conclusión incompleta y el 15% lo respondió correctamente. Para la solución de este ítem se requería el uso de factorial para encontrar el número de formas en que se pueden ubicar los números pares e impares. La dificultad que se pudo presentar es muy seguramente algunos estudiantes realizaron el esquema y empezaron a ubicar los números en las filas y columnas, lo cual evidentemente los lleva a omitir muchas formas en que se puede hacerla ubicación de estos números.

4.2 Análisis mediante el modelo Rasch para la fase clasificatoria junto con la selectiva y la final de los años 2009 y 2010

En esta sección se implementará el modelo Rasch para analizar los resultados de la fase clasificatoria, selectiva y finalcon lo cual se tiene un total de 27 ítems, esto se analizará por medio del software WINSTEP en el cual se obtendrán los estadísticos OUTFIT e INFIT para analizar el ajuste de los datos al modelo y los estadísticos separabilidad y confiablidad, los cuales nos permitirán hacer un análisis de la dificultad de los ítems y de la habilidad de los estudiantes.

A continuación en la Figura 109 se presenta los estadísticos para el nivel básico de la prueba clasificatoria, selectiva y final del año 2009:

```
Prueba Clasificatoria, Selectiva y Final Nivel Básico 2009
-------------------------------------------------------------------------------
| ESTUDIANTES      17 INPUT      17 MEASURED          INFIT         OUTFIT    |
|          SCORE      COUNT     MEASURE   ERROR     IMNSQ   ZSTD  OMNSQ   ZSTD|
| MEAN      61.1       27.0         .28     .24       .82    -.2    .99     .0|
| S.D.       8.5         .0         .42     .05       .28     .7    .29    1.0|
| REAL RMSE    .25  ADJ.SD     .34  SEPARATION  1.38  ESTUDI RELIABILITY  .66|
|-----------------------------------------------------------------------------|
| ITEMS      27 INPUT      25 MEASURED                  INFIT         OUTFIT   |
| MEAN      32.0       17.0         .00     .46      1.00     .2    .99     .2|
| S.D.      37.3         .0         .85     .19       .23    1.0    .27     .9|
| REAL RMSE    .50  ADJ.SD     .69  SEPARATION  1.37  ITEM   RELIABILITY  .65|
-------------------------------------------------------------------------------
```

Figura 109: Estadísticos generales de los ítems y los estudiantes de la prueba clasificatoria junto con la selectiva y final para el nivel básico 2009.

De la Figura 109 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: INFIT (Estudiantes: media=0.82, Desviación Estándar=0.28); (Ítems: media=1.00, Desviación Estándar=0.23); e OUTFIT(Estudiantes: media=0.99, Desviación Estándar=0.29)(Ítems: media=0.99, Desviación Estándar=0.27), además se consideró los estadísticos Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 1.38 y 0.66) e (ítems: 1.37 y 0.65). Estos resultados reflejan una buena estimación de la habilidad de los estudiantes y de la dificultad de los ítems. A diferencia de las fases anteriormente analizadas por el modelo, en este análisis en el que se toman conjuntamente las tres fases es posible estimar la habilidad de los estudiantes.

A continuación se muestra en la Figura 110 los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems en el nivel básico para las tres fases del año 2009:

Prueba Clasificatoria, Selectiva y Final Nivel Básico 2009

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
11	4	17	1.51	.58	1.12	.5	1.35	1.0	A11
12	4	17	1.51	.58	1.06	.3	1.12	.5	G12
15	5	17	1.20	.54	1.01	.1	.97	.0	A15
6	6	17	.92	.52	1.07	.5	1.08	.5	G6
10	6	17	.92	.52	1.15	.9	1.15	.8	C10
16	7	17	.66	.50	.96	-.3	.95	-.3	G16
1	8	17	.41	.50	1.14	1.3	1.15	1.4	L1
9	8	17	.41	.50	1.12	1.1	1.11	1.0	L9
24	69	17	.27	.15	.39	-2.4	.41	-2.3	G24
2	9	17	.16	.50	1.22	2.1	1.22	1.9	G2
4	9	17	.16	.50	.86	-1.4	.85	-1.4	A4
8	9	17	.16	.50	1.16	1.6	1.16	1.5	G8
23	84	17	-.06	.14	1.07	.3	.94	.0	TN23
25	81	17	-.08	.16	.77	-.7	.75	-.7	L25
14	10	17	-.09	.50	1.09	.7	1.06	.5	G14
26	97	17	-.20	.15	1.36	.9	.90	.1	TN26
27	99	17	-.23	.15	.33	-2.0	.24	-1.1	G27
20	100	17	-.28	.18	.91	.0	.77	-.1	L20
22	105	17	-.33	.20	.76	-.5	.63	-.5	A22
13	12	17	-.63	.54	1.08	.4	1.14	.6	L13
17	12	17	-.63	.54	1.07	.4	1.17	.7	L17
3	14	17	-1.31	.64	1.15	.5	1.33	.8	C3
7	14	17	-1.31	.64	.97	.1	.92	.0	A7
18	14	17	-1.31	.64	1.13	.5	1.34	.8	C18
5	15	17	-1.80	.76	.97	.1	.91	.1	C5
MEAN	32.0	17.0	.00	.45	1.00	.2	.99	.2	
S.D.	37.3	.0	.85	.19	.23	1.0	.27	.9	

Figura 110. Estadísticos descriptivos de los ítems de la prueba clasificatoria junto con la selectivay final para el nivel básico 2009.

Los ítems tienen una medida que va desde -1.80 lógitos a 1.51 lógitos en su dificultad. Se observan 12 ítems por encimay 13 ítems por debajo de la dificultad media de los ítems. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) fluctúa entre 0.05 para ítems de menor dificultad y 0.29para ítems de mayor dificultad. Es de notar que el error estándar de los estimados varía a medida que aumenta la dificultad de los ítems. Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste al igual que los estandarizados ZSTD INFIT y ZSTD OUTFIT. En este nivel todos los ítems se comportan dentro de la expectativa del modelo.

A continuación en la Figura 111 se presenta los estadísticos para el nivel básico de la prueba clasificatoria, selectiva y final del año 2010:

Prueba Clasificatoria, Selectiva y Final Nivel Básico 2010

ESTUDIANTES	15 INPUT	15 MEASURED		INFIT		OUTFIT	
	SCORE	COUNT	MEASURE	ERROR	IMNSQ	ZSTD	OMNSQ	ZSTD
MEAN	50.9	27.0	.03	.22	.89	-.2	.98	-.1
S.D.	11.4	.0	.47	.04	.38	.8	.33	.9
REAL RMSE	.22	ADJ.SD	.42	SEPARATION	1.88	ESTUDI	RELIABILITY	.78
ITEMS	27 INPUT	25 MEASURED			INFIT		OUTFIT	
MEAN	26.4	15.0	.00	.47	1.00	.2	.98	.2
S.D.	28.9	.0	.80	.23	.17	.7	.25	.7
REAL RMSE	.52	ADJ.SD	.61	SEPARATION	1.17	ITEM	RELIABILITY	.58

Figura 111: Estadísticos generales de los ítems y los estudiantes de la prueba clasificatoria junto con la selectiva y final para el nivel básico 2010.

De la Figura 111 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: OUFIT (Estudiantes: media=0.98, Desviación Estándar=0.33); (Ítems: media=0.98, Desviación Estándar=0.25); e INFIT (Estudiantes: media=0.89, Desviación Estándar=0.38) (Ítems: media=1.00, Desviación Estándar=0.17), en cuanto a la Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 1.88 y 0.78) e (ítems: 1.17 y 0.58). Los estadísticos mencionados anteriormente muestran el ajuste de los ítems y de la habilidad de los estudiantes al modelo.

La Figura 112 presenta los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems para el nivel básico del año 2010.

Prueba Clasificatoria, Selectiva y Final Nivel Básico 2010

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
13	1	15	2.77	1.04	1.02	.3	.92	.3	A13
5	4	15	1.09	.60	.83	-.5	.81	-.5	TN5
7	4	15	1.09	.60	1.21	.8	1.26	.9	G7
3	5	15	.76	.56	1.05	.3	1.12	.6	TN3
19	39	15	.57	.19	1.05	.3	1.09	.4	L19
1	6	15	.45	.54	1.01	.1	1.04	.3	C1
11	6	15	.45	.54	.96	-.2	.96	-.2	TN11
16	7	15	.17	.53	1.07	.6	1.08	.6	G16
23	55	15	.08	.14	.59	-1.1	.63	-.5	P23
22	53	15	.04	.18	1.15	.5	.94	.1	P22
14	8	15	-.12	.53	.99	.0	.97	-.1	A14
25	68	15	-.12	.17	.97	.0	.94	-.1	P25
26	70	15	-.30	.18	.55	-1.5	.56	-1.4	P26
20	81	15	-.35	.13	.87	-.2	.46	.0	TN20
4	9	15	-.40	.54	1.06	.5	1.04	.3	L4
6	9	15	-.40	.54	1.11	.8	1.09	.6	A6
12	9	15	-.40	.54	1.13	.9	1.16	1.0	TN12
18	9	15	-.40	.54	.87	-.9	.84	-.9	L18
24	73	15	-.43	.15	.95	.0	.83	-.1	P24
27	92	15	-.68	.17	.77	-.4	.44	.0	P27
2	10	15	-.70	.56	1.25	1.3	1.39	1.5	G2
8	10	15	-.70	.56	1.20	1.0	1.28	1.2	A8
15	10	15	-.70	.56	1.19	1.0	1.33	1.3	G15
17	10	15	-.70	.56	.97	-.1	1.04	.3	TN17
9	11	15	-1.04	.60	1.11	.5	1.21	.7	G9
MEAN	26.4	15.0	.00	.45	1.00	.2	.98	.2	
S.D.	28.9	.0	.80	.22	.17	.7	.25	.7	

Figura 112. Estadísticos descriptivos de los ítems de la prueba clasificatoria junto con la selectivay final para el nivel básico 2010.

Los ítems tienen una medida que va desde -1.04 lógitos a 2.77 lógitos en su dificultad. Se observan 10 ítems por encima y 15 ítems por debajo de la media de la dificultad de los ítems. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) fluctúa entre 0.13 y 1.04.Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste al igual que los estandarizados ZSTD INFIT y ZSTD OUTFIT ya que ninguno se encuentra por encima de 1.3. En este nivel todos los ítems se comportan dentro de lo esperado en el modelo.

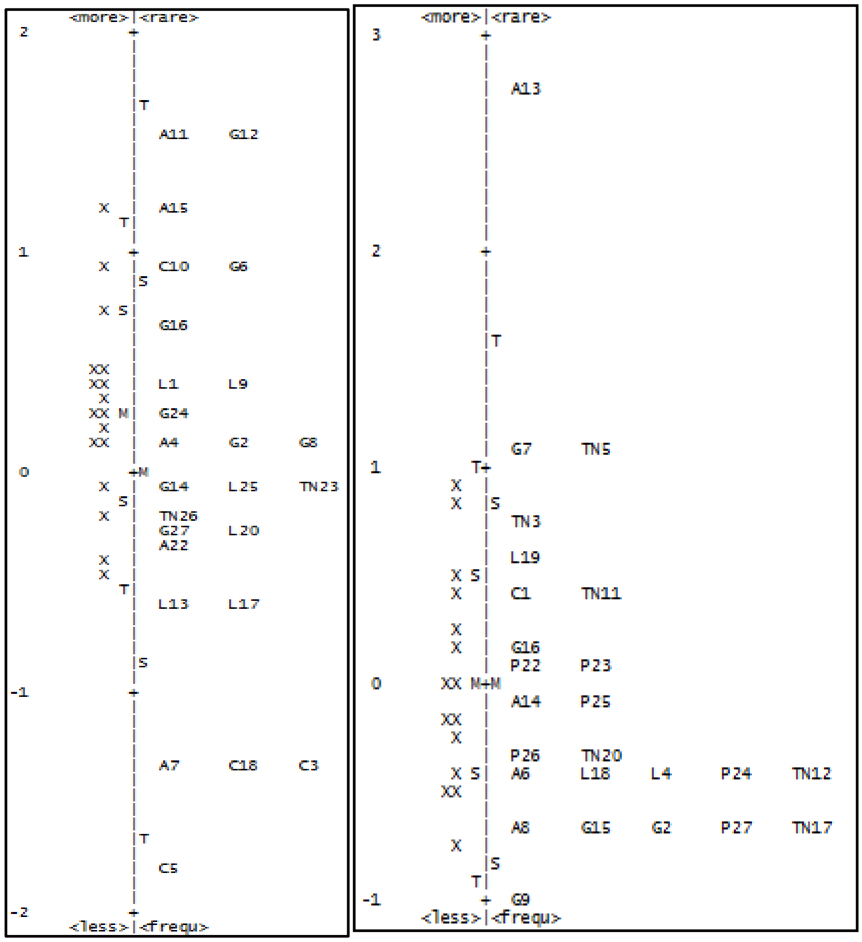


Figura 113. Mapas de ítems de la prueba clasificatoria junto con la selectiva y final para el nivel avanzado 2009 (izquierda) y 2010 (derecha).

En el año 2009 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media 0.28 y desviación estándar 0.42 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 y desviación estándar 0.85. Como se observa en la Figura 113 la media de la habilidad de los estudiantes es menor a la media de la dificultad de los ítems por lo que se infiere que la habilidad de los estudiantes es un poco mayor en comparación a la dificultad de los ítems. Los ítems A7, C18 y C3; L13 y L17; G27 y L20; G14, L25 y TN23; A4, G2 y G8; L1 y L9; C10 y G6; A11 y G12, presentaron la misma dificultad. En el año 2010 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media 0.03 y desviación estándar 0.47 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 ydesviación estándar 0.80.Se observa que la mayoría de los ítems están concentrados entre -1 y 1 lógitos, mostrando la poca dispersión de las medidas de dificultad de los ítems, además la media de la habilidad de los estudiantes y la media de la dificultad de los ítems es prácticamente la misma. Varios ítems presentaron la misma dificultad como es el caso de A8, G15, G2, P27 y TN17; A6, L18, L4, P24 y TN12; lo cual muestra cierta homogeneidad. Comparando la distribución de los ítems de los dos años se observa que en el año 2010 la distribución de la dificultad de los ítems está más concentrada mientras que la del 2009 la cual presenta una distribución en un rango mayor en este caso entre -1.8 y 2.5 aproximadamente.

En la Figura 114 se presenta los estadísticos para el nivel medio de la prueba clasificatoria, selectiva y final del año 2009:

```
Prueba Clasificatoria, Selectiva y Final Nivel Medio 2009
-------------------------------------------------------------------------------
| ESTUDIANTES      22 INPUT      22 MEASURED          INFIT          OUTFIT    |
|            SCORE      COUNT     MEASURE   ERROR      IMNSQ   ZSTD  OMNSQ   ZSTD|
| MEAN       46.8       27.0          .37     .18        .86    -.4   1.02     .1|
| S.D.       10.0         .0          .31     .03        .34    1.1    .30     .8|
| REAL RMSE     .18  ADJ.SD     .25  SEPARATION  1.34  ESTUDI RELIABILITY  .64|
|-------------------------------------------------------------------------------|
| ITEMS      27 INPUT      26 MEASURED                 INFIT          OUTFIT    |
| MEAN       38.7       22.0          .00     .42       1.00     .2   1.02     .3|
| S.D.       37.3         .0         1.16     .26        .16     .8    .21     .8|
| REAL RMSE     .50  ADJ.SD    1.05  SEPARATION  2.11  ITEM   RELIABILITY  .82|
-------------------------------------------------------------------------------
```

Figura 114 Estadísticos generales de los ítems y los estudiantes de la prueba clasificatoria junto con la selectiva y final para el nivel medio 2009.

De la Figura 144 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: INFIT (Estudiantes: media=0.86, Desviación Estándar=0.34); (Ítems: media=1.00, Desviación Estándar=0.16); e OUTFIT (Estudiantes: media=1.02, Desviación Estándar=0.30)(Ítems: media=1.02, Desviación Estándar=0.21), además se consideró los estadísticos Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 1.34 y 0.64) e (ítems: 2.11 y

0.82). Estos resultados reflejan una buena estimación de la habilidad de los estudiantes y de la dificultad de los ítems.

La Figura 115 muestra los estadísticos descriptivos para los ítems de estas fases correspondientes al nivel medio del año 2009:

Prueba Clasificatoria, Selectiva y Final Nivel Medio 2009

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
6	3	22	2.25	.63	1.12	.4	1.40	.9	G6
5	6	22	1.37	.48	1.15	.7	1.22	1.0	A5
4	7	22	1.15	.46	1.16	.9	1.20	1.1	L4
14	7	22	1.15	.46	.98	-.1	1.01	.1	TN14
17	9	22	.75	.44	1.09	.9	1.09	.9	A17
19	63	22	.63	.10	.78	-.8	.92	.0	TN19
25	68	22	.57	.11	.73	-1.0	.70	-.9	G25
11	10	22	.56	.43	1.09	1.2	1.10	1.2	C11
21	79	22	.54	.13	1.04	.2	1.05	.3	L21
24	74	22	.48	.11	.79	-.8	.74	-.7	TN24
26	80	22	.44	.11	1.06	.3	.96	-.1	A26
22	89	22	.37	.15	.75	-.9	.75	-.9	G22
9	11	22	.37	.43	1.13	2.1	1.13	2.0	C9
23	94	22	.23	.11	.61	-1.9	.59	-1.5	G23
18	12	22	.18	.43	1.02	.3	1.02	.3	A18
20	115	22	.11	.10	.79	-.7	.61	-.4	A20
27	123	22	.10	.14	1.33	1.5	1.33	1.1	A27
13	13	22	-.01	.44	1.03	.4	1.02	.2	G13
7	14	22	-.20	.45	1.04	.4	1.04	.3	L7
2	15	22	-.41	.46	1.15	.9	1.23	1.2	G2
1	17	22	-.88	.51	1.07	.3	1.27	.9	TN1
8	17	22	-.88	.51	1.04	.3	1.17	.7	A8
3	19	22	-1.51	.62	1.01	.2	1.00	.2	L3
12	20	22	-1.97	.74	1.00	.2	.93	.1	G12
10	21	22	-2.71	1.03	1.01	.3	1.04	.4	G10
16	21	22	-2.71	1.03	1.01	.3	1.04	.4	G16
MEAN	38.7	22.0	.00	.41	1.00	.2	1.02	.3	
S.D.	37.3	.0	1.16	.26	.16	.8	.21	.8	

Figura 115: Estadísticos descriptivos de los ítems de la prueba clasificatoria junto con la selectivay final para el nivel medio 2009.

La medida de dificultad de los ítems va desde -2.71 lógitos a 2.25 lógitos. Se observan 17 ítems por encimay 9 ítems por debajo de la dificultad media de los ítems la cual es de 0 lógitos. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) fluctúa entre 0.10 y 1.03

para ítems de menor dificultad. Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste.

En la Figura 116 se presenta los estadísticos para el nivel medio de la prueba clasificatoria, selectiva y final del año 2010:

Prueba Clasificatoria, Selectiva y Final Nivel Medio 2010

ESTUDIANTES	19 INPUT		19 MEASURED		INFIT		OUTFIT	
	SCORE	COUNT	MEASURE	ERROR	IMNSQ	ZSTD	OMNSQ	ZSTD
MEAN	50.2	26.0	.38	.18	.81	-.3	.98	.0
S.D.	10.3	.0	.27	.05	.36	.8	.43	1.0
REAL RMSE	.18	ADJ.SD	.20	SEPARATION	1.07	ESTUDI	RELIABILITY	.53

ITEMS	26 INPUT		26 MEASURED		INFIT		OUTFIT	
MEAN	36.7	19.0	.00	.46	1.00	.2	.98	.3
S.D.	40.1	.0	1.15	.27	.17	.9	.26	.8
REAL RMSE	.53	ADJ.SD	1.02	SEPARATION	1.93	ITEM	RELIABILITY	.79

Figura 116: Estadísticos generales de los ítems y los estudiantes de las pruebas clasificatoria junto con la selectiva y final para el nivel medio 2010.

De la Figura 116 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: OUFIT (Estudiantes: media=0.98, Desviación Estándar=0.43); (Ítems: media=0.98, Desviación Estándar=0.26); e INFIT (Estudiantes: media=0.81, Desviación Estándar=0.36) (Ítems: media=1.00, Desviación Estándar=0.17), en cuanto a la Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 1.07 y 0.53) e (ítems: 1.93 y 0.79). Los estadísticos mencionados anteriormente muestran el ajuste de los ítems y de la habilidad de los estudiantes al modelo.

La Figura 117 presenta los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems para el nivel medio del año 2010.

Prueba Clasificatoria, Selectiva y Final Nivel Medio 2010

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
7	3	19	2.08	.63	1.06	.3	1.13	.4	G7
4	5	19	1.43	.53	1.11	.5	1.15	.6	G4
18	5	19	1.43	.53	1.06	.3	1.09	.4	C18
1	6	19	1.17	.50	1.13	.7	1.16	.9	A1
5	6	19	1.17	.50	.97	-.1	.97	-.1	TN5
11	7	19	.93	.48	1.03	.3	1.02	.2	L11
2	8	19	.71	.47	1.11	1.1	1.12	1.2	G2
14	9	19	.49	.46	1.14	2.1	1.14	2.1	G14
22	64	19	.48	.10	.65	-1.3	.52	-1.3	TN22
25	84	19	.28	.10	.63	-1.7	.53	-1.3	G26
10	10	19	.27	.46	1.11	1.7	1.11	1.7	TN10
19	89	19	.25	.10	.91	-.3	.77	-.3	C19
23	87	19	.25	.10	.62	-1.8	.53	-1.2	G23
26	104	19	.06	.11	.99	.1	.71	-.4	A27
21	105	19	.05	.11	1.38	1.3	1.33	.7	TN21
24	108	19	.04	.11	1.10	.4	1.08	.3	TN24
6	12	19	-.17	.48	1.04	.4	1.04	.3	TN6
13	12	19	-.17	.48	1.03	.3	1.04	.4	G13
16	12	19	-.17	.48	1.03	.2	1.03	.3	A16
20	119	19	-.21	.14	.67	-.7	.37	-.5	G20
8	13	19	-.40	.50	1.11	.6	1.14	.7	G8
15	16	19	-1.32	.63	1.08	.3	1.21	.6	A15
3	17	19	-1.79	.75	.98	.2	.87	.0	TN3
17	17	19	-1.79	.75	.99	.2	.92	.1	TN17
9	18	19	-2.54	1.03	1.00	.3	.94	.3	A9
12	18	19	-2.54	1.03	1.04	.4	1.50	.8	A12
MEAN	36.7	19.0	.00	.44	1.00	.2	.98	.3	
S.D.	40.1	.0	1.15	.27	.17	.9	.26	.8	

Figura 117: Estadísticos descriptivos de los ítems de las pruebas clasificatoria junto con la selectiva y final para el nivel medio 2010.

Los ítems tienen una medida que va desde -2.54 lógitos a 2.08 lógitos en su dificultad. Se observan 16 ítems por encima y 10 ítems por debajo de la media de la dificultad de los ítems. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) se encuentra entre 0.10 y 1.03.Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste al igual que los estandarizados ZSTD INFIT y ZSTD OUTFIT ya que ninguno se encuentra por encima de 1.3. En este nivel todos los ítems se comportan dentro de lo esperado en el modelo.

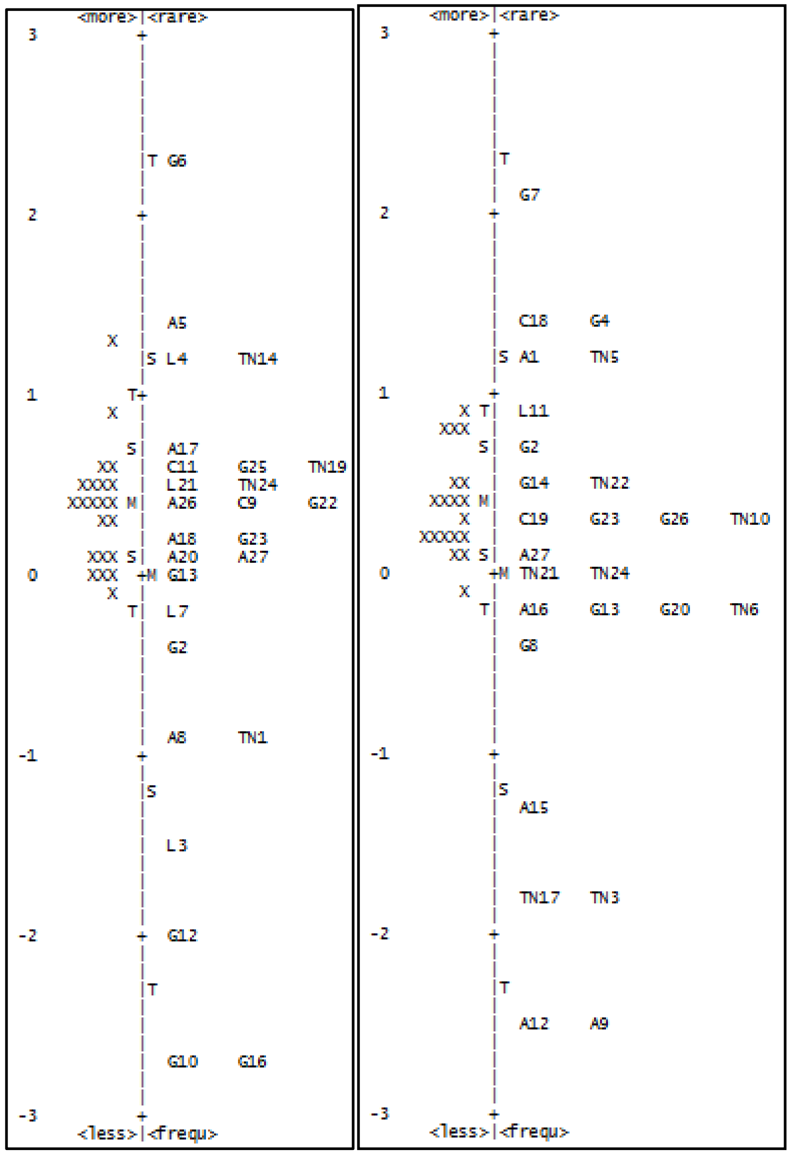


Figura 118. Mapas de ítems de la prueba clasificatoria junto con la selectiva y final para el nivel avanzado 2009 (izquierda) y 2010 (derecha).

En el año 2009 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media 0.37y desviación estándar 0.31 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 y desviación estándar 1.16. Como se nota en la Figura 118 la media de la dificultad de los ítems se encuentra un poco abajo de la media de la habilidad de los estudiantes. Varios ítems presentaron la misma dificultad. En el año 2010 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media 0.38 y desviación estándar 0.27 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 ydesviación estándar1.15. Con varios ítems que tienen el mismo nivel de dificultad. Comparando la distribución de los ítems de los años se observa que es muy semejante ya que prácticamente la medida de dificultad de los ítems se encuentra entre -3 y 2 lógitos aproximadamente, además de que la media de la habilidad de los estudiantes está en el mismo lugar.

En la Figura 119 se presenta los estadísticos para el nivel avanzado de la prueba clasificatoria, selectiva y final del año 2009:

```
Prueba Clasificatoria, Selectiva y Final Nivel Avanzado 2009
-------------------------------------------------------------------------------
| ESTUDIANTES      19 INPUT      19 MEASURED          INFIT         OUTFIT    |
|          SCORE      COUNT     MEASURE   ERROR     IMNSQ   ZSTD  OMNSQ   ZSTD|
| MEAN      55.7       27.0         .54     .19        .85    -.2   1.01     .1|
| S.D.       9.8         .0         .30     .04        .31     .8    .44     .9|
| REAL RMSE    .19  ADJ.SD     .23  SEPARATION  1.21  ESTUDI RELIABILITY  .59|
|-----------------------------------------------------------------------------|
| ITEMS      27 INPUT      27 MEASURED                INFIT         OUTFIT    |
| MEAN      39.2       19.0         .00     .52        .99     .2   1.01     .2|
| S.D.      39.7         .0        1.46     .34        .13     .6    .23     .7|
| REAL RMSE    .62  ADJ.SD    1.33  SEPARATION  2.15  ITEM   RELIABILITY  .82|
-------------------------------------------------------------------------------
```

Figura 119: Estadísticos generales de los ítems y los estudiantes de la prueba clasificatoria junto con la selectiva y final para el nivel avanzado 2009.

De la Figura 119 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: INFIT (Estudiantes: media=0.85, Desviación Estándar=0.31); (Ítems: media=0.99, Desviación Estándar=0.13); e OUTFIT (Estudiantes: media=1.01, Desviación Estándar=0.44)(Ítems: media=1.01, Desviación Estándar=0.23), además se consideró los estadísticos Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 1.21 y 0.59) e (ítems: 2.15 y 0.82). Estos resultados reflejan una buena estimación de la habilidad de los estudiantes y de la dificultad de los ítems.

La Figura 120 presenta los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems para el nivel avanzado del año 2009.

Prueba Clasificatoria, Selectiva y Final Nivel Avanzado 2009

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
6	1	19	3.47	1.03	.98	.3	.78	.1	C6
7	2	19	2.71	.75	1.07	.3	1.32	.7	A7
12	3	19	2.24	.63	1.06	.3	1.19	.6	C12
2	8	19	.86	.47	1.14	1.4	1.15	1.4	G2
11	8	19	.86	.47	1.06	.7	1.08	.8	G11
8	9	19	.64	.46	1.00	.1	1.00	.1	G8
20	74	19	.56	.10	1.10	.5	1.65	1.5	A20
22	90	19	.43	.14	.69	-.9	.57	-1.2	C22
4	10	19	.43	.46	1.12	1.7	1.13	1.7	A4
25	82	19	.43	.13	.70	-1.1	.69	-1.2	TN25
24	95	19	.28	.12	.68	-1.2	.61	-1.1	A24
21	104	19	.24	.11	.89	-.2	.83	.0	C21
26	94	19	.24	.13	1.14	.6	1.13	.5	G26
23	96	19	.23	.13	.84	-.5	.88	-.3	G23
17	11	19	.21	.47	1.00	.1	.99	-.1	A17
27	103	19	.09	.15	.85	-.3	.76	-.6	TN27
19	111	19	.01	.14	.95	.0	.74	-.3	L19
9	12	19	-.01	.48	1.10	.8	1.13	.9	L9
10	12	19	-.01	.48	1.08	.6	1.07	.5	TN10
14	13	19	-.25	.50	1.04	.3	1.02	.2	G14
16	14	19	-.51	.53	1.04	.2	1.04	.2	TN16
18	16	19	-1.17	.63	1.03	.2	1.06	.3	G18
1	18	19	-2.39	1.03	1.00	.3	.95	.3	TN1
3	18	19	-2.39	1.03	1.02	.3	1.15	.5	TN3
5	18	19	-2.39	1.03	1.02	.3	1.15	.5	G5
13	18	19	-2.39	1.03	1.01	.3	1.03	.4	L13
15	18	19	-2.39	1.03	1.02	.3	1.15	.5	A15
MEAN	39.2	19.0	.00	.51	.99	.2	1.01	.2	
S.D.	39.7	.0	1.46	.34	.13	.6	.23	.7	

Figura 120: Estadísticos descriptivos de los ítems de la prueba clasificatoria junto con la selectivay final para el nivel avanzado 2009.

Los ítems tienen una medida que va desde -2.39 lógitos a 3.47 lógitos en su dificultad. Se observan 17 ítems por encimay 10 ítems por debajo de la dificultad media de los ítems. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) fluctúa entre 0.10 para ítems de menor dificultad y 1.03para ítems de mayor dificultad. Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste al igual que los estandarizados ZSTD INFIT y ZSTD OUTFIT. En este nivel todos los ítems se comportan dentro de la expectativa del modelo.

En la Figura 121 se presenta los estadísticos para el nivel avanzado de la prueba clasificatoria, selectiva y final del año 2010:

Prueba Clasificatoria, Selectiva y Final Nivel Avanzado 2010

ESTUDIANTES	13 INPUT		13 MEASURED		INFIT		OUTFIT	
	SCORE	COUNT	MEASURE	ERROR	IMNSQ	ZSTD	OMNSQ	ZSTD
MEAN	52.2	26.0	.14	.20	.90	-.1	.99	.0
S.D.	8.7	.0	.27	.03	.34	.8	.36	1.0
REAL RMSE	.20	ADJ.SD	.18	SEPARATION	.93	ESTUDI	RELIABILITY	.46
ITEMS	26 INPUT		22 MEASURED		INFIT		OUTFIT	
MEAN	29.7	13.0	.00	.51	.99	.3	.99	.3
S.D.	29.0	.0	1.00	.28	.19	.9	.27	.9
REAL RMSE	.58	ADJ.SD	.82	SEPARATION	1.41	ITEM	RELIABILITY	.66

Figura 121: Estadísticos generales de los ítems y los estudiantes de las pruebas clasificatoria junto con la selectiva y final para el nivel avanzado 2010.

De la Figura 121 se observa que los estadísticos para los estudiantes y los ítems son: OUFIT (Estudiantes: media=0.99, Desviación Estándar=0.36); (Ítems: media=0.99, Desviación Estándar=0.27); e INFIT (Estudiantes: media=0.90, Desviación Estándar=0.34) (Ítems: media=0.99, Desviación Estándar=0.19), en cuanto a la Separación y Confiabilidad (Estudiantes: 0.93 y 0.46) e (ítems: 1.41 y 0.66). Los estadísticos mencionados anteriormente muestran el ajuste de los ítems y de la habilidad de los estudiantes al modelo.

La Figura 122presenta los estadísticos descriptivos que el programa WINSTEPS produce para los ítems para el nivel avanzado del año 2010.

Prueba Clasificatoria, Selectiva y Final Nivel Avanzado 2010

ENTRY NUMBER	TOTAL SCORE	COUNT	MEASURE	MODEL S.E.	INFIT MNSQ	INFIT ZSTD	OUTFIT MNSQ	OUTFIT ZSTD	ITEM
13	1	13	2.65	1.04	1.05	.4	1.30	.6	TN13
8	3	13	1.36	.66	1.15	.5	1.28	.8	G8
14	3	13	1.36	.66	1.19	.6	1.46	1.2	G14
5	4	13	.96	.61	1.03	.2	1.04	.2	A5
22	46	13	.33	.14	1.27	1.0	1.24	.7	TN22
6	6	13	.29	.56	1.22	2.5	1.23	2.5	L6
9	6	13	.29	.56	1.16	1.8	1.17	1.9	G9
18	53	13	.16	.46	.95	.2	.79	-.1	G18
23	55	13	.14	.13	.50	-1.8	.47	-1.6	A23
24	58	13	.07	.12	.63	-1.1	.69	-.6	G24
26	54	13	.07	.15	.91	-.2	.90	-.2	C26
19	61	13	.05	.12	1.09	.4	.92	.1	TN19
12	7	13	-.02	.56	1.18	2.0	1.18	2.0	A12
21	71	13	-.16	.16	1.00	.2	.87	.0	G21
3	8	13	-.34	.58	1.11	.8	1.12	.8	A3
25	79	13	-.50	.29	.70	-1.0	.69	-1.0	TN25
7	9	13	-.69	.61	1.02	.1	1.04	.2	G7
11	9	13	-.69	.61	.94	-.2	.94	-.2	G11
16	9	13	-.69	.61	1.01	.1	1.00	.1	A16
4	10	13	-1.09	.66	.96	.0	.91	-.1	TN4
20	89	13	-1.18	.53	.77	.0	.35	-.5	G20
2	12	13	-2.38	1.04	1.04	.3	1.17	.5	A2
MEAN	29.7	13.0	.00	.49	.99	.3	.99	.3	
S.D.	29.0	.0	1.00	.27	.19	.9	.27	.9	

Figura 122: Estadísticos descriptivos de los ítems de las pruebas clasificatoria junto con la selectiva y final para el nivel avanzado 2010.

Los ítems tienen una medida que va desde -2.38 lógitos a 2.65 lógitos en su dificultad. Se observan 12 ítems por encima y 10 ítems por debajo de la media de la dificultad de los ítems. El MODEL S.E (error estándar de cada medida) se encuentra entre 0.12 y 1.04.Los valores no estandarizados MNSQ INFIT y MNSQ OUTFIT presentan un buen ajuste al igual que los estandarizados ZSTD INFIT y ZSTD OUTFIT ya que ninguno se encuentra por encima de 1.3. En este nivel todos los ítems se comportan dentro de lo esperado en el modelo.

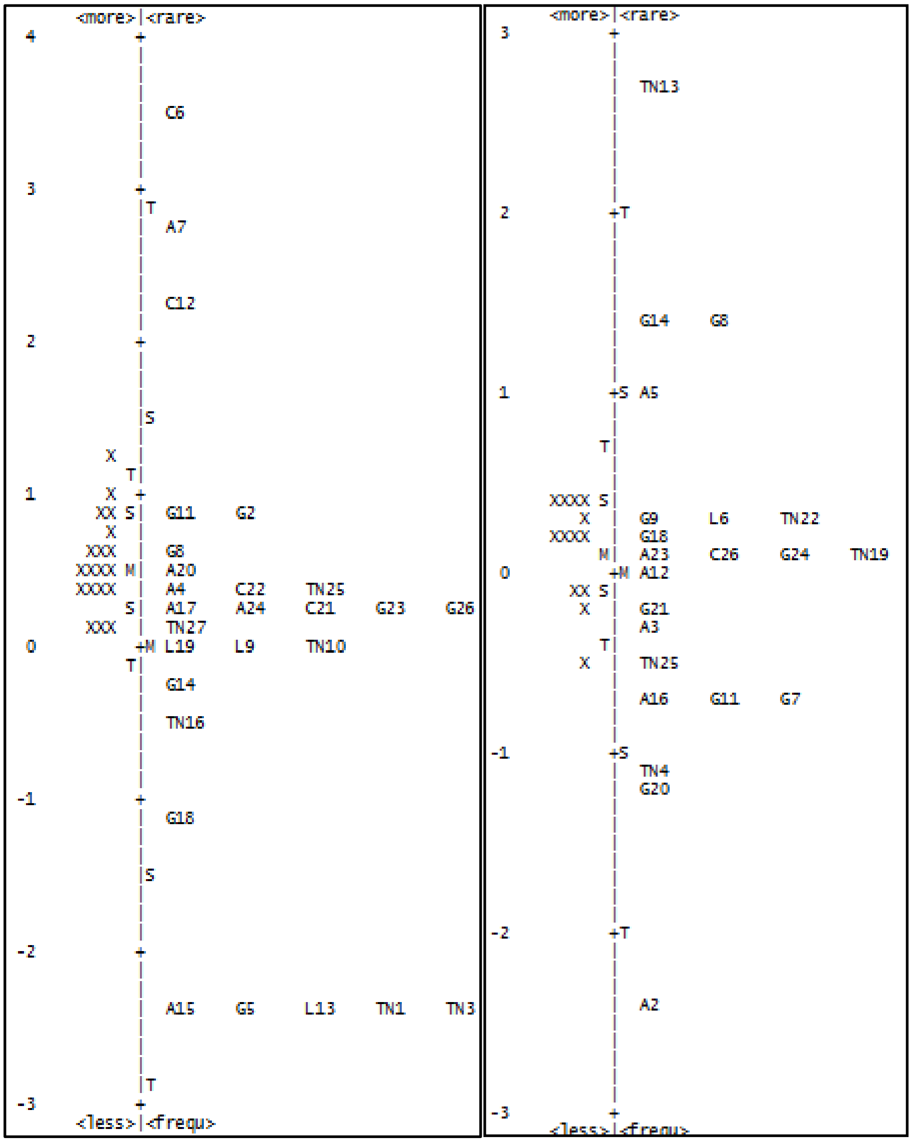


Figura 123. Mapas de ítems de la prueba clasificatoria junto con la selectiva y final para el nivel avanzado 2009 (izquierda) y 2010 (derecha).

En el año 2009 la distribución de los estudiantes es aproximadamente normal con media 0.54y desviación estándar 0.30 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 y desviación estándar 1.00. Como se nota la media de la habilidad de los estudiantesse encuentra por encima de la media de dificultad de los ítems. Se presentaron varios ítems con la misma medida de dificultad. En el año 2010 la distribución de los estudiantes aproximadamente normal con media 0.14 y desviación estándar 0.27 y la distribución de la dificultad de los ítems con media 0 ydesviación estándar0.95. Hubo varios ítems que presentaron la misma medida de dificultad. Se resalta el ítem TN13 el cual se encuentra a un poco más de un lógito de donde se encuentran los demás ítems. Comparando la distribución de los ítems de los dos años se observa que en estos años se encuentran la mayoría de ítems entre -1 y 1, además que hay cierta continuidad en los ítems.

5. Conclusiones

En este capítulo se encuentran las conclusiones a las que logramos llegar después de analizar los resultados de las pruebas de las Olimpiadas de los años 2009 y 2010, que hacen alusiónal ajuste de los datos al modelo, la distribución de las habilidades de los estudiantes, la dificultad de los ítems y los posibles errores que cometieron los estudiantes.

1. En la fase clasificatoria se evidenció que la mayoría de los ítems se ubicaron dentro de las categorías demasiado difícil, muy difícil y difícil, lo cual se corroboró mediante la distribución observada en los mapas obtenidos en Winsteps, en los cuales la mayoría de los ítems se ubicaron por encima de la media de la habilidad de los estudiantes, esto sucedió para todos los niveles en los dos años, además la media de la dificultad de los ítems se mantuvo por encima de la media de la habilidad de los estudiantes.

2. Los estadísticos descriptivos que se emplearon como indicadores del ajuste global de los datos al modelo en la fase clasificatoria se comportaron dentro de los valores establecidos para estimar la dificultad de los ítems, lo contrario ocurrió con la habilidad de los estudiantes la cual no se pudo estimar debido a gran número de estudiantes y los pocos ítems implementados en la prueba.

3. La prueba chi cuadrado para la bondad de ajuste mostró que los estudiantes en la prueba clasificatoria para los niveles básico y avanzado de los dos años pudieron haber respondido utilizando la estrategia del tin marín, lo cual deja la inquietud y posiblemente en unas próximas olimpiadas se realice un seguimiento

a algunos estudiantes que sustenten sus respuestas. En cuanto al nivel medio no se evidenció que los estudiantes pudieran haber respondido al azar.

4. Aun cuando se esperaría que el comportamiento de los resultados de la sede de Bucaramanga fuera destacado con respecto a las otras, la correlación de Pearson y la prueba Anova para los resultados de la fase clasificatoria mostró la existencia de una relación entre las sedes, es decir el comportamiento de los porcentajes de buenas respuestas en las sedes son muy semejantes, al menos en términos de las diferencias entre los porcentajes de buenas respuestas para cada una de los ítems propuestos.

5. Mediante una prueba t se comprobó queno presentaron diferencias significativas las medias de las respuestas correctas para cada sedeen el nivel básico y medio de los dos años en la prueba clasificatoria, es decir el comportamiento de los resultados fue muy similar, de lo que se deduce que la media del porcentaje de respuestas buenas son muy semejantes. Por el contrario en el nivel avanzado en las sedes de Barbosa y Barrancabermeja se presentaron diferencias entre sus medias mostrando que en el año 2010 estas sedes obtuvieron mejores resultados.

6. En la fase clasificatoria en los gráficos DIF Measure obtenidos en Winsteps para las sedes en los diferentes niveles y años permitieron establecer que no existen diferencias marcadas entre el nivel de dificultad de los ítems, es decir que para todas las sedes el nivel de dificultad de los problemas fue el mismo, a excepción de la sede de Málaga en el nivel básico 2009 que presentó ciertas diferencias marcadas en algunos ítems de geometría, lo cual evidencia posibles falencias en el manejo de conceptos de geométricos.

7. En la fase selectiva los ítems tipo ensayo para el 2009 fueron contestados por pocos estudiantes mientras que en el año 2010 aumentó el número de

estudiantes que respondieron este tipo de ítems posiblemente porque los estudiantes ya conocían el tipo de problemas de la pruebas para esta fase.

8. En los resultados de la fase clasificatoria junto con los de la selectiva para los dos años la media de la habilidad de los estudiantes se acercó a la media de la dificultad de los ítems pero se mantuvo por debajo de esta, en otras palabras el nivel de dificultad de los problemas se conservó, además se presentó cierta homogeneidad en la distribución de la dificultad de los ítems y la distribución de los estudiantes fue aproximadamente normal.

9. De la unión de los resultados de las tres fases para los dos años mostraron diferencias en las habilidades de los estudiantes ya que la media de la dificultad de los ítems se ubicó por debajo o en la misma posición de la media de la habilidad de los estudiantes. En el nivel básico en el año 2010 la dificultad de los ítems estuvo entre -1 y 1 lógitos a excepción de un ítem, mientras que en el año 2009 la distribución estuvo entre -2 y 2 lógitos. En los demás niveles la distribución de la dificultad de los ítems fue muy similar para los dos años.

10. Los datos de la fase clasificatoria junto con la selectiva y final presentaron un buen ajuste al modelo permitiendo estimar la habilidad de los estudiantes, de lo cual se deduce que las pruebas miden la habilidad de los estudiantes que llegan a la fase final mostrando así que los ítems implementados en las tres fases están hechos para medir la habilidad de los finalistas.

6. Referencias Bibliográficas

Albarracín, A. y Rodríguez, C. *Cartilla de Problemas y Soluciones de las Olimpiadas Regionales de Matemáticas UIS (2009 y 2010).*Bucaramanga, Colombia

Asociación Colombiana de Facultades de Administración, ASCOLFA. (2007). Análisis de resultados, examen de estado para la calidad de la educación superior, Ecaes en administración 2007, Bogotá, D.C., Colombia.

Barajas, A. y Esparza, O. (2010). Implementación del Modelo Rasch para la estimación de la habilidad algebraica de los estudiantes de primer semestre de ciencias e ingeniería de la Universidad Industrial de Santander. Tesis de Licenciatura en Matemáticas no publicada, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Celis, C. y Vega, H. (2007). Razonamiento matemático: ¿una o varias habilidades? Tesis de Licenciatura en Matemáticas no publicada, Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Hambleton R.K., Swaminathan H. y Rogers J. H. (1991). MMSS *Fundamentals of item Response Theory*. SAGE Publications, Inc.

Prieto, G. y Delgado, A. (2003). Análisis de un test mediante el modelo de Rasch. *Psicothema*. Vol.15, p. 94-100. *http://www.psicothema.com/psicothema.asp?id=1029> [consulta: 15 Octubre 2010]*

Sistema Nacional de Evaluación del Proceso Educativo (SNEPE). (2006). Informe de Resultados de la Educación Media 2006, Paraguay.

Tristán, A. (2001). Análisis de Rasch para Todos. Ceneval, México, p.11.

Wright, B. y Stone, M. (1999). *Measurement Essentials*. Wide Range, Inc.

7. Anexos

Problemas y Soluciones de la Prueba Clasificatoria Año 2009

Problemas y Soluciones Nivel Básico

1) Suponga que seis días después de anteayer es jueves. ¿Qué día de la semana es un día después de mañana?

(a)Lunes (b) Martes (c) Miércoles (d) Sábado (e) Viernes

Solución:

En un diagrama donde cada casilla representa un día de la semana se elige una casilla cualquiera y se coloca ahí el día de hoy, a partir de este día se analizan las condiciones dadas en el problema para ubicar en cuál de ellas va el día jueves. El día de la semana que nos piden es el correspondiente a la casilla con el número 4 es decir martes.

2) Se transformó un rectángulo de 50 cm de largo y 10 cm de ancho en un cuadrado de igual perímetro. Con respecto al área del rectángulo en centímetros cuadrados, el área del cuadrado aumentó en:

(a) 200 (b) 400 (c) menos de 200 (d) más de 400 (e) No aumentó

Solución:

El rectángulo tiene área de $500cm^2$. El cuadrado tiene área de $900cm^2$ dado que su perímetro es de 120 cm y por tanto cada lado tiene longitud de 30 cm. De ahí que el área del cuadrado aumentó en 400 cm.

3) En una heladería se ofrecen 3 tipos de barquillo y helados de 31 sabores. El número de helados distintos que se pueden comprar es:

(a) 31 (b) 90 (c) 93 (d) 34 (e) 183

Solución:

Por la regla del producto se pueden comprar $3\times 31=93$ helados distintos.

4) Tres niños deciden repartirse un saco de bolas de la siguiente manera: El primer niño toma la mitad más una: el segundo la tercera parte de las restantes; el tercero se da cuenta que le quedaron el doble de las que tomó el segundo. Entonces el número original de bolas era:

(a) 8 ó 36 (b) 20 ó 26 (c) 14 ó 32 (d) 10 ó 32 (e) No se puede determinar con los datos suministrados.

Solución:

El primer niño toma $\frac{n}{2}+1$ bolas dejando $\frac{n}{2}-1$, el segundo saca $\frac{1}{3}\left(\frac{n}{2}-1\right)$. El tercero, con el doble del segundo deben tener necesariamente $\frac{2}{3}\left(\frac{n}{2}-1\right)$, de manera que n está indeterminado es decir, n puede ser un entero de la forma $2+6a$ con $a=0,1,2,3,\cdots$.

5) Con los dígitos $1, 2, 3$ y 5 se pueden formar 24 números de 4 dígitos. ¿Cuántos de estos 24 números son pares?

(a) 24 (b) 12 (c) 6 (d) 3 (e) 4

Solución:

Si el número es par debe tener a 2 en las unidades, los dígitos $1, 3$ y 5 se pueden ordenar de seis maneras para formar las tres primeras cifras, así: $1352, 3512, 5312, 1532, 3152, 5132$, es decir existen $3!$ maneras para formar los números pares.

6) Una base de un triángulo es de longitud b y altura h. Un rectángulo de altura x se inscribe en el triángulo, con base del rectángulo sobre la base del triángulo; el área del rectángulo es:

(a) $\frac{bx}{h}(h-x)$ (b) $\frac{hx}{b}(b-x)$ (c) $\frac{bx}{h}(h-2x)$ (d) $x(b-x)$ (e) $x(h-x)$

Solución:

Sea y la base del rectángulo. Entonces por semejanza de triángulos se tiene que: $\dfrac{h-x}{y} = \dfrac{h}{b}$,

despejando y obtenemos $y = \dfrac{b}{h}(h-x)$, de ahí que el área del rectángulo es

$$xy = \frac{bx}{h}(h-x).$$

7) De un grupo de niños y niñas se retiran 15 niñas quedando dos niños por cada niña. Después se retiran 45 niños y quedan entonces cinco niñas por cada niño. El número de

niñas y niños respectivamente, al comienzo era de:

(a) $(40,50)$ (b) $(43,56)$ (c) $(50,70)$ (d) $(56,43)$ (e) $(50,40)$

Solución:

Si x es el número original de niños y y es el de niñas, entonces tenemos por hipótesis que: $\dfrac{x}{y-15}=2$ y $\dfrac{x-45}{y-15}=\dfrac{1}{5}$; de la primera ecuación obtenemos que $x=2y-30$ y de la segunda $x=\dfrac{y+210}{5}$, igualando estas cantidades y despejando tenemos que $y=40$.

8) Una moneda de cincuenta pesos se coloca sobre una mesa; el número de monedas de cincuenta pesos que se pueden colocar tangentes alrededor de ella es de:

(a) 4 (b) 5 (c) 6 (d) 8 (e) 12

Solución:

Alrededor de un círculo se pueden colocar exactamente seis círculos iguales tangentes. Cada uno al círculo dado y a dos más. El arco entre dos puntos sucesivos de contacto del círculo dado y los círculos exteriores es $\frac{1}{6}$ de la circunferencia.

9) De cuantas formas se puede trazar la palabra ROSA, si sólo se permite movimientos de una casilla a otra contigua en línea recta, hacia arriba, abajo, izquierda o derecha.

			A			
		A	S	A		
	A	S	O	S	A	
A	S	O	R	O	S	A
	A	S	O	S	A	
		A	S	A		
			A			

(a) 8 (b) 28 (c) 14 (d) 26 (e) 21

Solución:

El número de formas de escribir la palabra ROSA, es el mismo de escribir la palabra ASOR con las mismas condiciones ya que es simplemente realizar movimiento en forma contraria. El número de formas de escribir ASOR es el número de formas de llegar a R empezando en A pasando por S y finalizando en O. Partiendo de cada A, las formas de llegar a cada S es el número de A's adyacentes que tiene cada S; el número de formas de llegar a O es la suma de las formas de llegar a las S's adyacentes que tiene cada O y el número de formas de llegar a R es la suma de las formas de llegar a las O's contiguas. En total hay 28 formas de hacer la palabra ASOR que son las mismas para formar la palabra ROSA.

10) Una caja fuerte tiene tres ruedas y cada rueda se puede colocar en los números $0,1,2,3,4,\cdots,9$. Si la caja se abre cuando las tres ruedas están colocadas en números distintos. ¿Con cuántas combinaciones se puede abrir?

(a) 10 (b) 720 (c) 36280 (d) 72 (e) Ninguna de las anteriores.

Solución:

Cada rueda puede colocarse en 10 posiciones diferentes pero para que se abran las tres ruedas deben estar colocadas en números distintos, entonces si se coloca la primera rueda en un número por ejemplo el 0, la rueda dos puede colocarse en nueve posiciones diferentes y por cada una de estas 9 posiciones la rueda 3 se puede colocar en 8 posiciones diferentes, en total serían $8 \times 9 = 72$ para cada una de las 10 opciones de la primera rueda. Luego el total de combinaciones posibles para abrir la caja fuerte es de $10 \times 9 \times 8 = 720$.

11) En un grupo de vacas y gallinas, si el número de patas entre vacas y gallinas es 14 más dos veces el número de cabezas; el número de vacas es:

(a) 5 (b) 7 (c) 10 (d) 12 (e) 14

Solución:

Sea n el número de vacas y m el número de gallinas, entonces $4n + 2m$ es el número total de patas y $4n + 2m = 14 + 2(m + n)$ por hipótesis, entonces se deduce que $n = 7$, por tanto el número de vacas es 7, pero el número de gallinas es indeterminado.

12) Sea D un punto interior del triángulo ABC tal que $\angle BDC = 123^{o}$, $\angle ABD = 15^{o}$ y $\angle ACD = 21^{o}$. La medida del ángulo BAC es:

(a) 47^{o} (b) 67^{o} (c) 87^{o} (d) 107^{o} (e) 27^{o}

Solución:

Por la propiedad fundamental de los triángulos se tiene que: $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ}$, ahora tomando el triángulo CDB tenemos que $(\hat{B} - 15^{\circ}) + 123^{\circ} + (\hat{C} - 21^{\circ}) = 180^{\circ}$ de ahí que $\hat{B} + \hat{C} = 93^{\circ}$, pero $\hat{B} + \hat{C} = 180^{\circ} - \hat{A}$ entonces $\hat{A} = 87^{\circ}$.

Problemas y Soluciones Nivel Medio

1) El mayor número por el que la expresión $n^3 - n$ es divisible para todos los divisores de n es:

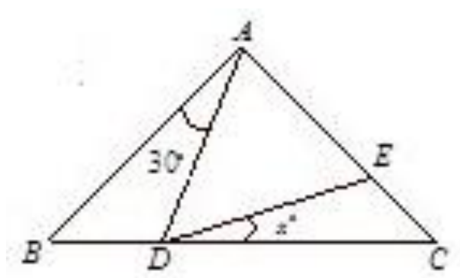
(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Solución:

Tenemos que $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n+1)(n-1) = (n-1)n(n+1)$, representa el producto de tres enteros consecutivos para valores enteros de n; y dado que en un par de enteros consecutivos existe un múltiplo de dos y en una tripla de enteros consecutivos hay un múltiplo de tres entonces $n^3 - n$ es divisible por seis.

2) En la figura $\overline{AB} \cong \overline{AC}$, el ángulo $\hat{B}AD = 30^\circ$ y $\overline{AE} \cong \overline{AD}$, el valor de x es:

(a) $7\frac{1}{2}^\circ$ (b) 10° (c) 20° (d) $12\frac{1}{2}^\circ$ (e) 15°



Solución:

Sea $\hat{D}AE = y$. Dado que el triángulo ABC es isósceles por hipótesis entonces se tiene que $\hat{B}CA = \frac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ - y) = 75^\circ - \frac{y}{2}$, y por hipótesis el triángulo ADE es isósceles entonces se tiene que $\hat{D}EA = \frac{1}{2}(180^\circ - y) = 90^\circ - \frac{y}{2} = \hat{A}DE$, ahora por la propiedad fundamental de los triángulos, tenemos que para el triángulo ADC:

$$180^\circ = y + \hat{A}DE + x^\circ + \hat{B}CA = y + 90^\circ - \frac{y}{2} + x^\circ + 75 - \frac{y}{2},$$

de ahí que $x = 15^\circ$.

3) En un torneo la mitad de los competidores se eliminan cada ronda. Si al principio de cada ronda el número de competidores es impar, uno de los competidores se elige al azar y permanece para la siguiente ronda. Si empezaron 100 competidores. ¿cuántas rondas deberán pasar para que quede un ganador?

(a)11 (b)10 (c) 8 (d) 7 (e) 6

Solución:

Con las reglas del torneo se tiene que empezaron 100 competidores luego quedan 50 a la siguiente ronda, al eliminar la mitad quedan 25 competidores y como es un número impar quedan entonces 13 competidores para la siguiente ronda, 13 es número impar entonces pasan 7 competidores, luego 4 y después quedan 2 competidores. Finalmente queda 1 ganador. Por lo anterior se concluye que pasaron 7 rondas hasta que queda un ganador.

4) Dos nadadores parten al mismo tiempo de los extremos de una piscina de 90 metros de longitud, con velocidad de 3 y 2 metros por segundo respectivamente. Atraviesan la piscina varias veces durante 12 minutos. Suponiendo que no se pierde tiempo al voltear, el número de veces que se han encontrado será: (Nota: $s = v \cdot t$, donde v es la velocidad, s es

la distancia recorrida y t el tiempo empleado para recorrer la distancia a .

(a) 24 (b) 21 (c) 20 (d) 19 (e) 18

Solución:

Al finalizar el tercer minuto los nadadores están en sus posiciones iniciales, por tanto en 12 metros el ciclo se repite 4 veces. Como hay 5 encuentros en cada ciclo, el número total de encuentros será $4 \cdot 5 = 20$.

5) Para que la expresión $x^2 + 2x + 5$ sea un factor de $x^4 + px^2 + q$, los valores de p y q deben ser respectivamente:

(a) -2 y 5 (b) 5 y 25 (c) 10 y 20 (d) 6 y 25 (e) 14 y 25

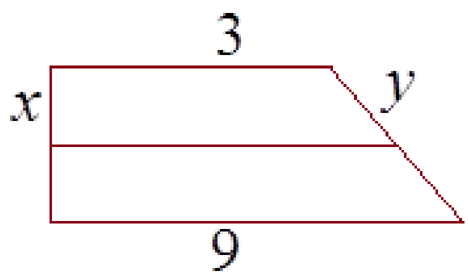
Solución.

$(x^2 + 2x + 5)(x^2 + ax + b) = x^4 + px^2 + q$, resolviendo tenemos que $x^4 + (2+a)x^3 + (5+b+2a)x^2 + (5a+2b)x + 5b = x^4 + px^2 + q$, igualamos coeficientes para cada término y obtenemos $a = -2, b = 5, p = 6$ y $q = 25$.

6) Los lados paralelos de un trapecio miden 3 cm y 9 cm; los lados no paralelos miden 4 cm y 6 cm. Una recta paralela a la base divide el trapecio en dos trapecios de igual perímetro; la razón en que quedan divididos los lados no paralelos es:

(a) $4 : 3$ (b) $3 : 2$ (c) $4 : 1$ (d) $3 : 1$ (e) $6 : 1$

Solución:



Sean x y y las medidas de los segmentos superiores de los lados no paralelos, entonces $3+x+y=9+(6-y)+(4-x)$ implica que $x+y=8$. Dado que $x : y=4 : 6=2 : 3$ entonces $2y=3x$.

Ahora al solucionar el sistema

$$\begin{cases} x+y=8 \\ 2y=3x \end{cases}$$

obtenemos $y=\frac{24}{5}$ y $y :(6-y)=\frac{24}{5} : \frac{6}{5}$ entonces $24 : 6=4 : 1$.

7) En la suma que se muestra abajo, letras diferentes representan dígitos diferentes. El número de cinco dígitos que representa SERVE es: $VCR+VCCT=SERVE$

(a) $S=1, E=1, V=9, C=4, R=2$

(b) $S=1, E=0, V=9, C=4, R=3$

(c) $S=2, E=0, V=7, C=4, R=3$

(d) $S=1, E=0, V=9, C=3, R=3$

(e) Ninguna de las anteriores

Solución:

$S=1, E=0, V=9, C=4, R=3$, de ahí que $SERVE = 10390$.

8) Pedro emprendió una caminata a un pueblo vecino de Bucaramanga. El primer día viajó $\frac{1}{3}$ de lo que tenía que recorrer, el segundo $\frac{1}{3}$ del resto de la distancia, el tercer día viajó $\frac{1}{3}$ de la distancia que le quedaba y todavía le quedaban 32 km por recorrer. La distancia en kilómetros de Bucaramanga al pueblo al que viaja Pedro es:

(a) 64 (b) 216 (c) 864 (d) 108 (e) 32

Solución:

Primer día $\frac{1}{3}$, segundo día $\frac{1}{3}$ de $\frac{2}{3}$, tercer día $\frac{1}{3}$ de $\frac{4}{9}$. Entonces faltan por recorrer $\frac{8}{7}$ de la distancia dado que $\frac{1}{3}+\frac{2}{9}+\frac{4}{27}=\frac{8}{27}$ y como aún quedan 32 kilómetros por recorrer entonces $\frac{8}{27}\cdot x = 32$, donde x es la distancia por recorrer, resolviendo la ecuación obtenemos $x = 108$ Km.

9) Un club colegial tiene 18 miembros, de los cuales 10 son hombres y 8 mujeres. El administrador del club es uno de los hombres. Se va a formar un comité de 5 miembros, donde debe estar el administrador. El número de comités que se pueden formar de tal manera que tengan 2 mujeres y 3 hombres es:

(a) 1008 (b) 784 (c) 1260 (d) 5004 (e) 630

Solución:

De las ocho mujeres dos conforman el comité es equivalente a $\binom{8}{2}$. De los diez hombres, uno es el administrador quien debe estar integrando el comité entonces quedan nueve hombres para conformar el comité de dos hombres así $\binom{9}{2}$. Ahora por el principio fundamental de conteo se tiene que $\binom{8}{2}\cdot\binom{9}{2}=28\cdot 36=108$. Es decir se pueden formar 108 comités de tal forman que tengan 2 mujeres y 3 hombres.

10) Se tiene una cubeta llena de agua y se introduce un ladrillo que desalojó 54 centímetros cúbicos de agua. Si el largo del ladrillo es el doble del ancho y el ancho y el alto son iguales, las dimensiones largo, ancho y alto del ladrillo respectivamente son:

(a) 6 cm, 9 cm y 1 cm (b) 3 cm, 6 cm y 3 cm (c) 6 cm, 3 cm y 3 cm

(d) 3 cm, 3 cm y 6 cm (e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Como al sumergir en el agua, el ladrillo desaloja $54cm^3$ de agua, entonces el volumen del ladrillo es de $54cm^3$. Sabiendo que $V=54=(2\cdot 3)\cdot 3\cdot 3cm^3$ y como el alto y el ancho son iguales, y el largo es el doble del ancho entonces las dimensiones del ladrillo son ancho 3 cm, alto 3 cm y largo 6 cm.

11) En Colombia, una placa de automóvil contiene tres letras del alfabeto (26 letras) seguidas

de tres dígitos. El número de placas que hay si se permite repetir tanto las letras como los dígitos es:

(a) $26^3 \times 10^3$ (b) $3^{26} \times 3^{10}$ (c) $(26^3)+(10^3)$ (d) $26^3 \times 10^3$ (e) $3\times 26\times 3\times 10$

Solución:

Dado que el alfabeto es de 26 letras se tiene que el número de placas que contiene 3 letras y 3 dígitos seguidos es $26\cdot 26\cdot 26\cdot 10\cdot 10\cdot 10$ ya que permite repeticiones. (Cada letra tiene 26 posibilidades y cada dígito 10 opciones).

12) Dos lados de un triángulo miden 120 cm y 130 cm. De las siguientes, la longitud en cm del tercer lado no puede ser:

(a)40 (b)99 (c)100 (d)150(e) 260

Solución:

Por la desigualdad triangular, la longitud del lado que falta debe medir menos de 250 cm por lo tanto, la longitud no puede ser 260 cm.

Problemas y Soluciones Nivel Avanzado

1) El número de enteros positivos que no exceden a 70, que son divisibles por 2 y 3 es:

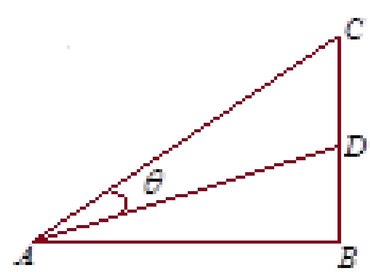
(a) 47 (b) 36 (c) 10 (d) 11 (e) 58

Solución.

Recordar que el número de múltiplos del entero positivo p que son menores o iguales al entero positivo q es $\left\| \frac{p}{q} \right\|$, donde $\|x\|$ es el mayor entero que es menor o igual a x. Por lo tanto $\left\|\frac{70}{2}\right\| = 35$ y $\left\|\frac{70}{3}\right\| = 23$, así los múltiplos de 2 y 3 son $\left\|\frac{70}{6}\right\| = 11$.

2) En la figura, el ángulo $\hat{A}BC$ es rectángulo y las longitudes de los segmentos $\overline{BD}$ y $\overline{DC}$ es 1. La longitud del segmento AB es 2. El valor de $\tan(\theta)$ es:

(a) $\frac{1}{3}$ (b) $\frac{1}{2}$ (c) $\frac{2}{3}$ (d) $\frac{3}{2}$ (e) $\frac{1}{5}$



Solución:

Observe que el triángulo ABC es rectángulo e isósceles y la medida de $\hat{C}AB = \frac{\pi}{4}$, dado que $\tan(\hat{C}AB) = 1$. Por otra parte, el triángulo ABD es rectángulo y $\tan(\hat{D}AB) = \frac{1}{2}$. Aplicando la fórmula $\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \cdot \tan y}$, obtenemos que $\tan\theta = \frac{1}{3}$.

3) ¿Cuántos números de 1 al 1000 son cuadrados perfectos?

(a) 25 (b) 30 (c) 31 (d) 35 (e) 21

Solución:

El mayor cuadrado menor que 1000 es $961 = 31^2$, entonces cada uno de los siguientes cuadrados es menor que 1000 : $1^2, 2^2, 3^2, 4^2, 5^2, \cdots, 31^2$, en total hay 31 cuadrados perfectos entre 1 y 1000.

4) Sea f una función cuyo dominio y recorrido es el conjunto de los números naturales. Si f se define por $f(1) = 1$ y $f(n) = (n-1)f(n-1)$, el valor de $f(4)$ es:

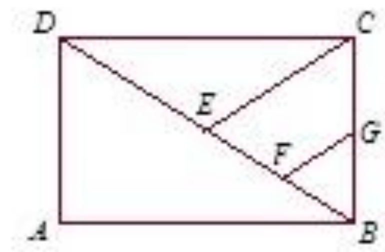
(a) 2 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Solución:

Observe que $f(2) = (2-1)f(1) = 1$, dado que $f(1) = 1$, $f(3) = (3-1)f(2) = 2$, de ahí que $f(4) = 3 \cdot f(3) = 3 \cdot 2 = 6$.

5) Sea $ABCD$ un rectángulo. Sea E el punto medio del segmento $\overline{BD}$, F el punto medio del segmento $\overline{EB}$ y G el punto medio del segmento $\overline{BC}$. ¿Qué fracción del área del rectángulo

$ABCD$ es el área del triángulo BGF ?



(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{1}{16}$ (d) $\frac{1}{8}$ (e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Como E es el punto de intersección de las diagonales del rectángulo $ABCD$, la altura del triángulo ECD es precisamente $\frac{1}{2}BC$. Su área es por lo tanto $\frac{1}{4}(BC)(CD)$. Así el área del triángulo BCE es igual a $\frac{1}{2}(BC)(CD)-\frac{1}{4}(BC)(CD)=\frac{1}{4}(BC)(CD)$. Dado que F y G sonlos puntos medios de los lados $\overline{BE}$ y $\overline{BC}$ respectivamente se tiene que los triángulos BCE y BGF son semejantes, la longitud de la altura del triángulo BCE , H y la longitud del segmento $\overline{FG}$ es la mitad de la longitud del segmento $\overline{CE}$, por lo tanto el área del triángulo BCE es:

$$\frac{1}{2}(CE)H = 2(FG)\frac{1}{2}H = 4(\frac{1}{2}(FG)\cdot h) = \frac{1}{16}(BC)(CD) = \frac{1}{2}(FG)\cdot h.$$

6) El número de formas distintas en que se pueden colocar 15 pelotas en una fila, si 4 son rojas, 3 son amarillas, 6 son negras y 2 azules es:

(a) $15\times14\times13\times12\times11$ (b) $15\times14\times13\times12\times11\times10$ (c) $15\times14\times13\times11\times10\times7\times3$ (d) $15\times14\times13$ (e) Ninguna de las anteriores

Solución:

El número de formas de colocar las 15 pelotas con las condiciones dadas es $\binom{15}{4}\cdot\binom{11}{3}\cdot\binom{8}{6}\cdot\binom{2}{2}$, desarrollando los combinatorios tenemos que el número pedido es $3\times7\times10\times11\times13\times14\times15$.

Otra Solución:

Queremos contar el número de permutaciones de 4 elementos (pelotas azules, rojas, amarillas y negras), tales que las azules son 4, las rojas 3, las amarillas 6 y las negras 2. Por lo tanto tenemos:

$$P_4^{4,3,6,2} = \frac{(4+3+6+2)!}{4!3!6!2!} = 3\times7\times10\times11\times13\times14\times15$$

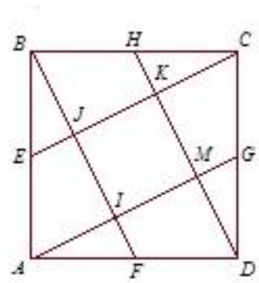
7) La cantidad de valores de x que hacen que la expresión $\frac{x+98}{x+18}$ sea un número entero es:

(a) 18 (b) 20 (c) 80 (d) 10 (e) 5

Solución:

La expresión $\frac{x+98}{x+18}$ se puede escribir como $1+\frac{80}{x+18}$. Existen 20 divisores enteros de 80, luego hay 20 posibles valores para x.

8) Si en la figura, el cuadrado $ABCD$ tiene de lado 4 cm, la superficie del cuadrado $IJKM$ es:



(a) $\frac{1}{5}$ (b) $\frac{4}{5}$ (c) $\frac{16}{5}$ (d) $\frac{12}{5}$ (e) $\frac{2}{5}$

Solución:

Al prolongar los segmentos $\overline{CE}, \overline{AG}, \overline{BF}$ y $\overline{DH}$. Podemos observar que el área cuadrado $IJKM$ es $\frac{1}{5}$ del área del cuadrado $ABCD$ y dado que área del cuadrado $ABCD$ es $16cm^2$, entonces $A(IJKM) = \frac{16}{5}cm^2$.

9) Un hombre nacido en la primera mitad del siglo diecinueve, tenía x años en él año x^2. Entonces él nació en:

(a) 1849 (b) 1825 (c) 1812 (d) 1836 (e) 1806

Solución:

Se trata de encontrar un entero cuyo cuadrado esté entre 1800 y 1850. Existe solamente uno y es $1849 = 43^2$, por lo tanto $1849 - 43 = 1806$ que es el año de nacimiento.

10) El último año del siglo XX fue especial. Existen enteros positivos a y b tales que $1999 = a^2 - b^2$. Un valor de $a^2 + b^2$ es:

(a) 1998000 (b) 1998001 (c) 1999000 (d) 1995001 (e) 1996001

Solución:

Dado que 1999 es un número primo, entonces $a-b=1$ y $a+b=1999$, por lo tanto $a=1000$ y $b=999$, de ahí que $a^2+b^2=1998001$.

11) Sea $ABCD$ un rombo de lado 61 tal que sus diagonales AC y BD verifican que $AC=98+BD$. El área del rombo es:

(a) 2640 (b) 1320 (c) 660 (d) 1220 (e) 1200

Solución:

Del teorema de Pitágoras $\left(\frac{BD}{2}\right)^2+\left(\frac{AC}{2}\right)^2=61^2$, luego $(BD)^2+(98+BD)^2=(122)^2$ resolviendo la ecuación se tiene que las soluciones son {-120,22}, de donde solo $DB=22$ tiene sentido en el problema. Por otro lado, como el área del rombo es $\frac{AC\cdot DB}{2}=\frac{(98+DB)\cdot DB}{2}$ entonces sustituyendo el valor de $DB=22$, el área del rombo es 1320.

12) El número de formas que se puede expresar 5 como la suma de 4 enteros no negativos es:

(a) 35 (b) 23 (c) 20 (d) 70 (e) 56

Solución:

Nos piden hallar el número de soluciones de la ecuación $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 5$, con x_i (i=1, 2, 3,4) enteros no negativos, que es equivalente a hallar el número de combinaciones con repetición de 4 elementos tomados de 5 en 5 (CR_4^5) , como

$$CR_4^5 = \binom{5+4-1}{5} = \binom{8}{5} = 56$$

Problemas y Soluciones de la Prueba Selectiva Año 2009

Problemas y Soluciones Nivel Básico

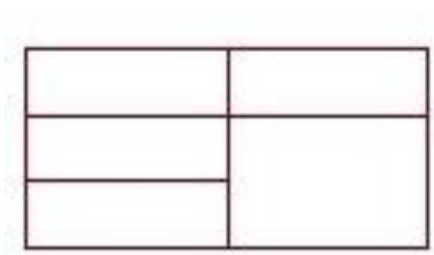
1) Mariano dobla una hoja de papel cinco veces siempre a la mitad, luego atraviesa el papel así doblado con un lápiz justo en el centro y finalmente desdobla el papel. El número de agujeros que aparecen en el papel desdoblado es:

(a) 5 (b) 16 (c) 10 (d) 25 (e) 32

Solución:

Dado que el papel se dobla siempre a la mitad y se dobla 5 veces entonces 2^5 representa el número de agujeros que aparecen en el papel desdoblado.

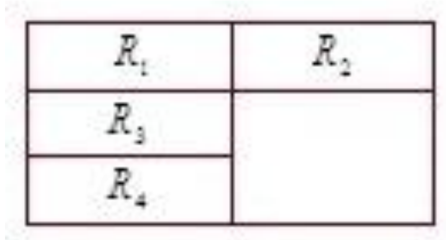
2) ¿Cuántos rectángulos hay en la figura?



(a) 9 (b) 11 (c) 6 (d) 12 (e) 21

Solución:

Enumerando los rectángulos como en la figura, tenemos que hay cinco rectángulos unitarios y siete formados por la unión de otros, así:



$R_1+R_2, R_1+R_3, R_3+R_4, R_2+R_5, R_1+R_3+R_4, R_3+R_4+R_5$ y $R_1+R_2+R_3+R_4+R_5$, donde R_i $:=$ Rectángulo i.

3) Si h hombres hacen un trabajo en d días, entonces $h+r$ hombres pueden hacer el trabajo en:

(a) $d+r$ días (b) $d-r$ días (c) $\frac{hd}{h+r}$ días (d) $\frac{d}{h+r}$ días (e) Ninguna de las anteriores.

Solución:

El trabajo requiere hd hombres-día, por tanto un hombre puede hacer el trabajo en hd días. Entonces $(h+r)$ hombres pueden hacer el trabajo en $\frac{hd}{(h+r)}$ días.

4) El volumen de un sólido rectangular, cuya base mide $12cm^2$ y dos de sus caras laterales miden 8 y 6 cm^2 respectivamente es:

(a) $756cm^3$ (b) $24cm^3$ (c) $9cm^3$ (d) $104cm^3$ (e) Ninguna de las anteriores

Solución:

Consideremos l al largo del sólido, a el ancho y h el alto del sólido, entonces $l \cdot a = 12, a \cdot h = 8, h \cdot l = 6$. Eliminado a se obtiene $l = \frac{3h}{2}$, ahora eliminado l tenemos $\frac{3h^2}{2} = 6 \Rightarrow h = 2$, de ahí que $l = 3$ y $a = 4$, o sea que $V = 24cm^3$.

5) Andrés miente los días miércoles, jueves y viernes y dice la verdad el resto de la semana. Pedro miente los domingos, lunes y martes y dice la verdad los otros días de la semana. Si ambos dicen mañana es un día en el cual yo miento. ¿Cuál día de la semana será mañana?

(a) Lunes (b) Martes (c) Miércoles (d) Jueves (e) Viernes

Solución:

Andrés dice la verdad el domingo, lunes, martes y sábado y miente los días miércoles, jueves y viernes. Pedro dice la verdad el miércoles, jueves, viernes y sábado, y miente los días domingo, lunes y martes.

Observe que las afirmaciones de Andrés y Pedro son compatibles sólo si las formulan el día martes. En este caso, Andrés está diciendo la verdad y Pedro está mintiendo. Luego mañana es miércoles.

6) Cinco caminos conducen a la cumbre de una montaña. ¿De cuántas maneras puede subir un turista a la montaña y descender de ella, si el ascenso y descenso tienen lugar por caminos diferentes?

(a) 25 (b) 10 (c) 20 (d) 9 (e) 15

Solución:

Como el ascenso y el descenso debe realizarse por caminos diferentes, tenemos que hay 5 maneras de subir y 4 maneras de bajar, por lo tanto del principio del producto hay $5\times 4=20$ maneras de subir y bajar a la cumbre de la montaña por caminos diferentes.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7) El perímetro de un triángulo isósceles rectángulo es $2p$. ¿Cuál es su área?

Solución:

Sea l cada uno de los dos lado congruentes del triángulo isósceles, por el teorema de Pitágoras el tercer lado sería $\sqrt{l^2+l^2}=\sqrt{2}l.$

De acuerdo a los datos del problema, si p es el perímetro del triángulo, tenemos que $2p=(2+\sqrt{2})l$, así el área del triángulo dada por $A=\frac{l^2}{2}$ será:

$$A=\frac{\left(\frac{2p}{2+\sqrt{2}}\right)^2}{2}=\frac{2p^2}{(2+\sqrt{2})^2}=p^2(3-2\sqrt{2}).$$

8) Tres animalitos, el gusano, el gato y el murciélago, amigos de Alicia en el País de las Maravillas, fueron acusados de haberse robado la sal y habérsela comido. Al ser interrogados, declararon:

Gusano: El gato se comió la sal.

Gato: Eso es cierto.

Murciélago: Nunca comí sal.

Si se sabe que al menos una de sus declaraciones es verdadera y al menos una es falsa. ¿Quién se comió la sal?

Solución:

Si el gusano se come la sal, la proposición 1 (la afirmación del gusano) es falsa, la proposición 2 (la afirmación del gato) es falsa y la proposición 3 es verdadera.

Si el gato de come la sal, la proposición 1 es verdadera, la proposición 2 es verdadera y la proposición 3 es verdadera.

Si el murciélago se como la sal, la proposición 1 es falsa, la proposición 2 es falsa y la proposición 3 es falsa.

De acuerdo al planteamiento del problema, al menos una de las declaraciones es verdadera y una es falsa. Por lo tanto la única opción que cumple la condición es que quien se comió la sal sea el gusano.

9) Para evitar la detección electrónica, un barco puede mandar mensajes cifrados a los barcos vecinos desplegando una serie de banderas de señal con distintas formas. Si se dispone de 12 banderas de esas, ¿Cuantos mensajes se pueden desplegar con un conjunto de 4 banderas?

Solución:

El problema consiste en contar el número de permutaciones (selecciones ordenadas) de 4 elementos tomados de un conjunto con 12 elementos (P_{12}^{4}). Luego se pueden desplegar $P_{12}^{4} = \frac{12!}{8!} = 11880$ mensajes distintos.

Problemas y Soluciones Nivel Medio

1) Los diámetros de dos círculos son 8 y 12 centímetros respectivamente. La razón entre el área del círculo menor y la del mayor es:

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{4}{9}$ (c) $\frac{9}{4}$ (d) $\frac{1}{2}$ (e)Ninguna de las anteriores

Solución:

Dado que el área del círculo está dada por $A = \pi r^2$, tenemos que para el círculo de diámetro 8 cm el área es $A_1 = \pi(4)^2 = 16\pi$, y para el círculo de diámetro 12 cm el área es $A_2 = \pi(6)^2 = 36\pi$, entonces la razón entre el área del círculo menor y la del mayor es $\frac{A_1}{A_2} = \frac{16\pi}{36\pi} = \frac{4}{9}$.

2) ¿Cuál es el máximo número de potencias de 5 que tiene el número $100!$?

(a)24 (b)23 (c)22 (d)21 (e)20

Solución:

El número de ceros en que termina el número $100!$, está asociado con el número de veces que este número es divisible por 10.

$100! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots 98 \cdot 99 \cdot 100 = 2^k \cdot 3^j \cdot 5^p \cdot 7^m \cdots, k, j, p, m \in \mathbb{Z}$.

Ocupémonos de hallar p, es decir el número de veces que 5 divide a $100!$: Los múltiplos de 5 entre 1 y 100 son $5, 10, 15, 20, 25, \ldots 95, 100$, en total 20, los múltiplos de $5^2 = 25$ entre 1 y 100 son $25, 50, 75, 100$ en total 4, y los múltiplos de 5^3 entre 1 y 100 son cero pues $125 > 100$, así $100!$ tiene a lo más 24 potencias de 5.

Otra forma de hallar los múltiplos de las potencias de 5 es la siguiente:

Los múltiplos de 5 menores o iguales a 100 son $\left\|\frac{100}{5}\right\| = 20$ y Los múltiplos de $5^2 = 25$ menores o iguales a 100 son $\left\|\frac{100}{25}\right\| = 4$.

3) ¿Cuál es la raíz quinta de 5^{5^5} ?

(a) $\sqrt{5^5}$ (b) $5^{(5^5-1)}$ (c) 5^{4^5} (d) $5^{5^{5/2}}$ (e) 5^5

Solución:

Utilizando las propiedades de la potenciación tenemos que:

$$\left((5^5)^5\right)^{1/5} = (5^5)^{5\cdot\frac{1}{5}} = 5^5.$$

4) Si un ángulo de un triángulo permanece invariable pero los lados que los incluyen se duplican, entonces el área queda multiplicada por:

(a) 2 (b) 3 (c) 4 (d) 6 (e) 8

Solución:

Los dos triángulos son semejantes y por tanto la razón de sus áreas es:

$$\frac{A_1}{A_2} = \frac{(2l)^2}{l^2} = 4.$$

5) Observe que

$3^2 + 4^2 = 5^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 = 13^2$

$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 = 85^2$

Cuál es el menor valor posible para la suma $x + y$ con x, y enteros positivos tales que

$$3^2 + 4^2 + 12^2 + 84^2 + x^2 = y^2$$

a) 289 (b) 250 (c) 425 (d) 103 (e) 795

Solución:

Relacionando las dos últimas ecuaciones tenemos que $y^2 - x^2 = 85^2$, pero $85 = 5 \times 17$ luego $(y-x)(x+y) = (5\times 17)^2$. Luego como la descomposición en factores primos es única tenemos las siguientes posibilidades:

$$\begin{cases} y - x = 1 \\ y + x = 85^2. \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 5 \\ y + x = 5\times 17^2. \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 5^2 \\ y + x = 17^2. \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 5^2\times 17 \\ y + x = 17. \end{cases} \quad \begin{cases} y - x = 5\times 17^2 \\ y + x = 5. \end{cases}$$

$$\begin{cases} y - x = 85^2 \\ y + x = 1. \end{cases}$$

Dado que $x > 84$ y $y > 85$, entonces $x + y > 166$. Por lo tanto, el menor valor posible para la suma pedida es $x + y = 17^2 = 289$.

6) Si r y s son las raíces de $x^2 - px + q = 0$ entonces $r^2 + s^2$ es igual a:

(a) $p^2 + 2q$ (b) $p^2 - 2q$ (c) $p^2 + q^2$ (d) $p^2 - q^2$ (e) p^2

Solución:

Teniendo en cuenta el producto notable $(r+s)^2 = r^2 + 2rs + s^2$, tenemos que $r^2 + s^2 = (r+s)^2 - 2rs$. Por otra parte, si r y s son las raíces de $x^2 - px + q = 0$, entonces $rs = q$ y $r + s = p$, de ahí que $r^2 + s^2 = p^2 - 2q$.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7) Un bosque tiene 528 árboles. Si el primero de enero se tumba un árbol y cada día sucesivo se tumba uno más que el día anterior. ¿En qué fecha se acabará el bosque?

Solución:

Dado que $1+2+3+\ldots+n = \dfrac{n(n+1)}{2}$, entonces se tiene que $n^2 + n = 2(528)$, es decir que $n^2 + n - 1056 = (n+33)(n-32) = 0$, así que dado que n representa el número de días, éste debe ser un número natural por lo tanto la única solución para la ecuación $n^2 + n - 1056 = 0$ en este caso es $n = 32$, esto significa que el bosque se acabara en 32 días y como inicia en enero que tiene 31 días, entonces el ultimo día es el primero de febrero.

8) Una solución de la ecuación $x^3 - 7x + 6 = 0$ es $x = 1$. ¿Cuál es la suma de las otras soluciones?

Solución:

Dado que $x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x^2 + x - 6)$ y $(x^2 + x - 6) = (x+3)(x-2)$ entonces $x_1 = -3, x_2 = 2$ esto implica que $x_1 + x_2 = -1$.

9) El Sr. Blanco, el Sr. Rojo y el Sr. Azul se encuentran en un camino. Qué curioso, dice el que lleva la corbata roja, los colores de nuestras corbatas corresponde a nuestros apellidos, pero ninguno lleva el color del propio. Tiene usted razón, comenta el Sr. Blanco. ¿Cuál es el color de la corbata del Sr. Azul?

Solución:

Las únicas opciones del señor azul son blanca o roja para su corbata. Si la corbata del señor azul es blanca entonces la del señor rojo es azul y la del señor blanco es roja. Si la corbata del señor azul es roja, entonces la del señor blanco es azul y la del señor rojo es blanca. El señor blanco no puede llevar la corbata roja ni la del color de su apellido por la información del problema, por lo tanto la corbata del señor azul es roja.

Problemas y Soluciones Nivel Avanzado

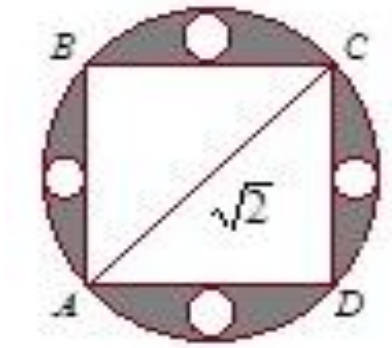
1) Consideremos el número natural formado por los primeros 2007 números naturales, es decir: $1234567891011\cdots 200520062007$. El número de dígitos que tiene ese número es:

(a)4032 (b)6921 (c)7001 (d)6732 (e)2889

Solución:

Para contar los dígitos del número natural dado, basta separar en 4 grupos los dígitos que lo forman. Los primeros nueve números son 9 dígitos. Los números entre 10 y 99 son 90 de ellos y por lo tanto 189 dígitos. Los números entre 100 y 999 son 900 de ellos y por lo tanto $3\cdot 900=2700$ dígitos. Los números entre 1000 y 2007 son 2008 de ellos y por lo tanto $4\cdot 2008=4032$ dígitos. En total $9+180+2700+4032=6921$ dígitos.

2) Un fabricante de turrones decide embalar sus productos en cajas circulares de $\sqrt{2}$ metros de diámetro, tal y como se muestra en la figura. Si la parte sombreada representa la parte ocupada por el papel de embalaje, la superficie útil para el turrón es:



(a) $1+\frac{\pi\sqrt{2}-1}{4}$ (b) $1+\pi(\frac{\sqrt{2}-1}{4})^2$ (c) $1+\pi(\frac{\sqrt{2}-1}{2})^2$ (d) $\pi(\frac{\sqrt{2}}{2})^2$ (e) $1-2\pi$

Solución:

Sea E el centro de la circunferencia y F el punto medio del segmento AD. De acuerdo a la figura y la información del problema tenemos que: El área del círculo está dada por $\pi\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2=\frac{1}{2}\pi$ unidades cuadradas. El área del cuadrado es 1 unidad cuadrada. Ahora el área comprendida entre el círculo y el cuadrado está dada por (área del círculo - área del cuadrado) $\frac{1}{2}\pi-1$ unidades cuadradas. Por otro lado la altura del triángulo AEF está dada por $\sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$.

El radio de los círculos pequeños es $\dfrac{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{2}\right)}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}-1}{4}\right)$. De ahí que el área de los cuatro círculos pequeños es: $4\left[\pi\left(\frac{\sqrt{2}-1}{4}\right)^2\right]=\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)^2$.

Finalmente, la superficie útil para el turrón es el área del cuadrado más el área de los 4 círculos, así tenemos un área útil de $1+\frac{\pi}{4}\left(\sqrt{2}-1\right)^2$ unidades cuadradas.

3) Si x, y son enteros positivos y $x+y+xy=34$ entonces $x+y$ es igual a:

(a) 10 (b) 12 (c) 20 (d) 34 (e) No se puede determinar

Solución:

Observe que $x+y+xy+1=35$ y por lo tanto $x(y+1)+(y+1)=(x+1)(y+1)=35$, las únicas posibilidades son 5 y 7, esto implica que $x+y=10$.

4) Un número capicúa es un número natural que es igual leerlo de izquierda a derecha que de derecha a izquierda, como por ejemplo 838 y 43634. Teniendo en cuenta que cero no puede quedar como primer dígito. ¿Cuántos números capicúas de tres dígitos existen?

(a) 10 (b) 81 (c) 90 (d) 99 (e) 100

Solución:

Teniendo en cuenta que cero no puede quedar como primer dígito, entonces existen 9 dígitos para las posiciones de las unidades y las centenas y para las decenas hay 10 dígitos, o sea que existen $9 \cdot 10 = 90$ números capicúas de tres dígitos por el principio fundamental de conteo.

5) La gráfica de la recta $2x-2y+1=0$ interseca a la gráfica de la curva $y=x^2$ en los puntos A y B. La abscisa de los puntos A y B son la soluciones de la ecuación:

(a) $2x^2-2x-1=0$ (b) $2x^2+1=0$ (c) $2x^2-1=0$ (d) $x^2-2x+1=0$ (e) $2x+1=0$

Solución:

Resolvamos la ecuación lineal en términos de x, así: $y=x-\frac{1}{2}$, sustituyendo y en la ecuación cuadrática obtenemos $2x^2-2x+1=0$.

6) Un círculo y un cuadrado tienen el mismo perímetro, entonces:

(a) Sus áreas son iguales. (b) El área del círculo es mayor. (c) El área del cuadrado es mayor. (d) El área del círculo es π veces (e) Ninguna de las anteriores. el área del cuadrado.

Solución:

Para un perímetro dado, el círculo tiene el área máxima ó $p = 2\pi r, r = \frac{p}{2\pi}$, en estos términos tenemos que el área del círculo mayor $A_1 = \frac{p^2}{4\pi}$, ahora si el perímetro es $p = 4l$ entonces $l = \frac{p}{4}$ y por lo tanto el área del cuadrado es $A_2 = \frac{p^2}{16}$, dado que $4\pi < 16$ se tiene que $A_1 > A_2$. Es decir el área del círculo es mayor.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7) Si en la fórmula $C = \frac{en}{R+nr}$, n aumenta mientras que e, R y r se conservan constantes. ¿Qué se puede afirmar de C?

Solución:

Si $C = \dfrac{e \cdot n}{R + n \cdot r}$, dividiendo entre n tenemos que $C = \dfrac{e}{\frac{R}{n} + r}$, entonces si n aumenta $\frac{R}{n}$ disminuye y en consecuencia $\frac{R}{n} + r$ disminuye. Por lo tanto C aumenta.

8) Dos corredores A y B parten simultáneamente en viaje de una ciudad a otra distantes 60 kilómetros. La velocidad de A es 4 kilómetros por hora, menor que la de B. Después de llegar B a la segunda población y regresar de ésta se encuentra con A a 12 kilómetros. ¿Cuál era la velocidad promedio de A?

Solución:

Sean V_A y X_A la velocidad y la distancia recorrida del corredor A y sean V_B y X_B la velocidad y la distancia recorrida del corredor B. Como que $V_B = V_A + 4$ y los corredores A y B emplean el mismo tiempo (esto es $\frac{X_A}{V_A} = \frac{X_B}{V_B}$), se tiene que $\frac{48}{V_A} = \frac{72}{V_A+4}$ de donde $V_A + 4 = \frac{3}{2}V_A$. De ahí que $V_A = 8$ Km/hr.

9) ¿Cuántos diseños diferentes se pueden hacer si se acomodan en línea recta cinco pelotas blancas y tres negras, de tal manera que no estén dos pelotas negras juntas?

Solución:

De acuerdo al planteamiento, dos pelotas negras no pueden quedar juntas, así que existen $\binom{6}{3} = 20$ diseños diferentes.

Problemas y Soluciones de la Prueba Final Año 2009

Problemas y Soluciones Nivel Básico

1) Cada letra representa un número en el siguiente arreglo. La suma de cualesquiera tres números en posiciones consecutivas es 18. ¿Cuánto vale H?

3	*B*	*C*	*D*	*E*	8	*G*	*H*	*I*

Solución:

Consideremos el sistema

$$\begin{cases} 3+B+C=18 \\ B+C+D=18 \\ D+E+8=18 \\ E+8+6=18 \\ 8+G+H=18 \end{cases}$$

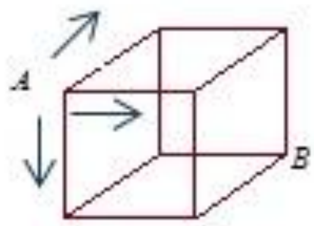
resolviendo tenemos $B+C=15, D=3, E=7, G=3, H=7$ es decir el valor numérico para H es 7.

2) Una rana salta sobre la recta numérica. Parte de cero con saltos de longitud 7 y 11 alternadamente, es decir, cae en $7,18,25,36,\ldots$. ¿Cuál es el punto más cercano a 900 en el que la rana cae en alguno de sus saltos?

Solución:

Dado que la rana cae en $7,18,25,36,\cdots$ se puede concluir que cada 2 saltos, la rana avanza 18 metros y $\frac{900}{18}=50$, entonces en su salto 100, la rana cae en el número 900. El punto más cercano a 900 es precisamente 900.

3) Una hormiga se mueve por las aristas de un cubo del extremo A al extremo B como se muestra en la figura. Si solo se le permite moverse hacia la derecha, hacia abajo y hacia atrás, ¿Cuántos caminos diferentes tiene para hacer dicho recorrido?



Solución:

Inicialmente se tiene 3 opciones para escoger. Por cualquier camino que escoge siempre va a tener dos caminos para seleccionar. Finalmente independiente de cual de los dos caminos escoja va a quedar en una posición donde hay un único camino que lo lleva al punto B. En consecuencia el número de caminos es $3\times2\times1=6$.

4) Están 4 personas jugando un juego con las siguientes reglas:

a) El primero puede sentarse (si está de pie) o pararse (si está sentado), en cualquier jugada.
b) El segundo puede sentarse o pararse únicamente cuando el primero está de pie.
c) El tercero puede sentarse o pararse únicamente cuando el primero esté sentado y el segundo de pie.
d) El cuarto puede cambiar de posición únicamente cuando el tercero esté de pie y los demás (primero y segundo) estén sentados.

Además en cada jugada sólo un jugador cambia de posición. Si al comenzar el juego todos están sentados, ¿cómo hacemos para que al final todos los jugadores estén de pie?

Solución:

Las jugadas deben realizarse en el siguiente orden:

Primera jugada: el primero se pone de pie, segunda jugada: el segundo se pone de pie, tercera jugada: el primero se sienta, cuarta jugada: el tercero se pone de pie, quinta jugada: el primero se pone de pie, sexta jugada: el segundo se sienta, séptima jugada: el primero se sienta, octava jugada: el cuarto se pone de pie, novena jugada: el primero se pone de pie, décima jugada: el segundo se pone de pie.

Por lo tanto, a las diez jugadas todos están de pie.

5) ¿Cuantos enteros hay entre 2008^2 y 2009^2 (sin incluir estos dos números)?

Solución:

$2009^2 = 4036081$ y $2008^2 = 4032064$, haciendo la resta obtenemos $4036081 - 4032064 = 4017$.

Otra Solución:

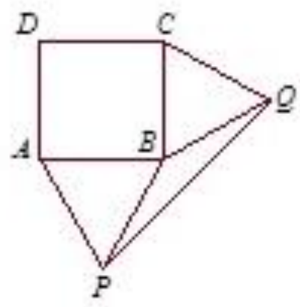
Por diferencia de cuadrados tenemos que

$2009^2 - 2008^2 = (2009 + 2008)(2009 - 2008) = 4017$.

6) $ABCD$ es un cuadrado, P y Q son puntos fuera del cuadrado, tales que los triángulos ABP y BCQ son equiláteros. ¿Cuánto mide el ángulo PQB?

Solución:

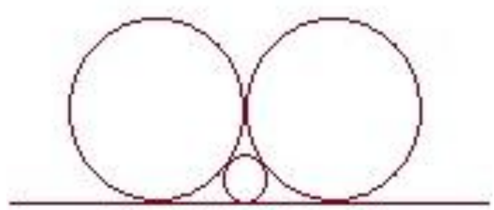
Construimos la figura como se indica.



Dado que los triángulos ABP y BCQ son equiláteros, sus ángulos miden todos 60°. Se construye el triángulo isósceles PQB y su ángulo inscrito mide 150°, por lo tanto el ángulo $\hat{P}QB$ mide 15°.

Problemas y Soluciones Nivel Medio

1) Se tienen dos circunferencias tangentes entre sí de radio dos y una línea tangente a las dos, además hay una tercera circunferencia tangente a las dos primeras y a la recta como se muestra en el dibujo. ¿Cuál es el radio de la tercera circunferencia?

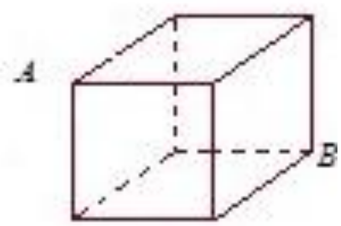


Solución:

Denotemos por O_1 y O_3 a los centros de las circunferencias de radio 2 y por O_2 al centro de la circunferencia tangente a ellas. Sea p el punto de tangencia de las circunferencias O_1 y O_3. Por propiedad de la tangente a una circunferencia se tiene que $O_2 \perp \overline{O_1P}$ y así el triángulo O_1PO_2 es rectángulo.

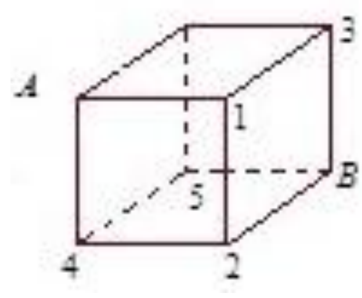
De otro lado $\overline{O_1Q} = 2, \overline{O_1P} = 2$ y $\overline{O_1Q} \| \overline{PO_2}$, entonces $PO_2 = 2 - r$ y $O_1O_2 = 2 + r$, donde r es el radio de la circunferencia 2. Finalmente, aplicando el teorema de Pitágoras tenemos que $(2+r)^2 = 2^2 + (2-r)^2$, de donde se deduce que $r = \frac{1}{2}$.

2) ¿Cuantos caminos distintos hay para pasar del vértice A al vértice B sobre las aristas del cubo en el siguiente dibujo, si no se vale pasar dos veces por el mismo vértice?



Solución:

Observemos que existen tres posibilidades para salir de A y que cada una de ellas tiene el mismo número de caminos para llegar a B, por lo que basta con analizar una de éstas. Supongamos entonces que llegamos al punto 1 como en la figura, tenemos dos posibilidades para ir, hacia el vértice 3 o hacia el 2. Analizando la del vértice 2, la otra es similar.



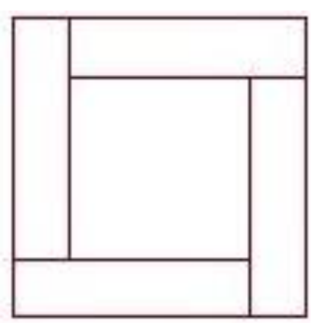
Si estamos allí entonces podemos llegar directamente a B o al vértice 4. Del vértice 4 únicamente podemos llegar al 5, de donde sólo quedan dos caminos para llegar a B, entonces se tienen $2\cdot 3=6$ caminos que salen de A por el vértice 1. Para salir de A teníamos tres posibilidades, entonces en total existen $3\cdot 2\cdot 3=18$ posibles caminos.

3) Si n es un número entero impar no divisible entre cinco, ¿Cuál es el último dígito de n^{100} ?

Solución:

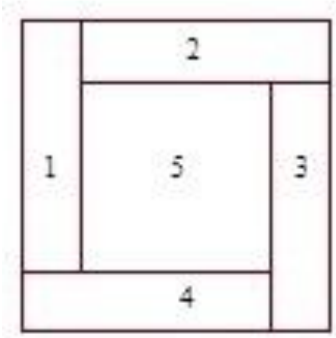
Sea $n=2k+1$ y dado que n no es divisible por 5 entonces las posibilidades para las unidades de n son 1, 3, 7, y 9. Ahora, como $100\equiv 0(\mathrm{mod}4)$ o sea 100 es divisible por 4, entonces $n^{100}=(n^4)^{25}$ y si probamos con cada una de las posibles unidades, tenemos que $(1)^4$ termina en 1 y 3^4 termina en 1, 7^4 termina en 1 y 9^4 termina en 1, por lo tanto para cualquiera de estos, el número n^{100} siempre terminará en 1.

4) El cuadrado $ABCD$ cuya área es $180cm^2$, se divide en 4 rectángulos congruentes y un cuadrado. Cada rectángulo y el cuadradito tienen la misma área. ¿Cuánto miden los lados de los rectángulos?



Solución:

Enumeremos las figuras por 1, 2, 3, 4, y 5,



como las figuras tiene la misma área y el área total es $180cm^2$ entonces cada figura tiene un área de $36cm^2$. Sea a el lado del cuadrado de la figura 5, entonces tenemos que $a^2 = 36 \Rightarrow a = 6cm$. Sea b el ancho del rectángulo en la figura 1 (o figura 3), así se tiene que el lado del cuadrado completo es $a + 2b$ y por lo tanto $(a + 2b)^2 = 180$, entonces $b = \frac{\sqrt{180} - a}{2} = \frac{6\sqrt{5} - 6}{2} = 3\sqrt{5} - 3.$

5) Cuatro amigos deciden hacer una recolecta para una obra benéfica. El segundo da dos veces de lo que da el primero, el tercero da tres veces lo que da el segundo y el cuarto da cuatro veces lo que da el tercero. Si reunieron $\$26.400$, ¿cuánto dio el primero?

Solución:

Sea x el valor de lo que da el primero, se escribe lo que dio cada uno de los otros en términos de lo que da el primero se tiene que:

$x + 2x + 6x + 24x = 33x$, entonces si reunieron $\$26.400$, el primero dio $\$\frac{26.400}{33} = \$800 = x.$

6) Supongamos que $2001 = (n-2)^n (n+1)^{n-1} + 1$, ¿Cuál es el valor de n, si n es un número entero?

Solución:

Dado que $2000 = 2^4 \cdot 5^3$, y $2001 = (n-2)^n (n+1)^{n-1} + 1$ entonces se puede re-escribir $2000 = (n-2)^n (n+1)^{n-1}$, de manera tal que $n-2=2$ y $n+1=5$ de lo cual se concluye que $n=4$ para cada caso.

Problemas y Soluciones Nivel Avanzado

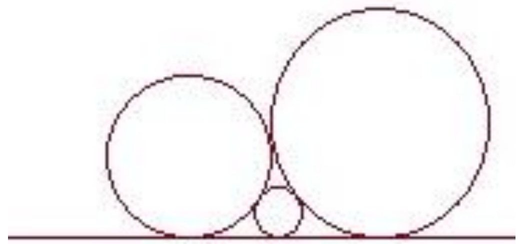
1) Supongamos que en la esfera de un reloj se altera arbitrariamente el orden usual de los números. Demuestre que cualquiera sea la permutación obtenida, siempre habrá una terna de números ocupando posiciones consecutivas de manera que la suma de los mismos sea mayor ó igual que 20.

Solución:

Sea $a_1, a_2, \cdots, a_{12}$, la permutación de los números $1, 2, \cdots, 12$. Consideremos las 12 sumas S_i de ternas de números de la permutación ocupando posiciones consecutivas, es decir: $S_1 = a_1 + a_2 + a_3; S_2 = a_2 + a_3 + a_4; \cdots S_{12} = a_{12} + a_1 + a_2$.

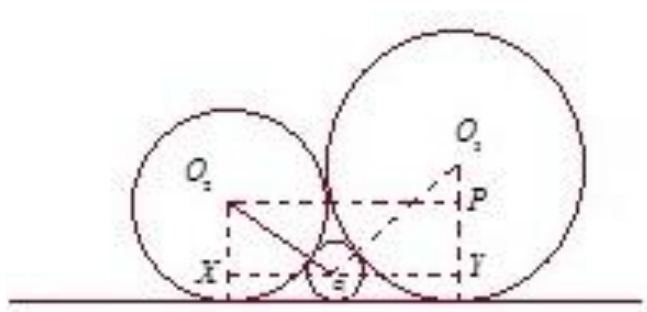
Note que cada número entre 1 y 12 aparece como sumando en exactamente 3 de estas sumas. (por ejemplo, a_3 aparece en S_1, S_2 y S_3). Luego al sumar todos los S_i tenemos que $\sum S_i = 3(1+2+\cdots+12) = 3 \cdot \frac{12 \cdot 13}{2} = 234$. Ahora dividiendo 234 por 12 vemos que el cociente es 19 y el residuo es 6. Luego del principio de las casillas algún sumando S_k es mayor o igual a 20, es decir existe k tal que $S_k = 20$.

2) Se tienen dos circunferencias tangentes entre sí, una de radio 2 y la otra de radio 3 y una línea tangente a las dos circunferencias. Si hay otra circunferencia tangente a las primeras dos y a la línea, como se muestra en el dibujo, ¿Cuál es el radio de la tercera circunferencia?



Solución:

Sean O_1 , O_2 y O_3 los centros de las circunferencias de radios r , 2 y 3 y sea XY una recta paralela a la recta tangente que pasa por $O1$, talque O_2X y O_3Y son perpendiculares a XY como se muestra en la figura.



Los triángulos O_1XO_2 y O_1YO_3 son rectángulos, luego del teorema de Pitágoras se tiene que: $(O_1X)^2 = (2+r)^2 - (2-r)^2 = 8r$, entonces $O_1X = 2\sqrt{2r}$ y $(O_1Y)^2 = (3+r)^2 - (3-r)^2 = 12r$, entonces $O_1Y = 2\sqrt{3r}$.

Trazando O_2P perpendicular a O_3Y tenemos que $O_2P = XO_1 + O_1Y$, de donde $O_2P = 2\sqrt{2r} + 2\sqrt{3r} = 2\sqrt{r}(\sqrt{2}+\sqrt{3})$. Como $O_3P = 1$ y $O_2O_3 = 5$, del teorema de Pitágoras $5^2 = 1^2 + (2\sqrt{r}(\sqrt{2}+\sqrt{3}))^2$, así que $24 = 4r(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2$, de donde $r = \frac{6}{5+2\sqrt{6}}$.

3) Calcula la suma de todas las fracciones $\frac{a}{b}$ tales que a y b son enteros positivos menores o iguales a 1000, y a es menor o igual a b.

Solución:

Se hace un análisis sobre los denominadores,

Si $b=1$ entonces $a=1$, así $\frac{a}{b}=\frac{1}{1}=\frac{2}{2}$.

Si $b=2$ entonces $a=1,2$, se tienen dos fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{2}{2}$, sumando tenemos $\frac{3}{2}$.

Si $b=3$ entonces $a=1,2,3$, se tiene 3 fracciones $\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}$, sumando tenemos $\frac{4}{2}$.

En general, para $b=k, k \in \mathbb{Z}^{+}$, con $k \leq 100$, hay k fracciones y su suma es $\frac{k+1}{2}$.

Luego, la suma total de las fracciones es:

$$
\begin{aligned}
\frac{2}{2}+\frac{3}{2}+\frac{4}{2}+\ldots+\frac{1001}{2} &= \sum_{k=1}^{1000}\frac{k+1}{2} \\
&= \frac{1}{2}\left(\sum_{k=1}^{1000}k+\sum_{k=1}^{1000}1\right) \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{(1000)(1001)}{2}+1000\right) \\
&= 250750.
\end{aligned}
$$

4) Un batallón de n soldados es tal que:

a) n es un número capicúa.

b) Si los soldados se forman de tres en tres, quedan dos soldados en la última fila; si se forman de cuatro en cuatro, quedan tres soldados en la última fila, y si se forman de cinco en cinco quedan cinco soldados en la última fila.

¿Cuál es el menor número de soldados que hay en el batallón?

Solución:

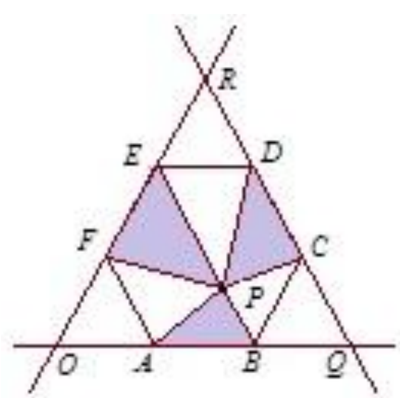
Dado que si se forman de cinco en cinco quedan cinco soldados en la última fila, entonces n es un múltiplo de cinco y como n es un número capicúa entonces también debe empezar por cinco.

Ahora, si el número 55, no cumple la condición que de tres en tres queden 2 soldados en la última fila. Al dividir 55 en grupos de a tres queda un sólo soldado en la última fila, entonces veamos, si alguno de los números $515, 525, 535, 595$ cumple con las otras condiciones; 515 dividido en grupos de a tres sobran dos, y al dividirlo en cuatro quedan tres. Por lo tanto, 515 es el menor número de soldados que hay en el batallón.

5) Sea P un punto interior de un hexágono regular. Se une P con cada vértice del hexágono, determinando así 6 triángulos, que coloreamos alternadamente de rojo y azul. Pruebe que la suma de las áreas de los 3 triángulos rojos coincide con la suma de las áreas de los 3 triángulos azules.

Solución:

Tracemos el hexágono regular con punto interior p.



Las rectas que pasan por los segmentos AB, CD y EF respectivamente, se cortan en O, Q y R. Note que los ángulos $\hat{O}$, $\hat{Q}$ y $\hat{R}$, miden 60°, ya que los ángulos $\hat{A}, \hat{B}, \hat{C}$, $\hat{D}, \hat{E}$ y

$\hat{F}$ miden 120°. Luego el triángulo OQR es isósceles y además se tiene que $OQ = 3AB, QR = 3DC$, y $RO = 3EF$. Ahora, si h es la altura del triángulo OPQ respecto a la base OQ, entonces el área del triángulo OPQ es $A(\Delta OPQ) = \frac{OQ \cdot h}{2} = \frac{3AB \cdot h}{2} = 3A(\Delta ABP)$. De igual forma se tiene que $A(\Delta QPR) = 3A(\Delta CDP)$ y $A(\Delta RPO) = 3A(\Delta EFP)$.

Luego tenemos que

$$\begin{aligned} A(\Delta OQR) &= A(\Delta OPQ) + A(\Delta QPR) + A(\Delta RPO) \\ &= 3A(\Delta ABP) + 3A(\Delta CDP) + 3A(\Delta EFP) \\ &= 3(\text{Area region azul}) \end{aligned}$$

Con una construcción similar, se prueba que $A(\Delta OQR) = 3(\text{Area region roja})$. Por lo tanto *Área región azul = Área región roja*.

6) ¿Para qué números enteros n se cumple que su último dígito sea el mismo que el último dígito de n^{2009}?

Solución:

Notemos que n y n^5 siempre terminan en el mismo dígito, por lo tanto n y n^{4k+1}, siempre finalizarán en el mismo dígito y como $2009 = 4(502) + 1$ entonces n y n^{2009} siempre finalizarán en el mismo dígito, para cada entero positivo n.

Problemas y Soluciones de la Prueba Clasificatoria Año 2010

Problemas y Soluciones Nivel Básico

1) ¿Cuántos números de cuatro dígitos son tales que contienen solamente los dígitos 1 y 2, y cada uno de estos dígitos aparece al menos una vez?

(a)10 (b)12 (c)14 (d)15 (e)16

Solución 1:

Contemos primero todos los números de cuatro dígitos en los cuales cada uno de los dígitos o bien es 1 o bien es un 2. Hay 2 posibilidades para cada uno de los cuatro dígitos de modo que hay en total $2\times2\times2\times2=16$ de tales números. Pero se deben excluir 1111 y 2222, dando un total de 14.

Otra solución:

Hagamos una lista de posibilidades donde se repita tres veces 2 y una vez 1 así tenemos,

$$2221, 2212, 2122, 1222$$

o sea 4 posibilidades.

Ahora donde se repita dos veces 2 y dos veces 1:

$$2211, 2121, 2112, 1221, 1212, 1122$$

o sea 6 posibilidades.

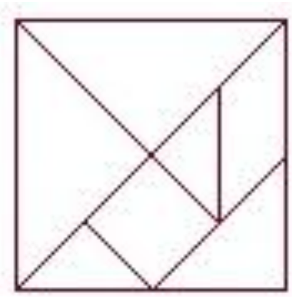
Luego donde tengamos tres veces 1 y una vez 2:

$$1112, 1121, 1211, 2111$$

o sea 4 posibilidades.

Así, el número total de posibilidades es $4+6+4=14$.

2) Se construye un rompecabezas llamado tangram recortando un cuadrado en 5 triángulos, un cuadrado y un paralelogramo tal como se muestra en la figura. El área del cuadrado original es de una unidad cuadrada. El área del paralelogramo, en unidades cuadrada es:



(a) $\frac{1}{8}$ (b) $\frac{1}{4}$ (c) $\frac{3}{10}$ (d) $\frac{1}{16}$ (e) $\frac{1}{6}$

Solución:

Notamos que el cuadrado original puede dividirse en 16 triángulos congruentes y el paralelogramo cuya área buscamos está compuesto por dos de estos triángulos, luego obtenemos:

$$\frac{\text{área del paralelogramo}}{\text{área del cuadrado}} = \frac{2}{16} = \frac{1}{8}$$

3) Mi calculadora está dañada. Sólo muestra la cifra en las unidades de la suma cuando efectuó una adición. Por ejemplo, $6+7$ produce 3 en la pantalla de mi calculadora. Conseguí que apareciera la sucesión de dígitos $8, 6, 40, 4, 4, 8, \ldots$ de la siguiente manera. Cada término después de la segunda es la suma, en mi calculadora, de los dígitos inmediatamente anteriores. ¿Cuál es el dígito que ocupa la posición 99 en la sucesión?

(a) 8 (b) 6 (c) 4 (d) 2 (e) 0

Solución:

La sucesión de dígitos que se genera es

$$8,6,4,0,4,4,8,2,0,2,2,4,6,0,6,6,2,8,0,8,(8,6,4)\ldots,$$

es decir la sucesión se repite después de 20 dígitos. El dígito que ocupa la posición 99 en la sucesión es el dígito que ocupa la posición 19 en la sucesión de 20, es decir el 0.

4) Si $\begin{array}{c|c} \mathrm{a} & \mathrm{b} \\ \hline \mathrm{c} & \mathrm{d} \end{array} = a \cdot d - b \cdot c$ ¿Cuál es el valor de $\begin{array}{c|c} 3 & 4 \\ \hline 1 & 2 \end{array}$?

(a) -2 (b) -1 (c) 0 (d) 1 (e) 2

Solución:

$3 \times 2 - 4 \times 1 = 6 - 4 = 2$

5) $100 \times 20{,}10 \times 2{,}010 \times 1000 =$

(a) $(2{,}010)^2$ (b) $(20{,}10)^2$ (c) $(201)^2$ (d) $(2010)^2$ (e) $(20100)^2$

Solución:

Agrupemos los factores como sigue (aplicando la propiedad asociativa)

$(100 \times 2010) \times (2010 \times 1000) = (2010) \times (2010) = (2010)^2$

6) Cada una de las letras w, x, y y z, representa un entero diferente del conjunto $\{1,2,3,4\}$, pero no necesariamente es ese orden. Si $\frac{w}{x} - \frac{y}{z} = 1$, entonces la suma de w y y es:

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Solución:

El único arreglo que sirve es $\frac{3}{1}-\frac{4}{2}=1$

Por lo tanto, $w+y=3+4=7$

7) Sea $PQRS$ una hoja cuadrada de papel. Se dobla la hoja hasta que P coincida con R y luego sin doblar, se dobla nuevamente hasta que Q coincida con S. El área de la figura que resulta es de $9\ cm^2$. El perímetro del cuadrado $PQRS$ es:

(a) 3 (b) 4 (c) 5 (d) 6 (e) 7

Solución:

Después de doblar el cuadrado dos veces, la figura que resulta es un triángulo isósceles de área $9\ cm^2$. Dado que hay 4 de tales triángulos en el cuadrado, se sigue que el área del cuadrado es de $36\ cm^2$. Por lo tanto el lado de $PQRS$ mide $6\ cm$ y el perímetro es $24\ cm$.

8) Hay dos bloques de oro, uno de los cuales pesa $\frac{3}{4}$ del otro. Si se coloca el bloque más pesado en uno de los platillos de una balanza, para equilibrar es necesario colocar en el otro platillo el otro bloque de oro y 215 gramos más. ¿Cuál es el peso en gramos del bloque más liviano?

(a) $\frac{860}{3}\ gr$ (b) $860\ gr$ (c) $215\ gr$ (d) $\frac{645}{4}\ gr$ (e) $645\ gr$

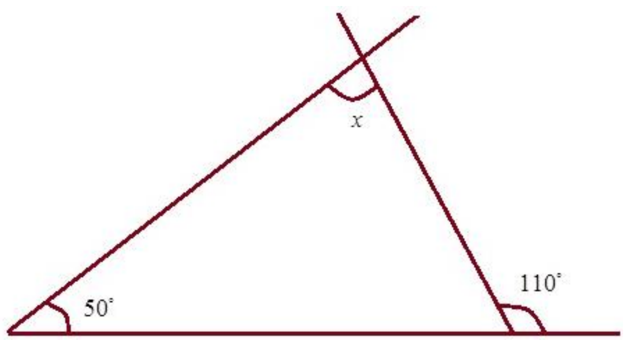
Solución:

Sea p el peso del bloque más pesado, entonces el bloque más liviano pesa $\frac{3}{4}p$. Luego

$p \le \frac{3}{4}p + 215$, de donde $p = 860\ gr$.

$\frac{3}{4}(860\ gr) = \frac{3}{2}(430\ gr) = 3(215\ gr) = 645\ gr$

9) En el diagrama, el valor de x es:



(a) $20º$ (b) $45º$ (c) $70º$ (d) $55º$ (e) $60º$

Solución:

Dado que el ángulo exterior de un triángulo es igual a la suma de los dos ángulos interiores obtenemos que

$$x + 50 = 110º \;\Rightarrow\; x = 60º$$

10) Una ventana tiene la forma de un cuadrado de lado $60\ cm$ con un segmento de círculo de radio $50\ cm$ montado encima. El segmento de círculo es menor que un semicírculo. ¿Cuál es la altura máxima en centímetros de la ventana?

(a) 70 (b) 80 (c) 85 (d) 90 (e) 100

Solución:

Trácese las líneas que se muestran en la figura donde L es el centro del arco de círculo y LR es el radio vertical. Luego, $LR = LN = 50$. Sea $LM = x$.

En el triángulo rectángulo $\angle LMN$

$LN^2 = LM^2 + MN^2$

$50^2 = x^2 + 30^2$

$x^2 = 40^2$

$x = 40$

MR mide $10\,cm$, de manera que la altura máxima es $60 + 10 = 70\,cm$.

11) Para enumerar las páginas de un libro, un tipógrafo ha empleado 207 números dígitos. El número de páginas que tiene el libro es:

(a) 106 (b) 104 (c) 105 (d) 207 (e) 103

Solución:

a) Del número 1 al 9 hay 9 dígitos
b) Del 10 al 99 hay 108 dígitos

Luego del 1 al 99 hay 189 dígitos para las primeras 100 páginas. Como se habían utilizado 207 dígitos para el total de páginas del libro, entonces si los dígitos del total de páginas restamos los dígitos de las primeras 100 tenemos: $207 - 189 = 18$, así quedarían 18 dígitos para las siguientes 100 páginas, sin embargo $18 \div 3 = 6$ serían las restantes páginas que quedan, entonces se tiene que el número de páginas es

$$100, 101, 102, 103, 104, 105$$

Luego el libro tiene un total de 105 páginas.

12) El resultado de la operación $1-2+3-4+\cdots-2010+2011$, donde el signo alterna entre $-$ y $+$ después de cada número es:

(a) -1005 (b) 2011 (c) 1006 (d) 2010 (e) -1006

Solución:

Tenemos que

$$1-2+3-4+\cdots-2010+2011$$

Así, si tomamos los números hasta 2010 se sigue

$$\Rightarrow (1-2)+(3-4)+(5-6)+\cdots+(2009-2010)$$

lo que nos lleva a

$$-1-1-1\cdots-1=-1005$$

Luego $-1005+2011=1006$.

Problemas y Soluciones Nivel Medio

1) Si $\left[a, b, c\right]$ representa la operación $\dfrac{a+b}{c}$, donde $c \neq 0$ ¿Cuál es el valor de la siguiente expresión?

$$\left[60, 30, 90\right], \left[2, 1, 3\right], \left[10, 5, 15\right]$$

(a) 0 (b) $0,5$ (c) 1 (d) $1,5$ (e) 2

Solución:

$$\frac{\left[60, 30, 90\right] + \left[2, 1, 3\right]}{\left[10, 5, 15\right]} = \frac{\frac{60+30}{90} + \frac{2+1}{3}}{\frac{10+5}{2}} = \frac{\frac{90}{90} + \frac{3}{3}}{\frac{15}{15}} = \frac{1+1}{1} = 2$$

2) Los tres lados de un triángulo tienen longitudes, $a\ cm$, $(a+1)\ cm$, $(a+2)\ cm$ Los valores posibles que a puede tomar son:

(a) $a > 0$ (b) $0 \leq a < 1$ (c) $a \geq 1$ (d) $0 < a < 2$ (e) $a = 1$

Solución:

Utilizamos el teorema que dice: *en todo triángulo, la suma de las longitudes de los lados menores es más grande que el lado mayor.*

Así, con a y $a+1$ los lados menores que el lado mayor, tenemos que:

$$a + (a+1) > a+2$$

$$2a + 1 > a + 2$$

$$a > 1$$

3) Consideramos el conjunto de los 17 primeros enteros positivos $\{1, 2, 3, \ldots, 17\}$. Hay que elegir dos números de este conjunto tales que la multiplicación de esos dos números sea igual a la suma de los restantes 15 números.

(a) 10 y 11 (b) 10 y 13 (c) 10 y 12 (d) 10 y 15 (e) 10 y 14

Solución:

Los números del 1 al 17 son: $1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16$ y 17.

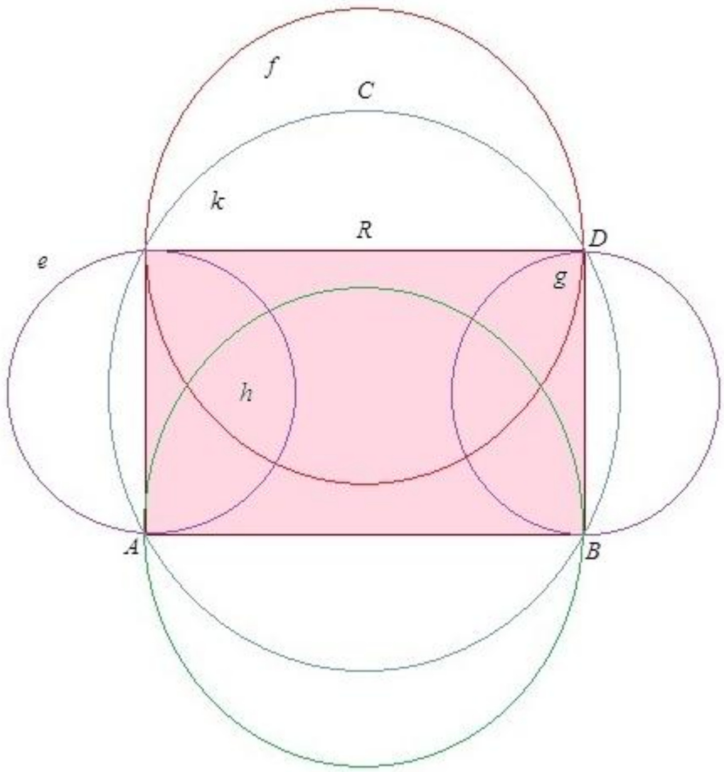
Tenemos que $\frac{n(n+1)}{2}$, nos da la suma de los primeros n-ésimos números. Así de los 17 primeros es $\frac{17(18)}{2} = 153$. Si tomamos a 10 y 13 como estos números obtenemos: $10+13=23$ y $10\times 13 = 130$.

Pero también, $153-23=130$, así que los números son 10 y 13.

4) Sea R un rectángulo. ¿Cuántos círculos que están en el mismo plano que R tienen un diámetro cuyos dos extremos son vértices de R?

(a) 1 (b) 2 (c) 4 (d) 5 (e) 6

Solución:



Los cuatro vértices determinan seis posibles diámetros a saber. Sin embargo, las dos diagonales son el mismo diámetro para un círculo, así se tiene que sólo hay 5 posibilidades.

5) Existen números positivos que tienen las siguientes propiedades:

- La suma de los cuadrados de sus dígitos es 50 y
- Cada dígito es mayor que el dígito a su izquierda,

El producto de los dígitos del mayor entero con ambas propiedades es:

(a) 7 (b) 25 (c) 36 (d) 48 (e) 60

Solución:

Para que la suma de los cuadrados de sus dígitos sea 50, debemos observar el conjunto $\{1,4,9,16,25,36,49\}$, el conjunto de los cuadrados menores que 50.

Para que la suma de algunos de estos números sea 50, tenemos estas opciones:

$1+49=50 \quad 1+4+9+36=36 \quad 9+16+25=50$

Los cuales corresponden a $17, 1236, 345$, respectivamente. El mayor de estos números es 1236, luego su producto es $1\times 2\times 3\times 6=36$.

6) Iris lanza cuatro dados (comunes de 6 caras) y resulta que el producto de los números que muestran las cuatro caras superiores de los dados es 144. ¿Cuál de los siguientes números no puede ser la suma de los números en las cuatro caras superiores?

(a) 14 (b) 15 (c) 16 (d) 17 (e) 18

Solución:

Cuando saque los cuatro dados es imposible sacar algún 5, pues 5 no divide a 144. Si saco 6, no pueden ser más de dos, pues $6^3=216>144$, a los más serían dos o uno. Entonces las únicas formas en que los cuatro dados pueden corresponder a una suma de 18 son:

- 18=4+4+4+6
- 18=2+4+6+6
- 18=3+3+6+6

Entonces ninguno de los respectivos productos es 144. Luego, si tomamos $144=6^2\times 2^2=6\times 6\times 2\times 2$, la suma de estos números nos da $6+6+2+2=16$.

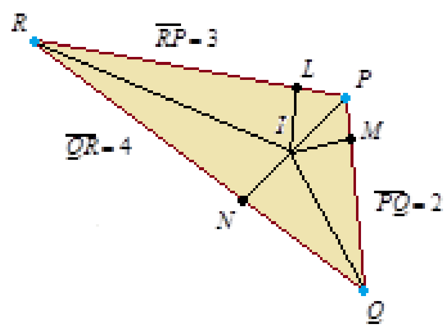
Así, que la respuesta es 16.

7) Las longitudes de los lados del triángulo PQR son $PQ=2$, $QR=3$ Y $RP=4$. Las bisectrices de los ángulos P y Q se intersecan en el punto I ¿Cuál es la razón entre el área

del triángulo PIQ y PQR ?

(a) $1 : 3$ (b) $1 : 4$ (c) $2 : 9$ (d) $2 : 11$ (e) $3 : 19$

Solución:



Trazamos las perpendiculares desde I a cada uno de los lados PQ, QR y RP . Sean N y M los puntos de intersección respectivamente, se sigue que los triángulos PIL, PIM, QIL, QIN son congruentes dado que en cada caso tienen dos ángulos y sus lados correspondientes son iguales.

Por lo tanto $IL = IN = LM$ (también, por propiedades de incentro I del ΔPQR), se sigue que cada uno, ΔPIQ, ΔQIR y ΔRIP tiene la misma altura, de modo que sus áreas son proporcionales a sus bases, es decir, $\Delta PIQ : \Delta QIR : \Delta RIP = 2 : 3 : 4$

Por lo tanto, se tiene la razón: $\dfrac{\Delta PIQ}{\Delta PQR} = \dfrac{2}{2+3+4} = \dfrac{2}{9}$

8) En el triángulo ABC, $\angle A = 60^{\circ}$, $\angle B = 45^{\circ}$ Y $AC = 30\ cm$. D es un punto del lado BC tal que AD es la bisectriz del ángulo A. Si b es la longitud en centímetros de AD. El valor de b es:

(a) $60\ cm$ (b) $75\ cm$ (c) $45\ cm$ (d) $30\ cm$ (e) $15\ cm$

Solución:

Sea D el pie de la bisectriz desde A en el triángulo ABC. Como la suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°, se sigue que $\angle ADC = 75^{\circ}$ de donde el triángulo ADC es isósceles y $AD = BC = 30$.

9) Alix selecciona un número de dos dígitos, luego resta el número que ella ha escogido de 200 y finalmente duplica este último resultado. El mayor número que Alix puede obtener como respuesta es:

(a) 398 (b) 380 (c) 202 (d) 220 (e) 200

Solución:

Se obtiene el mayor resultado final si se selecciona el menor número de dos dígitos para luego restarlo de 200. El menor número de dos dígitos es 10, de modo que el mayor resultado posible es $(200-10)(2)=380$.

10) Los números de 1 a 2010 se han organizado en columnas de la siguiente forma:

1	2	3	4	5	6	7	...	?
1	2	3						
	4	5	6					
		7	8	9				
			10	11	12			
								2010

¿En qué columna se encuentra el 2010?

(a) 668 (b) 669 (c) 670 (d) 671 (e) 672

Solución:

Fila	**Número de elementos por columna**
$a_1 = 1,2,3$	$a_1 = 3$
$a_2 = 4,5,6$	$a_2 = 3$
$a_3 = 7,8,9$	$a_3 = 3$
$a_4 = 10,11,12$ . . .	$a_4 = 3$ . . .

$2010 = 3(670)$. Luego 2010 está en la columna 2010?.

11) Se escribe cada uno de los números $1, 2, 3, 4, 5$ y 6 en una de las casillas superiores se supone la suma de los números de las dos casillas que las sostiene, tal y como se ilustra en el diagrama. Se sigue así hasta obtener un número x en la casilla superior. El menor valor que puede tomar x es:

(a) 148 (b) 76 (c) 110 (d) 96 (e) 67

Solución:

Tomemos el gráfico y llenemos la primera fila de abajo hacia arriba como se muestra a continuación,

Si sumamos las filas de abajo hacia arriba, tenemos que la suma total de las filas es:

$$C + 5A + 10B + 10D + 5E + F$$

Los valores que menos se repiten son C y F luego a estos valores le daremos los números más grandes es decir, $C = 5$ y/o $F = 6$. Como los valores de D y B se repiten diez veces, estos deben ser valores pequeños, luego podemos tomar a $D = 1$ y/o $B = 2$. Para los valores de A y E que se repiten cada uno cinco veces entonces podemos tomar a $A = 3$ y/o $E = 4$. Entonces tendremos esta pirámide:

12) A, B, C, D y E representan dígitos distintos si:

$$A + A + A = B$$
$$C + C + C = D$$
$$B + D = E$$

El valor de E es:

(a) 668 (b) 669 (c) 670 (d) 671 (e) 672

Solución:

Fila	Número de elementos por columna
$a_1 = 1,2,3$	$a_1 = 3$
$a_2 = 4,5,6$	$a_2 = 3$
$a_3 = 7,8,9$	$a_3 = 3$
$a_4 = 10,11,12$ . . .	$a_4 = 3$ . . .

$2010 = 3(670)$. Luego 2010 está en la columna $670 + 2 = 672$.

13) Se escribe cada uno de los números $1,2,3,4,5$ y 6 en una de las casillas superiores se supone la suma de los números de las dos casillas que las sostiene, tal y como se ilustra en el diagrama. Se sigue así hasta obtener un número x en la casilla superior. El menor valor que puede tomar x es:

(a) 148 (b) 76 (c) 110 (d) 96 (e) 67

Solución:

Tomemos el gráfico y llenemos la primera fila de abajo hacia arriba como se muestra a continuación,

Si sumamos las filas de abajo hacia arriba, tenemos que la suma total de las filas es:

$$C+5A+10B+10D+5E+F$$

Los valores que menos se repiten son C y F luego a estos valores le daremos los números más grandes es decir, $C=5$ y/o $F=6$. Como los valores de D y B se repiten diez veces, estos deben ser valores pequeños, luego podemos tomar a $D=1$ y/o $B=2$. Para los valores de A y E que se repiten cada uno cinco veces entonces podemos tomar a $A=3$ y/o $E=4$. Entonces tendremos esta pirámide:

14) A, B, C, D y E representan dígitos distintos si:

$$A+A+A=B$$
$$C+C+C=D$$
$$B+D=E$$

El valor de E es:

(a) 0 (b) 2 (c) 6 (d) 8 (e) 9

Solución:

$$3A=B$$

$$3C=D$$

$$3A+3C=B+D=E$$

$$3(A+C)=E$$

$$A+C=\frac{E}{3}$$

Luego E es divisible por 3, los dígitos divisibles por 3 son $0,3,6,9$. No sirve 0, ya que A y C son dígitos distintos, y si fueran 0 entonces se contradice el enunciado de dígitos distintos; si fuera 6, entonces $A=C=1$ y tendría la misma contradicción anterior; si fuera 3 significa que $A+C=1$ lo cual es implicaría que $A=1$ o $D=0$, entonces si $D=0$, se tiene que $C=0$ y tenemos que esto contradice el enunciado de que todos los dígitos son distintos. Por lo tanto la respuesta sería que es 9.

Problemas y Soluciones Nivel Avanzado

1) Si $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=10, x+y=2$. ¿Cuál es el valor de xy?

(a) $\frac{1}{5}$ (b) 1 (c) 2 (d) 5 (e) 10

Solución:

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=10 \quad \Rightarrow \quad \frac{y+x}{xy}=10 \quad \Rightarrow \quad \frac{2}{xy}=10 \quad \Rightarrow \quad xy=\frac{1}{5}$$

2) Sean A, M y C enteros no negativos tales que $A+M+C=12$. ¿Cuál es el valor máximo de $A\cdot M\cdot C+A\cdot M+M\cdot C+C\cdot A$?

(a) 62 (b) 72 (c) 92 (d) 102 (e) 112

Solución:

Nótese que $AMC+AM+MC+CA=(A+1)(M+1)(C+1)-(A+M+C)-1=pqr-13$ donde p, q y r son enteros positivos cuya suma es 15. Usando la desigualdad de la media geométrica y la media aritmética tenemos

$$\sqrt[3]{pqr} \leq \frac{p+q+r}{3} = \frac{15}{3} = 5$$

Entonces $pqr \leq 125$, el producto pqr se hace mayor cuando $p = q = r = 5$, luego $A = M = C = 4$. Por lo tanto

$$\max\{AMC + AM + MC + CA\} = 112$$

3) Si $\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+x}}$, entonces x es igual a:

(a) $\sqrt{2}-2$ (b) $\sqrt{2}+2$ (c) $\sqrt{2}$ (d) $\sqrt{2}+1$ (e) $\sqrt{2}-1$

Solución:

Se tiene que $\dfrac{1}{2+\dfrac{1}{2+x}} = \sqrt{2}-1 \quad \Rightarrow \quad 2 + \dfrac{1}{2+x} = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \dfrac{\sqrt{2}+1}{2-1} = \sqrt{2}+1$ y $\dfrac{1}{2+x} = \sqrt{2}-1$

y $2 + x = \dfrac{1}{\sqrt{2}-1} = \sqrt{2}+1$ entonces $x = \sqrt{2}-1$

4) La sucesión de Fibonacci $1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \ldots$ comienza por dos unos y cada término a partir del tercero es la suma de los dos términos anteriores. ¿Cuál de los diez dígitos es el último en aparecer en la posición de las unidades de un número de la sucesión de Fibonacci?

(a) 0 (b) 4 (c) 6 (d) 7 (d) 9

Solución:

La sucesión de dígitos en las unidades de la sucesión de Fibonacci es $1, 1, 2, 3, 5, 8, 3, 1, 4, 5, 9, 4, 3, 7, 0, 7, 7, 4, 1, 5, 6, \therefore$ Se sigue que el dígito 6 es el último digito de los diez dígitos en aparecer en la posición de las unidades en la sucesión de Fibonacci.

5) Si las soluciones de la ecuación $x^2+bx+36=0$, son números enteros, entonces la cantidad de valores enteros que b puede tomar es:

(a) 6 (b) 7 (c) 8 (d) 9 (e) 10

Solución:

Si las soluciones de $x^2+bx+36=0$ son enteros, la ecuación es de la forma $(x-m)(x-n)=0$, donde m, n son enteros. Claramente m, n son o bien ambos positivos o bien ambos negativos. Ahora $mn=36$, de modo que los valores positivos de m, n son 1, 36; 2, 18; 3, 12; 4, 9; 6, 6; 9, 4; 12, 3; 18, 2; 36, 1. Esto da 37, 20, 15, 13, 12 como valores de $b=m+n$, es decir 5 valores diferentes de b. De manera similar cuando m y n son negativos habrá 5 valores de b (-12, -13, -15, -20, -37). En total hay 10 valores para b.

6) En el año N, el día 300 del año cae en martes. En el año $N+1$, el día 200 del año también cae un martes. ¿Qué día de la semana cae el día 100 del año $N-1$?

(a) Jueves (b) Viernes (c) Sábado (d) Domingo (e) Lunes

Solución:

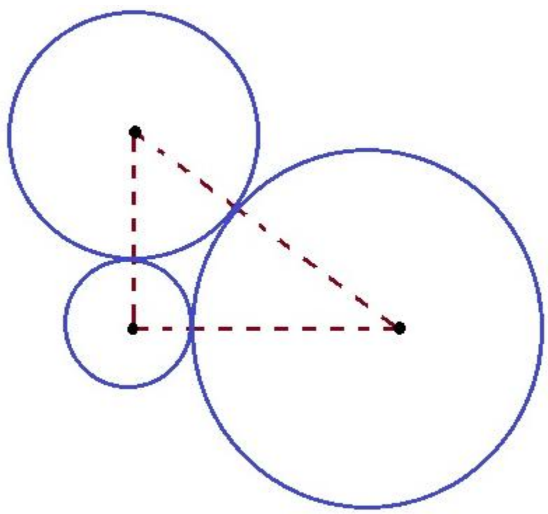
Nótese que si un martes ocurre d días después de otro martes, entonces d es múltiplo de 7. Ahora consideramos si alguno de los años $N-1$, N y $N+1$ es año bisiesto.

Si N no es año bisiesto entonces el día 200 del año $N+1$ es $365-300+200=265$ días después de un martes y por lo tanto es un lunes ya que 265 es 6 más que un múltiplo de 7. Se sigue que el año N es bisiesto y que el día 200 del año $N+1$ es también martes (como se afirma en el enunciado), siendo 266 días después de un martes. Se sigue que el año $N-1$ no es bisiesto. Por lo tanto, el día 100 del año $N-1$ preside el martes en $365-100+300=565$ días y por lo tanto es un jueves ya que $565=7\cdot 80+5$, es decir, 5 más que un múltiplode 7 .

7) Tres esferas de radios $1,2$ y 3 unidades son tangentes dos a dos. ¿Cuál es el área en unidades cuadradas, del triángulo que une sus centros?

(a) 2π (b) $3\sqrt{2}$ (c) $2\sqrt{6}$ (d) 6 (e) $\sqrt{60}$

Solución:



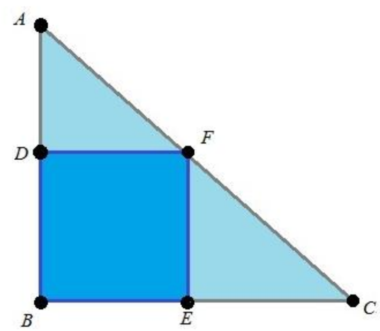
Dado que las esferas son tangentes, las distancias entre sus centros son $1+2=3$, $1+3=4$ y $2+3=5$ respectivamente. Se sigue que los centros son los vértices de un triángulo rectángulo con lados 3, 4 y 5. Entonces el área del triángulo es $\frac{1}{2}\times 3\times 4=6$.

8) Por un punto sobre la hipotenusa de un triángulo rectángulo se trazan líneas rectas

paralelas a los catetos del triángulo de tal modo que se subdivide el triángulo en un cuadrado y dos triángulos rectángulos más pequeños. El área de uno de los triángulos rectángulos pequeños es igual a m por el área del cuadrado. La razón entre el área del otro triángulo rectángulo pequeño y el área del cuadrado es:

(a) $\frac{1}{2m+1}$ (b) m (c) $1-m$ (d) $\frac{1}{4m}$ (e) $\frac{1}{8m^2}$

Solución:



Sean $B=(0,0)$, $E=(1,0)$, $F=(1,1)$ y $D=(0,1)$ los vértices del cuadrado. Sea $C=(1+2m,0)$ y nótese que el área de $BEFD$ es 1 y que el área del $A_{\Delta FEC}=m$. La pendiente de la recta que pasa por C y F es $-\dfrac{1}{2m}$. Por consiguiente esta interseca el eje y en $A=(0,1+\dfrac{1}{2m})$. El área del $A_{\Delta ADF}=\dfrac{1}{4m}$.

9) Se refleja el punto $P(1,2,3)$ en el plano xy. Luego su imagen Q se rota por un ángulo de $180°$ alrededor del eje x para obtener el punto R. Finalmente se traslada R cinco unidades en la dirección positiva del eje y para obtener el punto S. ¿Cuáles son las coordenadas de S ?

(a) $(1,7,-3)$ (b) $(-1,7,-3)$ (c) $(-1,-2,8)$ (d) $(-1,3,3)$ (e) $(1,3,3)$

Solución:

Se refleja el punto $P=(1,2,3)$ en el plano xy se obtiene como imagen $(1,2,-3)$. Una rotación de medio giro alrededor del eje x da como imagen $(1,-2,3)$. Finalmente aplicando la traslación se obtiene como imagen el punto $(1,3,3)$.

10) Se tiene un edificio de cinco pisos con los apartamentos numerados como se indica en la siguiente figura. Algunos apartamentos no se numeran pues son lugares de almacenamiento. El apartamento número 2010 se localiza en el piso:

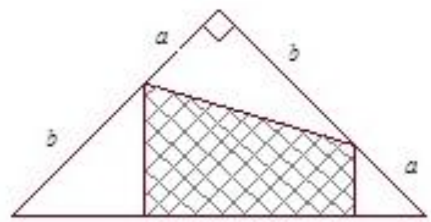
Piso 5		5		13		21		
Piso 4	4	6	12	14	20	22	28	...
Piso 3	3	7	11	15	19	23	27	...
Piso 2	2	8	10	16	18	24	26	...
Piso 1	1		9		17		25	...

(a) 1 (b) 2 (c) 3 (d) 4 (e) 5

Solución:

En el piso 5 están los números que se dividen entre 8 dejan como residuo 5, en el piso 4 están los números que al dividirlos entre 8 dejan como residuo 4 o 6, en el piso 3 esta los números que al dividirlos entre 8 dejan como residuo 2 o 0 y en el piso 1, los que dejan residuo 1. Luego al dividir 2010 entre 8 deja como residuo 2, esto indica que el apartamento está en el piso 2.

11) ¿Cuál es la razón del área de la región sombreada al área de la región no sombreada en el triángulo?



(a) $2 : 1$ (b) $1 : 1$ (c) $1 : 2$ (d) $3 : 1$ (e) $1 : 3$

Solución:

Se necesitan conocer x, y, h; como el triángulo es un triángulo rectángulo e isósceles entonces el ángulo $\angle A$ y $\angle C$ miden 45° entonces $DP = AP$ y $EQ = QC$ y por teorema de Pitágoras $b^2 = 2x^2$ y $a^2 = 2y^2$ entonces $x = \frac{b}{\sqrt{2}}$ y $y = \frac{a}{\sqrt{2}}$. $AC = x + y + h$ como $AC = \sqrt{2}(a+b)$ (por T. Pitágoras) entonces $h = (\sqrt{2})(a+b) - \frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{a}{\sqrt{2}} = (a+b)(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}})$. El área de la región sombreada es

$$A_S = \frac{(x+y)h}{2} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2}}(a+b)^2(\sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}})}{2} = \frac{1}{4}(a+b)^2$$

y el área de la región no sombreada es

$$A_{NS} = \left(\frac{b}{\sqrt{2}}\right)^2 + \frac{ab}{2} + \left(\frac{a}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{4}$$

Por lo tanto, $A_S : A_{NS} = 1 : 1$.

12) Las caras de un paralelepípedo tiene áreas $2x$, $\frac{y}{2}$ y xy centímetros cuadrados respectivamente. El volumen del sólido en centímetros cúbicos es:

(a) xy (b) $2xy$ (c) x^2y^2 (d) $4xy$ (e) $4x^2y$

Solución:

$$ab = 2x \quad \Rightarrow \quad abc = 2xc \qquad (1)$$

$$ac = \frac{y}{2} \quad \Rightarrow \quad abc = \frac{yb}{2} \qquad (2)$$

$$bc = xy \quad \Rightarrow \quad abc = axy \qquad (3)$$

Igualamos (1) y (2) e igualamos (1) y (3): $2xc = \frac{yb}{2}$ y $2xc = axy$ entonces $b = \frac{4xc}{y}$ y $a = \frac{2c}{y}$

luego $ab = \left(\frac{4xc}{y}\right)\left(\frac{2c}{y}\right) = \frac{8xc^2}{y^2} = 2x$ entonces $4c^2 = y^2 \Rightarrow c = \frac{y}{2}$, por lo tanto $a = 1$, $b = 2x$ y $V = abc = xy$.

Problemas y Soluciones de la Prueba Selectiva Año 2010

Problemas y Soluciones Nivel Básico

1) Plinio escribió un número en cada una de las cuatro casillas de una tabla como la que se muestra en la figura, pero se borró el segundo y cuarto número. Si se sabe que tanto el segundo como el tercer número de esta tabla es igual al promedio de sus dos vecinos, hallar el número que ocupa la casilla con $*$.

1	2010	*

(a) 4020 (b) $1005,5$ (c) $3014,5$ (d) $4019,0$ (e) 2010

Solución:

Como el segundo número de la tabla es el promedio de sus vecinos, entonces es igual a

$$\frac{1+2010}{2} = 1005,5$$

Por lo tanto el cuarto número debe ser $3014,5$, puesto que 2010 es el promedio de los números $1005,5$ y $3014,5$.

$$\Rightarrow \frac{1005,5+x}{2} = 2010$$

$$= 2(2010) - 1005,5 = 3014,5$$

2) La calculadora de Ulises tiene dos teclas especiales. Una tecla resta 98 al número que está

en pantalla y a la otra tecla lo divide por 19. Oscar oprimió las teclas 6 veces en total y oprimió cada tecla al menos una vez. Si el resultado fue un número positivo. ¿Cuál es el menor número que pudo estar inicialmente en la pantalla?

(a) 508 (b) 509 (c) 1018 (d) 196 (e) 510

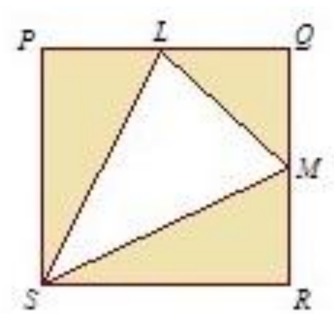
Solución:

El resultado al final del proceso debe ser necesariamente 1, puesto que buscamos el menor número que estaba inicialmente en la pantalla. La operación dividir por 19 debe ser aplicada solamente una vez y al final mientras que la operación restar 98 debe ser aplicada 5 veces, ¿por qué? Por lo tanto si N es el número que estuvo originalmente en la pantalla, se tiene que

$$\frac{(N-98-98-98-98-98)}{19}=1$$

De donde N=509.

3) $PQRS$ es un cuadrado L y M son los puntos medios de PQ y QR respectivamente. ¿Qué parte del área del cuadrado corresponde a la región sombreada?



(a) $\frac{1}{2}$ (b) $\frac{2}{3}$ (c) $\frac{3}{4}$ (d) $\frac{5}{8}$ (e) $\frac{1}{4}$

Solución:

$$A_{\Delta PLS} = A_{\Delta SMR} = \frac{1}{4} A_{?PQRS}$$

$$A_{\Delta LQM} = \frac{1}{8} A_{?PQRS}$$

Entonces la fracción del área sombreada es

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}=\frac{5}{8}$$

4) ¿Cuántos diferentes triángulos isósceles de perímetro $25\,cm$ y lados de longitudes enteras pueden formarse?

(a) 0 (b) 5 (c) 6 (d) 7 (e) 12

Solución:

Los dos lados iguales deben tener una longitud mayor o igual a 7, (6 no es posible), y una longitud menor o igual a 12 dando un total de seis posibilidades $7,8,9,10,11,12$ números. Los números del 1 al 17 son:

$$1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12,13,14,15,16 \text{ y } 17$$

5) $N^2 = aa + bb$, donde a y b son dígitos, hallar N.

(a) 87 (b) 88 (c) 89 (d) 90 (e) 91

Solución:

$N^2 = a(1100) + b(11) = 11(100a + b)$ Entonces $a = 7$ y $b = 4$, puesto que sólo para estos valores $100a + b$ es un múltiplo de 11, así que $N^2 = 7744$, luego $N = 88$.

6) En una cárcel hay 32 presos repartidos en 8 celdas de planta cuadrada. En cada celda de las esquinas hay un preso y en cada una de las centrales hay siete presos de tal manera que sumen 9 presos por hilera. Si los presos están planeando una fuga. ¿Cuál sería la menor cantidad de presos que deben quedar después de la fuga dentro de la planta para que el carcelero no se percate del escape y sigan sumando nueve presos por hilera?

(a) 20 (b) 18 (c) 19 (d) 16 (e) 24

Solución:

9		
		9

5		4
4		5

6		3
3		6

8		1
1		8

2		7
7		2

La mínima cantidad de presos que deben quedar dentro de la planta es 18.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7) Enrique tiene tres hermanas y cinco hermanos varones. Su hermana Enriqueta tiene s hermanas y b hermanos varones. ¿Cuál es el producto de s y b?

Solución:

Dado que Enrique tiene 3 hermanas y 5 hermanos varones, entonces Enriqueta tiene 2 hermanas y 6 hermanos varones, es decir, $S = 2$ y $B = 6$, por lo tanto el producto de S y B es 12.

8) En una caja hay cuatro tipos de canicas: 20 rojas, 12 amarillas, 8 azules y 6 verdes. ¿Cuál es el mínimo número de canicas que hay que sacar de la caja para estar seguro que hay 10 canicas del mismo color?

Solución:

Si se sacan 32 canicas es posible que se saquen 9 rojas, 9 amarillas, 8 azules y 6 verdes, así que no habría diez del mismo color. Sin embargo, si se sacan 33, necesariamente habrá diez del mismo color.

9) En un cuadrilátero $ABCD$, los ángulos B y D son rectos. Las longitudes de los lados son $BC = 1\ cm$, $CD = 4\ cm$ y $DA = 3\ cm$. Si el área del cuadrilátero en cm^2, se escribe como $a + \sqrt{b}$ con a y b números enteros. ¿A qué es igual $a + b$?

Solución:

Por el teorema de Pitágoras en el triángulo ΔCAD se tiene que $AC^2 = 3^2 + 4^2$, luego $AC = 5$. Ahora por el teorema de Pitágoras en el triángulo ΔCAB tenemos que $AC^2 = BC^2 + AB^2$, por lo cual $AB = \sqrt{24}$. El área del cuadrilátero es igual a la suma de las áreas de los dos triángulos, esto es,

$$\frac{3 \times 4}{2} + \frac{1 \times \sqrt{24}}{2} = 6 + \sqrt{6}$$

La respuesta es $6 + 6 = 12$.

Problemas y Soluciones Nivel Medio

1) El área (en cm^2)del cuadrado más pequeño que puede contener un círculo de radio $4\ cm$ es:

(a) 128 (b) 64 (c) 32 (d) 16 (e) 18

Solución:

El cuadrado más pequeño tiene lado $8\ cm$ y área $(8\ cm)^2 = 64\ cm^2$

2) La diagonal de un rectángulo es de longitud x, y ese rectángulo mide el doble de largo que de ancho. ¿Cuál es el área del rectángulo?

(a) $\frac{1}{4}x^2$ (b) $\frac{2}{5}x^2$ (c) $\frac{1}{2}x^2$ (d) x^2 (e) $\frac{3}{2}x^2$

Solución:

Sea w el ancho del rectángulo. Entonces su largo es igual a $2w$ y $x^2 = w^2 + (2w)^2 = 5w^2$.

Por lo tanto, el área es $w(2w) = 2w^2 = \frac{2}{5}x^2$

3) Las ecuaciones $2x+7=3$ y $bx-10=-2$, tienen la misma solución x. ¿Cuál es el valor de b ?

(a) -8 (b) -4 (c) -2 (d) 4 (e) 8

Solución:

Dado que $2x+7=3$ se tiene que $x=-2$. Por lo tanto, y $-2=bx-10=-2b-10=-2$, entonces, $2b=-8$ y $b=-4$.

4) Para todos los números enteros positivos x y y tales que $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{12}$, el mayor valor que puede tomar y es:

(a) 60 (b) 84 (c) 96 (d) 156 (e) 288

Solución:

$$\frac{1}{y}=\frac{1}{12}-\frac{1}{x}=\frac{x-12}{x-12}$$

$$\Rightarrow y=\frac{12x}{x-12}$$

Ahora y toma su mayor valor cuando x toma el menor, y lo más pequeño que x puede ser es 13. Por consiguiente, lo más grande que y puede ser es $12\times 13=156$.

5) Hallar la suma de todos los números primos entre 2 y 100 que son a la vez uno más que un múltiplo de 5 y uno menos que un múltiplo de 6.

(a) 52 (b) 82 (c) 123 (d) 143 (e) 214

Solución:

Un número que es uno mayor que un múltiplo impar de 5 es par, y por lo tanto, no puede ser menor en uno que un múltiplo de 6. Por consiguiente es suficiente examinar los números $1, 11, 21, 31, 41, \ldots 91$. De éstos, sólo $11, 41$ y 71 son menores en uno que un múltiplo de 6. Estos son todos primos y su suma es 123.

6) Un cartero reparte al azar tres cartas entre tres destinatarios ¿Cuál es la probabilidad de que al menos una de las cartas llegue a su destinatario correcto?

(a) $\frac{2}{3}$ (b) $\frac{1}{3}$ (c) 1 (d) $\frac{2}{9}$ (e) 3

Solución:

cartas	1	2	3
destinatarios	a	b	c

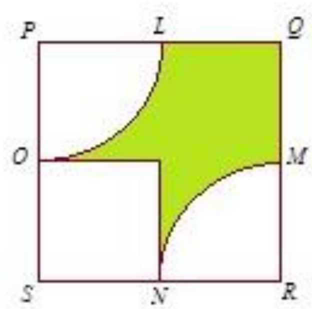
Las posibilidades que existen son:

$1a$	$2b$	$3c$
$1a$	$2c$	$3b$
$1b$	$2a$	$3c$
$1b$	$2c$	$3b$
$1c$	$2a$	$3b$
$1c$	$2b$	$3a$

Es decir existen seis posibilidades para agrupar las cartas con los tres destinatarios. Como nos preguntan la probabilidad de que al menos una carta llegue al destinatario correcto, entonces esa probabilidad es de $\frac{2}{6}$, es decir $\frac{1}{3}$.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7) $PQRS$ es un cuadrado de lado $8\ cm$. L, M, N y O son puntos medios de PQ, QR, RS y SP respectivamente. Calcular el área de la región sombreada.



Solución:

$$\text{Área total} = (8cm)(8cm) = 64cm^2$$

$$\text{Área}_? = (4cm)(4cm) = 16cm^2$$

$$\text{Área}_{semcir} = \frac{\pi r^2}{4} \times 2 = \frac{\pi 4^2}{2} = \frac{16\pi}{2} = 8\pi cm^2$$

Luego el área de la región sombreada se obtiene al restar el área total del área del cuadrado, y el área de la semicircunferencia.

$$\text{Área sombreada} = \text{Área total} - \text{Área}_? - \text{Área}_{semcir}$$

$$\text{Área sombreada} = 64cm^2 - 16cm^2 - 8\pi\ cm^2 = 8(6-\pi)cm^2$$

8) ¿Cuántas iniciales diferentes podemos hacer con dos o tres letras del alfabeto teniendo en cuenta que el alfabeto tiene 27 letras? y ¿cuántas letras debería mínimo tener el alfabeto para que un millón de personas diferentes se puedan identificar con iniciales de dos o tres letras respectivamente?

Solución:

Partimos que, con dos letras tenemos $27 \times 27 = 27^2 = 729$ iniciales distintas. Con tres letras tenemos, $27 \times 27 \times 27 = 27^3 = 19683$

Así, que con dos o tres letras tendríamos $27^2 + 27^3 = 20412$ iniciales diferentes.

Para un alfabeto con n letras tendremos con dos letras n^2; con tres letras n^3. Así que con dos o tres letras tendríamos $n^2 + n^3 = n^2(n+1)$ unidades.

Ahora debemos hallar un número que sea mayor o igual a $1.000.000$

Para $n = 100$,

$100^2(101) = 100^2(10^2+1) = (10^2)^2(10^2+1) = 10^6 + 10^4 = 1.010.000$ El mínimo valor de n sería 100.

9) Evaluar la expresión $\dfrac{2+4+6+\cdots+34}{3+6+9+\cdots+51}$

Solución:

Este ejercicio se caracteriza por realizar una pequeña factorización, así tendremos que:

$$\frac{2+4+6+\cdots+34}{3+6+9+\cdots+51} = \frac{2(1+2+3+\cdots+17)}{3(1+2+3+\cdots+17)}\ .$$

Así, cancelando tenemos

$$\frac{2+4+6+\cdots+34}{3+6+9+\cdots+51}=\frac{2}{3}$$

Problemas y Soluciones Nivel Avanzado

1) Sea f una función que satisface que $f(x,y)=\frac{f(x)}{y}$ para cualesquiera x, y números reales positivos, si $f(500)=3$, ¿cuál es el valor de $f(600)$?

(a)1 (b)2(c) $\frac{5}{2}$ (d)3 (e) $\frac{18}{5}$

Solución:

$f(500)= f(100\cdot 5)=\dfrac{f(100)}{5}=3$ entonces $f(100)=15$.

$$f(600)= f(100\cdot 6)=\frac{f(100)}{6}=\frac{15}{6}=\frac{5}{2}$$

2) En el triángulo ABC, $AB=13, BC=14$ y $AC=15$. Sean D el punto medio de $\overline{BC}$ y E el punto de intersección de $\overline{BC}$ con la bisectriz del ángulo $\hat{B}AC$. ¿Cuál de los siguientes números es más próximo al área del triángulo ADE?

(a) 2 (b) 2.5 (c) 3 (d) 3.5 (e) 4

Solución:

Aplicando la fórmula de Herón, el área del triángulo ΔABC es

$$\sqrt{(21)(8)(7)(6)}=84$$

de modo que la longitud de la altura trazada desde el vértice A es $\frac{2(84)}{14}=12$. El punto medio D divide a $\overline{BC}$ en dos segmentos de longitud 7 y la bisectriz del ángulo $\angle BAC$ divide a $\overline{BC}$ en dos segmentos de longitudes $\frac{14(13)}{28}=6.5$ y $\frac{14(15)}{28}=7.5$ (dado que la bisectriz divide al lado opuesto en dos segmentos proporcionales a los dos lados restantes). De ahí se sigue que el ΔADE tiene base $BE=7-6.5=0.5$ y altura 12, de donde se tiene que su área es 3.

3) La notación $\|x\|$ significa, el mayor entero que no es mayor que x. La cantidad de enteros x entre 0 y 500 para los cuales $x-\|x^{1/2}\|=10$ es:

(a) 17 (b) 18 (c) 19 (d) 20 (e) 21

Solución:

Sea $x=n^2+10$, donde n es un entero. Entonces

$n^2+10-\left\lfloor\sqrt{n^2+10}\right\rfloor^2=10 \Leftrightarrow \left\lfloor\sqrt{n^2+10}\right\rfloor^2=n^2$, luego

$$\begin{aligned} n^2+10<(n+1)^2 &\Leftrightarrow n^2+10<n^2+2n+1 \\ &\Leftrightarrow 2n>9 \\ &\Leftrightarrow n\geq 5 \end{aligned}$$

pero

$$\begin{aligned} n^2+10<500 &\Leftrightarrow n^2<490 \\ &\Leftrightarrow n\leq 22 \end{aligned}$$

El número de enteros es, entonces igual al número de enteros entre 5 y 22 inclusive o sea 18.

4) Si $|x-2|=p$, donde $x<2$, entonces $x-p$ es:

(a) -2 (b) 2 (c) $2-2p$ (d) $2p-2$ (e) $|2p-2|$

Solución:

Dado que $x<2$ se sigue que $|x-2|=2-x$. Si $2-x=p$, entonces $x=2-p$, por lo tanto, $x-p=2-2p$.

5) Sea A el conjunto de todas las soluciones distintas de la ecuación $\frac{x^2}{109x-2010}+\frac{109x-2010}{x^2}=2$. ¿ Cuál es la suma de los elementos de A ?

(a) 2010 (b) 109 (c) 190 (d) 100 (e) 180

Solución:

x^2 y $109x-2100$ deben tener el mismo signo. Por lo tanto, como ninguno puede ser cero, se sigue que son positivos y se obtiene, después de expandir la fracción (es decir, todo a un solo lado de la igualdad) que

$$0=(x^2)^2-2x^2(109x-2100)^2+(109x-2100)^2=(x^2-(109x-2100))^2$$
$$=((x-84)(x-25))^2$$

De ahí se sigue que los únicos elementos de A son 84 y 25 y se obtiene que la suma de los elementos de A es igual a 109 (NOTA: se cambió 2010 por 2100).

6) Un arco de circunferencia mide 300° y su longitud es $2\ km$. ¿Cuál es el número entero más próximo a la medida del radio en metros?

(a) 157 (b) 284 (c) 382 (d) 628 (e) 764

Solución:

300° corresponden a $\frac{5\pi}{3} rads$ luego $2000m = \frac{5\pi}{3} r$ entonces $r = \frac{1200}{\pi} m = 381.97\,m$

por consiguiente el entero más próximo a la medida del radio en metros es 382.

PROBLEMAS TIPO ENSAYO

7) Sea $3, 4, a_3, a_4, \ldots a_n$ una lista de números enteros tal que la suma de los cuadrados de los primeros i términos $3^2 + 4^2 + a_3^2 + \cdots a_i^2$ es un cuadrado perfecto para todo i. Hallar el valor de a_4.

Solución:

El término a_3 de la sucesión es 12, por lo tanto $3^2 + 4^2 + 12^2 + a_4^2 = n^2$ para algún n. De aquí que $n^2 - a_4^2 = 13^2$, entonces $(n - a_4)(n + a_4) = 13^2$. Como 13 es número primo y la sucesión es de enteros positivos, $n - a_4 = 1$ y $n + a_4 = 13^2$. Resolviendo el sistema se obtiene $a_4 = 84$.

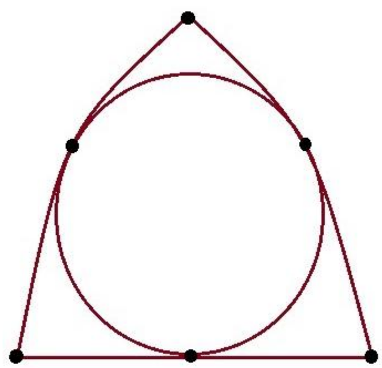
8) ¿Cuál es el número máximo de reyes que se pueden colocar en un tablero de ajedrez de 40×40 de manera que no haya dos que se ataquen?

Solución:

NOTA: Un rey ataca únicamente a las casillas que comparte un lado o un vértice con la casilla en que este se encuentre (como se muestra en el diagrama).

Si se particionara el tablero de 40×40 en 400 cuadrados de 2×2 y se coloca un rey en cada casilla superior izquierda, habrá 400 reyes y no hay dos que se ataquen. Ahora, si se ubicara dos reyes dentro de un cuadrado de 2×2 estos dos reyes se atacan por lo que no es posible colocar 401 reyes en el tablero.

9) Si los arcos de circunferencia AC y BC tienen centros en B y A respectivamente, entonces existe una circunferencia que es tangente tanto a $\widehat{AC}$ como a $\widehat{BC}$ y a $\overline{AB}$. Si la longitud de $\widehat{BC}$ es 12, entonces la longitud de la circunferencia tangente es:



Solución:

Constrúyase la circunferencia con centro A y radio AB. Sea F el punto de tangencia de las dos circunferencias. Trácese $\overline{AF}$ y sea G el punto de intersección de $\overline{AF}$ y la circunferencia dada. Por el teorema de potencia de un punto respecto de un circulo se tiene que $AD^2 = AF \cdot AE$. Sea r el radio de la circunferencia menor. Ya que $\overline{AF}$ y $\overline{AB}$ son radios de la circunferencia mayor, $AF = AB$ y $AE = AF - EF = AB - 2r$. Dado que $AD = \frac{AB}{2}$, sustituyendo en la primera ecuación se obtiene que $\left(\frac{AB}{2}\right)^2 = AB \cdot (AB - 2r)$ equivalente a

$\frac{r}{AB} = \frac{3}{8}$

Los puntos A, B y C equidistan entre sí, de modo que $B\hat{C} = 60^\circ$ y por lo tanto la longitud de la circunferencia mayor es de $6 \cdot (longitud\ de\ \widehat{BC}) = 6 \cdot 12 = 72$. Sea c la longitud de la circunferencia menor. Dado que las longitudes de dos circunferencias están en la misma razón de sus radios, se tiene que

$$\frac{c}{72} = \frac{r}{AB} = \frac{3}{8}$$

se sigue que $c = \frac{3}{8}(72) = 27$

Problemas y Soluciones de la Prueba Final Año 2010

Problemas y Soluciones Nivel Básico

1) En la siguiente multiplicación a , b y c son dígitos

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & a & b & \times \\ & & & b & 3 & \\ \hline & & * & * & * & \\ & * & * & * & & \\ \hline 1 & c & c & 0 & 1 & \end{array}$$

Calcule $a+b+c$

Solución:

			1	a	b	$\times$
				b	3	
fila 1			$*$	$*$	$*$	
fila 2		$*$	$*$	$*$		
	1	c	c	0	1	

El tercer asterisco $(*)$ de la fila 1 coincide con las unidades del resultado, luego b debe ser el dígito que al multiplicarlo por 3 tengo como unidad 1 , este es $b=7$, y obtenemos

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & a & 7 & \times \\ & & & 7 & 3 & \\ \hline & & * & * & 1 & \\ & * & * & * & & \\ \hline 1 & c & c & 0 & 1 & \end{array}$$

El tercer asterisco $(*)$ de la fila 2 son las unidades de multiplicar $7 \times 7 = 49$, es decir 9. Luego para obtener como suma 0 en las decenas del resultado el segundo asterisco de la fila 1 debe ser 1, esto es

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & a & 7 \;\times \\ & & & 7 & 3 \\ \hline & & * & 1 & 1 \\ & * & * & 9 & \\ \hline 1 & c & c & 0 & 1 \end{array}$$

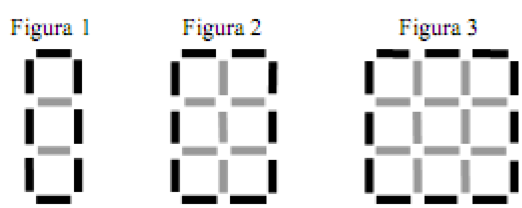
Luego a debe ser un dígito que al multiplicarlo por 3 y sumarle 2 el resultado sea 1 como unidad, este digito es $a = 3$, tenemos que los factores en la multiplicación son 137 y 73, así

$$\begin{array}{ccccc} & & 1 & 3 & 7 \;\times \\ & & & 7 & 3 \\ \hline & & 4 & 1 & 1 \\ & 9 & 5 & 9 & \\ \hline 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}$$

Luego realizando la multiplicación tenemos que $c = 0$ y por lo tanto

$a + b + c = 3 + 7 + 0 = 10$

2) Las siguientes figuras están construidas con palitos claros y oscuros.



Para construir las figuras, los palitos oscuros se colocan sólo en los bordes y los palitos claros sólo en el interior. La figura n corresponde a un rectángulo $3\times n$. Continuando con este procedimiento, ¿cuántos palitos claros tenemos en la figura 2010 ?

Solución:

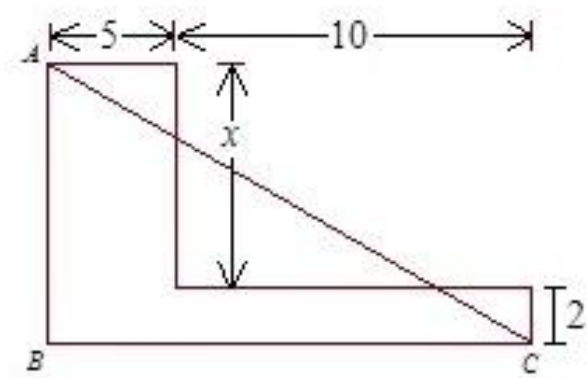
Las siguientes figuras son construidas con palitos blancos y negros. Para construir las figuras, los palitos negros se colocan sólo en los bordes y los blancos sólo en el interior. La figura n corresponde a un rectángulo $3\times n$. Continuando con este procedimiento ¿Cuántos palitos claros tenemos en la figura 2010?

Observe que los palitos blancos que aparecen en las figuras son $2, 7, 12, \cdots$ darían la siguiente sucesión: $a_1 = 2$, $a_2 = 2+5 = 7$, $a_3 = 2+10 = 12$, $a_4 = 2+15 = 17$, $\cdots$, en general

$a_n = 2 + (n-1)5 \quad \forall n \geq 1$

Luego $a_{2010} = 2 + (2009)5 = 2 + 10045 = 10047$

3) En el dibujo de abajo, el triángulo ABC es rectángulo y los lados del polígono (región sombreada) son paralelos o coinciden con algún cateto del triángulo.



Calcular x de modo que el área del polígono sea igual al área del triángulo.

Solución:

En el dibujo de abajo, el triángulo ABC es rectángulo y los lados del polígono (región sombreada) son paralelos o coinciden con algún cateto del triángulo. Calcular x de modo que el área del polígono sea igual al área del triángulo.

$BC = 15$ y $AB = x + 2$ Luego el área del triángulo ΔABC es

$$A_T = \frac{15(x+2)}{2}$$

Por otro lado, el área del polígono es:

$$A_P = 5(x+2) + 20$$

De las condiciones del problema $A_T = A_P$ entonces

$$\frac{15(x+2)}{2} = 5(x+2) + 20 \Rightarrow 15(x+2) = 10(x+2) + 40$$

entonces $5(x+2) = 40 \Rightarrow x = 6$

4) En el juego *capturando-bolitas*, las bolitas verdes valen 5 puntos cada una, las azules valen 10 puntos, las amarillas valen 15, las rojas 20 y una bolita negra vale 50 puntos. Existen 5 bolitas verdes, 5 azules, 10 amarillas, 10 rojas y 1 negra. Carlitos consigue hacer 40 puntos en una jugada. Teniendo en cuenta solamente la cantidad de bolitas y sus colores. ¿De cuantas maneras diferentes podría haber conseguido Carlitos esa puntuación, suponiendo que en cada caso fue posible capturar las bolitas necesarias?

Solución:

En el juego capturando-bolitas, las bolitas verdes valen 5 puntos cada una, las azules valen 10 puntos, las amarillas valen 15, las rojas 20 y una bolita negra vale 50 puntos. Existen 5 bolitas verdes, 5 azules, 10 amarillas, 10 rojas y 1 negra. Carlitos consigue hacer 40 puntos en una jugada. Teniendo en cuenta solamente la cantidad de bolitas y sus colores. ¿De cuántas maneras diferentes podría haber conseguido Carlitos esa puntuación, suponiendo que en cada caso fue posible capturar las bolitas necesarias?

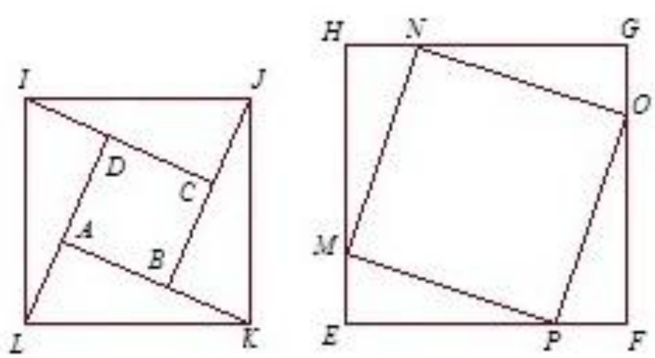
5) La suma de los números primos a y b es 34 y la suma de los números primos a y c es 33. Determine el valor de $a+b+c$

Solución:

La suma de los números primos a y b es 34 y la suma de los números primos a y c es 33. Determine el valor de $a+b+c$

Como $a+b=34$ y $a+c=33$ entonces $b-c=1$, luego los primos b y c son dos primos consecutivos, los únicos son 2 y 3. Por lo tanto $b=3$ y $c=2$, reemplazando c, tenemos que $a+2=33$, luego $a=31$. Así $a+b+c=36$.

6) Cuatro triángulos iguales se organizan de dos formas diferentes, como se muestra en las figuras.



El lado del cuadrado EFGH mide $9\,cm$ y el área del cuadrado $IJKL$ es $45\ cm^2$. Determine la medida del lado del cuadrado $ABCD$.

Solución:

Cuatro triángulos iguales se organizan de dos formas diferentes, como se muestra en las figuras. El lado del cuadrado $EFGH$ mide $9cm$ y el área del cuadrado $IJKL$ es $45cm^2$. Determine la medida del lado del cuadrado.

Observe que las hipotenusas de los triángulos son los lados de los cuadrados $IJKL$ y $MNOP$, luego estas tienen la misma área que es $45cm^2$. El área A_T de los triángulos es el área del cuadrado $EFGH$ menos el área del cuadrado $MNPO$, es decir

$$A_T = 81cm^2 - 45cm^2 = 36cm^2$$

El área del cuadrado $ABCD$ es igual al área del cuadrado $IJKL$ menos el área de los triángulos, esto es:

$$A(ABCD) = A(IJKL) - A_T = 45cm^2 - 36cm^2 = 9cm^2$$

Por lo tanto el lado del cuadrado $ABCD$ es $3cm$.

Problemas y Soluciones Nivel Medio

1) El primer número de una secuencia es 4, el próximo se obtiene de la siguiente manera: calculamos el cuadrado del número anterior $4^2 = 16$ y en seguida calculamos la suma de sus dígitos y adicionamos 4, es decir el segundo número de la secuencia es $1+6+4=11$. Repetimos este proceso, obteniendo $11^2 = 121$ y así el tercer número de la secuencia es $1+2+1+4=8$ y así sucesivamente. ¿Cuál es el elemento 2010 de esta secuencia?

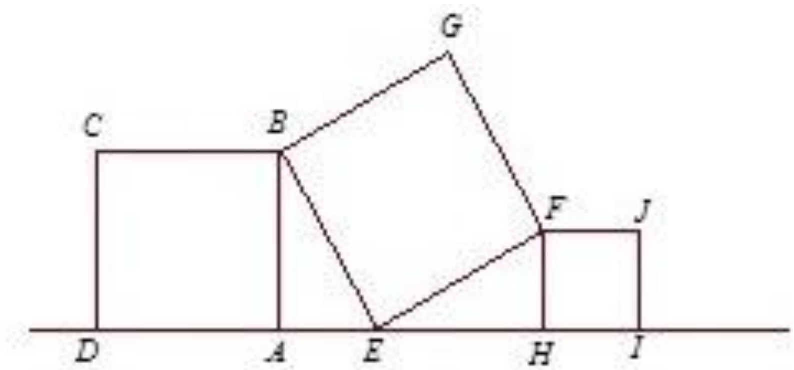
Solución:

Los primeros números de la secuencia son:

Posición	1	2	3	4	5	6	7	8
Número de la secuencia	4	11	8	14	20	8	14	20

Donde vemos que, excepto los dos primeros términos, la secuencia es periódica con periodo 3. Como 2010 deja residuo 0 al dividirlo por 3, el número que buscamos coincide con aquel que ocupa el 3^{er} lugar en la secuencia, este es 8.

2) En la figura el cuadrado $ABCD$ tiene área de $30\ cm^2$ y el cuadrado $FHIJ$ tiene área de 20 cm^2. Los vértices A, D, E, H e I de los tres cuadrados están en una misma recta. Calcule el área del cuadrado $BEFG$.



Solución:

Los triángulos EAB y EHF son triángulos rectángulos, rectos en A y H, respectivamente. La medida del ángulo $B\hat{E}F$ es 90^o; si la medida del ángulo HEF es x, entonces la medida de los ángulos $A\hat{E}B$ y $E\hat{F}H$ es $90^o - x$ y en consecuencia, la medida del ángulo $E\hat{B}A$ es x.

Además, $BE = BF$ por lo tanto, del criterio Ángulo-Lado-Ángulo, los triángulos EAB y EHF son congruentes. Teniéndose que $FH = AE$ y $BA = EH$.

Del teorema de Pitágoras, tenemos que

$$(BE)^2 = (AE)^2 + (BA)^2$$

Así, el área pedida es

$$(BE)^2 = 20cm^2 + 30cm^2 = 50cm^2$$

3) Decimos que un conjunto A formado por cuatro dígitos distintos no nulos es intercambiable si podemos formar dos pares de números, cada uno con 2 dígitos de A, de modo que el producto de los números de cada par sea el mismo y que, en cada par, todos los dígitos de A se utilicen. Por ejemplo, el conjunto $1,2,3,6$ es intercambiable pues $21\times 36 = 12\times 63$. Determine todos los conjuntos intercambiables.

Solución:

Sea $A=\{a,b,c,d\}$ un conjunto intercambiable, entonces podemos suponer sin perder generalidad que:

$$ab\times cd = ba\times dc$$

de donde

$$(10a+b)\times(10c+d) = (10b+a)\times(10d+c)$$

luego obtenemos,

$$10^2(ac-bd)+10(ad+bc-bc-da)+(bd-ac)=0$$

de aquí,

$$ac = bd$$

Realizando una tabla para el producto de dígitos distintos.

$\times$	1	2	3	4	5	6	7	8	9
1		2	3	4	5	6	7	8	9
2			6	8	10	12	14	16	18
3				12	15	18	21	24	27
4					20	24	28	32	36
5						30	35	40	45

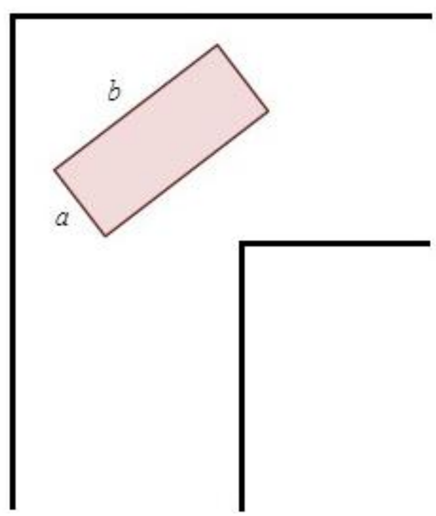
6	42	48	54
7		36	63
8			72

Los conjuntos intercambiables estarán formados por aquellos dígitos que producen dos valores iguales en la tabla de productos. Por ejemplo, el 6 es el resultado de multiplicar 2×3 y 1×6 , luego $A=\{1,2,3,6\}$ es intercambiable.

Luego todos los conjuntos intercambiables son:

$\{1,2,3,6\},\{1,2,4,8\},\{2,3,4,6\},\{2,3,6,9\},\{3,4,6,8\}$

4) Una mesa rectangular, cuyas patas tienen ruedas, debe ser empujada por un pasillo de ancho constante, que forma un ángulo recto.



Si las dimensiones de la mesa son a y b (con $2a<b$), ¿cuál debe ser el ancho mínimo del pasillo para que la mesa pueda ser empujada a través de él?

Solución:

El mínimo se tendrá cuando la mesa toque la esquina inferior del pasillo y los lados del pasillo, como se muestra en la figura.

Consideremos los 2 triángulos isósceles que se muestran y hallemos la medida de $x+y$, lo cual corresponde al ancho del pasillo.

Del teorema de Pitágoras tenemos,

$$2x^2 = \left(\frac{b}{2}\right)^2 \Rightarrow x = \frac{b}{2\sqrt{2}}$$

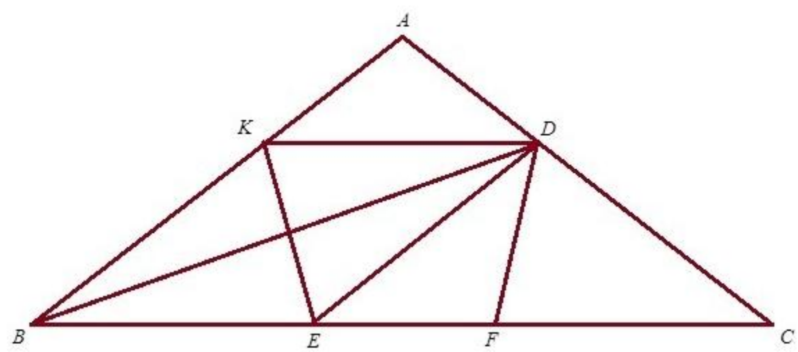
$$2y^2 = a^2 \Rightarrow y = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

Luego,

$$x+y = \frac{b}{2\sqrt{2}} + \frac{a}{\sqrt{2}} = \frac{2a+b}{2\sqrt{2}}$$

$$\Rightarrow x+y = \frac{(2a+b)\sqrt{2}}{4}$$

5) Sea ABC un triángulo tal que en su interior se puede inscribir un pentágono regular $AKEFD$, como se muestra en la figura. Hallar la medida del ángulo $\widehat{BDE}$.



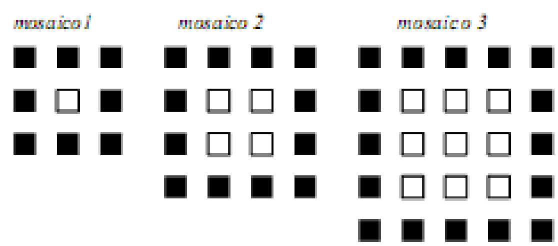
Solución:

Sea K el vértice del pentágono que pertenece al lado AB y es distinto de A. F el otro vértice del pentágono que está en BC. Dado que $AD = AKDF = FE$, los triángulos AKD y

DFE son isósceles y congruentes entre sí, por lo tanto, $DK = DE$ y el triángulo DKE también será isósceles y los ángulos son como aparecen en la figura.

Dado que $\angle AKD = \angle KED$, tenemos que KD es paralelo a ED. Combinados estos dos resultados se sigue que $BKDE$ es un paralelogramo. Puesto que en un paralelogramo el punto de corte de sus diagonales es también el punto medio de las mismas, se sigue que DX es la bisectriz del ángulo KDE en el triángulo isósceles DKE. Como el ángulo $\angle KDE = \angle KBE = 36^{\circ}$ se sigue que $\angle BDE = 18^{\circ}$.

6) Con Azulejos cuadrados y negros del mismo tamaño, construimos los siguientes mosaicos:



La regla para construir estos mosaicos es la siguiente:

Inicialmente formamos un cuadrado con 1 azulejo blanco cercado por azulejos negros; y en seguida, otro cuadrado, éste con 4 azulejos blancos, también cercados por azulejos negros; y así sucesivamente. Con 80 azulejos negros, ¿cuántos azulejos blancos serán necesarios para hacer una secuencia como ésta?

Solución:

Sea $a_k = 4(k+1)$ y $b_k = k^2$ el número de azulejos negros y blancos respectivamente, del mosaico k-ésimo. Por ejemplo, el mosaico 2, tiene $a_2 = 4(2+1) = 12$ azulejos negros y $b_2 = 2^2 = 4$ azulejos blancos.

El número de azulejos negros, cuando tenemos n mosaicos será:

$$S_N(n)=\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n} 4(k+1)=4\sum_{k=1}^{n}(k+1)$$

$$S_N(n)=4\left[\frac{n(n+1)}{2}+n\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$S_N(n)=2n(n+3)$$

El número de azulejos blancos, cuando tenemos n mosaicos es:

$$S_B(n)=\sum_{k=1}^{n} b_k = \sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$\Rightarrow$$

$$S_B(n)=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Si tenemos 80 azulejos negros, entonces:

$$\begin{aligned} 2n(n+3)=80 &\Rightarrow n^2+3n-40=0 \\ &\Rightarrow (n+8)(n-5)=0 \\ &\Rightarrow n=-8, n=5 \end{aligned}$$

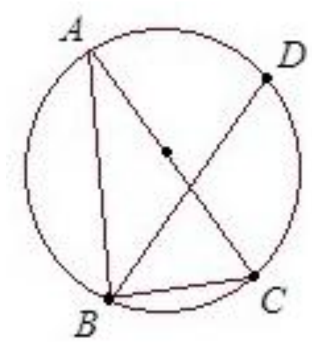
Como $n>0$, entonces $n=5$.

Por lo tanto, el número de azulejos blancos necesarios es:

$$S_B(n)=\frac{5(6)(11)}{6}=55$$

Problemas y Soluciones Nivel Avanzado

1) En la circunferencia que se muestra en la figura, tenemos que: $AB = 4$, $BC = 2$, $\overline{AC}$ es el diámetro y los ángulos $\widehat{ABD}$ y $\widehat{CBD}$ son congruentes. Determine la medida del segmento $\overline{BD}$.



Solución:

Dado que $\overline{AC}$ es diámetro, entonces $m(\angle ABC) = 90^\circ$ y como $\angle ABD \cong \angle CBD$ tenemos $m(\angle ABD) = m(\angle CBD) = 45^\circ$. Simbolicemos por $z = BD$, $x = CD$, $y = AD$ y $d = AC$.

Del teorema de Pitágoras (ΔABC) tenemos

$$d^2 = BC^2 + AB^2$$

de ahí

$$d^2 = 20 \qquad (1)$$

Como $\overline{AC}$ es diámetro, entonces el ángulo $\angle ADC$ es recto, aplicando el teorema de Pitágoras al triangulo ΔADC tenemos

$$d^2 = x^2 + y^2 \quad \Rightarrow \quad 20 = x^2 + y^2 \qquad (2)$$

Aplicando el teorema del coseno a los triángulos ΔBCD y ΔBAD tenemos

$$x^2 = 4 + z^2 - 4z\cos 45^\circ \;\text{ y }\; y^2 = 16 + z^2 - 8z\cos 45^\circ$$

entonces

$$x^2 = 4 + z^2 - 2z\sqrt{2} \;\text{ y }\; y^2 = 16 + z^2 - 4z\sqrt{2}$$

por (1)

$$x^2 + y^2 = 20 + 2z^2 - 6z\sqrt{2}$$

Luego reemplazando (2), tenemos

$$20 = 20 + 2z^2 - 6z\sqrt{2} \;\Rightarrow\; 2z^2 - 6z\sqrt{2} = 0 \;\Rightarrow\; 2z(z - 3\sqrt{2}) = 0$$

de ahí que $z = 0$ o $z = 3\sqrt{2}$. Por lo tanto $AD = 3\sqrt{2}$.

2) Dados los números enteros de 1 a 26, elegir 13 de ellos de modo que:

a) El número 4 sea uno de los números elegidos.

b) Ningún número elegido sea divisor de otro número elegido.

Solución:

Sabemos que todo entero positivo n se puede escribir en la forma $n = 2^a \cdot b$ con $a \geq 0$, $b > 0$ y b impar (llamamos b a la parte impar de n). Supongamos dos números con la misma parte impar, digamos $n_1 = 2^{a_1} \cdot b$ y $n_2 = 2^{a_2} \cdot b$. Sin pérdida de generalidad supongamos $a_1 < a_2$, entonces tenemos n_1 es divisor de n_2. Por lo tanto, como de 1 a 26 tenemos 13 posibles partes impares: 1, 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17, 19, 21, 23 y 25; cada número debe tener una parte impar diferente. Más aun, considerando que 1 divide a todos los números enteros, el número con parte impar 1 es el que debe tener mayor a. Pero $4 = 2^2 \cdot 1$ esta entre los números escogidos, luego los números escogidos tienen $a = 0$ o $a = 1$, y así podemos determinar las escogencias posibles.

c) 3 es divisor de $9, 15$ y 21. Luego $2 \cdot 3 = 6, 9, 15$ y 21 deben estar en la escogencia.

d) 5 es divisor de 10, 15 y 25. Luego deben estar $2 \cdot 5 = 10$ y 25.

e) 7 es divisor de 14 y 21. Luego debe estar 14.

f) 11 es divisor de 22 podemos escoger 11 o 22.

g) 13 es divisor de 26 podemos escoger 13 o 26.

h) Además podemos escoger 17, 19 y 23.

Por lo tanto, las posibles escogencias son: 4, 6, 9, 15, 21, 10, 25, 14, 11 o 22, 13 o 26, 17, 19, 23.

3) Sean x y y números reales positivos tales que $x + y = 1$. Probar que

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{y}\right) \geq 9$$

Solución:

Tenemos que $x = 1 - y$, como $y > 0$, entonces $-y < 0$, de ahí que $1 - y < 1$. Por tanto $0 < x < 1$. Luego cada una de las siguientes es equivalente

$$\left(1 + \frac{1}{x}\right)\left(1 + \frac{1}{1-x}\right) \geq 9$$

$$\left(\frac{x+1}{x}\right)\left(\frac{2-x}{1-x}\right) \geq 9$$

$$(x+1)(2-x) \geq 9(1-x)x$$

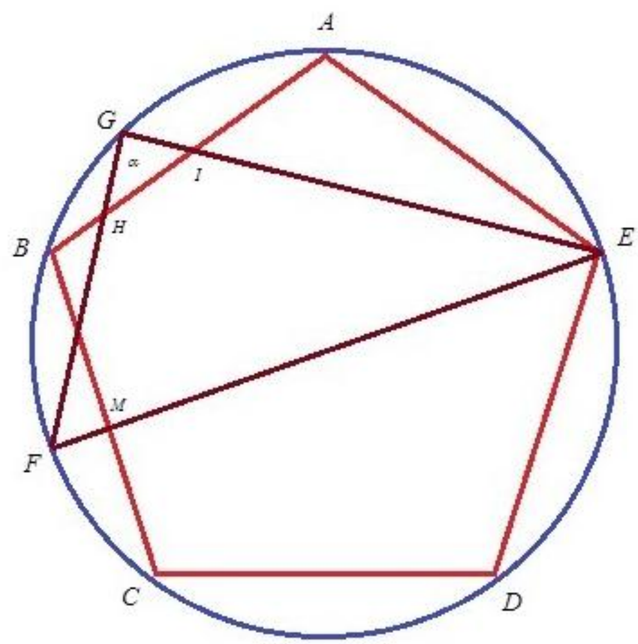
$$-x^2 + x + 2 \geq 9x - 9x^2$$

$$8x^2 - 8x + 2 \geq 0$$

$$(2x-1)^2 \geq 0$$

Esta última desigualdad se cumple siempre. Por tanto, se cumple lo que se pedía demostrar.

4) En la siguiente figura, el pentágono regular $ABCDE$ y el triángulo EFG están inscritos en la circunferencia C_o y M es el punto medio del segmento $\overline{BC}$. ¿Cuál es el valor de α (ángulo $\widehat{GHI}$), en grados, para el cual los triángulos EFG y HIG son semejantes?



Solución:

Sea J la intersección de los segmentos BC y FG. Como M es punto medio del segmento BC, opuesto al vértice E, podemos concluir que EF es diámetro y

$m(\angle FGE) = m(\angle BME) = 90^{\circ}$. Dado que $ABCDE$ es pentágono regular, $m(\angle ABC) = 108^{\circ}$ (El ángulo β de un polígono regular mide $\beta = \frac{180(n-2)}{n}$)

a) Del triángulo ΔGHI : $m(\angle GHI) = \alpha \quad \rightarrow \quad m(\angle GIH) = 90^{\circ} - \alpha$

b) Del triángulo ΔBJH : $m(\angle BHJ) = \alpha \quad \rightarrow \quad m(\angle BJH) = 72^{\circ} - \alpha$

c) Del triángulo ΔFJM : $m(\angle FJM) = m(\angle BJH) = 72^{\circ} - \alpha \quad \rightarrow \quad m(\angle JFM) = 18^{\circ} + \alpha$

Para que los triángulos EFG y HIG sean semejantes, como $\alpha \neq 18^{\circ} + \alpha$. La única posibilidad que nos queda es que $\alpha = \alpha$ y $90^{\circ} - \alpha = 18^{\circ} + \alpha$, de donde se tiene que $\alpha = 36^{\circ}$.

5) Los número naturales a y b son tales que

$$\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$$

es un entero. Demuestre que el máximo común divisor de a y b es menor o igual que $\sqrt{a+b}$.

Solución:

Sea $d = mcd(a,b)$, entonces $d \mid a$ y $d \mid b$. Luego existen enteros m y n tales que $a = md$ y $b = nd$. Entonces tenemos que

$$\frac{md+1}{nd} + \frac{nd+1}{md} = \frac{m^2d + m + n^2d + n}{(mn)d}$$

es un entero, de donde d divide a $m^2d + n^2d + (m+n)$, de lo cual se tiene que d divide a $m+n$ y por lo tanto

$$d \leq m+n \Rightarrow d^2 \leq d(m+n) \Rightarrow d \leq \sqrt{dm+dn} \Rightarrow d \leq \sqrt{a+b}$$

6) Se quiere colocar los naturales del 1 al 9 en las casillas de una tabla 3×3 (uno en cada casilla), de manera que la suma en cada columna y en cada fila de la tabla sea impar. ¿De cuantas formas se puede hacer esto?

Solución:

Entre los naturales del 1 al 9 hay cinco impares, entonces necesariamente en alguna de las tres columnas hay por lo menos dos impares; como la suma de los números en esa columna es impar, el tercer número en esa columna debe ser también impar, por la misma razón una de las filas debe tener tres impares. Entonces hay una fila y una columna con solo impares en las demás filas y columnas hay dos pares y un impar. Solo de esta forma la suma de los números en cada fila y columna es impar.

La fila con solo impares, lo podemos escoger de tres formas y la columna también de tres formas. Los 5 impares están en las casillas de esa fila y esa columna y los podemos ubicar de $5!=120$ formas. Los pares que están en las casillas restantes los podemos ubicar de $4!=24$ formas, por lo tanto hay $9\times 120\times 24=25920$ formas de colocar los naturales del 1 al 9 de manera que la suma en cada columna y fila sea impar.