

**MODELO RELATIVISTA PARA EL CAMPO GRAVITACIONAL  
EXTERIOR DE UNA ESTRELLA DE NEUTRONES RÁPIDAMENTE  
ROTANTE**

**FREDY LEONARDO DUBEIBE MARÍN**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESCUELA DE FÍSICA**

**2004**

**MODELO RELATIVISTA PARA EL CAMPO GRAVITACIONAL  
EXTERIOR DE UNA ESTRELLA DE NEUTRONES RÁPIDAMENTE  
ROTANTE**

**FREDY LEONARDO DUBEIBE MARÍN**

**Trabajo de grado para optar al título de físico**

**Director**

**DR. JOSÉ DAVID SANABRIA GÓMEZ**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER**

**FACULTAD DE CIENCIAS**

**ESCUELA DE FÍSICA**

**2004**

*A mi hijo*

*Juan David Dubeibe*

*A mi madre,*

*Maria Nelly Marín.*

*A mi padre,*

*Dumar Dubeibe.*

*Por el grandísimo apoyo que me brindaron,*

*Gracias.*

## AGRADECIMIENTOS

El autor expresa sus agradecimientos:

Al Dr. José David Sanabria Gómez.

Al Dr. Guillermo Alfonso González Villegas.

Al Grupo de Investigación en Relatividad y Gravitación (GIRG).

A Liliana Marcela Díaz.

A mis hermanos Diego Fernando y Dumar Said.

A mis abuelas Uvaldina y Maria del Carmen.

A la Universidad Industrial de Santander.

# Índice general

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
<b>1. CAMPO GRAVITACIONAL AXIALSIMÉTRICO ESTACIONARIO EN RELATIVIDAD GENERAL</b>	<b>5</b>
1.1. El tensor métrico . . . . .	5
1.2. Ecuaciones de Einstein–Maxwell . . . . .	7
1.3. Forma general de una métrica estacionaria axialsimétrica . . . . .	8
1.4. Órbita marginalmente estable . . . . .	10
1.5. Corrimiento al rojo gravitacional . . . . .	14
<b>2. SOLUCIONES INTERIORES PARA ESTRELLAS DE NEUTRONES ROTANTES</b>	<b>19</b>
2.1. Ecuaciones de estado y estructura de las estrellas de neutrones . . . . .	19
2.2. Estrellas rotantes . . . . .	21
<b>3. AJUSTE NUMÉRICO DE UNA SOLUCIÓN EXACTA EXTERIOR Y LAS SOLUCIONES NUMÉRICAS INTERIORES</b>	<b>28</b>
3.1. Solución exacta de cuatro parámetros de las ecuaciones de Einstein–Maxwell	28
3.2. Ajuste numérico del corrimiento al rojo gravitacional . . . . .	31

3.3. Ajuste numérico del radio de la órbita marginalmente estable . . . . .	39
<b>CONCLUSIONES</b>	<b>44</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>46</b>

# Lista de Tablas

2.1. Ecuaciones de estado realistas para estrellas de neutrones. . . . .	20
2.2. Características físicas de las estrellas de neutrones. Tomado de CST [6]. . .	21
2.3. Valores numéricos de los parámetros físicos obtenidos por CST para estre- llas de neutrones con diversas ecuaciones de estado. . . . .	25
2.4. Parámetros físicos adimensionales calculados para las tres ecuaciones de estado estudiadas a partir de los datos de CST . . . . .	26
2.5. Ajuste numérico de los parámetros $m$ y $r_*$ : $m = m_0 + m_1j^2 + m_2j^4 + m_3j^6$ , $r_* = r_0 + r_1j^2 + r_2j^4 + r_3j^6 + r_4j^8 + r_5j^{10}$ para las diferentes ecuaciones de estado. . . . .	27
3.1. Ajuste numérico del parámetro de deformación $b$ para las tres ecuaciones de estado estudiadas a partir de los datos de CST . . . . .	35

# Lista de Figuras

3.1. Corrimiento al rojo en función del parámetro de rotación para EOS A (NS)	36
3.2. Corrimiento al rojo en función del parámetro de rotación para EOS A (MM)	36
3.3. Corrimiento al rojo en función del parámetro de rotación para EOS L (MM)	37
3.4. Porcentaje de error del ajuste numérico del corrimiento al rojo para EOS	
A (NS) . . . . .	37
3.5. Porcentaje de error del ajuste numérico del corrimiento al rojo para EOS	
A (MM) . . . . .	38
3.6. Porcentaje de error del ajuste numérico del corrimiento al rojo para EOS	
L (MM) . . . . .	38
3.7. Radio de la órbita marginalmente estable vs $j$ para EOS A (NS) . . . . .	41
3.8. Radio de la órbita marginalmente estable vs $j$ para EOS A (MM) . . . . .	41
3.9. Radio de la órbita marginalmente estable vs $j$ para EOS L (MM) . . . . .	42
3.10. Porcentaje de error en el radio de la órbita marginalmente estable para	
EOS A (NS) . . . . .	42
3.11. Porcentaje de error en el radio de la órbita marginalmente estable para	
EOS A (MM) . . . . .	43
3.12. Porcentaje de error en el radio de la órbita marginalmente estable para	
EOS L (MM) . . . . .	43

# MODELO RELATIVISTA PARA EL CAMPO GRAVITACIONAL EXTERIOR DE UNA ESTRELLA DE NEUTRONES RÁPIDAMENTE ROTANTE<sup>1</sup>

Fredy Leonardo Dubeibe Marín.<sup>2</sup>

## Palabras Claves

1. Estrellas. 2. Masas. 3. Estrellas–radios. 4. Estrellas–masas. 5. Estrellas de neutrones 6. Espacio–tiempos de Einstein–Maxwell. 7. Sistemas auto–gravitantes.

## Resumen

Las estrellas de neutrones, junto con las enanas blancas y los agujeros negros, son tipos de objetos compactos que deben ser estudiados utilizando la teoría general de la relatividad. Las estrellas de neutrones se caracterizan por poseer una superficie sólida, hecho que unido a una velocidad de rotación alta implica una distribución de masa alejada de la simetría esférica, típicamente de orden cuadripolar y superior. En este trabajo se presenta un modelo relativista del campo gravitacional exterior de estrellas de neutrones con rotación rápida, el cual se obtiene ajustando los parámetros físicos de una solución exacta de las ecuaciones de Einstein–Maxwell, encontrada por Manko *et al* [13] (se hace referencia a esta solución con el nombre de solución exterior), con los resultados numéricos para el interior de estrellas de neutrones, con tres ecuaciones de estado distintas, calculados por Cook *et al* [6] (se hace referencia a esta solución con el nombre de solución interior). Este ajuste se realiza a través de dos parámetros característicos de las estrellas de neutrones: el corrimiento al rojo gravitacional de la luz emitida desde su superficie y el radio de la órbita marginalmente estable.

---

<sup>1</sup>Trabajo de grado.

<sup>2</sup>Facultad de Ciencias. Pregrado en Física. SANABRIA GÓMEZ, José David.

# RELATIVISTIC MODEL OF THE EXTERIOR GRAVITATIONAL FIELD OF RAPIDLY ROTATING NEUTRON STARS<sup>3</sup>

Fredy Leonardo Dubeibe Marín<sup>4</sup>

## Key words

1. Stars.
2. Mass.
3. Stars–radii.
4. Stars–mass.
5. Neutron stars.
6. Einstein–Maxwell space–times.
7. Self–gravitating systems.

## Abstract

The neutron stars are the one possibility of the final stage of the stellar evolution. They have strong gravitational fields therefore it is necessary to use the general theory of relativity in order to describe them correctly. Besides, the neutron stars have a solid surface and are therefore oblate when rapidly rotating. In this work an exact solution of the Einstein–Maxwell equations endowed with quadrupole moment of mass, calculated by Manko et al (2000), is used to describe the exterior field of rotating neutron stars. The exact solution is matched with data obtained from numerical solutions for interior of realistic neutron stars using three equations of state calculated by Cook et al (1994). This work is based on the paper published by M. Stute and M. Cammenzind (2003); the results show a little improvement in the accuracy of the model.

---

<sup>3</sup>Undergraduate diploma paper

<sup>4</sup>Facultad de Ciencias. Pregrado en Física. SANABRIA–GÓMEZ, José David

# INTRODUCCIÓN

En 1932 James Chadwick [4] descubrió el neutrón por lo cual recibió el premio Nóbel en 1935. Tan solo dos años después L. Landau, y de forma independiente W. Badecy y F. Zwicky [2], formularon la hipótesis sobre la existencia de unas estrellas muy compactas, las cuales consistían principalmente de neutrones como posibles residuos de la explosión de supernovas.

Por mas de 30 años se puso en duda la existencia de tales estrellas, hasta el año de 1967 cuando Jocelyn Bell, entonces estudiante de doctorado del Profesor A. Hewish, descubrió el primer pulsar (PSR 1919+21). Este descubrimiento inmediatamente indujo una avalancha de trabajos de astrónomos de todo el mundo para estudiar y entender estos objetos y en poco tiempo se llegó a la conclusión de que los púlsares son estrellas de neutrones en rotación, en las cuales el eje magnético no está alineado con el eje de rotación.

El Profesor A. Hewish recibió el Premio Nobel de Física en 1974 por este descubrimiento.

Trabajos posteriores mostraron que la emisión de radio-ondas se produce en un cono (determinado por el campo magnético del púlsar), que como un haz estrecho va barriendo el cielo debido a la rotación de la estrella de neutrones: cada vez que este haz apunta hacia nosotros, recibimos un pulso.

Esta es la principal característica que distingue a los púlsares de cualquier otro objeto

astrofísico; es decir, no emiten radiación electromagnética de manera continua, sino en forma de pulsos. Según el púlsar, el periodo puede ir desde algunos milisegundos hasta un máximo de algunas decenas o centenas de segundos. A pesar de que la forma del pulso, lo mismo que su periodo, varía de un púlsar a otro, en cada pulsar estas cantidades se mantienen razonablemente constantes. Los periodos que se observan en los púlsares permiten sacar conclusiones sobre la naturaleza misma de la estrella.

Para que un cuerpo en rotación sobre sí mismo sea dinámicamente estable, debe cumplir una condición de equilibrio entre la fuerza gravitatoria, que depende de su masa, y la fuerza centrífuga, que depende de la velocidad de rotación. Si el cuerpo gira con una rapidez superior a cierta velocidad máxima, se disgrega por efecto de su propia fuerza centrífuga. Esto implica que también ha de existir un valor mínimo para el periodo de rotación, de tal manera que el cuerpo no colapse por efecto de su propia gravedad, teniendo en cuenta que el valor del periodo mínimo es inversamente proporcional a la raíz cuadrada de la densidad del cuerpo. Aplicando esta relación se demuestra que si una estrella puede girar con un periodo de pocos milisegundos, como el que se observa en algunos púlsares, debe tener una densidad muy elevada, la cuál sólo puede ser igual a la del núcleo atómico. Una estrella de neutrones es un objeto con una masa comprendida entre  $1.5$  y  $3M_{\odot}$ , pero con un radio de sólo  $10$  Km. Estas estrellas están constituidas esencialmente por neutrones, electrones y protones, con estos últimos en menor porcentaje. A causa de las elevadas temperaturas del interior de las estrellas, la materia se encuentra ionizada, es decir, los electrones están separados de los núcleos atómicos. En el interior de las estrellas de neutrones, las altas densidades favorecen las interacciones nucleares entre electrones  $e^{-}$  y protones  $p$  libres, los cuales reaccionan entre sí formando un neutrón  $n$  y un neutrino

electrónico  $\nu_e$ , según el esquema:



Este proceso, llamado neutronización o  $\beta$ -inverso, prosigue hasta que la mayor parte del núcleo estelar está formado por neutrones. Las otras partículas que produce la reacción, los neutrinos, atraviesan el núcleo de la estrella sin interactuar con otras partículas y escapan de su superficie para luego dispersarse por el espacio. Estas partículas son responsables, en gran parte, del enfriamiento de la estrella.

Los agujeros negros son una predicción derivada de la teoría de la relatividad general de Einstein, la teoría moderna de la gravedad. Existe una descripción precisa del campo gravitacional exterior de agujeros negros, que especifica una curvatura del espacio-tiempo. Cuando se quiere modelar el campo gravitacional exterior de una estrella de neutrones, es necesario utilizar la teoría general de la relatividad, debido a que los inmensos campos gravitacionales de estas estrellas (los mas próximos a los de un agujero negro) hacen notables estos efectos relativistas, poniendo de manifiesto los límites de las teorías clásicas. La importancia de contar con un modelo adecuado para la descripción de las estrellas de neutrones radica en que los procesos de acrecimiento – o captura de materia debido a interacción gravitatoria – y de emisión de radiación gravitacional por partículas cayendo sobre la superficie de la estrella se rigen en primera instancia por sus campos exteriores (gravitatorio y magnético), para los cuales es siempre preferible una descripción analítica que una numérica. Una solución que describa tal campo debe incluir cuatro parámetros: la masa, el momento angular, el momento magnético, y un parámetro asociado con la deformación de la estrella (ver [10], [17] y referencias interiores), pues se cree que la

superficie de tales estrellas es sólida, lo que originaría un aumento en la deformación proporcional a la velocidad de rotación. Modelos de este tipo han sido desarrollados por Sibgatullin y Sunyaev [17] usando una solución exacta diferente a la que se utilizará en este trabajo y por Camenzind y Stute [3] usando la solución exacta que se considerará en el capítulo 3 y un parámetro de deformación de orden inferior al que se considerará en este trabajo. Como se verá en el citado capítulo, la inclusión de carga eléctrica en la métrica es irrelevante para los cálculos que se llevarán a cabo.

Este trabajo se divide en cuatro partes: en el capítulo 1 se presenta la forma general de una métrica estacionaria axialmente simétrica, que servirá para modelar el campo exterior de un objeto compacto. A partir de esta métrica se muestra un método para calcular el corrimiento al rojo y el radio de la órbita marginalmente estable. Por otro lado, en el capítulo 2 se presenta una descripción detallada de los parámetros físicos calculados numéricamente a partir de modelos interiores de estrellas de neutrones, para diversas ecuaciones de estado conocidas. En el capítulo 3 se presenta una solución exacta de las ecuaciones de Einstein–Maxwell apropiada para la correcta descripción del campo gravitacional de una estrella de neutrones y se hace un ajuste entre las dos soluciones (interiores y exterior) en el ecuador de la estrella. Finalmente, se presentan las conclusiones del trabajo.

# Capítulo 1

## CAMPO GRAVITACIONAL

## AXIALSIMÉTRICO

## ESTACIONARIO EN

## RELATIVIDAD GENERAL

### 1.1. El tensor métrico

En el espacio tiempo de Riemann se introduce un tensor métrico, usualmente denotado  $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ . El tensor métrico es simétrico, covariante y de orden 2, además es una función de las coordenadas espacio temporales. Debido a la simetría de dicho tensor, éste tiene solo diez componentes independientes. A cada componente del tensor métrico se le denomina coeficiente métrico. El cuadrado de la distancia entre dos puntos cercanos del espacio

tiempo puede expresarse en términos del tensor métrico y se define en la forma

$$ds^2 = \sum_{\mu, \nu=0,1,2,3} g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu = g_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (1.1)$$

donde se ha empleado la convención de suma: si en una fórmula hay un superíndice y un subíndice repetidos, se entiende que hay suma sobre los mismos. La anterior expresión es algunas veces llamada el elemento de línea. Los espacios riemannianos se caracterizan por tener elementos de línea de la forma (1.1).

Cuando se utilizan coordenadas cartesianas tridimensionales el cuadrado de la distancia entre dos puntos vecinos en el espacio tridimensional Euclidiano está dado por

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (1.2)$$

En el espacio plano cuadridimensional minkowskiano, cuando se utilizan coordenadas cartesianas, el cuadrado de la distancia está dado por

$$ds^2 = (dx^0)^2 - (dx^1)^2 - (dx^2)^2 - (dx^3)^2, \quad (1.3)$$

donde  $x^0 = ct$ ,  $x^1 = x$ ,  $x^2 = y$ ,  $x^3 = z$  y  $c$  es la velocidad de la luz.

Estos espacios son llamados pseudo-riemannianos debido a que la métrica no es definida positiva. El tensor métrico  $g_{\mu\nu}(x)$  de un espacio riemanniano curvado, no puede reducirse globalmente por medio de una transformación de coordenadas a un tensor métrico minkowskiano (1.3). En un espacio riemanniano el tensor métrico puede tener una forma complicada en la que sus componentes no son necesariamente constantes, siendo por lo general funciones muy complicadas de las coordenadas.

## 1.2. Ecuaciones de Einstein–Maxwell

Las ecuaciones de Einstein–Maxwell son una generalización de las ecuaciones de campo gravitacional newtonianas y las ecuaciones de Maxwell, que se reducen a éstas en un límite apropiado (límite de campo débil). En su forma mas compacta, estas ecuaciones tienen la forma

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} &= 8\pi T_{\mu\nu}, & T_{\mu\nu} &= \frac{1}{4\pi}(F_{\mu\gamma}F^{\gamma}_{\nu} - \frac{1}{4}F_{\gamma\delta}F^{\gamma\delta}g_{\mu\nu}) \\ \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(\sqrt{-g}F^{\mu\nu}) &= 0, & F_{\mu\nu,\gamma} + F_{\nu\gamma,\mu} + F_{\gamma\mu,\nu} &= 0, \end{aligned} \quad (1.4)$$

donde  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein,  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía-impulso del campo electromagnético,  $g_{\mu\nu}$  el tensor métrico,  $g$  el determinante del tensor métrico y  $F^{\mu\nu}$  el tensor de campo electromagnético (los índices  $\mu$  y  $\nu$  toman los valores 0, 1, 2 y 3). Las anteriores ecuaciones representan un sistema de diez ecuaciones diferenciales parciales de segundo orden, acopladas y no lineales.

El tensor de Einstein se define como

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R, \quad (1.5)$$

con  $R = g^{\mu\nu}R_{\mu\nu}$  la traza del tensor de Ricci, también llamada escalar de curvatura. Es necesario aclarar que el tensor de Ricci está expresado solamente en función de derivadas y productos de derivadas del tensor  $g_{\mu\nu}$  (para ver las definiciones del tensor de Ricci, el escalar de curvatura, etc. puede consultarse [18]). En el caso del espacio vacío, el tensor

de energía-impulso es cero y las ecuaciones de Einstein reducen a

$$G_{\mu\nu} = 0, \quad (1.6)$$

o de forma equivalente

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (1.7)$$

Encontrar una solución a las ecuaciones de Einstein es encontrar un tensor métrico  $g_{\mu\nu}(x^\alpha)$ , que satisfaga el sistema de ecuaciones (1.4). Debido a la complejidad de las ecuaciones, no se conoce solución general de las ecuaciones de Einstein. Para obtener algunas soluciones se ha hecho necesario imponer algunos tipos de simetrías.

### 1.3. Forma general de una métrica estacionaria axial-simétrica

El carácter estacionario y axialsimétrico del espacio-tiempo requiere que los coeficientes métricos sean independientes de  $t$  y de  $\phi$

$$g_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}(x^2, x^3), \quad (1.8)$$

donde  $x^0 = t$  y  $x^1 = \phi$  donde  $x^2$  y  $x^3$  son coordenadas espaciales. Además, se requiere que el espacio-tiempo sea invariante ante una transformación simultánea de  $t \rightarrow -t$  y  $\phi \rightarrow -\phi$ . En otras palabras, el espacio-tiempo que se considera aquí se asocia con un

cuerpo rotando sobre un eje de simetría. La invariancia que se asume requiere que

$$g_{02} = g_{03} = g_{12} = g_{13} = 0. \quad (1.9)$$

Bajo estas condiciones, la métrica debe tener la forma

$$ds^2 = g_{00} dt^2 - 2g_{01} dt d\phi + g_{11} d\phi^2 + [g_{22} (dx^2)^2 + 2g_{23} dx^2 dx^3 + g_{33} (dx^3)^2], \quad (1.10)$$

donde todos los coeficientes métricos son funciones de  $x^2$  y  $x^3$  únicamente. Una nueva reducción de la métrica puede lograrse haciendo una transformación de coordenadas [5]

$$g_{22}(dx^2)^2 + 2g_{23} dx^2 dx^3 + g_{33}(dx^3)^2 = e^{2\mu}[(dx^2)^2 + (dx^3)^2]. \quad (1.11)$$

De esta transformación se sigue que la ecuación (1.10) se reduce a la forma

$$ds^2 = g_{00} dt^2 - 2g_{01} dt d\phi + g_{11} d\phi^2 + e^{2\mu}[(dx^2)^2 + (dx^3)^2]. \quad (1.12)$$

En 1953 Papapetrou publicó un artículo [16] en el cual demostró que esta métrica puede escribirse en la forma

$$ds^2 = f(dt - \omega d\phi)^2 - \frac{1}{f}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2], \quad (1.13)$$

donde  $\rho$  y  $z$  son coordenadas de Weyl-Papapetrou con  $f, \omega$  y  $\gamma$  funciones solo de las coordenadas  $\rho$  y  $z$ .

## 1.4. Órbita marginalmente estable

La dinámica del movimiento de las partículas en relatividad general se conoce a través de la métrica. Las partículas pueden presentar diversos tipos de trayectorias, en general acotadas y no acotadas. Se analizarán las condiciones que deben satisfacerse para que una partícula tenga trayectoria circular y estabilidad en dicha órbita.

Considérese una partícula de prueba de masa unitaria ( $m_t = 1$ ) moviéndose en el plano ecuatorial, es decir  $z = 0$ . Por lo tanto la métrica (1.13) que describe la trayectoria de la partícula:

$$ds^2 = f(dt - \omega d\phi)^2 - f^{-1}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2],$$

tomará la forma

$$ds^2 = f(dt - \omega d\phi)^2 - f^{-1}(e^{2\gamma}d\rho^2 + \rho^2 d\phi^2). \quad (1.14)$$

Dividiendo por  $d\lambda^2$ , donde  $\lambda$  es un parámetro afín, se tiene

$$\left(\frac{ds}{d\lambda}\right)^2 = f\left(\frac{dt}{d\lambda} - \omega\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2 - f^{-1}\left[e^{2\gamma}\left(\frac{d\rho}{d\lambda}\right)^2 + \rho^2\left(\frac{d\phi}{d\lambda}\right)^2\right]. \quad (1.15)$$

Usando la notación

$$\dot{t} = \frac{dt}{d\lambda}, \quad \dot{\rho} = \frac{d\rho}{d\lambda}, \quad \dot{\phi} = \frac{d\phi}{d\lambda}, \quad (1.16)$$

y la bien conocida expresión  $(ds/d\lambda)^2 = 2\mathcal{L}$ , donde  $\mathcal{L}$  representa el lagrangiano de la partícula, se obtiene

$$2\mathcal{L} = f(\dot{t} - \omega\dot{\phi})^2 - f^{-1}(e^{2\gamma}\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2). \quad (1.17)$$

Por otro lado, con respecto a las coordenadas ignorables  $t$  y  $\phi$  se obtienen las constantes

de movimiento

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = \text{constante} = -E, \quad (1.18)$$

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = \text{constante} = L, \quad (1.19)$$

siendo  $E$  y  $L$  la energía y el momento angular por unidad de masa de la partícula de prueba respectivamente. Evaluando las derivadas en la ecuación (1.17) se tiene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = f(\dot{t} - \omega \dot{\phi}) = -E, \quad (1.20)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = -\omega f(\dot{t} - \omega \dot{\phi}) - f^{-1} \rho^2 \dot{\phi} = L, \quad (1.21)$$

y al resolver este sistema de ecuaciones se obtiene

$$\dot{\phi} = -\frac{1}{\rho^2}(fL - f\omega E), \quad (1.22)$$

$$\dot{t} = -\frac{E}{f} - \frac{\omega}{\rho^2}(fL - f\omega E). \quad (1.23)$$

Por otra parte, se define el cuádrimomento  $p^\alpha$  como

$$p^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}, \quad (1.24)$$

de donde se obtiene

$$p^\alpha p_\alpha = g_{\alpha\beta} p^\alpha p^\beta = g_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = \left( \frac{ds}{d\lambda} \right)^2. \quad (1.25)$$

Usando la relación  $p^\alpha p_\alpha = -m_t^2 = -1$ , resulta la expresión

$$-1 = \left( \frac{ds}{d\lambda} \right)^2, \quad (1.26)$$

con lo cual la ecuación (1.17) toma la forma

$$1 = -f(\dot{t} - \omega\dot{\phi})^2 + f^{-1}(e^{2\gamma}\dot{\rho}^2 + \rho^2\dot{\phi}^2). \quad (1.27)$$

Reemplazando los valores de  $\dot{t}$  y  $\dot{\phi}$  encontrados en (1.22) y (1.23) se encuentra que

$$-1 = -\frac{E^2}{f} + \frac{e^{2\gamma}\dot{\rho}^2}{f} + \frac{f}{\rho^2}(E\omega - L)^2, \quad (1.28)$$

que al ser reordenado puede escribirse

$$V(\rho) = \frac{e^{2\gamma}\dot{\rho}^2}{f} = \frac{E^2}{f} - \frac{f}{\rho^2}(E\omega - L)^2 - 1. \quad (1.29)$$

La anterior expresión sirve para definir el llamado “potencial efectivo”  $V(\rho)$  que permite realizar el análisis del tipo de órbita y su estabilidad. Para órbitas circulares se debe satisfacer

$$V(\rho) = 0 \quad \text{y} \quad \frac{dV(\rho)}{d\rho} = 0, \quad (1.30)$$

de las cuales se obtiene <sup>1</sup>

$$\begin{aligned} \frac{E^2}{f} - \frac{f}{\rho^2}(E\omega - L)^2 - 1 &= 0, \\ -\frac{E^2}{f^2}f_{,\rho} - (L - E\omega)^2\frac{f_{,\rho}}{\rho^2} + \frac{2f}{\rho^3}(L - E\omega)^2 + \frac{2fE}{\rho^2}(L - E\omega)\omega_{,\rho} &= 0. \end{aligned} \quad (1.31)$$

---

<sup>1</sup> $\omega_{,\rho}$  debe entenderse como  $\partial\omega/\partial\rho$ .

De la solución del sistema (1.31) para  $E$  y  $L$  se obtiene

$$E = \frac{\sqrt{f}}{\sqrt{1 - f^2\chi^2/\rho^2}}, \quad L = E(\omega + \chi), \quad (1.32)$$

con

$$\chi = \frac{\rho[-\omega_{,\rho} f^2 - \sqrt{\omega_{,\rho}^2 f^4 + f_{,\rho} \rho(2f - f_{,\rho} \rho)}]}{f(2f - f_{,\rho} \rho)}, \quad (1.33)$$

que permite tener órbitas circulares para cualquier valor de  $\rho$ . De todas estas posibles órbitas circulares, existe una muy importante que es la órbita circular estable mas cercana, a la cual se le denomina órbita marginalmente estable. La condición para la ocurrencia de esta órbita está dada por la ecuación

$$\frac{d^2V(\rho)}{d\rho^2} = 0, \quad (1.34)$$

que usando (1.29) conduce a la siguiente ecuación

$$\begin{aligned} \frac{d^2V(\rho)}{d\rho^2} = & -\frac{6f}{\rho^4}(L - E\omega)^2 + \frac{4f_{,\rho}}{\rho^3}(L - E\omega)^2 + \frac{2E^2 f_{,\rho}^2}{f^3} \\ & - \frac{8Ef}{\rho^3}(L - E\omega)\omega_{,\rho} + \frac{4E}{\rho^2}(L - E\omega)f_{,\rho}\omega_{,\rho} - \frac{2E^2 f\omega_{,\rho}^2}{\rho^2} \\ & - \frac{E^2 f_{,\rho\rho}}{f^2} - \frac{(L - E\omega)^2}{\rho^2} f_{,\rho\rho} + \frac{2Ef}{\rho^2}(L - E\omega)\omega_{,\rho\rho} = 0. \end{aligned} \quad (1.35)$$

Por último, reemplazando las ecuaciones (1.32) y (1.33) en (1.35) se obtiene que la ecuación para el radio  $\rho$  de la órbita marginalmente estable satisface la ecuación

$$\begin{aligned} & (\omega_{,\rho} \omega_{,\rho\rho} f^5(2f - f_{,\rho} \rho) + \omega_{,\rho}^2 f^4[2f^2 + (-f_{,\rho}^2 + f_{,\rho\rho} f)\rho^2]) \\ & + \omega_{,\rho} f^2 \sqrt{\omega_{,\rho}^2 f^4 + f_{,\rho} \rho(2f - f_{,\rho} \rho)} [2f^2 - f_{,\rho}^2 \rho^2 - f\rho(4f_{,\rho} + f_{,\rho\rho} \rho)] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +\rho(2f - f_{,\rho}\rho)\{3f_{,\rho}f^2 - 4f_{,\rho}2f\rho + f_{,\rho}^3\rho^2 \\
& + f^2[f_{,\rho\rho}\rho - \omega_{,\rho\rho}f\sqrt{\omega_{,\rho}^2f^4 + f_{,\rho}\rho(2f - f_{,\rho}\rho)}]\}/(f^2\rho^2\{\omega_{,\rho}^2f^4 \\
& + 3f_{,\rho}f\rho - f_{,\rho}^2\rho^2 - f^2[2 + \omega_{,\rho}\sqrt{\omega_{,\rho}^2f^4 + f_{,\rho}\rho(2f - f_{,\rho}\rho)}]\}) = 0. \quad (1.36)
\end{aligned}$$

## 1.5. Corrimiento al rojo gravitacional

Se llama corrimiento al rojo  $Z$  al cambio en la longitud de onda de la radiación electromagnética, emitida desde la superficie de la estrella de neutrones, en presencia de un campo gravitacional. Se usará  $Z_+$  para definir corrimiento al rojo de fotones que sean emitidos en la dirección de rotación de la estrella y  $Z_-$  para fotones en dirección opuesta. En el plano ecuatorial se puede calcular el cuádrimomento partiendo de la definición (1.24)

$$p^\alpha = \frac{dx^\alpha}{d\lambda}, \quad (1.37)$$

y aplicando la característica de la métrica para geodésicas nulas, es decir para partículas como el fotón

$$ds^2 = 0. \quad (1.38)$$

Se tiene que la métrica de Papapetrou (1.13) toma la forma

$$0 = f(dt - \omega d\phi)^2 - \frac{1}{f}[e^{2\gamma}(d\rho^2 + dz^2) + \rho^2 d\phi^2]. \quad (1.39)$$

En el ecuador de la estrella  $z = 0$  y  $\rho = \text{constante}$ , por lo tanto al dividir la ecuación por

$d\lambda^2$  (donde  $\lambda$  es un parámetro afín) se obtiene

$$0 = f \left( \frac{dt}{d\lambda} - \omega \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2 - f^{-1} \rho^2 \left( \frac{d\phi}{d\lambda} \right)^2. \quad (1.40)$$

De la ecuación (1.24) se obtiene  $dt/d\lambda = p^t$  y  $d\phi/d\lambda = p^\phi$ , entonces

$$0 = f(p^t - \omega p^\phi)^2 - f^{-1} \rho^2 (p^\phi)^2, \quad (1.41)$$

lo cual representa una expresión que relaciona las componentes del cuádrimomento:

$$p^\phi = \frac{f}{\rho + f\omega} p^t. \quad (1.42)$$

Sabiendo que la componente temporal del cuádrimomento de un fotón es su energía ( $p^t = \text{constante} = E$ ), se tiene que, usando los vectores de Killing <sup>2</sup>  $\xi_{(t)}^\mu$  y  $\xi_{(\phi)}^\mu$ , el cuádrimomento se puede escribir

$$p^\mu = E \xi_{(t)}^\mu + E \frac{f}{\rho + f\omega} \xi_{(\phi)}^\mu. \quad (1.43)$$

Dependiendo de la dirección de rotación de la estrella  $\xi_{(\phi)}^\mu$  y  $\omega$  pueden ser positivos o negativos, por lo tanto la ecuación finalmente toma la forma

$$p^\mu = \text{ctte} \times \left[ \xi_{(t)}^\mu + \frac{f}{f\omega \pm \rho} \xi_{(\phi)}^\mu \right]. \quad (1.44)$$

---

<sup>2</sup>Los vectores de Killing  $\xi_\alpha$  satisfacen la ecuación de Killing  $\nabla_\alpha \xi_\beta + \nabla_\beta \xi_\alpha = 0$  y están asociados con las simetrías de la métrica. Aquí  $\nabla_\alpha$  significa derivada covariante, para más información se puede consultar [18].

Por otro lado, la frecuencia del fotón emitido está dada por la fórmula

$$\omega_E = p_\mu u^\mu, \quad (1.45)$$

donde la cuadrivelocidad del fluido puede calcularse a partir de la definición

$$u^\mu = \frac{dx^\mu}{ds} = \frac{dx^\mu/dt}{ds/dt}. \quad (1.46)$$

Al dividir la métrica de Papapetrou por  $dt^2$  resulta

$$\left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = f \left(1 - \omega \frac{d\phi}{dt}\right)^2 - \frac{1}{f} \left\{ e^{2\gamma} \left[ \left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2 \right] + \rho^2 \left(\frac{d\phi}{dt}\right)^2 \right\}, \quad (1.47)$$

donde

$$\frac{d\rho}{dt} = \frac{dz}{dt} = 0 \quad y \quad \frac{d\phi}{dt} = \Omega, \quad (1.48)$$

debido a que la velocidad se mide en el ecuador de la estrella. Entonces, aplicando las condiciones anteriores en la ecuación (1.47), se obtiene

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{f} \sqrt{1 - \left[ 2\omega\Omega - \Omega^2 \left( \omega^2 - \frac{\rho^2}{f^2} \right) \right]}; \quad (1.49)$$

denotando

$$v^2 = 2\omega\Omega - \Omega^2 \left( \omega^2 - \frac{\rho^2}{f^2} \right) \quad (1.50)$$

como la velocidad medida por un observador que rota con la misma velocidad angular que la fuente del campo gravitacional – denominado ZAMO: Zero Angular Momentum

Observer – se obtiene

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{f(1-v^2)}. \quad (1.51)$$

De otra parte, por cada componente de la cuadrivelocidad medida en el ecuador resulta

$$\begin{aligned} u^0 &= \frac{dx^0}{ds} = \frac{dx^0/dt}{ds/dt} = \frac{dt/dt}{ds/dt} = \frac{1}{ds/dt}, \\ u^1 &= \frac{dx^1}{ds} = \frac{dx^1/dt}{ds/dt} = \frac{d\phi/dt}{ds/dt} = \frac{\Omega}{ds/dt}, \\ u^2 &= \frac{dx^2}{ds} = \frac{dx^2/dt}{ds/dt} = \frac{d\rho/dt}{ds/dt} = 0, \\ u^3 &= \frac{dx^3}{ds} = \frac{dx^3/dt}{ds/dt} = \frac{dz/dt}{ds/dt} = 0, \end{aligned} \quad (1.52)$$

entonces  $u^\mu$  expresado en función de los vectores de Killing es

$$u^\mu = u^0 \xi_{(t)}^\mu + u^1 \xi_{(\phi)}^\mu. \quad (1.53)$$

Es decir, reemplazando las ecuaciones (1.51) y (1.52) en la ecuación anterior se obtiene

$$u^\mu = \frac{f^{-1/2}}{\sqrt{1-v^2}} \left( \xi_{(t)}^\mu + \Omega \xi_{(\phi)}^\mu \right). \quad (1.54)$$

Con el cuádrimomento y la cuadrivelocidad calculados, solo queda por calcular la frecuencia observada en el infinito, la cual por definición es

$$\omega_\infty = p_\mu \xi_{(t)}^\mu, \quad (1.55)$$

donde  $p_\mu \xi_{(t)}^\mu$  representa la componente temporal del cuádrimomento del fotón. Por lo

tanto, el corrimiento al rojo se calcula como

$$Z_{\pm} = \frac{\omega_E - \omega_{\infty}}{\omega_{\infty}} = \frac{p_{\mu}u^{\mu} - p_{\mu}\xi_{(t)}^{\mu}}{p_{\mu}\xi_{(t)}^{\mu}}. \quad (1.56)$$

En esta ecuación el  $p_{\mu}$  puede calcularse usando la relación

$$p_{\mu} = g_{\mu\nu}p^{\nu}, \quad (1.57)$$

aquí  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico de la métrica de Papapetrou (1.13) y  $p^{\nu}$  el cuádrimomento dado por la ecuación (1.44). Reemplazando las ecuaciones (1.54) y (1.57) en la ecuación (1.56) se obtiene el corrimiento al rojo en la forma

$$Z_{\pm} = \frac{(\pm 2f\rho\sqrt{1-v^2} - 2f^{3/2}(-1+v^2)(\mp\rho + f\omega) + \sqrt{1-v^2}\sqrt{4f^2\rho^2v^2 - 4f^4(-1+v^2)\omega^2})}{2f^{3/2}(-1+v^2)(\mp\rho + f\omega)}. \quad (1.58)$$

Una elección conveniente como combinación de estos dos corrimientos al rojo,  $Z_-$  y  $Z_+$ , es

$$Z = (1 + Z_+)(1 + Z_-), \quad (1.59)$$

lo cual conduce a

$$Z = \frac{1}{f}. \quad (1.60)$$

La fórmula para el corrimiento al rojo y la ecuación para el radio de la órbita marginalmente estable calculados en las secciones anteriores a partir de la métrica de Papapetrou, se encuentran expresados en función de  $f$  y  $f, \omega$  y  $\gamma$  respectivamente. Estas funciones serán determinadas en el último capítulo con el fin de establecer una comparación entre una solución numérica interior presentada en el siguiente capítulo y esta solución.

## Capítulo 2

# SOLUCIONES INTERIORES

# PARA ESTRELLAS DE

# NEUTRONES ROTANTES

### 2.1. Ecuaciones de estado y estructura de las estrellas de neutrones

Desde los trabajos pioneros de Baade y Zwicky [2] y Oppenheimer y Volkoff [15], se han desarrollado muchos estudios hasta el día de hoy acerca de las ecuaciones de estado, que son ecuaciones que relacionan las variables físicas del sistema, y de la estructura de las estrellas de neutrones. La estructura de estas estrellas se determina (para una ecuación de estado particular) por la densidad y por la velocidad angular. En una estrella de neutrones típica la densidad varía desde la superficie ( $\rho \sim 10 \text{ g/cm}^3$ ) hasta el centro en 14 o 15 órdenes de magnitud. Los principales constituyentes de estas estrellas son los nucleones;

EOS	Descripción
A	Reid soft core. Pandharipande (1971a)
B	Reid core whit hiperons. Pandharipande (1971b)
C	Bethe y Jhonson (1974). Modelo I
D	Bethe y Jhonson (1974). Modelo V
E	Moszkowski (1974)
F	Arponen (1972)
G	Canuto y Chitre (1974)
L	Mean field. Pandharipande y Smith (1975b)
M	Tensor interaccion. Pandharipande y Smith (1975b)
N	Relativistic mean field. Serot (1979)
AU	AV14 + UVII Wiringa, Fiks y Fabrocini (1988)
UU	UV14 + UVII Wiringa, Fiks y Fabrocini (1988)
UT	UV14 + TNI Wiringa, Fiks y Fabrocini (1988)
FPS	UV14 + TNI Lorenz, Ravenhall y Pethick (1933)

Tabla 2.1: Ecuaciones de estado realistas para estrellas de neutrones.

los leptones tienen solo un pequeño efecto sobre su estructura, por tal razón la construcción de un modelo realista de estrellas de neutrones requiere de un conocimiento detallado de las interacciones entre partículas elementales, primordialmente las interacciones fuertes en el rango de densidades nucleares y supernucleares [11]. Los parámetros calculados para cada estrella de neutrones varían considerablemente dependiendo de la ecuación de estado utilizada en su construcción. Una selección de ecuaciones de estado se indica en la Tabla 2.1. En seguida se presenta una descripción detallada de las ecuaciones de estado que se usarán en este trabajo (ver [1] y referencias interiores):

#### **Ecuación de estado A:**

Propuesta por Pandharipande en 1971. El rango de densidades supera los  $6,97 \times 10^{14} \text{ g/cm}^3$ .

Estas estrellas se componen únicamente de neutrones y su interacción es de tipo Reid Soft core adaptado a materia nuclear, la teoría que describe la interacción entre las partículas componentes es el principio variacional aplicado a la función de correlación.

#### **Ecuación de estado L:**

Cantidad	Definición
$\epsilon_c$	Densidad total de energía central ( $10^{15}\text{g}\cdot\text{cm}^{-3}$ )
$\Omega$	Velocidad angular de la estrella medida en el infinito ( $10^3\text{s}^{-1}$ )
$J$	Momento angular de la estrella
$R_e$	Radio de la estrella en el ecuador (Km)
$M$	Masa-energía total gravitacional del sistema
$M_0$	Masa en reposo de la estrella
$M_p$	Masa propia de la estrella
$T$	Energía cinética rotacional de la estrella
$W$	Energía de enlace gravitacional de la estrella ( $W = M_p + T - M$ )
$Z_p$	Corrimiento al rojo polar
$Z_+$	Corrimiento al rojo para fotones emitidos en la dirección de rotación de la estrella
$Z_-$	Corrimiento al rojo para fotones emitidos contra la dirección de rotación de la estrella
$h_+$	Altura desde el ecuador al $R_{\text{ome}}$ co-rotante (Km)
$h_-$	Altura desde el ecuador al $R_{\text{ome}}$ contra-rotante (Km)
$I$	Momento de inercia ( $10^{45}\text{g}\cdot\text{cm}^2$ )
$T/W$	Relacion entre la energía rotacional y la de enlace
$w_c/\Omega$	Relacion entre el valor central del potencial métrico y la velocidad angular
$e$	Excentricidad de la estrella

Tabla 2.2: Características físicas de las estrellas de neutrones. Tomado de CST [6].

Propuesta por Pandharipande y Smith en 1975. El rango de densidades supera los  $4,386 \times 10^{11} \text{ g/cm}^3$ . Estas estrellas se componen únicamente de neutrones y su interacción de atracción nuclear se debe al intercambio escalar, las teorías que describen la interacción entre las partículas componentes son el método variacional y la aproximación escalar para campo débil.

## 2.2. Estrellas rotantes

Los modelos de estrellas que se consideran en este trabajo son estacionarios y axialmente simétricos. Para los cálculos referentes a la solución interior, Cook *et al* [6] (en adelante

CST) emplearon la métrica

$$ds^2 = e^{\gamma+\rho} dt^2 - e^{2\alpha}(dr^2 + r^2 d\theta^2) + e^{\gamma-\rho} r^2 \sin^2 \theta (d\phi - \omega dt)^2, \quad (2.1)$$

donde las funciones métricas  $\rho, \gamma, \alpha$  y  $\omega$  dependen de  $r$  y  $\theta$  únicamente. El tensor de energía impulso está dado por la fórmula

$$T^{\mu\nu} = (P + \rho)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}, \quad (2.2)$$

siendo  $u^\mu$  la cuadrivelocidad del fluido,  $\rho$  su densidad de energía y  $P$  su presión. Para las ecuaciones de estado de la Tabla 2.1, en CST se presentan los valores numéricos de un gran número de parámetros físicos; en la Tabla 2.2 se muestran dichos parámetros. CST presenta todos los cálculos en forma adimensional introduciendo coordenadas auxiliares para minimizar la complejidad de las ecuaciones. Tres de las cuatro ecuaciones de campo gravitacional se resolvieron con ayuda de la aproximación de las funciones de Green, encontrando expresiones para  $\rho, \gamma$  y  $\omega$ . Los autores redujeron las cuatro ecuaciones de campo a una ecuación diferencial lineal ordinaria en función de  $\alpha$ . Usando la ecuación de la condición de integrabilidad de la ecuación de equilibrio hidrostático, obtuvieron las expresiones para la presión y el momento angular. Imponiendo condiciones iniciales sobre las ecuaciones, computaron los potenciales métricos y el momento angular. Se examinaron tres secuencias de masa diferentes: primero la secuencia normal de masa, para la cual la masa de la estrella es menor a la de una estrella no rotante, en este caso la estrella no rota o lo hace muy lentamente; segundo, la secuencia normal de masa máxima, para la cual la estrella tiene la masa máxima de una estrella no rotante y, tercero, la secuencia supramasiva, para estrellas cuya masa excede la masa máxima de una estrella no rotante.

De las catorce ecuaciones de estado, en CST sólo se consideran en detalle las ecuaciones A, AU, FPS, L y M. Con los valores numéricos de los parámetros listados en la Tabla 2.3 se pueden calcular el radio de la órbita marginalmente estable  $R_{\text{ome}}$  y el corrimiento al rojo  $Z$ .

El radio adimensional de la órbita marginalmente estable  $r$  puede calcularse como

$$r = \frac{R_{\text{ome}}}{M} = \frac{(R_e + h_{\pm})c^2}{\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)M_{\odot}G}, \quad (2.3)$$

eligiendo  $h_+$  para órbitas co-rotantes ( $j > 0$ ) y  $h_-$  para órbitas contra-rotantes ( $j < 0$ ), el radio ecuatorial adimensional  $r_*$  de la estrella a través de la relación

$$r_* = \frac{R_e c^2}{\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)M_{\odot}G}, \quad (2.4)$$

la masa  $m$  adimensional (en unidades de masa solar) de la estrella por medio de la expresión

$$m = \frac{M}{M_{\odot}}, \quad (2.5)$$

y el parámetro de rotación  $j$  mediante la relación

$$j = \frac{cJ}{GM^2} = \frac{cI\Omega}{G\left(\frac{M}{M_{\odot}}\right)^2 M_{\odot}^2}. \quad (2.6)$$

En el Tabla 2.2 se encuentra la definición de los parámetros  $R_e$ ,  $h_{\pm}$ ,  $M$ ,  $J$ ,  $I$  y  $\Omega$ ; las constantes que aparecen en estas fórmulas tienen los valores [9]:

$$M_{\odot} = 1,989 \times 10^{33} \text{ g},$$

$$c = 2,99792458 \times 10^{10} \text{ cm/s},$$

$$G = 6,673 \times 10^{-8} \text{ cm}^3/\text{gs}^2, \quad (2.7)$$

donde  $M_{\odot}$  representa la masa del sol,  $c$  la velocidad de la luz en el vacío y  $G$  la constante de gravitación universal.

En la Tabla 2.3 se muestran los valores calculados en CST para las ecuaciones de estado A en secuencia normal (en adelante EOS A (NS)), A en la secuencia de masa máxima (en adelante EOS A (MM)) y L en la secuencia de masa máxima (en adelante EOS L (MM)).

De aquí se observa que existe una relación funcional entre los parámetros tabulados para las tres ecuaciones de estado. En la Tabla 2.4 se presentan los valores calculados para el parámetro de rotación  $j$ , el radio ecuatorial de la estrella  $r_*$ , el radio de la órbita marginalmente estable  $r$ , la masa  $m$  de la estrella y el corrimiento al rojo gravitacional  $Z$ , a partir de las fórmulas (2.3–2.6) y (1.59), para las tres ecuaciones de estado estudiadas, calculados a partir de los valores dados en la Tabla 2.3. Dado que de los datos numéricos de la Tabla 2.4 se observa que

$$r_*(j) = r_*(-j), \quad m(j) = m(-j),$$

entonces se elige  $m(j)$  de la forma

$$m(j) = m_0 + m_1 j^2 + m_2 j^4 + m_3 j^6 \quad (2.8)$$

y  $r_*(j)$  como

$$r_*(j) = r_0 + r_1 j^2 + r_2 j^4 + r_3 j^6 + r_4 j^8 + r_5 j^{10}. \quad (2.9)$$

Los resultados de estos ajustes se presentan en la Tabla 2.5.

$\epsilon_c$	$\Omega$	$I$	$M/M_\odot$	$T/W$	$R_e$	$e$	$\omega_c/\Omega_c$	$Z_p$	$Z_b$	$Z_f$	$h_+$	$h_-$
EOS A (NS)												
1.8582	0.0000	0.9952	1.4000	0.000	9.586	0.000	0.550	0.326	0.326	0.326	2.824	2.824
1.8127	3.2441	1.0238	1.4030	0.010	9.763	0.252	0.548	0.329	0.519	0.148	1.575	4.114
1.7422	5.0189	1.0714	1.4077	0.026	10.06	0.395	0.545	0.333	0.638	0.049	0.897	4.854
1.6744	6.1366	1.1217	1.4123	0.041	10.38	0.491	0.542	0.336	0.722	-0.018	0.463	5.333
1.6093	6.9400	1.1749	1.4169	0.056	10.74	0.566	0.538	0.339	0.789	-0.070	0.129	5.678
1.5467	7.5448	1.2316	1.4214	0.071	11.14	0.628	0.534	0.341	0.846	-0.116	...	5.915
1.4939	7.9537	1.2843	1.4252	0.084	11.56	0.676	0.531	0.342	0.890	-0.153	...	6.031
1.4502	8.2364	1.3322	1.4285	0.094	12.00	0.715	0.528	0.343	0.926	-0.185	...	6.038
1.4146	8.4311	1.3743	1.4313	0.103	12.49	0.749	0.526	0.343	0.957	-0.214	...	5.911
1.3810	8.5906	1.4176	1.4340	0.112	13.72	0.805	0.523	0.343	1.009	-0.270	...	5.044
EOS A (MM)												
4.1300	0.0000	1.0416	1.6551	0.000	8.368	0.000	0.772	0.551	0.551	0.551	6.303	6.303
3.4156	3.6610	1.1142	1.6592	0.008	8.753	0.204	0.736	0.521	0.777	0.285	4.651	7.333
3.0643	5.4420	1.1737	1.6650	0.019	9.056	0.319	0.716	0.511	0.902	0.162	3.745	7.892
2.7492	6.9489	1.2480	1.6728	0.034	9.433	0.426	0.698	0.504	1.021	0.057	2.888	8.406
2.4664	8.1644	1.3415	1.6823	0.053	9.910	0.526	0.680	0.499	1.128	-0.035	2.086	8.858
2.2736	8.8856	1.4265	1.6904	0.070	10.36	0.596	0.667	0.495	1.200	-0.098	1.514	9.135
2.1245	9.3542	1.5076	1.6976	0.084	10.81	0.651	0.657	0.491	1.253	-0.147	1.056	9.298
2.0123	9.6490	1.5806	1.7036	0.096	11.26	0.694	0.648	0.488	1.292	-0.187	0.673	9.356
1.9060	9.8796	1.6624	1.7098	0.109	11.88	0.740	0.640	0.484	1.329	-0.231	0.186	9.267
1.8296	10.011	1.7316	1.7148	0.119	13.07	0.799	0.633	0.481	1.376	-0.298	...	8.487
EOS L (MM)												
1.4700	0.0000	4.6765	2.7002	0.000	13.70	0.000	0.749	0.547	0.547	0.547	10.23	10.23
1.2010	2.2122	4.9594	2.7063	0.008	14.20	0.204	0.719	0.526	0.778	0.293	7.647	12.07
1.0639	3.4951	5.2314	2.7181	0.022	14.68	0.337	0.702	0.520	0.935	0.156	6.034	13.28
0.9552	4.4850	5.5542	2.7331	0.040	15.24	0.449	0.687	0.519	1.073	0.048	4.670	14.31
0.8692	5.2121	5.9143	2.7494	0.059	15.88	0.541	0.674	0.519	1.187	-0.036	3.551	15.14
0.8017	5.7127	6.2916	2.7650	0.078	16.57	0.614	0.663	0.519	1.275	-0.102	2.681	15.77
0.7495	6.0512	6.6706	2.7797	0.096	17.30	0.673	0.654	0.518	1.343	-0.156	1.967	16.19
0.7101	6.2635	7.0240	2.7923	0.111	18.05	0.719	0.647	0.516	1.392	-0.199	1.369	16.40
0.6729	6.4223	7.4299	2.8056	0.126	19.14	0.768	0.639	0.514	1.438	-0.249	0.570	16.32
0.6550	6.4829	7.6598	2.8126	0.135	20.66	0.812	0.635	0.512	1.474	-0.304	...	15.33

Tabla 2.3: Valores numéricos de los parámetros físicos obtenidos por CST para estrellas de neutrones con diversas ecuaciones de estado.

EOS A (NS)					EOS A (MM)					EOS L(MM)				
$j$	$m$	$r_*$	$r$	$Z$	$j$	$m$	$r_*$	$r$	$Z$	$j$	$m$	$r_*$	$r$	$Z$
-0.673	1.434	6.479	8.861	1.4767	-0.669	1.715	5.161	8.513	1.668	-0.713	2.813	4.974	8.665	1.722
-0.642	1.431	5.909	8.706	1.538	-0.638	1.710	4.705	8.375	1.791	-0.688	2.806	4.620	8.559	1.831
-0.611	1.429	5.688	8.551	1.570	-0.597	1.704	4.476	8.195	1.863	-0.641	2.792	4.377	8.354	1.916
-0.571	1.425	5.492	8.358	1.601	-0.556	1.698	4.312	8.021	1.922	-0.593	2.780	4.214	8.158	1.977
-0.522	1.421	5.307	8.125	1.632	-0.504	1.690	4.150	7.809	1.984	-0.534	2.765	4.058	7.920	2.043
-0.461	1.417	5.133	7.846	1.664	-0.439	1.682	3.989	7.554	2.054	-0.463	2.749	3.911	7.640	2.108
-0.392	1.412	4.977	7.534	1.691	-0.352	1.673	3.819	7.221	2.136	-0.379	2.733	3.776	7.321	2.173
-0.308	1.408	4.839	7.174	1.718	-0.262	1.665	3.683	6.893	2.210	-0.281	2.718	3.657	6.966	2.237
-0.192	1.403	4.712	6.698	1.744	-0.168	1.659	3.572	6.565	2.283	-0.170	2.706	3.553	6.573	2.299
0.000	1.400	4.637	6.002	1.758	0.000	1.655	3.424	6.000	2.406	0.000	2.700	3.436	6.001	2.393
0.192	1.403	4.712	5.472	1.744	0.168	1.659	3.572	5.470	2.283	0.170	2.706	3.553	5.466	2.299
0.308	1.408	4.839	5.271	1.718	0.262	1.665	3.683	5.206	2.210	0.281	2.718	3.657	5.160	2.237
0.392	1.412	4.977	5.199	1.691	0.352	1.673	3.819	4.987	2.136	0.379	2.733	3.776	4.933	2.173
0.461	1.417	5.133	5.194	1.664	0.439	1.682	3.989	4.828	2.054	0.463	2.749	3.911	4.786	2.108
0.522	1.421	5.307	...	1.632	0.504	1.690	4.150	4.756	1.984	0.534	2.765	4.058	4.715	2.043
0.571	1.425	5.492	...	1.601	0.556	1.698	4.312	4.733	1.922	0.593	2.780	4.214	4.694	1.977
0.611	1.429	5.688	...	1.570	0.597	1.704	4.476	4.743	1.863	0.641	2.792	4.377	4.709	1.916
0.642	1.431	5.909	...	1.538	0.638	1.710	4.705	4.778	1.791	0.688	2.806	4.620	4.757	1.831
0.673	1.434	6.479	...	1.467	0.669	1.715	5.161	...	1.668	0.713	2.813	4.974	4.974	1.722

Tabla 2.4: Parámetros físicos adimensionales calculados para las tres ecuaciones de estado estudiadas a partir de los datos de CST

EOS	A (NS)	A (MM)	L (MM)
$m_0$	1.39999	1.65510	2.6993
$m_1$	0.08294	0.14606	0.23158
$m_2$	-0.01655	-0.02487	0.00001
$m_3$	-0.00135	-0.00866	-0.03842
$r_0$	4.630032	3.422995	3.434085
$r_1$	3.628956	6.672222	5.267447
$r_2$	-35.75227	-61.29717	-46.18519
$r_3$	280.09337	370.16650	253.26669
$r_4$	-842.97309	-978.53567	-596.40356
$r_5$	891.36794	951.84884	511.06817

Tabla 2.5: Ajuste numérico de los parámetros  $m$  y  $r_*$ :  $m = m_0 + m_1j^2 + m_2j^4 + m_3j^6$ ,  $r_* = r_0 + r_1j^2 + r_2j^4 + r_3j^6 + r_4j^8 + r_5j^{10}$  para las diferentes ecuaciones de estado.

## Capítulo 3

# AJUSTE NUMÉRICO DE UNA SOLUCIÓN EXACTA EXTERIOR Y LAS SOLUCIONES NUMÉRICAS INTERIORES

### 3.1. Solución exacta de cuatro parámetros de las ecuaciones de Einstein–Maxwell

Como se ha mencionado anteriormente, para modelar el campo gravitacional exterior de una estrella de neutrones rotante se requiere una solución estacionaria axialsimétrica, que sea asintóticamente plana y que incluya al menos cuatro parámetros físicos: la masa, el momento angular, el momento dipolar magnético y el momento cuadrupolar de masa. En el año 2000 Manko *et al* [13] (en adelante MMS-G) calcularon una familia de soluciones

de las ecuaciones (1.4) con las características mencionadas, encontrando las siguientes funciones métricas  $f$ ,  $\omega$  y  $\gamma$  para la métrica (1.13):

$$f = \frac{E}{D}, \quad e^{2\gamma} = \frac{E}{16\kappa^8(x^2 - y^2)^4}, \quad \omega = \frac{(y^2 - 1)L}{E}, \quad (3.1)$$

con

$$\begin{aligned} E &= \{4[\kappa^2(x^2 - 1) + \delta(1 - y^2)]^2 + (a - b)[(a - b)(d - \delta) - m^2b](1 - y^2)^2\}^2 \\ &\quad - 16\kappa^2(x^2 - 1)(1 - y^2)\{(a - b)[\kappa^2(x^2 - y^2) + 2\delta y^2] + m^2by^2\}^2, \\ D &= \{4(\kappa^2x^2 - \delta y^2)^2 + 2\kappa mx[2\kappa^2(x^2 - 1) + (2\delta + ab - b^2)(1 - y^2)] + (a - b) \\ &\quad \times [(a - b)(d - \delta) - m^2b](y^4 - 1) - 4d^2\}^2 + 4y^2\{2\kappa^2(x^2 - 1)[\kappa x(a - b) - mb] \\ &\quad - 2mb\delta(1 - y^2) + [(a - b)(d - \delta) - m^2b](2\kappa x + m)(1 - y^2)\}^2, \\ L &= 8\kappa^2(x^2 - 1)\{(a - b)[\kappa^2(x^2 - y^2) + 2\delta y^2] + y^2m^2b\}\{\kappa mx[(2\kappa x + m)^2 \\ &\quad - 2y^2(2\delta + ab - b^2) - a^2 + b^2] - 2y^2(4\delta d - m^2b^2)\} + 4[\kappa^2(x^2 - 1) + \delta(1 - y^2)]^2 \\ &\quad + (a - b)[(a - b)(d - \delta) - m^2b](1 - y^2)^2\{4(2\kappa mbx + 2m^2b)[\kappa^2(x^2 - 1) + \delta(1 - y^2)] \\ &\quad + (1 - y^2)\{(a - b)(m^2b^2 - 4\delta d) - (4\kappa mx + 2m^2)[(a - b)(d - \delta) - m^2b]\}\}, \quad (3.2) \end{aligned}$$

donde

$$\delta = \frac{\mu^2 - m^2b^2}{m^2 - (a - b)^2}, \quad d = \frac{1}{4}[m^2 - (a - b)^2] \quad y \quad \kappa = \sqrt{d + \delta}. \quad (3.3)$$

Como se puede notar, la solución no ha sido presentada en coordenadas de Weyl–Papapetrou  $\rho$  y  $z$ . Para obtener una expresión mas compacta de la solución se han empleado coordenadas esferoidales generalizadas  $x$  e  $y$ , relacionadas con las coordenadas  $\rho$  y  $z$

mediante las expresiones

$$x = \frac{1}{2\kappa}(r_+ + r_-), \quad y = \frac{1}{2\kappa}(r_+ - r_-), \quad r_{\pm} = \sqrt{\rho^2 + (z \pm \kappa)^2}, \quad (3.4)$$

siendo la transformación inversa:

$$\rho = \sqrt{(x^2 - 1)(1 - y^2)}, \quad z = \kappa xy. \quad (3.5)$$

La solución (3.2,3.3) representa el campo exterior de un objeto masivo, rotante, deformado y magnetizado. El parámetro  $m$  representa el momento monopolar de masa, el momento angular se relaciona con el parámetro  $a$  mediante la expresión

$$J = am, \quad (3.6)$$

de forma que  $a$  representa el momento angular por unidad de masa,  $\mu$  representa el momento dipolar magnético y  $b$  (denominado parámetro de deformación) se relaciona con el momento cuadripolar de masa  $\mathcal{Q}$  por la fórmula

$$\mathcal{Q} = -\frac{m}{4(m^2 - (a - b)^2)}[m^4 + 2m^2(a^2 + b^2) - (2a + b)(a - b)^3 - 4\mu^2]. \quad (3.7)$$

Esta solución tiene ciertos límites clásicos, es decir existen ciertos casos especiales en los cuales la solución reduce a otras bien conocidas: Cuando  $\mu = b = 0$ , la métrica reduce a la solución de Tomimatsu-Sato  $\delta = 2$ , cuando  $\mu = 0$  y  $b = \sqrt{a^2 - m^2}$ , la métrica reduce a la solución de Kerr y cuando  $\mu = a = 0$  y  $b = im$ , la métrica reduce a la solución de Schwarzschild. Para ver otras propiedades físicas de la solución puede consultarse la

referencia MMS-G [13].

## 3.2. Ajuste numérico del corrimiento al rojo gravitacional

De la solución analítica (3.2,3.3) se tiene

$$f = \frac{E}{D}, \quad (3.8)$$

donde  $E$  y  $D$  son funciones de  $x, y, \kappa, a, b, d, \delta, m$  y  $\mu$ . Usando las ecuaciones (3.3) y (3.4) puede notarse que  $E$  y  $D$  son funciones únicamente de  $\rho, z, m, a, \mu$  y  $b$ . Para comparar este resultado con el de la solución numérica se escoge

$$z = \mu = 0 \quad (3.9)$$

ya que en CST se realizan todos los cálculos limitados al plano ecuatorial de la estrella y no se consideran estrellas magnetizadas. Por lo tanto resulta

$$f = f(\rho, m, a, b). \quad (3.10)$$

Debido a que en CST se calcularon los parámetros físicos en coordenadas cuasi-esféricas de Boyer–Lindquist  $(r, \theta)$ , se hace el cambio de coordenadas esferoidales  $(x, y)$  a  $(r, \theta)$  mediante la transformación

$$r = \kappa x + m; \quad \theta = \arccos y. \quad (3.11)$$

Reemplazando (3.4) y la condición  $z = 0$  en la ecuación anterior se obtiene

$$r_* = \frac{1}{m} \left( m + \sqrt{\rho^2 + \kappa^2} \right) = \frac{R_e}{M}, \quad (3.12)$$

donde  $r_*$  representa el radio ecuatorial de la estrella por unidad de masa. De la anterior ecuación se obtiene

$$\rho = \sqrt{m^2(r_* - 1)^2 - \kappa^2}. \quad (3.13)$$

Hasta ahora se tiene

$$f = f(r_*, m, a, b), \quad (3.14)$$

y aplicando la relación (1.60):

$$Z = Z(r_*, m, a, b). \quad (3.15)$$

Para reducir variables en  $Z$  se aplican las definiciones del parámetro de rotación  $j = J/m^2$  y del momento angular  $J = ma$  [17], para obtener

$$a = a(j) = mj, \quad (3.16)$$

por lo tanto resulta

$$Z = Z(r_*, m, j, b), \quad (3.17)$$

relación que puede invertirse formalmente para obtener

$$b = b(r_*, m, j, Z). \quad (3.18)$$

Además, de los datos numéricos (ver Tabla 2.4) se tiene que

$$\begin{aligned}
 m &= m(j) = m(-j), \\
 r_* &= r_*(j) = r_*(-j), \\
 Z_{num} &= Z_{num}(j) = Z_{num}(-j),
 \end{aligned} \tag{3.19}$$

por lo tanto, de la relación (3.18) se deduce que  $b(j)$  también es simétrico con respecto a la dirección de rotación. Se requiere ajustar el parámetro  $b$  en el rango  $[-1,1]$  de  $j$ , pues así lo determinan los resultados numéricos, entonces la función  $b(j)$  debe reducirse a Schwarzschild para  $j = 0$ . De otra parte, la solución MMS-G se reduce a la solución de Kerr cuando se escoge  $b = \sqrt{a^2 - m^2}$ , y a la solución de Schwarzschild con  $b = im$ . Por eso son de interés únicamente los valores imaginarios de  $b$ , esto no causa ningún problema ya que  $b$  no es un parámetro físico observable. Una función  $b(j)$  que cumple las condiciones anteriores propuesta por Stute y Camenzind en el año 2003 [3] es:

$$b(j) = b_s = \sqrt{\Delta_1 a^2 - m^2 + \Delta_2 \frac{a^4}{m^2} + \Delta_3 \frac{a^6}{m^4}}; \tag{3.20}$$

aquí se escoge un nuevo parámetro  $b$  de la forma:

$$b(j) = b_n = \sqrt{\Delta_1 a^2 - m^2 + \Delta_2 \frac{a^4}{m^2} + \Delta_3 \frac{a^6}{m^4} + \Delta_4 \frac{a^8}{m^6}}, \tag{3.21}$$

donde  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  y  $\Delta_4$  son constantes. Esta función se reduce a Kerr cuando se toman las constantes de la forma  $\Delta_1 = 1$  y  $\Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ , y a Schwarzschild con  $\Delta_1 = \Delta_2 = \Delta_3 = \Delta_4 = 0$ . La elección del parámetro  $b_n$  induce un cambio en la forma del momento cuadrupolar de masa (ver ecuación 3.7), pues permite tener en cuenta órdenes más altos

del parámetro de rotación: se incluyen entonces términos de  $a^8/m^6 = m^8 j^8/m^6 = m^2 j^8$ , que según la expresión (2.8) dan lugar a considerar términos de orden  $j^{20}$ . Eligiendo  $b_s$ , que desprecia ordenes superiores a  $a^6/m^4$  y mediante un análisis similar, puede verse que en este caso solo se consideran términos de  $j^{18}$ . Es necesario aclarar que la inclusión de potencias mas altas de  $j$  eleva la complejidad de los cálculos.

Como se vio en el capítulo 2, se ha escogido la masa de la estrella  $m(j)$  de la forma

$$m(j) = m_0 + m_1 j^2 + m_2 j^4 + m_3 j^6,$$

con  $m_0, m_1, m_2$  y  $m_3$  constantes y el radio ecuatorial de la estrella  $r_*$  como

$$r_*(j) = r_0 + r_1 j^2 + r_2 j^4 + r_3 j^6 + r_4 j^8 + r_5 j^{10}, \quad (3.22)$$

con  $r_0, r_1, r_2, r_3, r_4$  y  $r_5$  constantes. Por lo tanto, con estas elecciones resulta

$$Z = Z[r_*(j), m(j), j, b(j, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4)] = Z(j, \Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4). \quad (3.23)$$

Para hacer corresponder la solución exterior y la solución interior de la estrella de neutrones, los valores de  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  y  $\Delta_4$  se ajustan por comparación de  $Z$  vs.  $j$  con los datos numéricos de  $Z_{num}$  vs.  $j$ . En la Tabla 3.1 se presentan en forma tabulada los valores encontrados de dichos parámetros para  $b_n$  y  $b_s$ , para las tres ecuaciones de estado que son objeto de estudio.

En las Figuras 3.1–3.3 se presentan los resultados obtenidos de los correspondientes ajustes en las tres ecuaciones de estado estudiadas. En las Figuras 3.4–3.6 se muestran las gráficas de error para cada ecuación de estado. Las constantes  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3$  y  $\Delta_4$  para el parámetro

EOS	$b_s = \sqrt{\Delta_1 a^2 - m^2 + \Delta_2 \frac{a^4}{m^2} + \Delta_3 \frac{a^6}{m^4}}$			$b_n = \sqrt{\Delta_1 a^2 - m^2 + \Delta_2 \frac{a^4}{m^2} + \Delta_3 \frac{a^6}{m^4} + \Delta_4 \frac{a^8}{m^6}}$			
	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_1$	$\Delta_2$	$\Delta_3$	$\Delta_4$
A (NS)	-7.97743	-0.09978	-2.62792	-8.55743	-1.09978	1.62792	-4.25641
A (MM)	-2.98207	-12.02852	14.27300	-2.79207	-15.6885	16.9073	11.98207
L (MM)	-3.59342	-7.91550	7.25291	-3.99888	-7.9060	7.3192	9.09675

Tabla 3.1: Ajuste numérico del parámetro de deformación  $b$  para las tres ecuaciones de estado estudiadas a partir de los datos de CST

de deformación  $b_n$  dado por (3.21) fueron ajustados manualmente, debido a la gran complejidad de las ecuaciones.

Para la ecuación de estado A en secuencia normal el error en el ajuste del corrimiento al rojo oscila entre 0,05 y 0,38 % cuando se usa  $b_n$  y entre 0 y 0,49 % cuando se emplea  $b_s$ , para la ecuación de estado A en la secuencia de masa máxima el error de  $b_n$  oscila entre el 0 y 0,51 % mientras que para  $b_s$  el error varía entre 0 y 0,43 %. Por último, para la ecuación de estado L en la secuencia de masa máxima se tiene un error para  $b_s$  entre el 0,01 y 0,52 % y para  $b_n$  entre 0,03 y 0,76 %. El pequeño aumento en el porcentaje de error es una consecuencia del error introducido en los ajustes de la masa y del radio ecuatorial de la estrella. Puede apreciarse que la elección del parámetro de deformación  $b_n$  no mejora significativamente los resultados obtenidos usando  $b_s$ , sin embargo, esto no tiene trascendencia pues la real importancia de emplear  $b_n$  será mostrada en la siguiente sección.

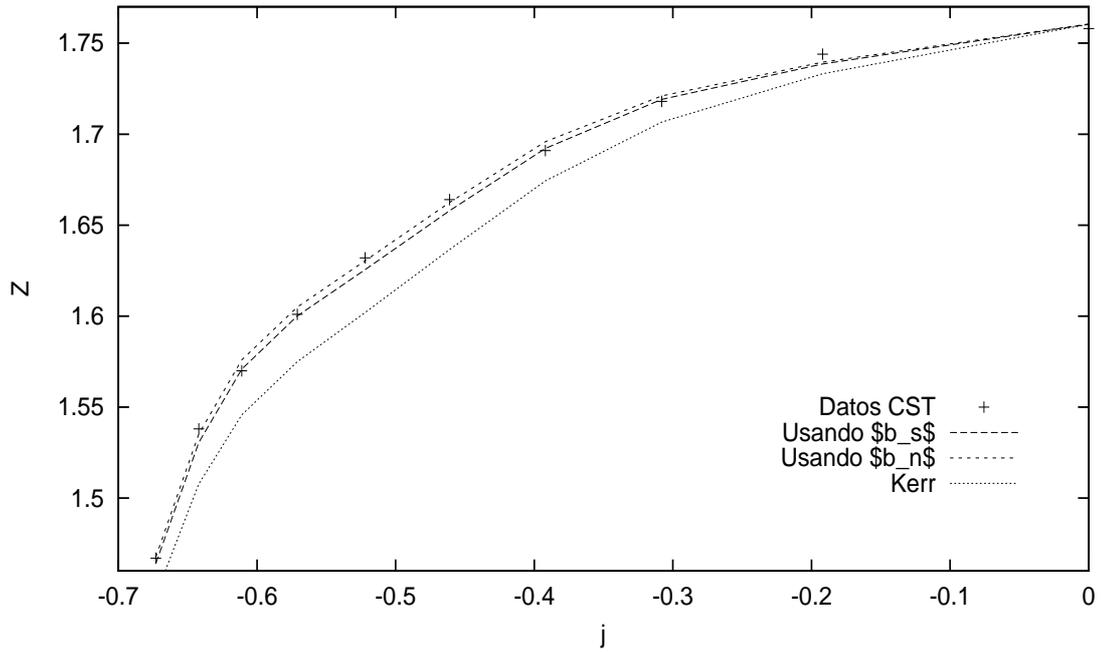


Figura 3.1: Corrimiento al rojo en función del parámetro de rotación para EOS A (NS)

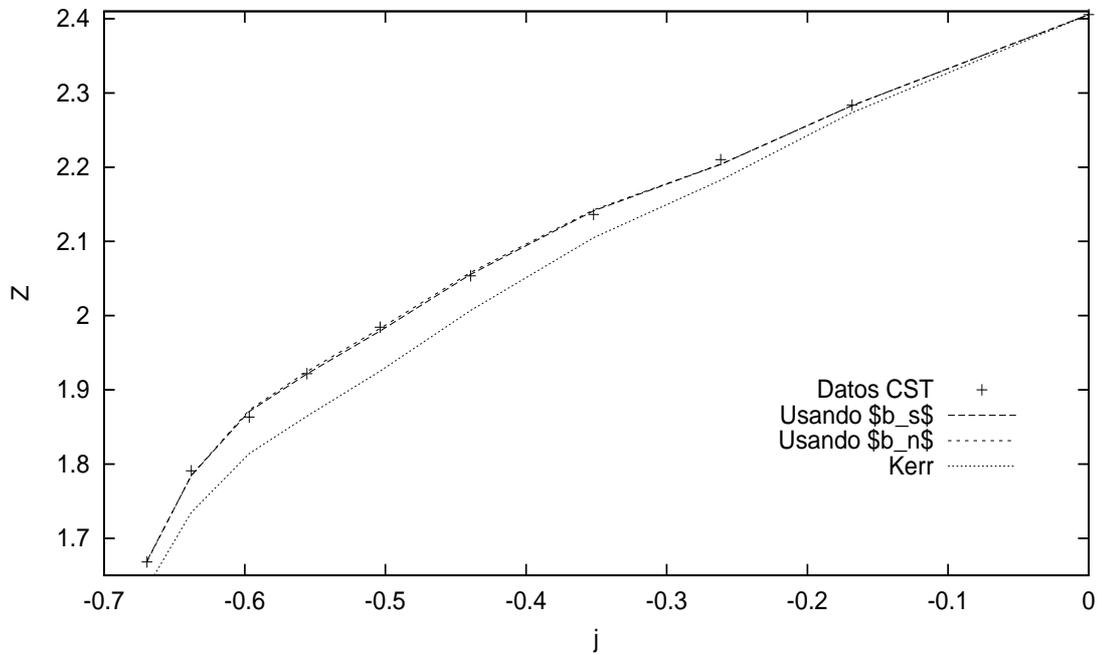


Figura 3.2: Corrimiento al rojo en función del parámetro de rotación para EOS A (MM)

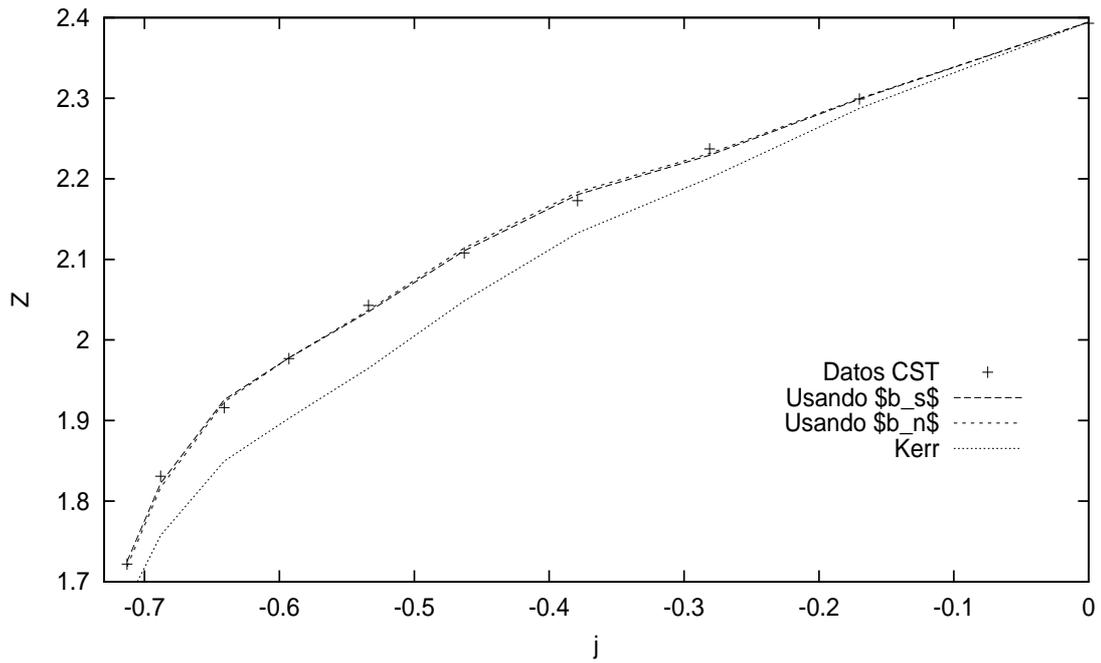


Figura 3.3: Corrimiento al rojo en función del parámetro de rotación para EOS L (MM)

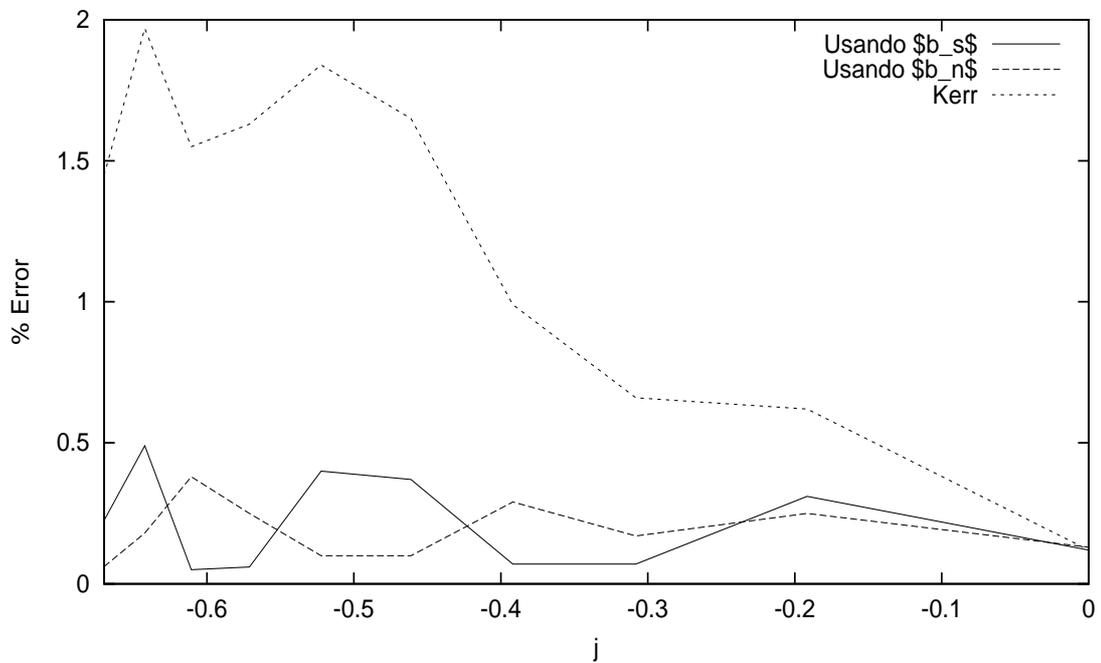


Figura 3.4: Porcentaje de error del ajuste numérico del corrimiento al rojo para EOS A (NS)

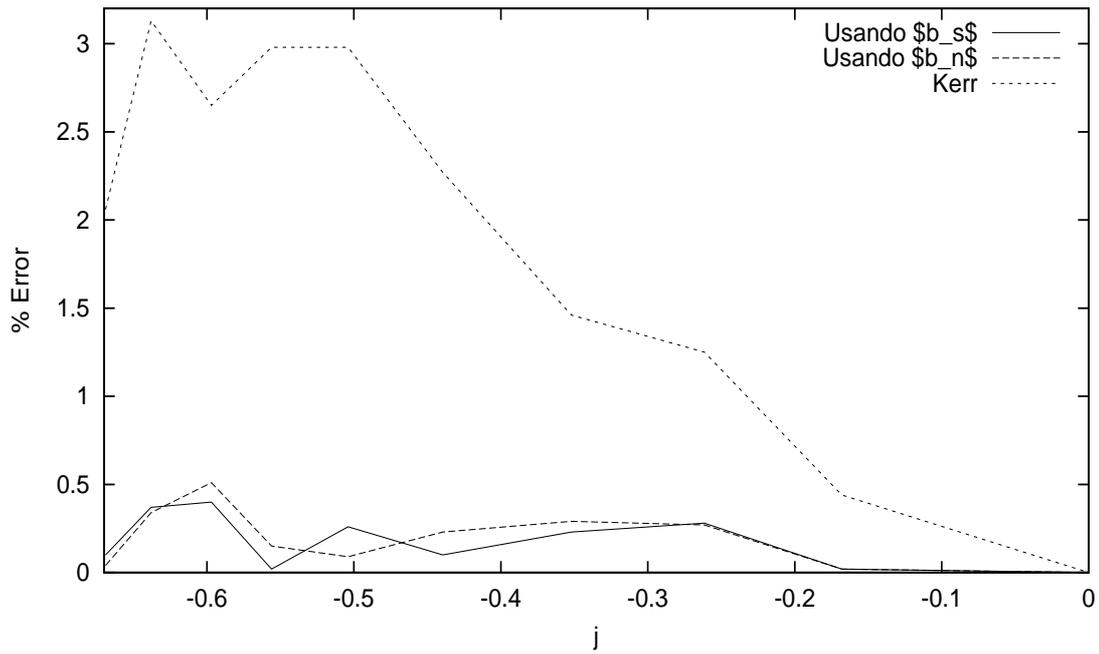


Figura 3.5: Porcentaje de error del ajuste numérico del corrimiento al rojo para EOS A (MM)

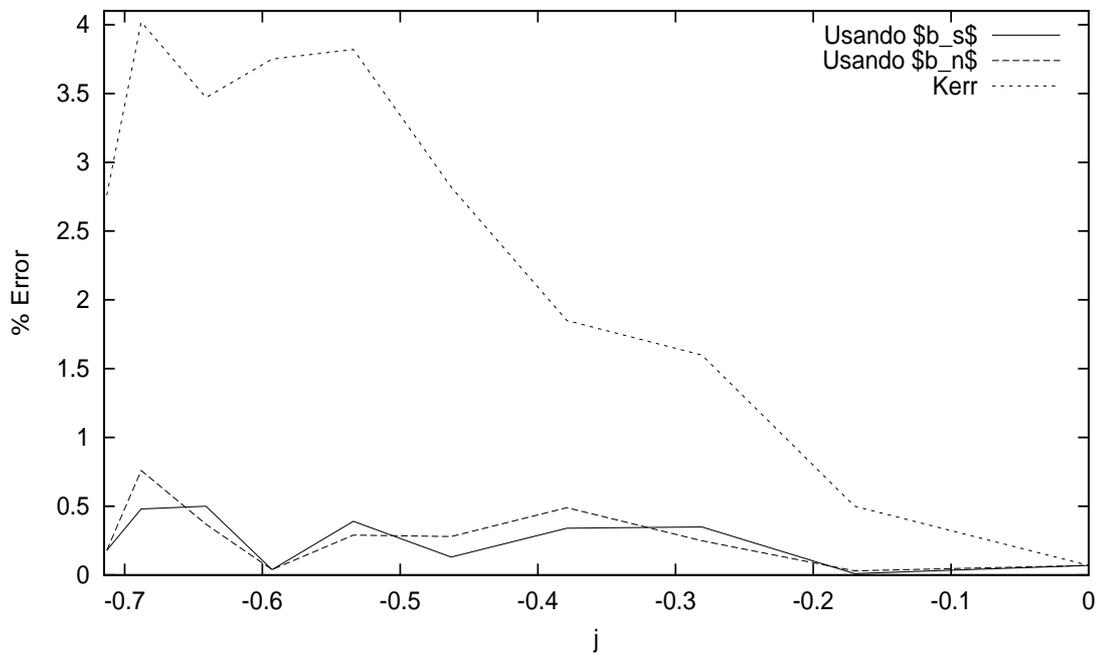


Figura 3.6: Porcentaje de error del ajuste numérico del corrimiento al rojo para EOS L (MM)

### 3.3. Ajuste numérico del radio de la órbita marginalmente estable

Existe una prueba independiente sobre la exactitud del ajuste logrado por las expresiones para el parámetro  $b(j)$ . Usando la ecuación (1.36), la cual incluye las funciones  $f$ ,  $\omega$  y sus derivadas, se obtiene una ecuación en función de  $x, y, a, b, d, \delta, m$  y  $\mu$ . Reemplazando las expresiones (3.1)–(3.5), (3.13), (3.16) y la condición (3.9) en la ecuación (1.36) se obtiene una ecuación en función de  $m, r, b$  y  $j$ . Los parámetros  $m$  y  $b$  se reemplazan por las expresiones (2.8), (3.20) y (3.21) usando las constantes encontradas en la Tabla 2.5 y 3.1. De esta manera, la ecuación (1.36) que permite obtener el radio de la órbita marginalmente estable se convierte en una ecuación implícita en función de  $r$  y  $j$ .

Con el fin de establecer una comparación entre los resultados obtenidos para el radio de la órbita marginalmente estable entre las diferentes elecciones del parámetro de deformación  $b_s$  y  $b_n$ , se utilizará como referencia el radio de la órbita marginalmente estable de la solución de Kerr [14]:

$$r = \frac{R_{ome}}{M} = \{3 + Z_2 - \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)}\}, \quad (3.24)$$

con

$$Z_1 = 1 + (1 - j^2)^{1/3}[(1 + j)^{1/3} + (1 - j)^{1/3}] \quad \text{y} \quad Z_2 = \sqrt{3j^2 + Z_1^2}. \quad (3.25)$$

Los resultados obtenidos para el radio de la órbita marginalmente estable se muestran en la Figuras 3.7–3.9. En las Figuras 3.10–3.12 se muestran las gráficas de error para cada ecuación de estado. Para la ecuación de estado A en secuencia normal el error para  $b_s$  oscila entre el 0,05 y 7,5% mientras que para  $b_n$  el error varía entre 0,03 y 6,85%, para

la ecuación de estado A en la secuencia de masa máxima el error de  $b_s$  oscila entre el 0,02 y el 7,91 % mientras que para el  $b_n$  varia entre el 0 y el 7,78 %, por último para la ecuación de estado L en la secuencia de masa máxima se tiene un error para  $b_s$  entre el 0,03 y 12,57 % y para  $b_n$  entre 0,02 y 14,56 %. Del análisis de las Figuras 3.10–3.12 se concluye que existe un mejor comportamiento de radio de la órbita marginalmente estable para rotación medianamente rápida para la ecuación de estado L en la secuencia de masa máxima y mejor en todo el rango de  $j$  para las otras dos ecuaciones de estado cuando se usa el  $b_n$ . Como se ve en estas gráficas, la curva correspondiente a la métrica de Kerr difiere considerablemente de los datos numéricos para el caso de rotación rápida ( $|j| \sim 0,5$ ). Esto se debe a que la rotación rápida crea una deformación en la distribución de masa estelar [12] que no puede ser aproximada cuando se usa la solución de Kerr, pues dicha solución tiene un parámetro de deformación fijo  $b = \sqrt{a^2 - m^2}$ , y por consiguiente esta solución introduce los porcentajes de error mas elevados en las tres ecuaciones de estado en la región de rotación rápida (ver Tablas 3.10–3.12). El porcentaje de error de los valores del radio de la orbita marginalmente estable para la ecuación de estado L (MM), en la región de rotación rápida cuando se usa  $b_n$  aumenta levemente respecto a  $b_s$ . Sin embargo, para la región de rotación lenta y medianamente rápida,  $b_n$  arroja mejores resultados. En conclusión, salvo este resultado, la elección del parámetro de deformación  $b_n$  arroja mejores resultados en todo el rango de valores de  $j$  para todas las ecuaciones de estado consideradas.

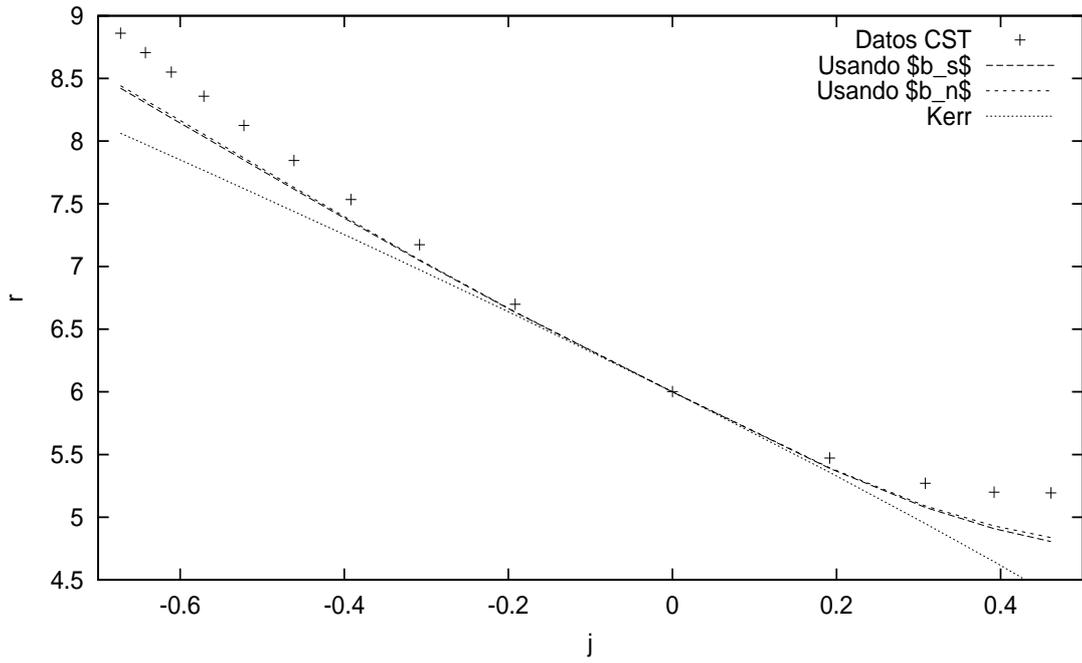


Figura 3.7: Radio de la órbita marginalmente estable vs  $j$  para EOS A (NS)

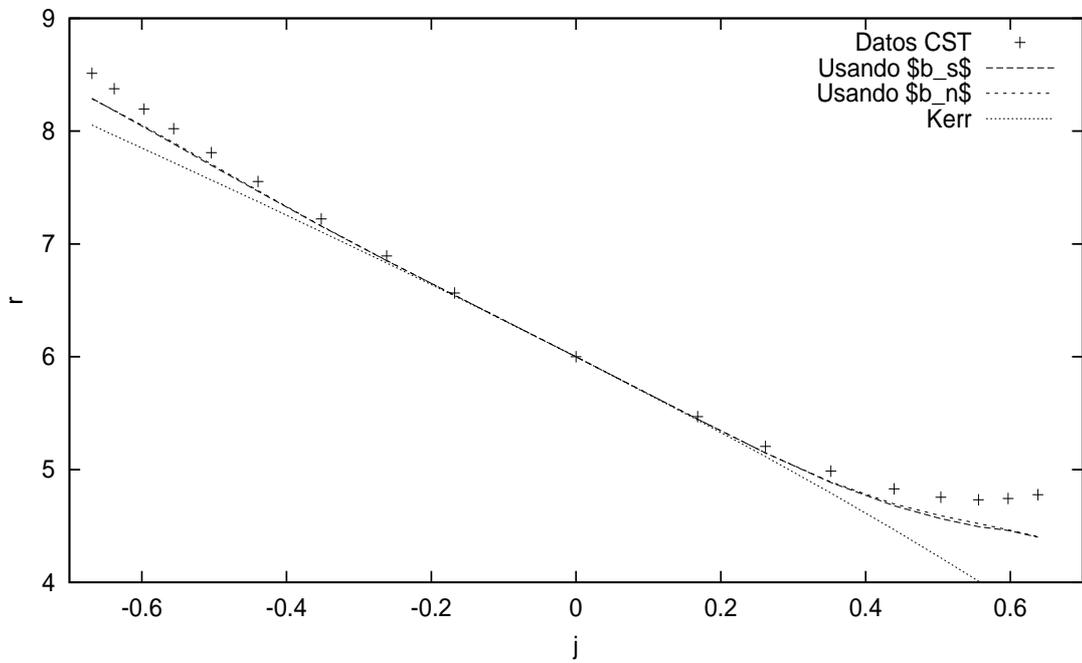


Figura 3.8: Radio de la órbita marginalmente estable vs  $j$  para EOS A (MM)

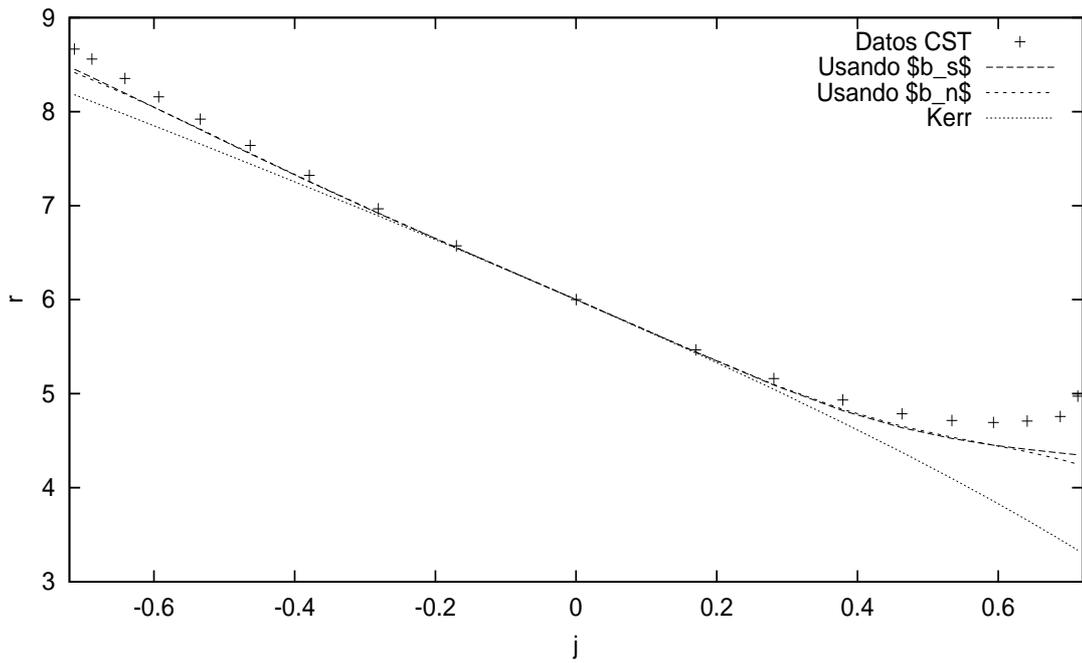


Figura 3.9: Radio de la órbita marginalmente estable vs  $j$  para EOS L (MM)

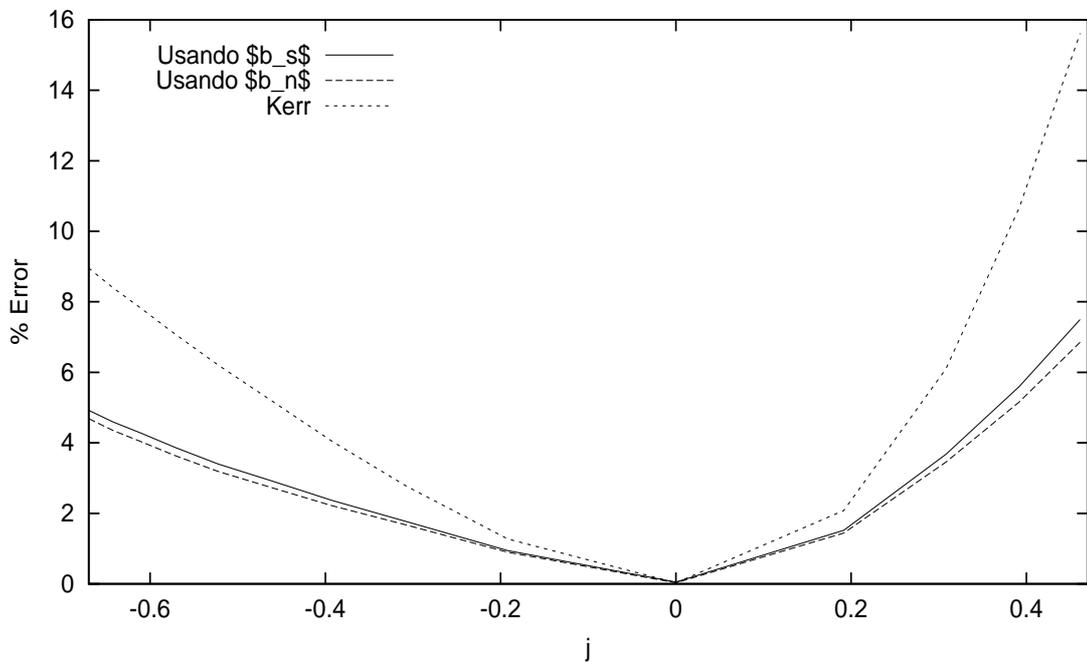


Figura 3.10: Porcentaje de error en el radio de la órbita marginalmente estable para EOS A (NS)

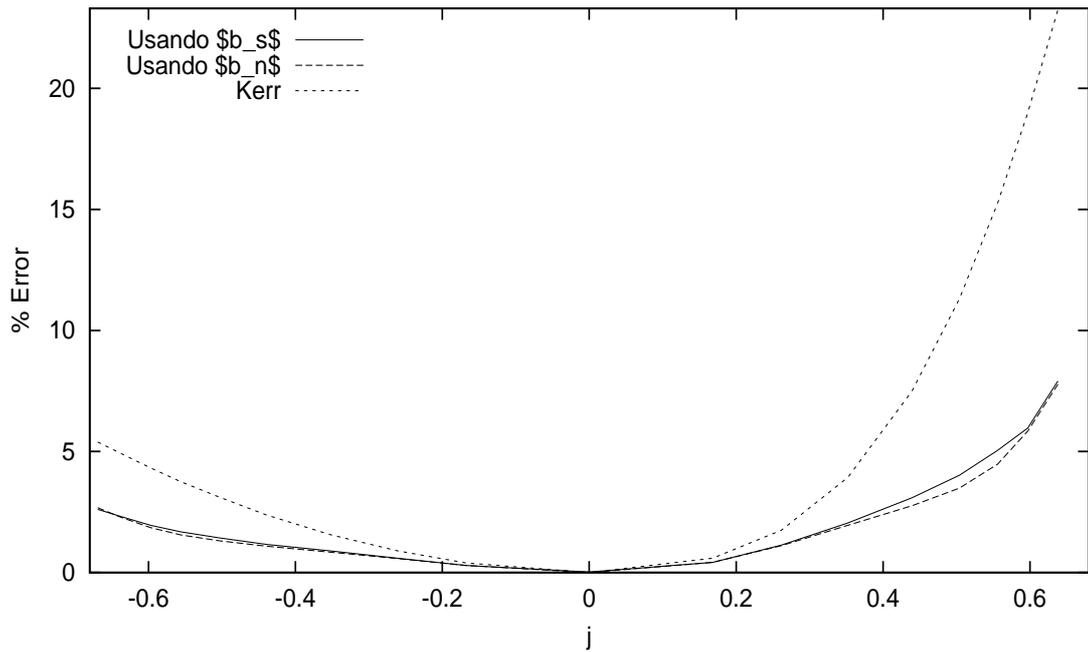


Figura 3.11: Porcentaje de error en el radio de la órbita marginalmente estable para EOS A (MM)

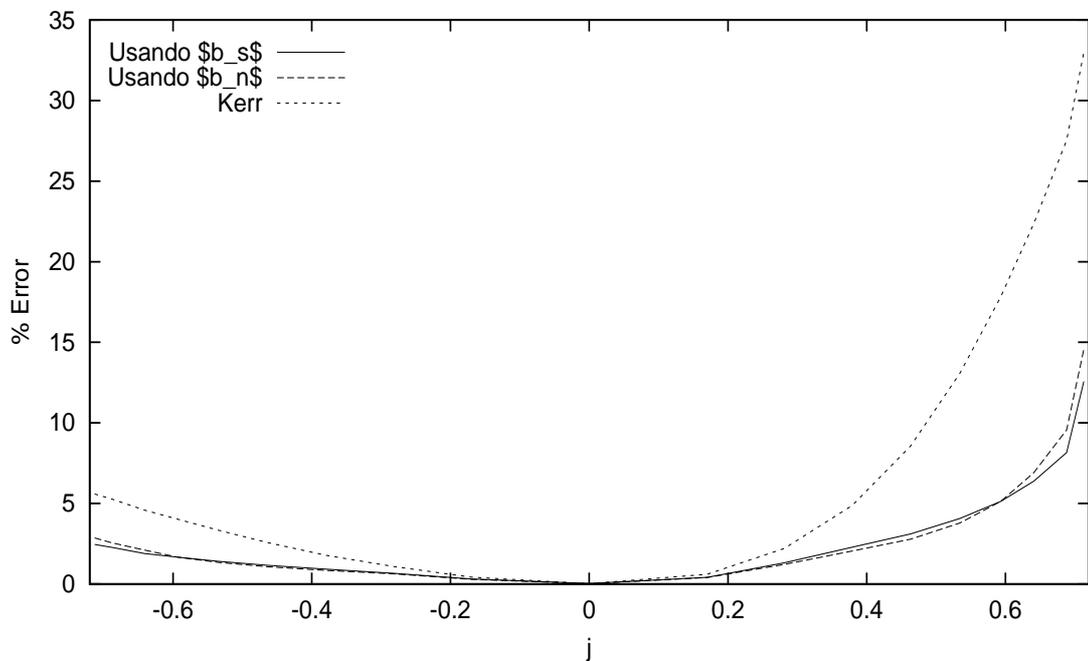


Figura 3.12: Porcentaje de error en el radio de la órbita marginalmente estable para EOS L (MM)

# CONCLUSIONES

En este trabajo se realizó el ajuste numérico de los parámetros físicos de una solución exacta de las ecuaciones de Einstein, calculada por Manko *et al* [13], con los resultados numéricos obtenidos a partir de las soluciones interiores, calculadas por Cook *et al* [6], para estrellas de neutrones con tres ecuaciones de estado: A en secuencia normal de masa A (NS) y las ecuaciones de estado A y L en la secuencia de masa máxima A (MM) y L (MM).

Se calculó el corrimiento al rojo  $Z$  a partir de la forma general de la métrica estacionaria axialsimétrica. Las funciones métricas que aparecen en la ecuación para el corrimiento al rojo se tomaron de la solución exacta de MMS-G y se expresaron en función de uno de los parámetros de la métrica (el parámetro de rotación) y cuatro constantes. Entonces, se hizo el ajuste numérico de  $Z$  a partir de las relaciones encontradas con la solución numérica, determinando así los valores de las constantes para las ecuaciones de estado mencionadas en el párrafo anterior.

Se calculó la ecuación para el radio de la órbita marginalmente estable a partir de la forma general de la métrica estacionaria axialsimétrica. Las funciones métricas se tomaron de la solución exacta de MMS-G y se expresaron en función de uno solo de los parámetros (el parámetro de rotación) con ayuda de las relaciones entre los parámetros físicos encontradas a partir de la solución numérica y el parámetro de deformación escogido  $b_n$ . Se

construyeron gráficas del radio de la órbita marginalmente estable para las tres ecuaciones de estado que fueron objeto de estudio.

Un aumento en el orden del parámetro de rotación  $j$  incluido en el momento cuadripolar de masa conduce a un mejoramiento del ajuste del campo gravitacional exterior con los modelos interiores para estrellas de neutrones rotantes. La solución exacta que se utilizó en este trabajo es entonces un modelo relativista consistente del campo gravitacional exterior de una estrella de neutrones rápidamente rotante. Con este modelo se mejora la descripción de las estrellas de neutrones, ya que para modelar tales estrellas en ocasiones se utilizan las soluciones de Schwarzschild y de Kerr aún en el caso de rotación rápida, que como se vio en las Figuras del capítulo 3 presenta un error muy grande para este régimen de rotación, mientras que para rotación lenta son suficientemente buenos. En el trabajo de Camenzind y Stute [3] se considera que el momento cuadripolar de masa tiene un parámetro de deformación que depende del parámetro de rotación hasta el orden  $j^{18}$ . Como ya se mencionó, el radio de la órbita marginalmente estable es muy susceptible en estos cambios en la elección del parámetro de deformación. Por tal razón, cualquier cambio en éste induce un cambio notable en el modelo, razón por la cual en este trabajo se escoge un parámetro de deformación que depende del parámetro de rotación hasta el orden  $j^{20}$ . A costas del aumento en la complejidad de los cálculos se gana exactitud en el modelo. La solución analítica empleada en todos los cálculos fue la solución Manko *et al* [13].

# BIBLIOGRAFÍA

- [1] Arnett W D and Bowers R L 1977 A microscopic interpretation of neutron stars structure *Ap. J.* **33** 415
- [2] Baade W and Zwicky F 1934 Remarks on Super-Novae and Cosmic Rays *Phys. Rev.* **45** 76
- [3] Camenzind M and Stute M 2003 Towards a self-consistent relativistic model of the exterior gravitational field of rapidly rotating neutron stars *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **336** 831
- [4] Chadwick J 1932 The existence of a neutron *Proc. Roy. Soc. A.* **136** 692
- [5] Chandrasekhar S 1983 *The Mathematical Theory of Black Holes* (Oxford: Clarendon Press)
- [6] Cook G B, Shapiro S L and Teukolsky S A 1994 Rapidly rotating neutron stars in general relativity: Realistic equations of state *Ap. J.* **424** 823
- [7] Ernst F J 1968 New formulation of the axially symmetric gravitational field problem *Phys. Rev.* **167** 1175
- [8] Ernst F J 1968 New formulation of the axially symmetric gravitational field problem. II *Phys. Rev.* **168** 1415

- [9] Hagiwara K et al 2002 Review of Particle Physics *Phys. Rev. D.* **66** 010001
- [10] Friedman J L, Ipser J R and Parker L 1986 Rapidly rotating neutron stars models *Ap. J.* **304** 115
- [11] Hamada T and Salpeter E E 1961 Models for Zero-Temperature Stars *Ap. J.* **134** 683
- [12] Laarakkers W G and Poisson E 1999 Quadrupole moments of rotating neutron stars *Ap. J.* **512** 282
- [13] Manko V S, Mielke E W and Sanabria-Gómez J D 2000 Exact solution for the exterior field of a rotating neutron star *Phys. Rev. D.* **62** 044048R; Manko V S, Sanabria-Gómez J D and Manko O V 2000 Nine-parametric electrovac metric involving rational functions *Phys. Rev. D.* **62** 0440489
- [14] Miller M C and Lamb F K 1996 Motion of accreting matter near luminous slowly rotating relativistic stars *Ap. J.* **470** 1033
- [15] Oppenheimer and Volkoff G M 1939 On Massive Neutron Cores *Phys. Rev.* **55** 374
- [16] Papapetrou A 1953 Eine rotationssymmetrische Lösung in der Allgemeinen Relativitätstheorie *Ann. Phys.* **12** 309
- [17] Sibgatullin N R and Sunyaev R A 1998 Disk accretion in the gravitational field of a rapidly rotating Neutron stars with a rotationally induced quadrupole mass distribution *Astron. Let.* **24** 894
- [18] Weinberg S 1972 *Gravitation and cosmology principles and applications of the general theory of relativity* (New York: John Wiley & Sons)