Copias de $c_0(\Gamma)$ en espacios de funciones diferenciables

Ludwing Duhan Arocha Osorio

Trabajo de Grado para optar al título de Magister en Matemáticas

Director

Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas

Doctor en Ciencias

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2021

Dedicatoria

A mi familia, en especial

a mi abuela Maria T.

Tabla de Contenido

Introducción 6

1. Preliminares 7

1.1. Elementos de análisis funcional 8

1.2. Copias complementadas de c_0 en $C(K,X)$ 13

2. Copias complementadas de $c_0(\Gamma)$ en $C_0^{(m)}(K,X)$ 19

2.1. Copias complementadas de c_0 en $C_0^{(m)}(K,X)$ 19

2.2. Condiciones necesarias para existencia de copias de $c_0(\Gamma)$ en $C_0^{(m)}(K,X)$ 36

2.3. Preguntas abiertas 39

Referencias Bibliográficas 41

Resumen

Título: Copias de $c_0(\Gamma)$ en espacios de funciones diferenciables *

Autor: Ludwing Duhan Arocha Osorio **

Palabras Clave: Espacio de funciones continuamente diferenciables, anula en el infinito, subespacio complementado.

Descripción: Sea X un espacio de Banach y K un subespacio localmente compacto de $\mathbb{R}$ sin puntos aislados. Se denota por $C_0^{(m)}(K,X)$ al espacio de Banach de todas las funciones $f: K \to X$ de clase $C^{(m)}$ tales que $f, f^{(1)}, \cdots, f^{(m)}$ se anulan en el infinito, dotado de la norma $\|f\|_M = \max\limits_{0\leq j\leq m}\{\|f^{(j)}\|_\infty\}$. En este trabajo estudiamos la clase de espacios $C_0^{(m)}(K,X)$. Extendemos el teorema de Cembranos (1984) y probamos que si X es de dimensión infinita, entonces $C_0^{(m)}(K,X)$ contiene una copia complementada de c_o, donde c_o denota al espacio de Banach de todas las sucesiones de escalares que convergen a cero.

Si Γ es un conjunto no vacío dotado con la topología discreta, el espacio $C_0(\Gamma)$ será denotado como $c_0(\Gamma)$. En particular, si Γ es infinito numerable, $c_0(\Gamma)$ es el espacio de sucesiones de escalares que convergen a cero, es decir, c_0. Como segundo resultado, se extiende una demostración hecha por Galego and Hagler (2012) y se prueba que si $C_0^{(m)}(K,X)$ contiene copia de $c_0(\aleph_1)$, esto es, el espacio de funciones $(a_\alpha)_{\alpha\in\aleph_1}$ tales que para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{\alpha \in \aleph_1 : |a_\alpha| \geq \varepsilon\}$ es finito, entonces X contiene copia de $c_0(\aleph_1)$.

Finalizamos este trabajo planteando preguntas para posibles trabajos futuros de investigación (sección 2.3).

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Dr. Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas, Doctor en Ciencias.

Abstract

Title: Copies of $c_0(\Gamma)$ in differentiable function spaces *

Author: Ludwing Duhan Arocha Osorio **

Key words: Space of continuously differentiable functions, vanish at infinity, complemented subspace.

Description: Let X be a Banach space and let K be a locally compact subspace of the real line $\mathbb{R}$ without isolated points. We denote by $C_0^{(m)}(K,X)$ the Banach space of all functions $f : K \to X$ of class $C^{(m)}$ such that $f, f^{(1)}, \cdots, f^{(m)}$ vanish at infinity, endowed with the M-norm $\|f\|_M = \max\limits_{0\leq j\leq m}\{\|f^{(j)}\|_\infty\}$. In this work we study the class of functions spaces $C_0^{(m)}(K,X)$. We extend the theorem of Cembranos (1984) and prove that if X is infinite dimentional, then $C_0^{(m)}(K,X)$ contains a complemented subspace isomorphic to c_0, where c_0 denotes the Banach space of all sequences of scalars that converges to zero.

If Γ is a nonempty set endowed with the discrete topology, we denote $C_0(\Gamma)$ by $c_0(\Gamma)$. In particular, if Γ is countable infinity, $c_0(\Gamma)$ is the space of sequences of scalars that converge to zero, that is, c_0. As a second result, a proof made by Galego and Hagler (2012) is extended and it is proved that if $C_0^{(m)}(K,X)$ contains a copy of $c_0(\aleph_1)$, namely, the functions space $(a_\alpha)_{\alpha\in\aleph_1}$ such that for every $\varepsilon > 0$, the set $\{\alpha \in \aleph_1 : |a_\alpha| \geq \varepsilon\}$ is finite, then X contains a copy of $c_0(\aleph_1)$. We conclude this work by presenting questions for possible future research work (section 2.3).

---

* Bachelor Thesis

** Faculty of Sciences. Math school. Director: Carlos Wilson Rodríguez Cárdenas, Doctor of Science.

Introducción

Un problema clásico en la teoría de espacios de Banach es el siguiente: dado un espacio de Banach E, determinar cuándo un espacio de Banach contiene una copia isomorfa o isométrica a E. En esta línea, Bessaga y Pelczynski resolvieron este problema cuando $E = c_0$, esto es, el espacio de sucesiones convergentes a 0. Una variante del problema planteado es la siguiente: dado un espacio de Banach E, determinar cuándo E es isomorfo a un subespacio complementado de un espacio de Banach. Respondiendo esta pregunta, Cembranos (1984) probó que si K es un espacio compacto Hausdorff infinito y X es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces $C(K,X)$ contiene una copia complementada de c_0.

A continuación, introducimos el objeto de estudio de este trabajo. Sea K un subespacio localmente compacto de la recta real sin puntos aislados y X un espacio de Banach. Denotamos por $C_0^{(m)}(K,X)$ al espacio vectorial de todas las funciones $f : K \to X$ de clase $C^{(m)}$ tales que $f, f^{(1)}, \cdots, f^{(m)}$ se anulan en el infinito. No es difícil ver que la función $\|\cdot\|_M : C_0^{(m)}(K,X) \to \mathbb{R}$ dada por $\|f\|_M = \max\limits_{0\leq j\leq m}\{\|f^{(j)}\|_\infty\}$, si $f \in C_0^{(m)}(K,X)$, es una norma y $(C_0^{(m)}(K,X), \|\cdot\|_M)$ es un espacio de Banach. A su vez Galego and Rincón-Villamizar (2016) estudian cuándo los espacios $C_0^{(1)}(K,X)$ determinan los subespacios localmente compactos de la recta real. Motivados por el resultado de Cembranos, planteamos el primer problema del trabajo.

Problema 1. Dado un subespacio K de $\mathbb{R}$ localmente compacto, sin puntos aislados y X un espacio de Banach de dimensión infinita, ¿podemos afirmar que $C_0^{(m)}(K,X)$ contiene copia complementada de c_0?

Inspirados por el resultado de Cembranos, Galego and Hagler (2012) estudian el problema de encontrar copias complementadas de $c_0(\Gamma)$ en la clase de espacios $C(K,X)$. En ese trabajo, los autores muestran que si $C([0,1],X)$ contiene copia de $c_0(\aleph_1)$, esto es, el espacio de funciones $(a_\alpha)_{\alpha\in\aleph_1}$ tales que para cada $\varepsilon > 0$, el conjunto $\{\alpha \in \aleph_1 : |a_\alpha| \geq \varepsilon\}$ es finito, entonces X contiene copia de $c_0(\aleph_1)$. Esto motiva el siguiente problema:

Problema 2. Sean X espacio de Banach y Γ un conjunto tal que $|\Gamma| = \aleph_1$.

Si $C_0^{(m)}([0,1],X)$ contiene copia de $c_0(\Gamma)$, ¿puede asegurarse que X contenga una copia isomorfa a $c_0(\Gamma)$?

En este trabajo daremos respuesta a los problemas 1 y 2.

El primer capítulo comenzará describiendo unas nociones básicas del análisis funcional. El resto del capítulo está destinado a recopilar las herramientas que permitirán desarrollar el contenido del trabajo. Se hará una introducción a los espacios de funciones $C_0(K,X)$ y se expondrán las condiciones bajo las que es sabido que dicho espacio contiene copia complementada de c_0. Estos resultados serán la base de la teoría que se desarrollará posteriormente.

El segundo capítulo del trabajo contiene los principales resultados del mismo y es en el que se demuestra de manera afirmativa el problema 1. Finalmente, en la segunda sección investigaremos las consecuencias de los resultados en Galego and Hagler (2012) para el espacio $C_0^{(m)}([0,1],X)$ en el caso $|\Gamma| = \aleph_1$.

1. Preliminares

En este capítulo se presentan algunas definiciones y resultados preliminares que son importantes para el desarrollo de los siguientes capítulos.

1.1. Elementos de análisis funcional

El símbolo $\mathbb{K}$ denotará al cuerpo $\mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$.

Definición 1.1. Un espacio de Banach es un espacio normado el cual es completo con la métrica inducida por la norma.

Definición 1.2. Sean V un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ dos normas en V. Decimos que $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ son equivalentes, si existen constantes positivas m, M tales que para todo $x \in V$

$$m\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq M\|x\|_1.$$

Proposición 1.3. *Sean X un espacio vectorial y $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2$ normas equivalentes en X. Entonces $(X, \|\cdot\|_1)$ es un espacio de Banach si, y solo si, $(X, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sean $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $\|\cdot\|_2$, $\varepsilon > 0$ dado y m, M las constantes de la definición anterior. Por hipótesis existe $N(\varepsilon \cdot m) \in \mathbb{N}$ tal que si $N(\varepsilon \cdot m) \leq l < j$, entonces $\left\|x_l - x_j\right\| < \varepsilon \cdot m$. Luego,

$$\begin{aligned} \|x_l - x_j\|_1 &\leq \frac{1}{m}\|x_l - x_j\|_2 \\ &< \frac{1}{m}\varepsilon \cdot m \\ &< \varepsilon \quad \text{si } N(\varepsilon \cdot m) \leq l < j. \end{aligned}$$

Por tanto $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy en $\|\cdot\|_1$. Como $(X, \|\cdot\|_1)$ es Banach, existe $x \in X$ tal que $\|x_n - x\|_1 \longrightarrow 0$. Esto implica que $x_n \longrightarrow x$ en $(X, \|\cdot\|_2)$, ya que $\|x_n - x\|_2 \leq M\|x_n - x\|_1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Así $(X, \|\cdot\|_2)$ es un espacio de Banach.

Observe que la prueba se hizo de tal manera que el reciproco se obtiene intercambiando el índice de las normas.

$\square$

Definición 1.4. Sean X un espacio de Banach y M subespacio cerrado de X. Se dice que M es complementado de X, si existe un subespacio cerrado N tal que $M \cap N = \{0\}$ y $X = M \oplus N$.

Esto es equivalente a decir que existe un operador lineal y acotado $P : X \to X$ que es una proyección sobre M, es decir, $P \circ P = P$ y $P(X) = M$.

El siguiente resultado es consecuencia del Teorema de la Aplicación Abierta, (Halsey Royden, pág 264).

Teorema 1.5. *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador continuo sobreyectivo. Si T es inyectivo, entonces T^{-1} es un operador continuo.*

Definición 1.6. Sean X e Y espacios de Banach. Un isomorfismo de X en Y es un operador $T : X \longrightarrow Y$ inyectivo tal que T y T^{-1} son continuos. Se dice que X es isomorfo a Y y denotamos por $X \sim Y$, si existe un isomorfismo sobreyectivo de X sobre Y. Diremos que X es isométricamente isomorfo a Y si existe un isomorfismo sobreyectivo $T : X \to Y$, tal que $\|x\|_X = \|Tx\|_Y$ para todo $x \in X$.

Diremos también que Y tiene una copia de X, y escribimos $X \hookrightarrow Y$, si existe un isomorfismo de X a un subespacio de Y. Si existe un subespacio complementado de Y isomorfo a X, denotamos $X \overset{c}{\hookrightarrow} Y$.

Lema 1.7. *Sean X un espacio normado y Y un espacio de Banach. Si M es un subespacio denso en X y $T_0 : M \to Y$ un operador lineal continuo, entonces existe un único operador lineal continuo $T : X \to Y$ tal que $T|_M = T_0$ y $\|T\| = \|T_0\|$.*

Lema 1.8. *Sean X, Y espacios de Banach. Si existe un isomorfismo sobreyectivo $T : X \longrightarrow Y$ y M es un subespacio complementado de X, entonces $T(M)$ es un subespacio complementado de Y.*

Demostración. Como M es complementado de X, existe una proyección $\tilde{P} : X \to X$ tal que $\tilde{P}^2(x) = P(x)$ y $\tilde{P}(X) = M$. Defina $P := T \circ \tilde{P} \circ T^{-1} : Y \to T(M)$. No es difícil ver que P es un operador lineal de Y sobre $T(M)$ que satisface $P^2(x) = P(x)$. En efecto, ya que para cada $x \in Y$,

$$
\begin{aligned}
P^2(x) &= (T \circ \tilde{P} \circ T^{-1})(T \circ \tilde{P} \circ T^{-1})(x) \\
&= (T \circ \tilde{P})(\tilde{P} \circ T^{-1})(x) \\
&= (T \circ \tilde{P} \circ T^{-1})(x) \\
&= P(x).
\end{aligned}
$$

Finalmente, la igualdad $P(Y) = T(M)$ es consecuencia de que T es un isomorfismo sobreyectivo y $\tilde{P}(X) = Y$.

□

Definición 1.9. Sean X un espacio de Banach y K un espacio localmente compacto Hausdorff. Se dice que $f : K \longrightarrow X$ se anula en el infinito si dado $\varepsilon > 0$, el conjunto $V_\varepsilon(f) = \{x \in K : \ \|f(x)\| \geq \varepsilon\}$ es compacto.

Se denota por $C_0(K,X)$ al conjunto de todas las funciones continuas de K en X que se anulan en el infinito. El próximo resultado es clásico. Una prueba de éste se puede encontrar en Rudin, Teorema 3,17.

Proposición 1.10. *Sean X un espacio de Banach y K un espacio localmente compacto Hausdorff. Entonces $(C_0(K,X), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach, junto con la norma del supremo*

$$\|f\|_\infty = \sup\{\|f(x)\| : x \in K\}, \quad \textit{donde } f \in C_0(K,X).$$

En caso de que K sea compacto, $C_0(K,X)$ se denota por $C(K,X)$. Si $X = \mathbb{K}$, se escribe como $C_0(K)$, y $C(K)$ si K es compacto.

Observación 1.11. Si Γ es un conjunto no vacío dotado con la topología discreta, el espacio $C_0(\Gamma)$ será denotado como $c_0(\Gamma)$. En particular, si Γ es infinito numerable, $c_0(\Gamma)$ es el espacio de sucesiones de escalares que convergen a cero, es decir, c_0.

Observación 1.12. Si c_{00} es el espacio que consta de las sucesiones eventualmente nulas, entonces c_{00} es un subespacio denso en c_0. (Fabian, Proposición 1.16).

Definición 1.13. Sea X un espacio de Banach. Una serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ en X se dice que es incondicionalmente convergente, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_{\pi(n)}$ es convergente para cualquier permutación π de $\mathbb{N}$.

Definición 1.14. Sea X un espacio de Banach. Una serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ en X se dice que es w-incondicionalmente de Cauchy, si $\sum_{n\in\mathbb{N}} |x^*(x_n)|$ es convergente, para todo $x^* \in X^*$.

Las siguientes dos proposiciones nos dan una caracterización de los conceptos anteriores.

Proposición 1.15. *(Megginson, Proposición 4.2.3) Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Entonces $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es incondicionalmente convergente si, y solo si, cada subserie de $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es convergente.*

Proposición 1.16. *(Swartz, Proposición 3.8) Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) La serie $\sum_{n\in\mathbb{N}} x_n$ es w-incondicionalmente de Cauchy;

ii) $\left\{\sum_{j\in J} x_j : J \text{ es finito}\right\}$ está acotada en X;

iii) La serie $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$ converge, para todo $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$.

Definición 1.17. Sean X un espacio de Banach y $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en X. Decimos que $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una base de Schauder (o base) para X, si para cada $x \in X$ existe una única sucesión de escalares $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $x = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n x_n$.

Bessaga y Pelczyinski caracterizan los espacios de Banach que no contienen un subespacio isomorfo a c_0 como aquellos donde la convergencia débilmente incondicional es equivalente a la convergencia incondicional. Una demostración puede encontrarse en Lacey, Teorema 9.

Teorema 1.18. *Sea X un espacio de Banach. Las siguientes afirmaciones son equivalentes.*

i) X contiene un subespacio isomorfo a c_0 ($c_0 \hookrightarrow X$);

ii) Existe una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ en X que es w-incondicionalmente convergente y no es incondicionalmente convergente.

Definición 1.19. Sean X un espacio topológico y $f : X \to \mathbb{R}$ una función. El soporte de f denotado por *supp* (f), es la clausura del conjunto $\{x \in X : f(x) \neq 0\}$.

Teorema 1.20. *(Rudin, Teorema 2.13) Sean $V_1, V_2, \cdots, V_n$ subconjuntos abiertos de un espacio localmente compacto X y $K \subseteq X$ compacto tal que $K \subseteq V_1 \bigcup V_2 \bigcup \cdots \bigcup V_n$. Entonces existen funciones $h_1, h_2 \cdots, h_n \in C_0(K)$ tales que*

i) *$supp\, h_j \subset V_j$, para cada $j = 1, 2, \cdots, n$;*

ii) *$0 \leq h_j(x) \leq 1$ para cada $x \in K$, con $j = 1, 2, \cdots, n$;*

iii) *$h_1(x) + h_2(x) + \cdots + h_n(x) = 1$ para cada $x \in K$;*

iv) *$h_1(x) + h_2(x) + \cdots + h_n(x) \leq 1$ para todo $x \in X$.*

1.2. Copias complementadas de c_0 en $C(K,X)$

En esta sección estudiaremos resultados que caracterizan cuando un espacio de Banach no contiene un subespacio isomorfo a c_0. Finalmente, presentamos el Teorema 1.33 que ha sido una de las bases para este trabajo.

Proposición 1.21. *(Cembranos and Mendoza, Proposición 1.4.2) Si $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es una sucesión en $C(K)$ de funciones no nulas tales que la familia de conjuntos $(g_n^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\}))_{n\in\mathbb{N}}$ son mutuamente disjuntos, entonces el subespacio cerrado generado por las funciones g_n es isométricamente isomorfo a c_0.*

Demostración. Considere a $T : c_{00} \to C(K)$ dado por $T((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n g_n$. Note que T está bien definido, ya que para cada $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $supp(\alpha) = \{n \in \mathbb{N} : \alpha_n \neq 0\}$ es finito. Además, podemos asumir que cada función g_n tiene norma 1, ya que si $\|g_i\| = d_i \neq 1$ para algún $i \in \mathbb{N}$, basta reemplazar dicha función por $\tilde{g} := g_i/d_i$. Afirmamos que el operador lineal es una isometría. En efecto, ya que si $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}} \in c_{00}$, entonces existe $m \in \mathbb{N}$ tal que $\alpha_n = 0$ para todo $n \geq m$. Además, como la familia de conjuntos $\big(U_n = g_n^{-1}(\mathbb{K}\setminus\{0\})\big)_{n\in\mathbb{N}}$ son mutuamente disjuntos, entonces

$$\begin{aligned}
\|T((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}})\| &= \left\|\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n g_n\right\| \\
&= \sup_{k\in K}\left\|\sum_{n=1}^{m} \alpha_n g_n(k)\right\| \\
&= \sup\left\{\left\|\sum_{n=1}^{m} \alpha_n g_n(k)\right\| : k \in \bigcup_{j=1}^{m} U_j\right\} \\
&= \max_{1\leq j\leq m}\left(\sup_{k\in U_j}\left\|\sum_{n=1}^{m} \alpha_n g_n(k)\right\|\right) \\
&= \max_{1\leq j\leq m}\left|\alpha_j\right| \\
&= \|(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}\|.
\end{aligned}$$

Como c_{00} es denso en c_0, de acuerdo al Lema 1.7 existe una extensión lineal continua $\tilde{T} : c_0 \to C(K,X)$ tal que $\tilde{T}|_{c_{00}} = T$ y $\|\tilde{T}\| = \|T\|$.

$\square$

Proposición 1.22. *Sean K un espacio compacto Hausdorff y X un espacio de Banach. Entonces los espacios $C(K)$ y $C(K,X)$ siempre contienen copias de c_0 (excluyendo los casos en que $C(K)$ o X sean de dimensión finita).*

Demostración. Como K es un espacio compacto Hausdorff infinito, existe una sucesión $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$

de subconjuntos abiertos no vacíos de K, disjuntos dos a dos. (Willard, Ejercicio 14D).

Para cada $n \in \mathbb{N}$ fijemos t_n tal que $t_n \in G_n$. De acuerdo al lema de Urysohn's existe una función $f_n \in C(K,[0,1])$ tal que $f_n(t_n) = 1$ y $f_n(K \setminus G_n) = 0$. Bajo esta construcción tenemos que la familia de conjuntos $(f_n^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\}))_{n\in\mathbb{N}}$ son mutuamente disjuntos, ya que si suponemos por el contrario que existen $i, j \in \mathbb{N}$ con $i \neq j$ tales que $f_i^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\}) \cap f_j^{-1}(\mathbb{K} \setminus \{0\}) \neq \emptyset$, entonces existe $x \in K$ tal que $f_i(x) \neq 0$ y $f_j(x) \neq 0$. Así $x \in G_i \cap G_j$ que es una contradicción. D acuerdo a la Proposición 1.21 concluimos que $C(K)$ contiene copia de c_0 y en consecuencia $C(K,X)$ también.

□

Definición 1.23. Sean X,Y espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ un operador lineal continuo.

1) Diremos que T es incondicionalmente convergente, si para cada serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ w-incondicionalmente convergente, se tiene que $\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$ es incondicionalmente convergente.

2) Diremos que T es compacto, si $T(B)$ es relativamente compacto en Y, para todo subconjunto acotado B de X.

Ejemplo 1.24. La identidad en c_0 no es un operador incondicionalmente convergente ya que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ es w-incondicionalmente convergente, pero no es incondicionalmente convergente en c_0, pues $\|e_n\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$.

Ejemplo 1.25. Considere el operador $T : \ell^2 \to \ell^2$ dado por

$$T\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\right) = \left(\frac{x_n}{2^n}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Entonces T es compacto (Fabian, pág 16).

El próximo resultado nos da una condición para que un operador lineal continuo en c_0 sea compacto. Una prueba de este resultado puede ser consultada en Fabian, Teorema 4.51.

Lema 1.26. *Sean X un espacio de Banach y $T : c_0 \to X$ un operador continuo que no es compacto. Entonces existe un subespacio Z de c_0 isomorfo a c_0 tal que $T|_Z : Z \to X$ es un isomorfismo.*

Proposición 1.27. *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \to Y$ un operador continuo. Si T es compacto, entonces T es incondicionalmente convergente.*

Demostración. Sea $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ una serie w-incondicionalmente convergente. Por la Proposición 1.16, sigue que $\{\sum_{j\in J} x_n : J \text{ es finito}\}$ está acotada en X. Como T es compacto, entonces el conjunto $\{\sum_{j\in J} Tx_n : J \text{ es finito}\}$ es relativamente compacto en Y. Esto implica que toda subserie $\sum_{j=1}^{\infty} Tx_{n_j}$ de $\sum_{j=1}^{\infty} Tx_n$ es convergente (Swartz, Teorema 2.48). Así, por medio de la Proposición 1.15, concluimos que $\sum_{j=1}^{\infty} Tx_n$ es incondicionalmente convergente. Por tanto T es un operador incondicionalmente convergente.

□

De acuerdo al Teorema 1.18 y el Lema 1.26 se puede concluir el siguiente Lema.

Lema 1.28. *Sean X, Y espacios de Banach y $T : X \longrightarrow Y$ un operador continuo. Entonces T no es incondicionalmente convergente si, y solo si, existe un subespacio S de X tal que S es isomorfo a c_0 y la restricción $T|_S$ es un isomorfismo.*

Demostración. Suponga que existe un subespacio S de X isomorfo a c_0 tal que $T|_S$ es un isomorfismo. Luego existe un isomorfismo $R : c_0 \to S$. Para cada n, sea $Re_n = s_n$ donde $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ es la base de Schauder canónica en c_0. De acuerdo a la proposición 1.16, como la serie $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ es w-incondicionalmente convergente en c_0, $\sum_{n=1}^{\infty} s_n$ es w-incondicionalmente convergente en X, ya que R es un isomorfismo. De la misma manera, como $T|_S$ es un isomorfismo, se sigue que $\sum_{n=1}^{\infty} Ts_n$ no es incondicionalmente convergente en Y. Concluimos que T no es un operador incondicionalmente convergente.

Para el recíproco, suponga que T no es incondicionalmente convergente. Entonces existe una serie $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ w-incondicionalmente convergente tal que $\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$ no es incondicionalmente convergente. Observe que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ no es incondicionalmente convergente, ya que si suponemos por el contrario que $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es incondicionalmente convergente; toda subserie de $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ es convergente, y en consecuencia $\sum_{n=1}^{\infty} Tx_n$ es incondicionalmente convergente, pero esto es una contradicción.

Por el Teorema 1.18, existe $W \subseteq X$ tal que $W \sim c_0$. Sea $J : c_0 \to W$ un isomorfismo sobreyectivo. Como $\sum_{n=1}^{\infty} e_n$ no es incondicionalmente convergente, la serie $\sum_{n=1}^{\infty} J(e_n)$ tampoco lo es. De esto se sigue que J no es compacto (Fabian, Proposición 4.50).

Considere al operador $T \circ J : c_0 \to Y$. Este operador no es compacto, ya que T no es compacto, pues por hipótesis no es incondicionalmente convergente. Por medio del Lema 1.26, existe $Z \subseteq c_0$ con $Z \sim c_0$ tal que $(T \circ J)|_Z : Z \to Y$ es un isomorfismo. Defina $S := J(Z) \subseteq X$. Por lo anterior se sigue que $T|_S : S \to Y$ es un isomorfismo.

$\square$

Recordemos que en la Proposición 1.22 se probó que $C(K)$ y $C(K,X)$ contienen copias de c_0. Sin embargo, en cuanto a copias complementadas de c_0 esto no se cumple ni para el espacio

$C(K)$.

Ejemplo 1.29. c_0 no está complementado en ℓ_∞. Para una prueba de esto, véase Cembranos and Mendoza, Corolario 1.3.2.

El siguiente teorema afirma que c_0 está complementado en cualquier espacio de Banach separable X, tal que $c_0 \hookrightarrow X$. Una prueba se puede encontrar en Sobczyk.

Teorema 1.30. *Sea X un espacio de Banach separable. Si Y es un subespacio cerrado de X y $T : Y \to c_0$ es un operador acotado. Entonces existe una extensión $\tilde{T} : X \to c_0$ tal que $\tilde{T}|_Y = T$ y $\|\tilde{T}\| \leq 2\|\tilde{T}\|$.*

Corolario 1.31. *Si Y es un subespacio de un espacio de Banach separable X y Y es isomorfo a c_0 entonces existe una proyección de X en Y.*

Demostración. Supongamos que $T : Y \to c_0$ es un isomorfismo y sea $\tilde{T} : X \to c_0$ la extensión dada por el teorema anterior. Entonces $P = T^{-1}\tilde{T}$ es una proyección de X en Y.

□

Destacamos dos lemas claves en la demostración del siguiente teorema. El primero de estos es el Lema 1.28. Por otra parte, el segundo lema se conoce como la propiedad de Josefson Nissenzweig.

Lema 1.32. *(Nissenzweig, Corolario 2.3) Si X es un espacio de Banach de dimensión infinita, entonces existe $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ en X^*, donde $\|x_n^*\| = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tal que $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ es w^*-convergente a cero.*

A continuación, enunciamos el resultado principal de Cembranos (1984). La prueba de uno de los principales resultados de este trabajo (Teorema 2.12) está inspirado por la demostración de este Teorema.

Teorema 1.33. *(Cembranos) Sean K un espacio compacto Hausdorff infinito y X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces* $c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} C(K,X)$.

2. Copias complementadas de $c_0(\Gamma)$ en $C_0^{(m)}(K,X)$

2.1. Copias complementadas de c_0 en $C_0^{(m)}(K,X)$

En esta sección se dará una prueba del problema 1.

Definición 2.1. Sean K un subespacio localmente compacto de $\mathbb{R}$ sin puntos aislados, X un espacio de Banach y $f : K \to X$. Decimos que f es diferenciable en $x_0 \in K$, si existe una función lineal continua $f' : \mathbb{R} \to X$ tal que

$$\lim_{h\to 0} \frac{\|f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h\|}{h} = 0.$$

Si f es diferenciable en x_0 para todo $x_0 \in K$, decimos que f es diferenciable en K.

Ejemplo 2.2. Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ dado por $f(t) = (t,t^2,t^3)$, entonces $f'(t) = (1,2t,3t^2)$.

A continuación introducimos el objeto de estudio de este trabajo.

Definición 2.3. Sean K un subespacio localmente compacto de $\mathbb{R}$ sin puntos aislados y X un espacio de Banach. Dado $m \geq 0$, $C_0^{(m)}(K,X)$ denota al espacio vectorial de todas las funciones diferenciables $f\colon K \longrightarrow X$ de clase $C^{(m)}$ tales que $f, f^{(1)}, \cdots, f^{(m)}$ se anulan en el infinito, bajo la norma

$$\|f\|_M = \max_{0\leq j\leq m} \{\|f^{(j)}\|_\infty\}.$$

En este espacio también se pueden considerar otras normas, por ejemplo las siguientes:

$$\|f\|_M = \max\{\|f\|_\infty, \|f'\|_\infty, \cdots, \|f^{(m)}\|_\infty\};$$

$$\|f\|_\Sigma = \sum_{j=0}^{m} \left\|f^{(j)}\right\|;$$

$$\|f\|_C = \sup\left\{\sum_{j=0}^{m} \left\|f^{(j)}(x)\right\| : x \in K\right\},$$

donde $f \in C_0^{(m)}(K,X)$.

Lema 2.4. *Sean $f \in C_0(K,X)$ y $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión en $(C_0^{(1)}(K,X))$ tal que $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en K. Si existe $g \in C_0(K,X)$ tal que $f_n' \longrightarrow g$ uniformemente en K, entonces f es derivable y $f' = g$.*

Demostración. Por hipótesis f_n es derivable en K, para cada $n \in \mathbb{N}$. Luego para todo $x \in K$ se tiene que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f_n(x+h) - f_n(x)}{h} = f_n'(x), \quad \text{si } n \in \mathbb{N}.$$

Como $f_n \longrightarrow f$ uniformemente en K, de acuerdo a Rudin, Teorema 7.11 concluimos que

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{n\to\infty} f_n'(x), \quad \text{para cada } x \in K.$$

Además, si existe $g \in C_0(K,X)$ tal que $f_n' \longrightarrow g$ uniformemente en K, entonces

$$\lim_{n\to\infty} f_n'(x) = g(x), \quad \text{para todo } x \in K.$$

De esta manera, se tiene que f es derivable y $f' = g$.

$\square$

Proposición 2.5. *$(C_0^{(m)}(K,X), \|\cdot\|_M)$ es un espacio de Banach.*

Demostración. Sea $(f_p)_{p\in\mathbb{N}}$ una sucesión de Cauchy en $C_0^{(m)}(K,X)$ considerando la norma $\|\cdot\|_M$. Entonces para todo $\varepsilon > 0$ existe $N \in \mathbb{N}$ tal que si $p, q \geq N$,

$$\max\left\{\|f_p - f_q\|_\infty, \|f_p' - f_q'\|_\infty, \cdots, \|f_p^{(m)} - f_q^{(m)}\|_\infty\right\} < \varepsilon.$$

Luego $\|f_p - f_q\|_\infty < \varepsilon$, y así para todo $x \in K$ se tiene que $\|f_p(x) - f_q(x)\| < \varepsilon$, es decir, la sucesión $(f_p(x))_{p\in\mathbb{N}}$ es de Cauchy, por tanto existe una función continua f tal que $f(x) = \lim_{p\to\infty} f_p(x)$ para cada $x \in K$. Veamos que $f \in C_0^{(m)}(K,X)$.

i) Observe que $f \in C_0(K,X)$, ya que $C_0(K,X)$ es un espacio de Banach considerando la norma del supremo.

ii) Veamos que $f \in C_0^{(1)}(K,X)$. Para tal efecto, solo resta mostrar que $f' \in C_0(K,X)$. Note que $(f_p')_{p\in\mathbb{N}}$ visto como elemento de $C_0(K,X)$ converge uniformemente a una función $g \in C_0(K,X)$, ya que $(f_p')_{p\in\mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy en $C_0(K,X)$. De acuerdo al Lema 2.4 concluimos que f es derivable y $g = f'$.

iii) Siguiendo el argumento del inciso *ii*) se prueba que $f^{(i)} \in C_0(K,X)$ para todo $i \in \{2,3,\cdots,m\}$.

Dado que $f \in C_0^{(m)}(K,X)$, concluimos que $(C_0^{(m)}(K,X), \|\cdot\|_\Sigma)$ es un espacio de Banach.

□

Observación 2.6. Probaremos que las tres normas $\|\cdot\|_M$, $\|\cdot\|_\Sigma$ y $\|\cdot\|_C$ son equivalentes:

a) Por definición de $\|\cdot\|_\Sigma$, se tiene que $\|f\|_M \leq \|f\|_\Sigma$ para cada $f \in C_0^{(m)}(K,X)$. Por otro lado, si $f \in C_0^{(m)}(K,X)$, entonces $\|f\|_\Sigma \leq (m+1)\,\|f\|_M$. De acuerdo a las Proposiciones 2.5 y 1.3, sigue que $(C_0^{(m)}(K,X), \|\cdot\|_\Sigma)$ es un espacio de Banach.

b) Para ver que $\|\cdot\|_C$ y $\|\cdot\|_M$ son equivalentes, note que si $f \in C_0^{(m)}(K,X)$ y $x \in K$, entonces

$$\sum_{j=0}^{m} \left\| f^{(j)}(x) \right\| \leq \sum_{j=0}^{m} \left\| f^{(j)} \right\|.$$

Por tanto $\|f\|_C \leq (m+1)\,\|f\|_M$. Por otro lado, si $f \in C_0^{(m)}(K,X)$ y $x \in K$, observe que

$$\left\| f^{(i)}(x) \right\| \leq \sum_{j=0}^{m} \left\| f^{(j)}(x) \right\| \quad \text{para todo } i = 0,1,\cdots,m.$$

Así, $\|f^{(j)}\| \leq \|f\|_C$ para todo $j = 0,1,\cdots,m$. Por consiguiente $\|f\|_M \leq \|f\|_C$. De esto se concluye que $(C_0^{(m)}(K,X), \|\cdot\|_C)$ es un espacio de Banach.

$c)$ Finalmente, veamos que las normas $\|\cdot\|_\Sigma$ y $\|\cdot\|_C$ son equivalentes. Considere la identidad $I : (C_0^{(m)}(K,X), \|\cdot\|_\Sigma) \to (C_0^{(m)}(K,X), \|\cdot\|_C)$. Este operador es una biyección. Además, es continuo, ya que

$$\begin{aligned}
\|f\|_C &= \sup\left\{\sum_{j=0}^{m}\left\|f^{(j)}(x)\right\| : x \in K\right\} \\
&\leq \sum_{j=0}^{m}\left\|f^{(j)}\right\| \\
&= \|f\|_\Sigma .
\end{aligned}$$

Mediante el Teorema 1.5 concluimos que I^{-1} es un operador continuo. De esta manera, las normas $\|\cdot\|_\Sigma$ y $\|\cdot\|_C$ son equivalentes.

$\square$

Definición 2.7. Sea K un espacio topológico. Se define la suma topológica de K consigo mismo y es denotada por $K \oplus K$ o $K^{(1)}$, como el espacio $K \times \{0,1\}$ con la topología producto. Aquí el espacio $\{0,1\}$ se considera con la topología discreta. De la misma manera, se denota por $K^{(m)}$ al espacio $K \times \{0,1,\cdots,m\}$ dotado de la topología del producto.

Los siguientes lemas serán de gran importancia en la demostración del teorema principal de este capitulo.

Lema 2.8. *Sean K un espacio localmente compacto Hausdorff infinito y X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces el subespacio generado por $\{g(\cdot)x : g \in C_0(K), x \in X\}$ es denso en $C_0(K,X)$.*

Demostración. Sean $f \in C_0(K,X)$ y $\varepsilon > 0$ dado. El conjunto $V_\varepsilon(f) = \{k \in K : \|f(k)\| \geq \varepsilon\}$ es compacto por definición de f. Para cada $k \in V_\varepsilon(f)$ considere $U_\varepsilon = f^{-1}\left(B\left(f(k), \frac{\varepsilon}{2}\right)\right)$ que es un abierto de K. Así, la familia $\{U_k : k \in V_\varepsilon(f)\}$ es una cobertura abierta de $V_\varepsilon(f)$, luego existen $k_1, k_2, \cdots, k_n \in V_\varepsilon(f)$ tales que $V_\varepsilon(f) \subseteq \bigcup_{i=1}^n U_{k_i}$. De acuerdo al Teorema 1.20 existen funciones $h_1, h_2, \cdots, h_n \in C(K)$ tales que

i) *supp* $h_j \subseteq U_{k_j}$ para cada $j = 1, 2 \cdots, n$,

ii) $h_j \geq 0$ para cada $j = 1, 2 \cdots, n$,

iii) $h_1(k) + h_2(k) + \cdots + h_n(k) = 1$ para cada $k \in V_\varepsilon(f)$,

iv) $h_1(k) + h_2(k) + \cdots + h_n(k) \leq 1$ para cada $k \in K$.

Definimos $g = \sum_{j=1}^n f(k_j)h_j$. Si $k \notin \bigcup_{j=1}^n U_{k_j}$, entonces

$$\left\| f(k) - \sum_{j=1}^n f(k_j)h_j(k) \right\| = \|f(k)\| < \varepsilon, \text{ ya que } \sum_{j=1}^n f(k_j)h_j(k) = 0.$$

Por otro lado, si $k \in \bigcup_{j=1}^n U_{k_j}$, entonces $k \in U_{k_{j_0}}$ para algún $j_0 \in \{1, 2, \cdots, n\}$. De esta forma

$\left\|f(k)-f(k_{j_0})\right\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Así,

$$\begin{aligned}\left\|f(k)-\sum_{j=1}^{n} f(k_j)h_j(k)\right\| &= \left\|\sum_{j=1}^{n}\big(h_j(k)f(k)-h_j(k)f(k_j)\big)\right\| \\ &= \left\|\sum_{j=1}^{n} h_j(k)\big(f(k)-f(k_j)\big)\right\| \\ &\leq \sum_{j=1}^{n} h_j(k)\left\|f(k)-f(k_j)\right\| \\ &< \frac{\varepsilon}{2}.\end{aligned}$$

Por tanto,

$$\left\|f-\sum_{j=1}^{n} f(k_j)h_j\right\| < \varepsilon.$$

□

Lema 2.9. *Sean K un subespacio de $\mathbb{R}$ localmente compacto sin puntos aislados y X un espacio de Banach. Entonces $C_0^{(m)}(K,X)$ es isométrico a un subespacio cerrado de $C_0(K^{(m)},X)$.*

Demostración. Considere $j_K : C_0^{(m)}(K,X) \to C_0(K^{(m)},X)$ dada por $j_K(f)(x,i) = \sum_{k=0}^{m} \chi_{\{k\}}(i) f^{(k)}(x)$, donde χ denota la función característica. Note que j_K está bien definida ya que si $f \in C_0^{(m)}(K,X)$, entonces para cada $x \in K$ y $0 \leq i \leq m$, se tiene que

$$j_K(f)(x,i) = \sum_{k=0}^{m} \chi_{\{k\}}(i) f^{(k)}(x) = f^{(i)}(x).$$

Luego, para cada $\varepsilon > 0$ tenemos que

$$\left\{(x,i) \in K^{(m)} : \|j_K(f)(x,i)\| \geq \varepsilon\right\} \subseteq \bigcup_{j=0}^{m} \left\{x \in K : \left\|f^{(j)}(x)\right\| \geq \varepsilon\right\} \times \{j\}$$

y así, $\{(x,i) \in K^{(m)} : \|j_K(f)(x,i)\| \geq \varepsilon\}$ es compacto. Para ver que es una isometria observe que

$$\begin{aligned}
\|j_K(f)\| &= \sup\left\{\left\|\sum_{k=0}^{m} \chi_{\{k\}}(i) f^{(k)}(x)\right\| : \ x \in K, \ i = 0,1,\cdots,m\right\} \\
&= \sup\left\{\left\|f^{(i)}(x)\right\| : \ x \in K, \ i = 0,1,\cdots,m\right\} \\
&= \text{máx}\left\{\left\|f^{(i)}\right\| : \ \ i = 0,1,\cdots,m\right\} \\
&= \|f\|_M .
\end{aligned}$$

□

Lema 2.10. *Sean K un subespacio localmente compacto de $\mathbb{R}$, $U \subset K$ un abierto y $x \in U$. Entonces dado $\varepsilon > 0$ existe $f \in C_0^{(m)}(K)$ tal que $f(K \setminus U) = f^{(1)}(K \setminus U) = \cdots = f^{(m)}(K \setminus U) = 0$, $\left\|f^{(j)}\right\|_\infty < \varepsilon$ para cada $j \in \{0,1,\cdots,m-1\}$ y $f^{(m)}(x) = 1$.*

Demostración. Haremos la prueba para $m = 2$. El caso general se sigue de manera análoga. Como U es abierto y $x \in U$, existe un intervalo denotado por I, tal que $x \in I \cap K \subset U$. Sea $\delta > 0$ tal que $(x-\delta, x+\delta) \subset I$. Fije $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < \text{mín}\left\{\frac{\varepsilon}{2}, \frac{\delta}{2}, \frac{1}{10}\right\}$, de manera que $\left(x - \frac{1}{n}, x + \frac{1}{n}\right) \subset I$. Sean $(a_1,b_1),(a_2,b_2),(a_3,b_3)$ tres subintervalos de I definidos como sigue:

i) $b_3 < x - \frac{1}{n}$;

$ii)$ $b_i - a_i = \frac{2}{n}$ para $i = 1,2,3$;

$iii)$ $b_i \leq a_{i+1}$ y $a_{i+1} - b_i = \frac{1}{n}$ para $i = 1,2$.

Considere las siguientes funciones:

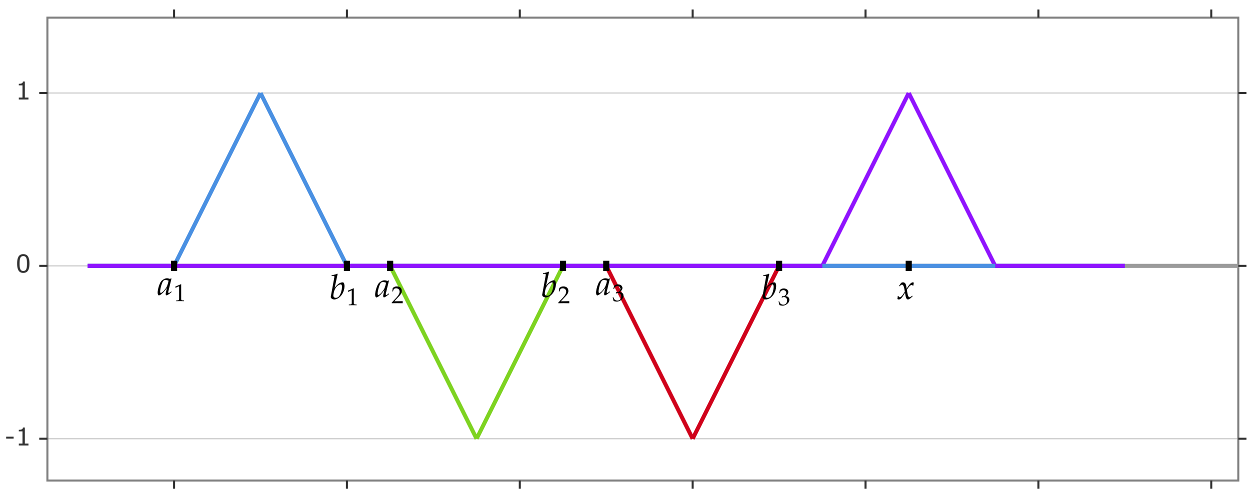
$$T_1(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a_1; \\ \frac{2}{b_1-a_1}(t-a_1), & a_1 < t \leq \frac{a_1+b_1}{2}; \\ \frac{-2}{b_1-a_1}(t-b_1), & \frac{a_1+b_1}{2} \leq t < b_1; \\ 0, & t \geq b_1, \end{cases}$$

$$T_2(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a_2; \\ \frac{-2}{b_2-a_2}(t-a_2), & a_2 < t \leq \frac{a_2+b_2}{2}; \\ \frac{2}{b_2-a_2}(t-b_2), & \frac{a_2+b_2}{2} \leq t < b_2; \\ 0 & t \geq b_2, \end{cases}$$

$$T_3(t) = \begin{cases} 0, & t \leq a_3; \\ \frac{-2}{b_3-a_3}(t-a_3), & a_3 < t \leq \frac{a_3+b_3}{2}; \\ \frac{2}{b_3-a_3}(t-b_3), & \frac{a_3+b_3}{2} \leq t < b_3; \\ 0 & t \geq b_3, \end{cases}$$

$$T_4(t) = \begin{cases} 0, & t \leq x - \frac{1}{n}; \\ n(t - x + \frac{1}{n}), & x - \frac{1}{n} < t \leq x; \\ -n(t - x - \frac{1}{n}), & x \leq t < x + \frac{1}{n}; \\ 0 & t \geq x + \frac{1}{n}. \end{cases}$$

En la siguiente figura se muestran las gráficas de las funciones T_1, T_2, T_3, T_4, con los colores azul, verde, rojo, morado, respectivamente.



Sean

$$M(t) = \int_{a_1}^{t} (T_1(u) + T_2(u) + T_3(u) + T_4(u))\, du,$$

y

$$f(t) = \int_{a_1}^{t} M(u) du.$$

Se afirma que dicha función satisface las condiciones del teorema, en efecto:

a) Sea $t \in K \setminus U$, luego $f(t) = \int_{a_1}^{t} M(u)du = 0$ por definición de $M(u)$.

De una manera similar se tiene que si $t \in K \setminus U$, entonces $f'(t) = M(t) = 0$ y $f''(t) = T_1(t) + T_2(t) + T_3(t) + T_4(t) = 0$.

b) $\left|\int_{a_1}^{t} M(u)du\right| \leq \int_{a_1}^{t} |M(u)|\, du = \frac{4}{n}(t - a_1) = \frac{8}{n^2}$. Esto como consecuencia de que

$$\begin{aligned}
|M(u)| &= \left|\int_{a_1}^{t} (T_1(t) + T_2(t) + T_3(t) + T_4(t))\, du\right| \\
&\leq \int_{a_1}^{t} |T_1(u)|\, du + \int_{a_1}^{t} |T_2(u)|\, du + \int_{a_1}^{t} |T_3(u)|\, du + \int_{a_1}^{t} |T_4(u)|\, du \\
&= \frac{4}{n}.
\end{aligned}$$

Se sigue que $\|f\|_\infty \leq \frac{8}{n^2} < \frac{2}{n} < \varepsilon$.

c) No es difícil ver que $f''(x) = -n(x - x - \frac{1}{n}) = 1$. Por ultimo,

$$\begin{aligned}
\left\|f'\right\|_\infty &= \sup_{t \in K} \left\|f'(t)\right\| \\
&= \sup_{t \in K} \|M(t)\| \\
&= \sup_{t \in K} \left\|\int_{a_1}^{t} (T_1(u) + T_2(u) + T_3(u) + T_4(u))du\right\| \\
&= \left\|\int_{a_1}^{b_1} (T_1(u) + T_2(u) + T_3(u) + T_4(u))du\right\| \\
&= \frac{1}{n} \\
&< \varepsilon.
\end{aligned}$$

$\square$

Luego de definir al espacio $C_0^{(m)}(K,X)$ es natural preguntarse si este espacio contiene una copia (copia complementada) de c_0. En ese sentido, la siguiente proposición es análoga a la Proposición 1.22.

Proposición 2.11. *Sean K un subespacio localmente compacto de $\mathbb{R}$ sin puntos aislados y X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces $\left((C_0^{(m)}(K,X)), \|\cdot\|_M\right)$ contiene una copia de c_0.*

Demostración. Sea $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ como en la Proposición 1.22 y $t_n \in G_n$. De acuerdo al Lema 2.10 existe $f_n \in C_0^{(m)}(K)$ tal que $f_n(K\setminus G_n) = f_n^{(1)}(K\setminus G_n) = \cdots = f_n^{(m)}(K\setminus G_n) = 0$, $\|f_n^{(j)}\|_\infty < 1$ para cada $j \in \{0,1,\cdots,m-1\}$ y $f_n^{(m)}(t_n) = 1$. Considere a $T : c_{00} \to C_0^{(m)}(K)$ dado por $T((\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n f_n$. Como la familia de conjuntos $\left(U_n = f_n^{-1}(\mathbb{K}\setminus\{0\})\right)_{n\in\mathbb{N}}$ son mutuamente disjuntos, tal y como se comprueba en la Proposición 1.21, T define una isometría. Así se tiene que existe una extensión lineal continua $\tilde{T} : c_0 \to C_0^{(m)}(K)$ que es un isomorfismo. La conclusión del resultado se sigue inmediatamente ya que $C_0^{(m)}(K) \hookrightarrow C_0^{(m)}(K,X)$.

$\square$

El siguiente teorema responde afirmativamente el Problema 1 planteado en la introducción y hace parte de los dos resultados principales de este trabajo.

Teorema 2.12. *Sean K un subespacio de $\mathbb{R}$ localmente compacto sin puntos aislados y X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces $\left((C_0^{(m)}(K,X)), \|\cdot\|_M\right)$ contiene una copia complementada de c_0.*

Demostración. Dado que X es de dimensión infinita, de acuerdo al Lema 1.32 existe una sucesión $(x_n^*)_{n\in\mathbb{N}}$ en X^* tal que $\|x_n^*\| = 1$ para cada $n \in \mathbb{N}$ y $(x_n^*(x))_{n\in\mathbb{N}} \in c_0$ para todo $x \in X$.

Veamos que existe una sucesión $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ en X tal que $x_n^*(x_n) = 1$ y $\|x_n\| \leq 2$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Sea $n \in \mathbb{N}$ dado. Como $\|x_n^*\| = \sup\limits_{x\in B_X} |x_n{}^*(x)| = 1$, existe $y_n \in B_X$ tal que $|x_n{}^*(y_n)| > \frac{1}{2}$. Defina $x_n = \frac{y_n}{x_n^*(y_n)}$. Se tiene que $\|x_n\| = \left\| \frac{y_n}{x_n^*(y_n)} \right\| < 2\|y_n\| \leq 2$. Por ultimo, es claro que $x_n^*(x_n) = 1$.

Como K es un espacio compacto Hausdorff infinito, existe una sucesión $(G_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de subconjuntos abiertos no vacíos de K disyuntos dos a dos. Para cada $n \in \mathbb{N}$ escoja t_n tal que $t_n \in G_n$ y considere $T : C_0(K^{(m)}, X) \to \ell_\infty \times \ell_\infty \times \cdots \times \ell_\infty$ ($m+1$ veces) dado por

$$T(f) = \Big(\big(x_n^*(f(t_n,0))\big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(x_n^*(f(t_n,1))\big)_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, \big(x_n^*(f(t_n,m))\big)_{n\in\mathbb{N}} \Big),$$

si $f \in C_0(K^{(m)}, X)$.

Note que T es acotado, ya que

$$\begin{aligned}
\|T(f)\| &= \text{máx}\Big\{ \sup_{n\in\mathbb{N}} \{ \|x_n^*(f(t_n,0))\|, \|x_n^*(f(t_n,1))\|, \cdots, \|x_n^*(f(t_n,m))\| \} \Big\} \\
&\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \Big\{ \text{máx}\{ \|(f(t_n,0))\|, \|(f(t_n,1))\|, \cdots, \|(f(t_n,m))\| \} \Big\} \\
&\leq \sup\{ \|f(t,i)\| : t \in K,\ i = 0,1,2,\cdots,m \} \\
&= \|f\|.
\end{aligned}$$

Además si $f \in C_0(K^{(m)})$ y $x \in X$ entonces

$$\begin{aligned} T(f(\cdot)x) &= \Big(\big(x_n^*(f(\cdot)x(t_n,0)) \big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(x_n^*(f(\cdot)x(t_n,1)) \big)_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, \big(x_n^*(f(\cdot)x(t_n,m)) \big)_{n\in\mathbb{N}} \Big) \\ &= \Big(\big(x_n^*(f(t_n,0)x) \big)_{n\in\mathbb{N}}, \big(x_n^*(f(t_n,1)x) \big)_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, \big(x_n^*(f(t_n,m)x) \big)_{n\in\mathbb{N}} \Big) \\ &= \Big(f(t_n,0) \big(x_n^*(x) \big)_{n\in\mathbb{N}}, f(t_n,1) \big(x_n^*(x) \big)_{n\in\mathbb{N}}, \cdots, f(t_n,m) \big(x_n^*(x) \big)_{n\in\mathbb{N}} \Big). \end{aligned}$$

Ahora, para cada $n \in \mathbb{N}$, $|f(t_n,i)(x_n^*(x))| \leq \|f\| \, |x_n^*(x)|$, por tanto $\text{lím}_{n\to\infty} f(t_n,i)x_n^*(x) = 0$, si $i \in \{0,1,\cdots,m\}$. Esto muestra que T toma valores en $c_0 \times c_0 \times \cdots \times c_0$ ($m+1$ veces), ya que el subespacio generado por $\{g(\cdot)x : g \in C_0(K^{(m)}), x \in X\}$ es denso en $C_0(K^{(m)},X)$ (Lema 2.8).

Para el resto de la prueba considere al operador $\tilde{T} := T|_{V_{K,X}}$ donde $V_{K,X} = j_K(C_0^{(m)}(K,X))$ es la imagen de la isometria del Lema 2.9.

Sea $n \in \mathbb{N}$ dado. De acuerdo al Lema 2.10 existe $f_n \in C_0^{(m)}(K)$ tal que $f_n(K \setminus G_n) = f_n^{(1)}(K \setminus G_n) = \cdots = f_n^{(m)}(K \setminus G_n) = 0$, $\|f_n^{(j)}\|_\infty < 1$ para cada $j \in \{0,1,\cdots,m-1\}$ y $f_n^{(m)}(t_n) = 1$. Primero observe que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} j_K(f_n(\cdot)x_n)$ es w-incondicionalmente convergente en $V_{K,X}$. En efecto, sea $J = \{j_1, \cdots, j_p\}$ un subconjunto finito de $\mathbb{N}$, luego

$$
\begin{aligned}
\left\| \sum_{n\in J} j_K\left(f_n(\cdot)x_n\right) \right\| &= \sup\left\{ \left\| \sum_{n\in J} j_K(f_n)(t,i)x_n \right\| :\ t\in K,\ i=1,2,\cdots,m \right\} \\
&= \sup\left\{ \left\| \sum_{n\in J} j_K(f_n)(t,i)x_n \right\| :\ t\in \bigcup_{n\in J} G_n,\ i=1,2,\cdots,m \right\} \\
&\leq \max_{i\in\{0,1,\cdots,m\}} \left\{ \sup_{t\in G_1} \left\| \sum_{n\in J} j_K(f_n)(t,i)x_n \right\|,\ \cdots,\ \sup_{t\in G_p} \left\| \sum_{n\in J} j_K(f_n)(t,i)x_n \right\| \right\} \\
&= \max_{i\in\{0,1,\cdots,m\}} \left\{ \sup_{t\in G_1} \|f_{n_1}(t,i)x_n\|, \sup_{t\in G_2} \|f_{n_2}(t,i)x_n\|,\ \cdots,\ \sup_{t\in G_p} \left\|f_{n_p}(t,i)x_n\right\| \right\} \\
&\leq \max\left\{ \|f_{n_1}\|_M, \|f_{n_2}\|_M, \cdots, \left\|f_{n_p}\right\|_M \right\} \|x_n\| \\
&\leq 2.
\end{aligned}
$$

Afirmamos que la serie $\sum_{n=1}^{\infty} \tilde{T}\left(j_K\left(f_n(\cdot)x_n\right)\right)$ no es incondicionalmente convergente, ya que si $n\in\mathbb{N}$, entonces para $j_K\left(f_n(\cdot)x_n\right)\in V_{K,X}$ se tiene que

$$
\begin{aligned}
\tilde{T}\left(j_K\left(f_n(\cdot)x_n\right)\right) &= \Big(\left(x_p^*\left(j_K\left(f_n(\cdot)x_n\right)\right)\right)_{p\in\mathbb{N}}, \left(x_p^*\left(j_K\left(f_n(\cdot)x_n\right)\right)\right)_{p\in\mathbb{N}},\ \cdots,\ \left(x_p^*\left(j_K\left(f_n(\cdot)x_n\right)\right)\right)_{p\in\mathbb{N}} \Big) \\
&= \Big(\left(x_p^*\left(j_K\left(f_n(t_p,0)x_n\right)\right)\right)_{p\in\mathbb{N}},\ \cdots,\ \left(x_p^*\left(j_K\left(f_n(t_p,m)x_n\right)\right)\right)_{p\in\mathbb{N}} \Big) \\
&= \Big(\left(f_n(t_p)x_p^*(x_n)\right)_{p\in\mathbb{N}}, \left(f_n^{(1)}(t_p)x_p^*(x_n)\right)_{p\in\mathbb{N}},\ \cdots,\ \left(f_n^{(m)}(t_p)x_p^*(x_n)\right)_{p\in\mathbb{N}} \Big) \\
&= \Big(f_n(t_n)e_n,\ f_n^{(1)}(t_n)e_n,\ \cdots,\ f_n^{(m-1)}(t_n)e_n,\ e_n \Big).
\end{aligned}
$$

Por tanto si la serie $\sum_{n=1}^{\infty}(f_n(t_n)e_n,\ f_n^{(1)}(t_n)e_n,\ \cdots,\ f_n^{(m-1)}(t_n)e_n,\ e_n)$ fuese incondicionalmente convergente, el termino general debe tender a cero, pero esto no es cierto, puesto que

$$\left\| \left(f_n(t_n)e_n,\, f_n^{(1)}(t_n)e_n,\, \cdots,\, f_n^{(m-1)}(t_n)e_n,\, e_n \right) \right\| = 1, \quad \text{para cada } n \in \mathbb{N}.$$

De esto sigue que $\tilde{T}$ no es una operador incondicionalmente convergente. Así, por el Lema 1.28, existe un subespacio S de $V_{K,X}$ isomorfo a c_0 tal que $\tilde{T}|_S$ es un isomorfismo sobre $\tilde{T}(S)$. De acuerdo al Corolario 1.31, concluimos que $\tilde{T}(S)$ es complementado en ${c_0}^{m+1}$. De esto que existe una proyección $P_1 : {c_0}^{m+1} \to \tilde{T}(S)$. Considere la aplicación $P = (\tilde{T}|_S)^{-1} \circ P_1 \circ \tilde{T}$. Para ver que S es complementado de $V_{K,X}$, veamos el siguiente diagrama que describe el operador P:

$$\begin{tikzcd}
V_{K,X} \arrow[r, "\tilde{T}"] \arrow[d, "(\tilde{T}|_S)^{-1} \circ P_1 \circ \tilde{T}"'] & {c_0}^{m+1} \arrow[d, "P_1"] \\
S \arrow[r, "\tilde{T}|_S"'] & \tilde{T}(S)
\end{tikzcd}$$

Note que P es una proyección, ya que

$$\begin{aligned}
P^2(x) &= \big((\tilde{T}|_S)^{-1} \circ P_1 \circ \tilde{T}\big)\big((\tilde{T}|_S)^{-1} \circ P_1 \circ \tilde{T}\big)(x) \\
&= \big((\tilde{T}|_S)^{-1} \circ P_1\big)\big(P_1 \circ \tilde{T}\big)(x) \\
&= \big((\tilde{T}|_S)^{-1} \circ P_1 \circ \tilde{T}\big)(x) \\
&= P(x).
\end{aligned}$$

Luego S es el rango del operador proyección P. Esto prueba que $V_{K,X}$ contiene un subespacio complementado isomorfo a c_0. Finalmente, como $V_{K,X}$ es isométricamente isomorfo a $C_0^{(m)}(K,X)$, de acuerdo al Lema 1.8 esto finaliza la prueba.

$\square$

Del Lema 1.8 concluimos los siguientes corolarios:

Corolario 2.13. $\left((C_0^{(m)}(K,X)),\|\cdot\|_\Sigma\right)$ *contiene una copia complementada de* c_0.

$\square$

Corolario 2.14. $\left((C_0^{(m)}(K,X)),\|\cdot\|_C\right)$ *contiene una copia complementada de* c_0.

$\square$

Como caso particular del Teorema 2.12, obtenemos:

Corolario 2.15. *Sea X un espacio de Banach de dimensión infinita. Entonces* $c_0 \overset{c}{\hookrightarrow} C_0^{(m)}([0,1],X)$.

$\square$

Observación 2.16. Veamos otra prueba del Teorema 2.12 cuando X es separable. Para ello, mostraremos que el espacio $C_0^{(m)}(K,X)$ es separable.

Si S es la compactificación de Alexandroff de $K^{(m)}$, esto que implica que S es un espacio compacto Hausdorff metrizable (Willard, pág 173). Por tanto, $C(S)$ es separable (Halsey Royden, pág 251), y en consecuencia $C_0(K^{(m)})$ también lo es, puesto que éste es un subespacio de $C(S)$.

Como el conjunto $\{g(\cdot)x : g \in C_0(K^{(m)}), x \in X\}$ es linealmente denso en $C_0(K^{(m)}, X)$, concluimos que $C_0^{(m)}(K,X)$ es separable. Así $C_0^{(m)}(K,X)$ contiene una copia complementada de c_0 por la Proposición 2.11 y el Corolario 1.31.

□

2.2. Condiciones necesarias para existencia de copias de $c_0(\Gamma)$ en $C_0^{(m)}(K,X)$

A continuación se enuncian los resultados preliminares que son relevantes para el problema 2 (ver Corolario 2.22). Estos resultados se pueden encontrar en Galego and Hagler (2012).

Dado un subconjunto Γ de τ, se identifica al espacio $c_0(\Gamma)$ con el subespacio de las funciones g en $c_0(\tau)$ tal que para todo $\gamma \in \Gamma$, $g(\gamma) = 0$.

Teorema 2.17. *(Rosenthal, Observación Teorema 3.4) Sean X un espacio de Banach y Γ un conjunto infinito. Suponga que existe un operador $T : c_0(\Gamma) \to X$ tal que $\inf\{\|T(e_i)\| : i \in \Gamma\} > 0$. Entonces existe un subconjunto Γ' de Γ donde $|\Gamma| = \Gamma'$ tal que la restricción $T|_{c_0(\Gamma')}$ es un isomorfismo en su imagen.*

Definición 2.18. Sea τ un número cardinal infinito. La cofinalidad de τ, denotada por cf (τ), es el menor cardinal β tal que existe una familia de ordinales $\{\alpha_i\}_{i\in\beta}$ tales que $\alpha_i < \tau$ para todo $i \in \beta$ y $\sup_{i\in\beta} \alpha_i = \tau$.

Definición 2.19. Sea S un espacio topológico. El carácter de densidad de S, denotado por dens(S) es el menor cardinal κ para el cual S tiene un subconjunto denso de cardinalidad κ.

Lema 2.20. *Sean I un conjunto infinito y J un conjunto no vacío. Sea $\{I_j\}_{j\in J}$ una familia de subconjuntos de I tal que $\bigcup_{j\in J} I_j = I$. Si $cf(I) > |J|$, entonces existe $j_0 \in J$ tal que $|I_{j_0}| = I$.*

Demostración. Suponga por el contrario que para cada $j \in J$ se tiene que $|I_j| < |I|$. Luego por definición cofinalidad, se sigue que

$$\sup\left\{|I_j| : j \in J\right\} < |I|.$$

Pero por hipótesis $|J| < cf(I) \leq |I|$, por tanto

$$\begin{aligned} |I| &= \left|\bigcup_{j \in J} I_j\right| \\ &\leq |J| \cdot \sup\left\{|I_j| : j \in J\right\} \\ &< |I|, \end{aligned}$$

que es una contradicción.

□

El siguiente resultado fue probado en Galego and Hagler, Teorema 3.6, para los espacios $C(K,X)$ cuando K es compacto. Puesto que la prueba funciona para el caso en que K es localmente compacto, incluimos su prueba aquí.

Teorema 2.21. *Sean K un espacio localmente compacto Hausdorff, X un espacio de Banach y Γ un conjunto infinito. Si $cf(\Gamma) > dens(K)$, entonces $c_0(\Gamma) \hookrightarrow C_0(K,X)$ implica que $c_0(\Gamma) \hookrightarrow X$.*

Demostración. Si $C_0(K,X)$ contiene una copia de $c_0(\Gamma)$, entonces existe un isomorfismo T de $c_0(\Gamma)$ a un subespacio de $C_0(K,X)$. Sea $\delta > 0$ tal que $\|T(x)\| \geq \delta$ para todo $x \in c_0(\Gamma)$ con $\|x\| = 1$.

Por tanto $\left\|T(e_\gamma)\right\| \geq \delta$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Sea $D \subseteq K$ denso tal que $|D| = dens(K)$. Para cada $d \in D$ considere el conjunto

$$I_d = \left\{\gamma \in \Gamma : \left\|T(e_\gamma)(d)\right\| > \frac{\delta}{2}\right\}.$$

Afirmamos que $\bigcup_{d\in D} I_d = \Gamma$. Es claro que $\bigcup_{d\in D} I_d \subseteq \Gamma$. Sea $\gamma \in \Gamma$ y veamos que existe $d_0 \in D$ tal que $\gamma \in I_{d_0}$. Puesto que $\left\|T(e_\gamma)\right\| \geq \delta$, existe $x \in K$ tal que $\left\|T(e_\gamma)(x)\right\| \geq \delta > \frac{\delta}{2}$. Por otra parte, la densidad de D implica que existe una red (d_α) en D tal que $d_\alpha \longrightarrow x$. Luego para algún $d_0 \in D$, tenemos que $\left\|T(e_\gamma)(d_0)\right\| > \frac{\delta}{2}$, esto es, $\gamma \in I_{d_0}$.

Como $\bigcup_{d\in D} I_d = \Gamma$. De acuerdo al Lema 2.20, existe $d_1 \in D$ tal que $|I_{d_1}| = \Gamma$. Sea $P_{d_1} : C_0(K,X) \to X$ dada por $P_{d_1}(g) = g(d_1)$, para $g \in C_0(K,X)$. Considere al operador $S = P_{d_1} \circ T|_{c_0(I_{d_1})} : c_0(I_{d_1}) \to X$. Afirmamos que $\operatorname{ínf}\left\{\|S(e_i)\| : i \in I_{d_1}\right\} > 0$. En efecto, sea $i \in I_{d_1}$, entonces

$$\begin{aligned}\|S(e_i)\| &= \left\|P_{d_1}\left(T|_{c_0(I_{d_1})}(f_i)\right)\right\| \\ &= \|T(e_i)(d_1)\| \\ &> \frac{\delta}{2}.\end{aligned}$$

Luego por el Teorema 2.17, existe $J \subset I_{d_1}$ con $|J| = \Gamma$ tal que $S|_{c_0(J)}$ es un isomorfismo sobre su imagen. Esto prueba el resultado.

□

Con el siguiente resultado damos una respuesta para el problema 2 que planteamos en la introducción de este trabajo.

Corolario 2.22. *Sean K un subespacio de $\mathbb{R}$ localmente compacto sin puntos aislados, X un espacio de Banach y Γ un conjunto tal que $|\Gamma| = \aleph_1$. Si $c_0(\Gamma) \hookrightarrow C_0^{(m)}(K,X)$, entonces $c_0(\Gamma) \hookrightarrow X$.*

Demostración. Suponga que $c_0(\Gamma) \hookrightarrow C_0^{(m)}(K,X)$. De acuerdo al Lema 2.9, $C_0^{(m)}(K,X)$ es isométrico a un subespacio cerrado de $C_0(K^{(m)},X)$, y por tanto $c_0(\Gamma) \hookrightarrow C_0(K^{(m)},X)$. Además, note que si $|\Gamma| = \aleph_1$, entonces $cf(\Gamma) = \aleph_1 > \aleph_0 = dens(K)$. Como consecuencia del anterior teorema, se tiene que $c_0(\Gamma) \hookrightarrow X$.

$\square$

2.3. Preguntas abiertas

Finalizamos este trabajo planteando preguntas para posibles trabajos futuros de investigación.

El siguiente resultado, probado por Cortes and Galego (2020), da una condición necesaria y suficiente para que el espacio $C(K,X)$ contenga una copia complementada de $c_0(\Gamma)$.

Antes de enunciar el teorema, recordemos que si S es un espacio topológico, el peso de S, denotado por $w(S)$, es el menor cardinal τ para el cual existe una base de abiertos de S de cardinal τ.

Teorema 2.23. *(Cortes and Galego, Teorema 1.2) Sean K un espacio compacto Hausdorff, X un espacio de Banach y Γ un conjunto infinito. Si $cf(\Gamma) > w(K)$, entonces*

$$c_0(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} C(K,X) \Longleftrightarrow c_0(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} X.$$

El teorema anterior motiva la siguiente pregunta:

Pregunta 1. Sean K un subespacio de $\mathbb{R}$ localmente compacto sin puntos aislados, X un espacio de Banach y Γ un conjunto infinito. Si $cf(\Gamma) > \aleph_0$, ¿podemos asegurar que $c_0(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} C_0^{(m)}(K,X)$ si, y solo si, $c_0(\Gamma) \overset{c}{\hookrightarrow} X$?

Por otra parte, el resultado de Cembranos (Teorema 1.33) nos deja abierta la siguiente pregunta más general.

Pregunta 2. ¿Qué otros espacios de funciones contienen copia complementada de c_0?

Referencias Bibliográficas

Cembranos, P. (1984). $C(K,X)$ contains a complemented copy of c_0. *Proc. Amer. Math. Soc. 91*. no. 4, 556–558.

Cembranos, P. and Mendoza, J. (1997). Banach spaces of vector-valued functions. *Lecture Notes in Math. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York*.

Cortes, V. M. and Galego, E. M. (2020). When does $C(K,X)$ contain a complemented copy of $c_0(\Gamma)$ iff X does? *Bulletin des Sciences Mathématiques*, 159:102839, 13.

Fabian, Habala, H. (2011). *Banach Space Theory: The Basis for Linear and Nonlinear Analysis*. CMS Books in Mathematics. Springer-Verlag New York, 1 edition.

Galego, E. M. and Hagler, J. N. (2012). Copies of $c_0(\Gamma)$ in $C(K,X)$ spaces. *Proc. Amer. Math. Soc. 140*. no. 11, 3843-3852.

Galego, E. M. and Rincón-Villamizar, M. A. (2016). When do the $C_0^{(1)}(K,X)$ spaces determine the locally compact subspaces K of the real line $\mathbb{R}$? *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 437(1):590–604.

Halsey Royden, P. F. (2010). *Real Analysis (4th Edition)*. Prentice Hall, 4 edition.

Lacey, H. (1974). *The Isometric Theory of Classical Banach Spaces*. Grundlehren der mathematischen Wissenschaften. Springer, softcover reprint of the original 1st ed. 1974 edition.

Megginson, R. E. (1998). *An Introduction to Banach Space Theory*. Graduate Texts in Mathematics. Springer, 1 edition.

Nissenzweig, A. (1975). w^* sequential convergence. *Israel Journal of Mathematics*, 1(22):266–272.

Rosenthal, H. (1970). On relatively disjoint families of measures, with some applications to banach space theory. *Studia Mathematica*, 37(1):13–36.

Rudin, W. (1976). *Principles of mathematical analysis*. International series in pure and applied mathematics. McGraw-Hill, 3d ed edition.

Rudin, W. (1987). *Real and Complex Analysis, 3rd Ed.* McGraw-Hill, Inc., USA.

Sobczyk, A. (1941). Projection of the space (m) on its subspace (c_0). *Bulletin of the American Mathematical Society*, 47(12.P1):938 – 947.

Swartz, C. (2008). *Multiplier Convergent Series*. WORLD SCIENTIFIC.

Willard, S. (1970). *General Topology*. Addison-Wesley.