APRENDIZAJE DE CONCEPTOS DE LA TEORÍA DE PROBABILIDAD A TRAVÉS DEL APRENDIZAJE COLABORATIVO

GUSTAVO ALFREDO BULA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
CENTRO PARA EL DESARROLLO DE LA DOCENCIA EN LA UIS - CEDEDUIS
BUCARAMANGA
2004

APRENDIZAJE DE CONCEPTOS DE LA TEORÍA DE PROBABILIDAD A TRAVÉS DEL APRENDIZAJE COLABORATIVO

GUSTAVO ALFREDO BULA

Monografía para optar al título de Especialista en Docencia Universitaria

Director
Dra. MARTHA VITALIA CORREDOR MONTAGUT

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
CENTRO PARA EL DESARROLLO DE LA DOCENCIA EN LA UIS - CEDEDUIS
BUCARAMANGA
2004

Índice general

Índice de figuras

RESUMEN

TITULO*:Aprendizaje de los conceptos de teoría de probabilidad a través del aprendizaje colaborativo

Autor**:BULA, Gustavo Alfredo

Palabras Claves: enseñanza de la teoría de probabilidad, resolución de problemas, aprendizaje colaborartivo.

Contenido: Dentro del programa de ingeniería industrial es pieza clave la comprensión del concepto de azar y los conceptos asociados a la teoría de probabilidad. Estos son utilizados en la construcción y análisis de los modelos matemáticos de esta área de la ingeniería, y se han detectado deficiencias en los estudiantes al momento de aplicar los conceptos mencionados, lo cual refleja que no se ha llegdo a una verdadera compresión de ellos.

Diseñar estrategias efectivas y eficaces que se correspondan con el objetivo de lograr que los estudiantes comprendan y que además incluyan otros objetivos de aprendizaje como técnicas y procedimientos (metacognición), debe partir de análisis de las dificultades y errores que en su proceso de aprendizaje ellos enfrentan. Como el origen de éstas se encuentran en los conceptos previos que ellos tienen sobre: teoría de conjuntos, razonamiento combinatorio, el uso de tasas, proporciones y razones y aleoriedad. La estarategia de enseñanza propuesta está basada en la utilización de la resolución de problemas en un ambiente social de aprendizaje, para ello es necesario la caracterización de los tipo de problemas a utilizar, en este caso problemas de aplicación y búsqueda; y de la organización que se hará de los estudiantes, grupos formales.

Mediante la interacción de los miembros integrantes de un grupo cooperativo formal y utilizando el interrogante como elemento de búsqueda se pretende tener un mayor éxito con la estrategia de enseñanza.

---

*Monografía

**Centro para el Desarrollo de la Docencia.Especialización en Docencia Universitaria. Dra. Ingeniera Informática. Martha Vitalia Corredor Montagut

SUMMARY

Title[1]:Probability theory concepts learning trough cooperative learning.

Author[2]:BULA, Gustavo Alfredo.

Key words: Teaching of probability theory, problem solving strategies, cooperative learning.

Content: It is important in the industrial engineering program the understanding of random concept and those related with probability theory. These concepts are used for constructing and analyzing mathematics models of this engineering area, and some deficiencies have been detected when students attempt to apply them. This is an evidence that students are nor achieve a real comprehension.

Design effective strategies, that succeeded in make possible the understanding of students and also implying other learning goals like procedures and techniques (metacognition), must beginning with the analysis of errors and difficulties in the students learning process. Origins of this difficulties are found in students previous conceptions about sets theory, combinatorial reasoning, use of rates and percentages and randomness. It is proposed a strategy based on problem solving in a social learning environment. First of all, it is necessary to establish the kind of problem to be solved and the type of student organization. This work is based on search and application problems and cooperative formal groups.

Here is developed an successful teaching strategy using members team interaction and the question as searching tool.

[1]Monografía

[2]Centro para el Desarrollo de la Docencia. Especialización en Docencia Universitaria. Dra. Ingeniera Informática Martha Vitalia Corredor Montagut

Introducción

El diseño de una didáctica para la enseñanza de la probabilidad y estadística ha sido tema de estudio durante muchos años. A través de la experiencia docente a cada momento somos testigos de los fracasos y las dificultades con que nuestros estudiantes se ecuentran al tratar de comprender conceptos relacionados con el azar, el cálculo de probabilidades, la inferencia estadística, procesos estocásticos etc. Muchos enseñamos en la misma tradición con la que fuimos educados, mediante clases magistrales y evaluando luego utilizando pruebas escritas, la capacidad de asimilación de los estudiantes. La búsqueda de una opción mejor que la actual en la enseñanza de la probabilidad, es lo que motiva la realización de esta refelexión, dentro de la cual se presenta una opción didáctica que parta de las necesidades de los estudiantes y con busca lograr un cambio conceptual en su manera de ver el mundo.

En los primeros cápitulos se revisa la teoría sobre el aprendizaje, haciendo hincapie en el aprendizaje significativo o constructivo, analizando una las forma de organización del mismo; aí mismo se realiza una revisión del componente epistemológico de los conceptos a enseñar y aprender (azar, probabilidad y estadística) y de las dificultades encontradas en los estudiantes cuando intentan llegar a comprenderlos. Esta revisión está basada en la experiencia docente y en investigaciones realizadas por diferentes autores.

En el último cápitulo se propone una didáctica que pretende incorporar los conceptos de aprendizaje bajo un ambiente aprendizaje colaborativo utilizando como estrategia de enseñanza la resolución de problemas.

Capítulo 1

Fundamentos de cognición y aprendizaje

1.1. El Aprendizaje

1.1.1. Aprendizaje: resultados, procesos y condiciones

Como lo indica Pozo[1], toda situación de aprendizaje puede analizarse a través de tres componentes básicos:

1. *los resultados del aprendizaje, también llamados contenidos, o, lo que cambia después del aprendizaje*.

2. *los procesos del aprendizaje, o cómo se producen esos cambios, mediante que mecanismos cognitivos; harían referencia a la actividad mental de la persona que está aprendiendo que hace posible esos cambios*.

3. *las condiciones del aprendizaje o tipo de práctica que tiene lugar para poner en marcha esos procesos del aprendizaje.*

Los procesos que utilizan los aprendices solo son evidenciables a partir de las consecuencias, los resultados. En este sentido, los mecanismos utilizados para alcanzar resultados diversos son variados; como indica Pozo[2], "*no sería adaptativo disponer de un único mecanismo, un único órgano, para realizar tantas funciones de aprendizaje distinto* ".

[1] POZO MUNICIO, Ignacio. Aprendices y Maestros. La nueva cultura del aprendizaje. Psicología y Educación. Madrid.2002:Alianza Editores. p. 86

[2] ibid. p. 87

Es función del maestro crear las condiciones favorables para que el aprendiz aprenda, por lo que la instrucción o enseñanza se traduce en crear las condiciones favorables para cierto tipo de aprendizaje. Según el resultado que se quiera lograr (sucesos y conductas, aprendizaje social, aprendizaje verbal y conceptual y aprendizaje de procedimientos) es necesario plantear diversas estrategias de enseñanza y experiencias educativas de manera que se generen determinados procesos al interior de alumno, que hacen necesarias condiciones concretas.

Enseñar y aprender no son dos verbos que necesariamente se conjuguen al mismo tiempo: "*los alumnos pueden aprender sin ser enseñados, es decir enseñándose a si mismos; y ni siquiera cuando la competencia del maestro está fuera de duda se logra forzosamente el apendizaje, si los alumnos son desatentos, carecen de motivación o están cognoscitivamente impreparados*"[3]

El análisis de las condiciones del aprendizaje debe comenzar con los resultados, es decir, lo que se quiere lograr que el alumno aprenda; y con los procesos, es decir, cómo aprenden los alumnos; para concluir con el diseño de condiciones óptimas para lograr los resultados. Los maestros intervienen en las condiciones, que en todos los casos deben orientarse al logro del aprendizaje, y es mediante esta intervención que se actúa sobre los procesos de aprendizaje del alumno. Al respecto es importante recordar el control que los alumnos logren sobre sus procesos de aprendizaje depende de las condiciones prácticas en las que se realizan las actividades de aprendizaje[4].

Así, se debe adecuar las condiciones de aprendizaje a los resultados esperados y procesos que se den, pues en este caso en particular, no es lo mismo planificar condiciones para fovorecer el aprendizaje de los teoremas de Kolmogrorov sobre probabilidad, que para aprender a enumerar todas las posibles formas de de mezclar y combinar objetos. En un curso de probabilidad los resultados de aprendizaje que se buscan lograr tienen que ver con la comprensión de conceptos, la adquisición de técnicas y el desarrollo de estrategias para resolver problemas y para aprender a aprender.

La mayor parte de la información que se adquiere en un curso de probabilidad es de naturaleza verbal, y lo que se busca es que parte de esa información se

[3]AUSUBEL, David; NOVAK, Joseph y HANESIAN Helen. Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.México D.F.: Editorial Trillas. 1976. p. 29

[4]POZO MUNICIO, Ignacio. Aprendices y Maestros. Op. cit. p. 88

constituya en conocimiento conceptual (resultado esperado), "*representaciones que contienen un significado como consecuencia de su relación con otras representaciones*". Se busca en el estudiante una compresión, un procesamiento y aprendizaje profundo o significativo de un material. La comprensión de conceptos sólo será eficaz si parte de los conocimientos previos de los aprendices y logra activarlos y conectarlos adecuadamente con el material de aprendizaje (procesos a desencadenar).[5] El profesor no puede perder de vista que el aprendizaje significativo "*es un proceso dinámico que ocurre por fases y que está influido por el desarrollo del individuo, [...] y consiste en tres aspectos fundamentales: establecer nexos o relaciones entre conocimiento nuevo y conocimiento previo, organizar información y adquirir una serie de estructura cognitivas y metacognitivas*"[6]

Según Skemp citado por Batanero y otros[7], en el aprendizaje de un concepto puede llegarse a tener solamente disponible un conjunto de reglas aisladas para llegar a la respuesta de problemas específicos, uso instrumental; o tener esquemas apropiados disponibles para resolver una amplia gama de problemas, es decir, un uso relacional del concepto que requiere de la comprensión del mismo, de una aprendizaje significativo, que es el punto al que se quiere llegar a través de la intermediación.

Los procedimientos constituyen un producto del aprendizaje, se definen como un conjunto de acciones ordenadas, orientadas a la consecución de una meta, aunque habría que distinguir entre las técnicas (destrezas, habilidades, hábitos, etc) y las estrategias (tácticas, planes, etc)[8].

Se busca también que el estudiante adquiera ciertas destrezas o técnicas cognitivas en el cálculo de probabilidades, y también por qué no, en el uso de instrumentos y equipo de cálculo como calculadoras, computadores, tablas etc. Destrezas que no pueden lograrse solo con el repaso simple. El aprendizaje de estrategias busca que el aprendiz comprenda qué hace y por qué lo hace, pueda controlar los procedimientos que ejecuta a fin de conseguir la meta deseada. Para utilizar una estrategia

[5]ibid

[6]ESTEVÉZ NÉNNIGER, Etty Haydeé. Enseñar a aprender. Estrategias cognitivas. Barcelona: Paidós. 2002. p. 51

[7]BATANERO, C., GODINO, J. D. GREEN, D., HOLMES, P., VELLECILLOS, A. Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. Journal of mathematics education in science and technology, 1994, 25(4), 527-547.

[8]POZO MUNICIO, Ignacio. Aprendices y Maestros. Op. cit.

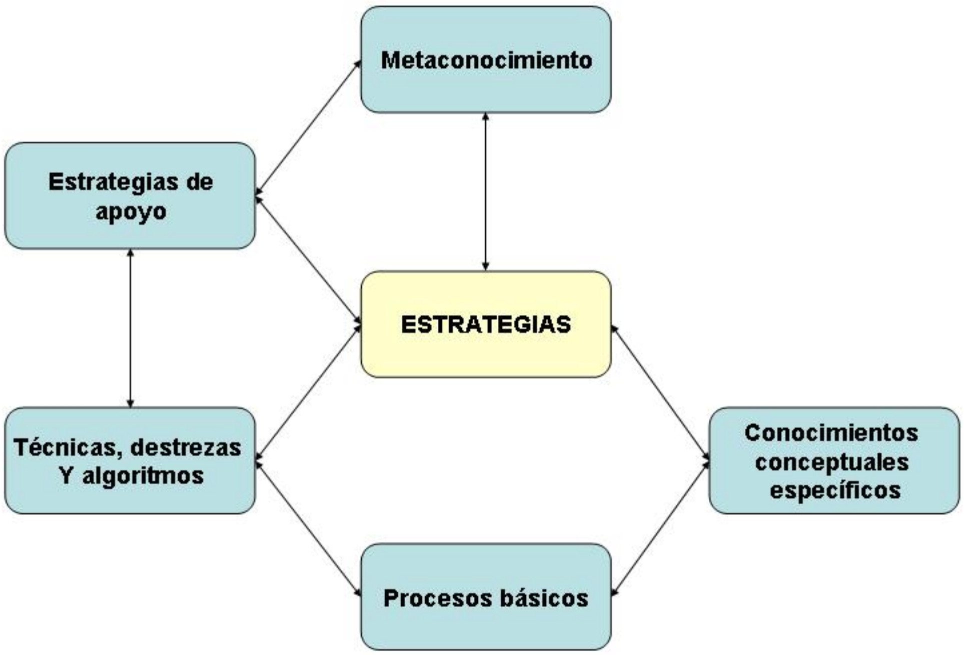

Figura 1.1: Componentes necesarios para el uso de una estrategia

se necesita la integración de los elementos mostrados en la figura 1.1:[9].

Para la consecución de los resultados deseados, procesos de aprendizaje asociativo como la memorización no son suficientes, es necesarios como se había ya indicado un aprendizaje constructivo o significativo, que favorezca procesos psicológicos profundos que sean capaces de producir un cambio en la forma como el aprendiz percibe el mundo. Existen diferentes niveles de compresión y los conocimiento previos o primarios pueden conllevar a errores y dificultades en el aprendizaje (de los relacionados con el aprendizaje de los conceptos de probabilidad se hablará en el siguiente capítulo).

1.1.2. El aprendizaje significativo o constructivo

El aprendizaje significativo está caracterizado por la interpretación de la información nueva a la luz de, o a través de lo que ya sabemos. Se trata de asimilar o integrar la información en nuestros conocimientos anteriores, así se logrará la compresión

[9] Ibid. pág 86

y así adquiriremos nuevos significados o conceptos. Para que haya un aprendizaje significativo: "*El alumno debe reordenar la información integrarla con la estructura cognoscitiva existente, y reorganizar o transformar la información integrada*"[10]. La comprensión se logra cuando el alumno traduce el material a sus propias palabras, y lo reconstruye a partir de los propios conocimientos almacenados en la memoria permanente[11].

Acorde con la teoría de la *asimilación*, que indica que el resultado entre la nueva información y los conocimientos previos se da una integración de los significados nuevos para formar una estructura altamente diferenciada[12], a través de procesos de *ajustes* por generalización y discriminación, o *reestructuración*, o cambio conceptual. De acuerdo co Ausbel, Novak y Hanesian, los dos procesos fundamentales para la comprensión serían la diferenciación progresiva y su integración jerárquica. Para que se dé el aprendizaje constructivo o significativo es necesario que se cumplan varios requisitos, resumidos por Pozo a partir de lo consignado por Ausbel et al en la figura 1.2[13].

Es importante no olvidar que para lograr aprendizaje significativo es necesario que se den experiencias educativas de forma tal, que los estudiantes puedan relacionar la información nueva con los esquemas conceptuales existentes en su estructura cognitiva, pero de una manera sustantiva, con sentido y no desorganizada, arbitraria o al pie de la letra; así mismo, los estudiantes deben estar realmente motivados y tener actitud favorable hacia el aprendizaje, tener los conceptos previos que permitan realizar el enlace entre lo nuevo y lo que ya sabe. En todos los casos, el profesor ha de utilizar materiales significativos, que favorezcan la organización y el enlace de la información, y despierten el interés de los estudiantes[14].

[10] AUSUBEL, David; NOVAK, Joseph y HANESIAN Helen, Op. cit., pág.35
[11] POZO MUNICIO, Ignacio, Op. cit., 88
[12] AUSUBEL, David; NOVAK, Joseph y HANESIAN Helen, Op. cit., pág.71
[13] POZO MUNICIO, Ignacio, Op. cit., p.160
[14] DIAZ BARRIGA Frida y HERNÁNDEZ ROJAS Gerardo. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. México: McGrawHill. 1998. p. 232.

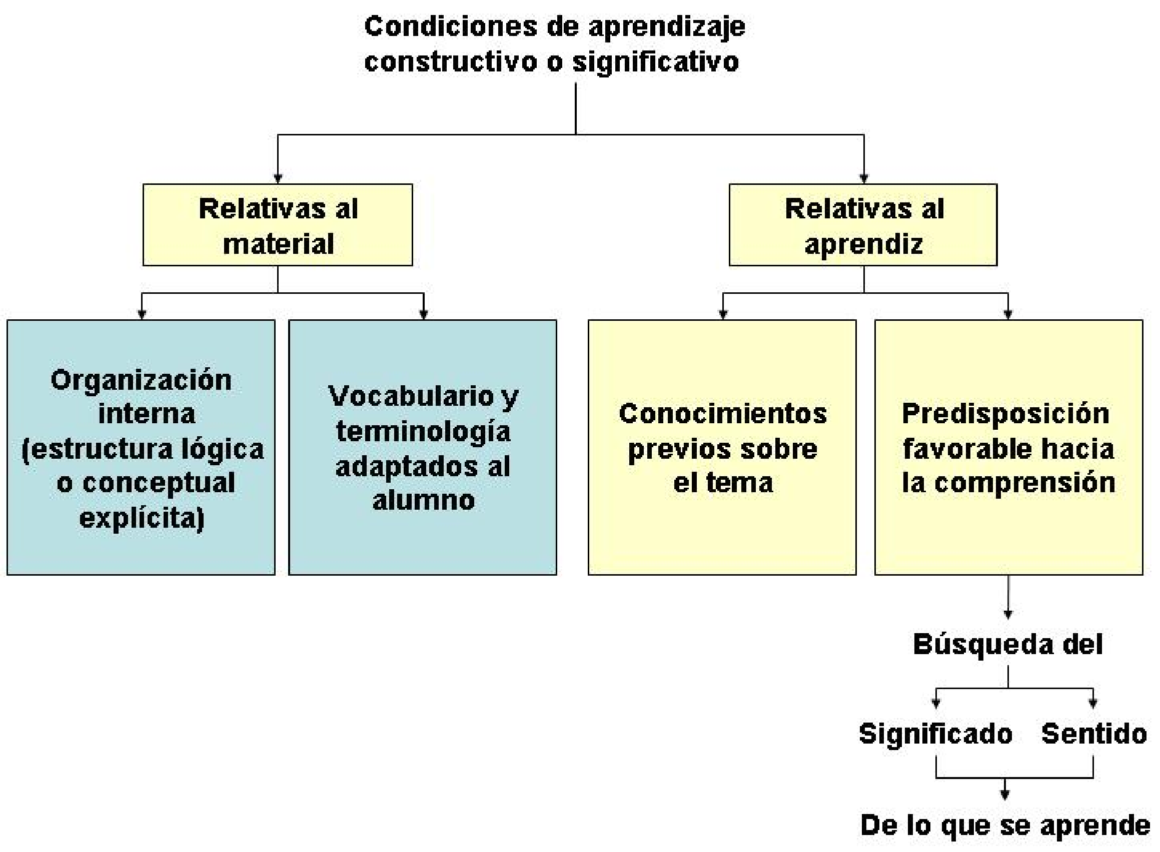

Figura 1.2: Condiciones o requisitos para que se produzca un aprendizaje constructivo

1.2. El aprendizaje colaborativo o cooperativo como un ambiente para favorecer el aprendizaje significativo

Como se ha dicho uno de los componentes del aprendizaje son las condiciones del mismo, ¿cómo debe organizarse la práctica para activar los procesos de aprendizaje?, ¿qué requsitos debe tener esta?, ¿por cuánto tiempo?, ¿dónde? y ¿con quién? ect., este es el componente donde el maestro puede tener una intervención directa.

Las actividades de enseñanza pueden estructurarse de manera que las condiciones de aprendizaje se den bajo un ambiente de competencia (aquí lo importante no es lograr los resultados, sino, lograr más que los otros), en donde se busca que cada estudiante busque logros individuales o de forma cooperativa asegurando que todos los integrantes del grupo logren los resultados.[15].

El aprendizaje no debe ser visto como una actividad individual y solitaria, hay una constante interacción entre alumnos, y entre éstos y sus profesores, de forma que se logre la cooperación de los aprendices para que en conjunto alcancen sus objetivosn de aprendizaje. Esta organización cooperativa fomenta el trabajo individual de condensación y consolidación de información y técnicas, que cada aprendiz debe practicar o ejercitar individualmente en el trabajo de equipo. Cooperar puede desarrollar formas más complejas de aprendizaje gracias a que favorece la aparición de conflictos cognitivos en los aprendices y proporciona apoyo para resolverlos.[16].

Además, el aprendizaje cooperativo fomenta que los estudiantes compartan las estrategias que utilizan para aprender, la metacognición. Así, pueden adquirir técnicas y estrategias que logren mejorar su capacidad de aprendizaje. Hay que recordar que según Vigotsky[17] el aprendizaje se da en las zonas de desarrollo próximo y los estudiantes están más cerca unos de los otros, que de sus maestros, y pueden ayudarse a transitar por ese espacio para reducir las diferencias, ya que algunos ya han pasado por ello. Y siguiendo con Vigotsky, según el cual todas las funciones

[15] JOHNSON, David, JOHNSON, Roger y HOLUBEC Edythe J. Los nuevos cículos del aprendizaje: La cooperación en el aula y la escuela. Aique grupo editor S.A. 1999. p. 9

[16] POZO MUNICIO, Ignacio, Op. cit., p. 88

[17] VYGOTSKY, L.S. El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Barcelona: Crítica, 1979

psicológicas superiores se generan en la cultura, nuestro aprendizaje responde no sólo a un diseño genético, sino sobre todo a un diseño cultural. Cada sociedad, cada cultura, genera sus propias formas de aprendizaje, su cultura de aprendizaje; y ésta puede ser más explícita en un grupo, dentro de una organización cooperativa del aprendizaje pueden entenderse mejor las demandas sociales que generan estas actividades, por lo que se afirma que "el trabajo cooperativo puede ser una alternativa muy eficaz para enseñar a los alumnos no sólo nuevas formas de gestionar socialmente el conocimiento sino también nuevos conocimientos"[18].

1.2.1. Estrategias de enseñanzas en un ambiente de aprendizaje cooperativo

Toda enseñanza debe buscar el logro de aprendizajes significativos, por lo que se requiere el desarrollo de sofisticadas y más elaboradas estructuras mentales de conocimiento. En el caso del aprendizaje cooperativo ésto se hace a mediante la interacción de pequeños grupos, que buscan que los estudiantes alcancen los objetivos de aprendizaje en unión con los otros integrantes de un grupo[19].

En esta dirección se hace necesario el desarrollo de actividades constructivas cuando se está diseñando un ambiente de aprendizaje de estadística [20], que deben cumplir ciertas condiciones, que han tratado de ser definidas por variados autores.

Según Cooper y Mueck existen seis características críticas en el aprendizaje colaborativo u organización social de las actividades de aprendizaje[21]:

1.) Cada uno en el equipo de aprendizaje es responsable por los otros miembros del equipo.

2.) Los ejercicios están orientados hacia el aprendizaje, no para variar las notas de los estudiantes. A los proyectos hechos en los grupos se les da poco peso. Se

[18]MONEREO, Carles y POZO, Juan Ignacio. La universidad ante la nueva cultura educativa: Enseñar y aprender para la autonomía. Madrid: Síntesis. 2003, pág 28

[19]JOHNSON, David; JOHNSON, Roger y JOHNSON HOLUBEC Edythe, Op. cit., pág 11.

[20]Verkoeijen,Imbos, van de Wiel, Berger, Schmidt. Assessing Knowledge Structures in a Constructive Statistical Learning Environment.Journal of Statistics Education Volume 10, Number 2 (2002)

[21]Cooper, J., and Mueck, R. (1990), "Student Involvement in Learning: Cooperative Learning and College Instruction,"Journal on Excellence in College Teaching, 1, 68-76.

piensan en experiencias de aprendizaje. Las notas de los estudiantes provienen de pruebas o trabajos individuales.

3.) Debe darse una correcta asignación de los estudiantes a los grupos.

4.) El profesor sirve como facilitador y no como un experto transmitiendo conocimientos.

5.) Se le da atención a las habilidades sociales ya que los estudiantes deben aprender uno del otro.

6.) Los estudiantes ganan habilidad en la solución de problemas de forma verbal.

De igual forma Slavin ha estudiado las variables que afectan el aprendizaje cooperativo para que éste se convierta en una condición que facilite la activación de conocimientos y procesos de aprendizaje necesarios para que tenga lugar la construcción de nuevos conocimientos, y están resumidas así por Pozo[22]:

1.) El aprendizaje cooperativo será más eficaz cuando se plantee una tarea común, que como varias tareas subdivididos entre los miembros del equipo.

2.) Esa tarea común no debe hacer que los aprendices eludan o difuminen sus responsabilidades individuales en el aprendizaje; al contrario, no sólo debe evaluarse el rendimiento grupal, sino la contribución individual de cada aprendiz; además debe evitarse el reparto especializado de papeles, hay que evitar que los aprendices se embosquen o camuflen en la estructura del grupo.

3.) Las oportunidades del éxito y la obtención de recompenzas debe ser igual para todos los aprendices, con independencia de sus conceptos previos o pericia inicial.

Estas características unidas nos dan bases para el diseño de las actividades cooperativas, que favorezcan las condiciones o los principios del aprendizaje colaborativo[23]:

1.) Interdependencia positiva: En las situaciones de aprendizaje colaborativo el alumno tiene dos responsabilidades: aprender el material aignado y asegurarse de

[22] POZO MUNICIO, Ignacio, Op. cit., pag 331
[23] JOHNSON, David; JOHNSON, Roger y JOHNSON HOLUBEC Edythe, Op. cit., pgs 39-46.

que todos los miembros del grupo lo aprendan. Se requiere del esfuerzo de cada integrante del grupo para el éxito del mismo, esfuerzo representado en la conjunción de recursos, de información y de asumir responsabilidades en la ejecución de labor.

La interpendencia poistiva se puede etructurar de cuatro formas diferentes:

- Interdependencia positiva de objetivos: Cuando los estudiantes se comprometen los unos con los otros, y solo vislumbran el éxito colectivo, cada uno alcanzando las metas propuestas.
- Recompensa de la interdependencia positiva: Todos los miembros del grupo deben recibir igual recompensa por su labor.
- Interdependencia positiva de recursos: Los integrantes deben sumar recursos propios para alcanzar los objetivos de grupo.
- Interdepedencia positiva de roles: el papel de los miembros del grupo deben ser complementarios entre sí y depender los unos de los otros.

Se trata de aprovechar el colectivo de ideas, razonamientos, percepciones etc.

> "*Cuando se aprovechan constructivamente, las controversias promueven la incertidumbre respecto a la corrección de las propias conclusiones, una búsqueda activa de más información, una reconceptualización del propio conocimiento y de las conclusiones alcanzadas y, en consecuencia, un mayor dominio y capacidad de retención de material y el uso más frecuente de estrategias de razonamiento*".

2.) Interacción promotora: Que incluye la explicación oral de cómo resolver problemas, la discusión sobre la naturaleza de los conceptos que se están aprendiendo, la enseñanza de los propios conocimientos a los compañeros y la relación entre el aprendizaje presente y pasado.

Permite que se trabaje en busca de los objetivos del grupo ya que los estudiantes son sus propios facilitadores y motivadores.

3.) Responsabilidad individual: Está relacionada con la segunda condición expuesta por Pozo. Debe evitarse la haraganería social, midiendo el esfuerzo que cada integrante del grupo está aportando y corroborando el compromiso individual con el éxito colectivo. Cada miembro del grupo debe poder demostrar, en forma individual, dominio sobre lo aprendido.

4.) Habilidades interpersonales: El aprendizaje cooperativo favorece el aprendizaje social, gracias a la interacción entre los integrantes del grupo y a la pertenencia del grupo en sí. Se adquieren habilidades sociales, de actitudes y de representaciones sociales.

    Para coordinar esfuerzos comunes los alumnos deben

    > "*(1) llegar a conocerse y confiar en los demás, (2)comunicarse con presición y sin ambigüedades, (3) aceptarse y apoyarse y (4) resolver sus conflictos de manera constructiva* ".

5.) Procesamiento grupal: aquí está inmersa la metacognición, el cómo se aprende y qué técnicas y estrategias han sido útiles y cuales inútiles en lograr ciertos resultados de aprendizaje. Esto debe darse dentro del grupo e igualmente con el acompañamiento del profesor.

La forma posible de usar el aprendizaje cooperativo en un curso universitario sería a través del aprendizaje cooperativo formal: consistente en un trabajo conjunto de los estudiantes para alcanzar objetivos de aprendizaje compartido relacionados con el currículo.

De acuerdo con Johnson en la implementación de esta estrategia corresponde al docente:

- Específicar los objetivos de la actividad
- Tomar decisiones pre-educativas
- Explicar la tarea y la interdependencia positiva
- Controlar el aprendizaje de sus alumnos e intervenir en los grupos para ofrecerle su ayuda o para mejorar las habilidades interpersonales y grupales de los estudaintes
- Evalúar el aprendizaje de los alumnos y ayudarlos a procesar el funcionamiento de los grupos

Las investigaciones han evidenciado el fuerte impacto de los esfuerzos de cooperación genuinos sobre el logro, la retención, el razonamiento de nivel superior, la generación creativa de nuevas ideas y la transferencia del aprendizaje.[24].

Estrategias específicas de aprendizaje cooperativo

La búsqueda para ofrecer a los estudiantes oportunidad del éxito, apoyo para aprender y participación individual en el desempeño final, ha conducido a plantera estrategias de enseñanza e identificar en la literatura la que más se adecúa a estos los requisitos y a las particularidades de los objetivos de aprendizaje de los conceptos de azar y probabilidad. Esta estrategia es la Investigación en Grupo (Group investigation) de Sharan, Sharan y colaboradores descrito por Díaz-Barriga y Hernández[25], se define como:

> *Es un plan de organización general de la clase donde los estudiantes trabajan en grupos pequeños (dos a seis integrantes), que utilizan aspectos como la investigación cooperativa, las discusiones grupales y la planificación de proyectos. Después de escoger temas de una unidad que debe ser estudiada por toda la clase, cada grupo convierte dichos temas en tareas individuales, y lleva a cabo las actividades necesarias para preparar el informe grupal, donde cada grupo comunica a la clase sus hallazgos. Los pasos para esta técnica son:*

- Selección del tópico: La selección por parte de los miembros de grupo de un sub-tópico de investigación dentro de una área general de problema es llevado a cabo por el profesor. Los estudiantes buscan recursos, proponen preguntas y las organizan en categorías , las categorías se convierten en sub tópicos y los estudiantes eligen el de su interés, la clave aquí es la MOTIVACIÓN INTRÍNSECA.

- Planeación cooperativa de metas, tareas y procedimientos. Determinación de los tamaños de grupo, los recursos con los que se dispondrá, los roles que debe asumir cada miembro del grupo y las tareas que deben ir desarrollando.

[24] JOHNSON, David; JOHNSON, Roger y JOHNSON HOLUBEC Edythe, Op. cit., pág 11.

[25] DÍAZ-BARRIGA, Frida y HERNÁNDEZ, Gerardo. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. Méxixo: McGraw Hill. 2002. p. 125.

- Implementación: El aprendizaje debe involucrar una amplia variedad de actividades y habilidades, y debe dirigir a los estudiantes a todo tipo de fuentes dentro y fuera de la institución. Los profesores deben seguir de cerca el progreso de cada grupo y ofrecer asistencia cuando sea necesario. Los miembros del grupo reunen, organizan y analizan la información de varias fuentes, reunen sus hallazgos y sacan conclusiones, así mismo discuten el progreso de su trabajo con el fin de intercambiar ideas e información y expandirlas, clarificarlas e integrarlas.

- Análisis y síntesis de lo trabajado y del proceso seguido. Los estudiantes analizan y evaluan la información obtenida, y planean cómo debe ser resumida en un forma interesante para ser presentada en el salón de clase. Alguno de los otros grupos dan una presentación de los tópicos estudiados a fin de involucrar a todos en los trabajos desarrollados, y alacanzar una perpectiva más amplia sobre el tópico.

- Presentación del producto final. El profesor coordina las presentaciones que son realizadas de una variedad de formas. El salón de clase evalúa la claridad y apariencia de la infrmación, así como la calidad profesional de la misma.

- Evaluación. la evaluación debe hacerse en conjunto, dentro del grupo, por los compañeros de clase y por el profesosr. La evaluación incluye apreciacion de niveles altos de pensamiento.

Como se ve el inicio del diseño de actividades de aprendizaje cooperativo exige la definición de los objetivos de la actividad y los resultados del aprendizaje; pero, desde el punto de vista del aprendizaje significativo el logro de estos resultados depende de los procesos que se den, los cuales deben partir de los conocimientos previos de los estudiantes que son la fuente de muchas de sus dificultades y los responsables de los errores de comprensión.

1.3. Estrategia de resolución de problemas como procedimiento para el aprendizaje significativo

Pozo[26] apunta que para lograr comprensión hay que “plantear las tareas de aprendizaje como problemas a los que hay que encontrar respuesta o solución ”;

[26] POZO MUNICIO, Ignacio, Op. cit., p. 322

un problema es “*una situación que un individuo o grupo requiere o necesita resolver y para la cual no dispone un camino rápido y directo que lleve a la solución* [27]. ”

Como lo cita García García[28] la resolución de problemas puede ser utilizada para promover el aprendizaje de las ciencias, desde una perspectiva de cambio conceptual y metodológico, es decir, esta estrategia de enseñanza es útil para favorecer en los estudiantes una interacción y establecimiento de relación entre concepciones previas y las nuevas.

La resolución de problemas puede ser utilizada igualmente para organizar los conocimientos; cuando se resuelven problemas en en área de los métodos cuantitativos, es necesario que los alumnos utilicen una gran cantidad de conocimiento procedimental, mediado por la forma en que se presenten los contenidos en el enunciado del problema.

Los problemas pueden ser de varios tipos[29] y pueden ir desde ejercicios de reconocimiento, que no son en realidad problemas, que buscan que los estudiantes desarrollen la capacidad de representación y mecanicen ciertos procedimientos y algoritmos; hasta sistuaciones problemáticas que presentan algo nuevo para el estudiante y provocan preguntas y la necesidad de buscar respuestas. En el siguiente capítulo, la estrategia propuesta está basada en problemas que se mueven en el rango de problemas de aplicación y problemas de búsqueda, ya que se pretende que los estudiantes enfrenten sistuaciones nuevas con conceptos ya elaborados o bien requiere de la construcción de nuevos conocimientos para su solución.

Diseñar tareas de aprendizaje como verdaderos problemas requiere que los profesores partan de los conocimientos previos de los estudiantes, si se quiere asegurar que la tarea sea vista como un problema no sólo próximo a sus intereses, sino también con la miníma intriga o suspenso para esforzarse en resolverlo. Los problemas contienen siempre elementos novedosos, imprevistos, que requieren una reorganización de los elementos presentes.

La presentación de los problemas debe alejarse de lo que habitualmente nos encontramos en el aula de clase con exceso de operativismo, tratamiento superficial,

[27]LESTER, F.K. Trends and issues in mathematical problem solving research. En:R. Lesh y M Landau (Eds), Acquisition of mathematical concepts an processes. Nueva York: Academic Press

[28]GARCÍA GARCÍA, José Joaquín. Didáctica de las ciencias. resolución de problemas y desarrollo de la creatividad. Bogotá: Magisterio. 2003. p. 34

[29]Ibid p.50

ausencia de análisis de resultados y falta de cuestionamiento de ideas que podría generar la producción de cambios conceptuales[30], pero también deben adecuarse a las habilidades de los estudiantes y deben partir de los límites de los conocimientos ya elaborados de los estudiantes.

La resolución de problemas como estrategia de enseñanza, requiere de habilidades[31] que están en armonía con el aprendizaje constructivista colaborativo.

- Habilidades cognitivas: Para que los estudiantes puedan resolver problemas son necesarias habilidades de carácter superior como el análisis, la síntesis, la transferencia de conocimiento y la creatividad.

- Habilidades cognoscitivas: Son las que hacen referencia al conocimiento que posee el estudiante y a la que es necesario que él acceda para lograr resolver problemas, este conocimiento está dividido en declarativo y procedimental.

  Dentro de los conocimientos procedimentales se encuentran las habilidades de observación e identificación de problemas, cuestionamiento y planteamiento de preguntas, modelización, trabajo en grupo y trabajo colaborativo, aplicación de heurísticos y algoritmos como modos de procesar información y de resolver problemas y, de lectura y escritura

  Dentro de las habilidades cognoscitivas declarativas están : La comprensión acerca de hechos, conceptos, reglas y teorías, también llamado conocimiento proporcional.

- Habilidades metacognitivas: Incluye la habilidad de elaboración de planes para cada actividad que se realiza, de evaluación y retroalimentación de los planes elaborados para llevar acabo las actividades y la habilidad para utilizar el tiempo.

- La habilidad para recordar conocimientos (memoria). En la resolución de problemas se puede mejorar el uso de la memoria mediante ciertos procedimientos como la modificación de enunciados, la externalización de la memoria, la estructuración de la información y la nominilización de los procesos.

---

[30] Ibid. p. 35

[31] Ibid p. 63

- Estilo cognitivo y resolución de problemas: se trata la independencia o dependencia del campo cognitivo, las diferencias individuales de funcionamiento cognitivo en cuanto a la aptitud de autonomía con respecto a referencias externas, tanto en el campo perceptivo como el intelectual, lo que le permite o no la movilidad de los conceptos de un área del conocimiento a otra.

Para poner en marcha las estrategias de solución de un problema hay que seguir una serie de pasos que pueden ser resumidos así[32] [33]:

1.) Fijar el objetivo o meta de la estrategia de solución: En la cual los alumnos deben leer cuidadosamente el problema, poder describirlo en sus términos, definir exactamente lo que el problema pide, realizar conexiones entre la información disponible y las incógnitas que se han planteado, y establecer y validar las relaciones claves entre los componentes del problema.

2.) Identificar las estrategias eficaces o los cursos de acción a seguir para alcanzar el objetivo a partir de los rescursos disponibles. Determinar la información relevante con que se cuenta, establecer los procedimientos y algoritmos necesarios para develar las incógnitas.

3.) Aplicar la estrategia, ejecutando las técnicas que la componen. Aquí los estudiantes deben efectuar los cálculos necesarios anotando y comunicando de manera adecuada cada uno de los pasos seguidos, para construir una memoria del proceso de resolución. Se busca una automatización y condensación de las técnicas o bien procedimiento, más probable será su uso dentro de una estrategia más general.

4.) Evaluar el logro de los objetivos fijados tras la aplicación de la estrategia, esto implica también la fijación y evaluación de metas intermedias, a través de un proceso de supervisón continuo de la ejecución de la tarea de resolución. Llevar una bitácora de las operaciones y respuestas encontradas, verificar que haya consistencia entre los razonamientos cualitativos y los valores númericos encontrados y que se correspondan con lo planteado en los objetivos. Aquí es importante realizar un inventario de las dificultades que puedan causar errores.

Estas fases requieren un dominio técnico de la situación, conocimiento conceptual, procesos de control y reflexión consciente sobre lo que se está haciendo.

[32] Ibid, p. 120
[33] POZO MUNICIO, Ignacio, Op. cit., 306

Como se ve, la resolución de problemas es una estrategia que puede favorecer la construcción de conceptos, se puede realizar mediante una organización en grupos y cubre todo el rango posible de resultados del aprendizaje. Lo que se busca es la construcción del conocimiento del grupo favoreciendo la interacción y el acuerdo social y de conceptos que parta de los concepciones previas de los estudiantes.

1.4. Dificultades en la compresión de los conceptos

Una dificultad se entiende como "*algo que inhibe al estudiante en alcanzar correctamente o en entender rápidamente un aspecto dado*"[34]. Las dificultades pueden deberse a varias causas: relacionadas con el concepto que está siendo aprendido, el método de enseñanza usado por el profesor, al conocimiento previo del estudiante, o a su habilidad.

En el caso de los conceptos básicos de probabilidad, se presenta generalmente un obstáculo cognoscitivo que puede explicar las dificultades presentadas y los errores observados. Este obstáculo conformado son las concepciones de los estudiantes; que les permiten resolver un conjunto determinado de problemas, pero son inapropiadas o inadecuadas cuando se aplican a situaciones más generales. Se encuentra resistencia del estudiante en reemplazar sus concepciones previas. Esto está acorde con el principio de la psicología educacional establecido por Ausbel: "*El factor más importante para influenciar el aprendizaje es el conocimiento previo del estudiante*". Debemos descubrirlos y enseñar en consecuencia. Mencionado por Batanero y otros [35] Brosseau describe las siguientes caracaterísticas de los obstáculos

- Un obstáculo es un conocimiento, no una falta de conocimiento.
- Los estudiantes emplean este conocimiento para producir la respuesta correcta en un contexto dado, que él frecuentemente encuentra. Se ve reflejado en la práctica común de estudiar para exámenes y ejercicios.

[34] BATANERO, C., GODINO, J. D. GREEN, D., HOLMES, P., VELLECILLOS, A. Op. cit.
[35] Ibid.

- Cuando este conocimiento es usado fuera de este contexto, se generan errores. Una respuesta universal requiere un punto de vista diferente.
- El estudiante ignora la contradicción producida por el obstáculo y se resiste a establecer un conocimiento más profundo. Es esencial identificar el obstáculo y reemplazarlo en el aprendizaje.
- Después que el estudiante ha superado el obstáculo, reconoce su inexactitud, no importando que recurra esporádicamente.

Brosseau ha identificado tres clases de obstáculos:

Obstáculos Ontogénicos (llamados obstáculos psicogenéticos): Son debidos al desarrollo del estudiante. Por ejemplo: razonamiento proporcional es requerido para entender probabilidad.

Obstáculos Didácticos: Aparecen de las opciones didácticas escogidas en las situaciones de enseñanza.

Obstáculos Epistemológicos: Están intrínsecamente relacionados al concepto mismo, y llevan parte del significado del concepto.

Entonces, una condición necesaria para construir una concepción relevante para un concepto dado, es cuantificar y sobreponer estos obstáculos, usando análisis históricos y didácticos.

En el aprendizaje del concepto de azar y la teoría de probabilidad se encuentran ejemplos de estos obstáculos. En el siguiente cápitulo se hace referencia a alguna de las dificultades encontradas en los estudiantes en el aprendizaje del cálculo de probabilidades que están relacionadas con la ausencia o mala comprensión de conceptos previos o por la dificultad de comprender lo que la aleatoriedad implica. Igualmente, hay selecciones desafortunadas de estrategias de enseñanza basadas en su totalidad en clases magistrales y evaluaciones finales puntuales, que pueden llegar a convertirse en situaciones poco estimulantes, y tensionantes bajo las cuales el aprendizaje no llega al nivel deseado. Igualmente se ha encontrado una dificultad inherente al fundamento epistemológico del azar y la percepción que los individuos tienen del mismo.

Capítulo 2

La enseñanza de los conceptos de azar y probabilidad, una nueva forma de ver el mundo

2.1. Azar, probabilidad y estadística

Se tienen dos filamentos de alambre idénticos de cierto metal, sometidos a una corriente de igual intensidad, nos hemos asegurado que las condiciones externas son iguales para ambos, pero a pesar de todos estos factores conocidos y controlados el tiempo que transcurre antes que los dos filamentos fallen no es igual. Existe una fuente aleatoria que ocasiona variabilidad en la respuesta, no obtenemos idénticos resultados debido al azar, entonces recurrimos a la estadística, realizamos mediciones y utilizamos modelos probabilísticos para determinar el tiempo promedio que el filamento resistirá la corriente antes de fallar. Pero, ¿qué es el azar que nos hace obtener respuestas variadas, o mejor, que no nos permite predecir el resultado?, ¿cómo se elaboraron las teorías de probabilidad (matemática) para describirlo?.

En su libro Ideas sobre la complejidad del mundo, Jorge Wagensberg plantea la siguiente pregunta *¿Es el azar un producto de nuestra ignorancia o un derecho intrínseco de la naturaleza*?[1]. Lo que el autor plantea es si el azar es fruto de nuestra información imperfecta o incompleta, o, el comportamiento aleatorio del universo,

[1]WAGENSBERG, Jorge. Ideas sobre la complejidad del mundo. Barcelona: Serie Matemas 9. Tusquets Editores, S.A. 1989. p. 22.

es parte constituyente de la naturaleza[2]. El azar ocasiona que algo ocurra independiente de su condición inicial, hace que sistemas y fenómenos se escapen a nuestro control. El primer concepto de azar, nos indica que, la cantidad de azar presente en el universo, o *la cantidad de él que intervienen en los procesos naturales, no tiene más límite que el del avance del conocimiento*[3], azar por convicción. La física mecanicista de Newton sirvió para reforzar este concepto del azar, las nuevas teorías deterministas del siglo XVIII permitieron reducir el poder que el azar tenía, se llegó a pensar que el comportamiento natural era determinista, conocidas las condiciones iniciales, las teorías permitirían conocer el pasado y el futuro, la predicción determinista, como Laplace lo planteó:

> Debemos entonces mirar el presente estado del universo como el efecto de su estado anterior y como causa de uno que va a sucederle.

El segundo concepto del azar plantea este como *la causalidad de la causalidad, con el azar como última causa. El último eslabón en una cadena de conocimientos*[4], el azar inevitable. Un concepto que se corresponde con la mecánica quántica y la mecánica estadística.

Al igual que el azar la teoría de probabilidad se mueve en un rango que va desde el espectro ontológico al epistemológico. En un lado las probabilidades son vistas como no inherentes a la naturaleza sino como un reflejo de la ignorancia humana de un verdadero curso determinístico de los eventos, un estimador cuantitativo en forma de número bajo ciertas condiciones dadas para un evento, y solo para esas condiciones, lo que desconocemos. En el otro lado del espectro el azar proviene de la renuncia del determinismo que trajo la mecánica quántica del siglo XIX, el azar es una característica inherente a la naturaleza. Por eso conociendo la fuerza con que se lanza un dado, su dirección y sentido, mirando las propiedades elásticas del material, las leyes de conservación del movimiento, llegamos a la conclusión que cualquiera de la seis caras es un resultado con igual probabilidad de ocurrir.

El concepto de probabilidad para Wagensberg[5] es un pacto de la ciencia con

[2]HOPP, Wallace J. SPEARMAN, Mark L. Factory Physiscs. Foundations of Manufacturing Management. Segunda Edición. Nueva York: IRWING-McGRAW HILL. 2001. p. 250.

[3]WAGENSBERG, Jorge, Op. cit, Pág. 22.

[4]Ibid. Pág 56 y 59.

[5]WAGENSBERG, Jorge, Op. cit.,

el azar, es una concesión al azar, porque el número de leyes que conocemos que describen los procesos es limitado y ha dado origen a términos como error, ruido, mutación, fluctuación. En física y matemáticas se han hecho muchos esfuerzos por comprender los triunfos del azar, y se la han hecho concesiones. Se busca amortiguar las sorpresas que el mundo nos depara, a hacerse insensibles a ellas. Sin embargo, la teoría de la probabilidad no se preocupó en una primera instancia por dar explicaciones a fenómenos naturales, la creación de la teoría matemática de probabilidad por parte de los matemáticos franceses Blaise Pascal y Pierre de Fermat fue resultado de las preguntas que un noble francés les hiciera acerca de juegos de azar en 1654. Fue con Pierre de Laplace que la teoría de probabilidad dejó de estar circunscrita a los juegos de azar y comenzó a aplicarse a problemas prácticos y científicos. En el siglo XIX se desarrollaron la teoría de los errores, las matemáticas actuariales y la mecánica estadística.

Pero dar una primera definición de probabilidad suficientemente precisa para las matemáticas y que fuera aplicable en un amplio rango de fenómenos fue posible gracias a Andrei Kolmogorov en 1933, un matemático ruso que realizó una aproximación axiomática que dio las bases de la teoría moderna. Estas ideas se han depurado a través de los años hasta convertirse en una disciplina más general conocida como teoría de la medida, la Estadística. La teoría de probabilidad basada en estas bases axiomáticas es lo que hoy se conoce como la probabilidad clásica.

La probabilidad clásica estaba basada en que los resultados alternativos de un ensayo eran finitos en número y cada uno de esto eventos elementales tenía igual probabilidad de ocurrencia, igual oportunidad de aparecer. La regla de razón insuficiente de Laplace, del argumento indiferente. Esta interpretación tiene su sustento en la concepción epistemológica del azar, el desconocimiento de una ley que gobierne los procesos nos debe llevar a suponer que todos los resultados son equiprobables. Pero se dio un cambio conceptual, que transformó el calculo de probabilidad en un asunto matemático serio, que permitió que el problema del comportamiento límite de la frecuencia relativa, por ejemplo, pudiera ser formulada como un problema acerca de la medida de un conjunto de números reales, gracias a las contribuciones de Lesbegue, Emile Bores, Henri Poicaré.

La física contribuyó a cambiar el concepto de azar, para la mecánica cuántica el mundo es objetivamente indeterminísta, así lo dejó estipulado Heinserberg, así Einsten asegurara que Dios no juega a los dados. La variabilidad de los resultados, la imposibilidad de predecir con cien por ciento de precisión el estado futuro, no es nuestra falta de conocimiento, sino de la genuina falta de determinismo del mundo. El estado inicial de un sistema físico puede llevarlo a cualquier resultado dentro de un número de alternativas[6].

El desarrollo de la física ha tenido gran influencia sobre la probabilidad. Esta influencia proviene de dos fuentes, la mecánica cuántica y la física estadística. Las bases conceptuales de la física en si misma proveyó un hábitat natural para algunas de las características esenciales de la moderna teoría de probabilidad: un espacio de estados continuos y un tiempo continuo. La teoría de los procesos estocásticos fue la cosa más profunda que la física estadística le dio a la teoría de probabilidad: hipótesis ergódica, movimiento Browniano, radioactividad.

Bajo el concepto moderno, la probabilidad puede ser descrita como una herramienta para expresar regularidades o leyes, las cuales no son sostenidas a un nivel individual sino solamente estadístico[7], asociado a los conceptos de límites de frecuencia relativas en experimentación de Von Mises. Los eventos que son aleatorios no son perfectamente predecibles, pero tienen regularidades en el largo tiempo, lo cual se describe y cuantifica a través de la probabilidad; no pueden ser predichos individualmente, pero, la estructura de su aparición puede ser descrita en términos de probabilidad[8].

Para el aprendizaje de la Teoría de Probabilidad y los modelos utilizados en Estadísticas es necesario plasmar en forma correcta un mapa conceptual que enlace los conceptos de azar, impredecibilidad, certeza, imposibilidad, con los conceptos de probabilidad, inferencia y modelos estadísticos. La dificultad inherente proviene según algunos autores que *bajo ninguna interpretación, la probabilidad sirve como modelo de la confianza puesta en la preposición. Así la existencia de evidencia para una preposición nunca puede, desde un punto de vista objetivista, ser expresada diciendo que la preposición es verdadera con cierta probabilidad*. Es decir la prob-

[6]ISAAC, Richard. The pleausures of probability. Springer. Nueva York, 1995.

[7]lab.phsc.jp/doc/nishiwaki/1999/19991130.pdf

[8]PAULOS, John Allen. El hombre anumérico. El analfabetismo matemático y sus consecuencias.Barcelona: Metatemas 20.Túsquets Editores. 2000. Pág. 77.

abilidad no es un medida del determinante del grado veracidad de una preposición, más aún no hay claridad del significado objetivo de la probabilidad matemática. La probabilidad tiene un cuerpo matemático que la contiene, empieza por unos axiomas (Kolmogorov), prueba de teoremas y demás fórmulas que son ciertas para cualquier cosa que satisfaga los axiomas, pero es difícil una conexión de esta matemática con el mundo real.

La estadística inferencial moderna utiliza las leyes de probabilidad, busca patrones, estima valores, predice resultados, descubre relaciones, basándose en la probabilidad. Es necesario para la compresión de los fenómenos, como para la elaboración de teorías científicas el aprendizaje de la probabilidad.

2.2. Dificultades y errores en el aprendizaje de los conceptos básicos de la teoría de probabilidad

La probabilidad puede considerarse como una medida del grado de certidumbre de la ocurrencia de un evento, y está en un rango que va desde cero (evento improbable) a uno (evento cierto). Cuando hablamos de la probabilidad de ocurrencia de un evento, se trata de asignar un valor numérico a la observación de un resultado que pertenezca al conjunto del evento. Este valor puede ser asignado de forma subjetiva u objetiva. Esta última se realiza a través de la lógica o la simetría, o, a través de la repetición de la experiencia un gran número de veces, calculando la frecuencia de ocurrencia del evento y asignando este valor como la probabilidad de ocurrencia del mismo.

Debe por tanto existir un conjunto de reglas claras para asignar este valor de manera objetiva; en esto consiste el cálculo de probabilidades, que está basado en un conjunto de axiomas establecidos por Kolmogorov.

Para el cálculo de probabilidades los estudiantes deben adquirir habilidades en determinar espacios muestrales y de los eventos, para ello deben contar con razonamiento combinatorio; y aplicar un conjunto de teoremas y leyes de probabilidad, lo cual implica conocimiento de la teoría de conjuntos y tratar con proporciones.

Los errores señalados en este parráfo en este apartado están basados en la experiencia de trabajo con estudiantes de la asignatura Estadística Aplicada del programa de Ingeniería Industrial de la UIS desde el año de 1998 a 2003.

2.2.1. Espacios muestrales y espacio de los eventos

Un evento se define como un subconjunto del espacio muestral, y, por lo tanto, los elementos que componen el evento deben tener la mismas características comunes que los elementos que componen el espacio muestral (los puntos muestrales deben corresponderse).

Muchos estudiantes alteran la naturaleza de los puntos muestrales, es decir, construyen los espacios de los eventos como si proviniesen de espacios muestrales diferentes al que ha sido definido previamente para la experiencia aleatoria estudiada.

Una ilustración muy usada en la enseñanza del cálculo de probabilidades es extraer de una urna que contiene balotas de diferentes colores un número de balotas n y determinar la probabilidad de cada una de las posibles configuraciones, como en el siguiente ejemplo:

Ejemplo 1: Se tiene un urna con 4 balotas rojas y 5 balotas blancas y se extraen al azar y sin reemplazo tres de ellas, determinar la probabilidad que las dos balotas extraídas sean blancas.

El espacio muestral para este conjunto puede ser establecido como:

$$\Omega_1 = \{rrr, rrb, rbr, brr, bbr, brb, rbb, bbb\}$$

o también como

$$\Omega_2 = \{3r0b, 2r1b, 1r2b, 0r3b\}$$

Que tienen diferentes números de elementos y de diferente naturaleza.

El evento A: las dos balotas extraídas son blancas puede ser definido:

$A = bbr, brb, rbb$ para el espacio muestral uno

$A = 1r2b$ para el espacio muestral dos

Muchos estudiantes *parten el primer espacio muestral, pero al definir el espacio muestral del evento usan la segunda estructura o viceversa*. El error se agrava cuando asignan $P(E_i = 1r2b) = P(bbr)$, o, $P(E_i = 1r2b) = P(bbr)$, o, $P(E_i = 1r2b) = P(bbr)$.

Lo anterior indica que no hay una aproximación sistemática en la construcción de los espacios para los eventos, que parte de una compresión de lo que es un evento. Para esta aproximación sistemática es necesario establecer primero el conjunto espacio muestral, ya sea por compresión o por extensión. Para ello es necesario el razonamiento combinatorio, lo que implica según Batanero et al[9], los siguientes conceptos y modelos:

- Operaciones Combinatorias: Combinaciones, arreglos, permutaciones: Conceptos, notación, fórmula.
- Modelos combinatorios:
  Modelo de muestreo: Población, muestra, ordeno/no orden de muestreo, reemplazo;
  Modelo de distribución: correspondencia y aplicación;
  Modelo de partición: conjunto, subconjunto, unión;

Y los siguientes procedimientos combinatorios:

- Procedimientos lógicos: clasificación, enumeración sistemática, principio de inclusión/exclusión, recurrencia;
- Procedimientos gráficos: diagramas de árbol, grafos:
- Procedimientos numéricos: principios adición, multiplicación y división, números factorial y combinatorios, triángulo de Pascal, ecuaciones diferenciales;
- Procedimientos de tabulación: construcción de tablas y arreglos;
- Procedimientos algebraicos: generación de funciones.

[9]BATANERO, Carmen; GODINO, Juan; NAVARRO-PELAYO, Virginia. Combinatorial, Reasoning and its assessment. En: I.GAl, & J.B. Garfield. The assessment challenge in statistics education. IOS Press and International Statistical Institute. Amsterdam. 1997. pp. 239-252

La mayoría de estos contenidos están relacionados estrechamente con probabilidad. De acuerdo con Piaget y Inhelder [10], si un sujeto no posee capacidad de razonamiento combinatorio, no puede usar la idea de probabilidad, excepto en casos muy elementales de experimentos aleatorios.

Algunas de las dificultades que presentan los estudiantes en la solución de problemas combinatorios son descritas por Batanero et al [11]:

Enumeración no sistemática: La dificultad consiste en resolver un problema por enumeración utilizando prueba y error, sin un procedimiento recursivo que lleve a la formulación de todas las actividades.

Uso incorrecto del diagrama de árbol: Hay dificultad por parte de los estudiantes en construir diagramas de árbol apropiados para representar la situación problema, y el mismo gráfico se vuelve causa de muchos errores.

Error de orden: Determinar que el orden de los elementos es irrelevante o por el contrario no considerarlo cuando es esencial.

Confundir el tipo de objeto: Los estudiantes consideran qué objetos diferentes son idénticos o qué objetos diferentes son iguales.

Confundir el tipo de celdas (el tipo de subconjuntos) en particiones o modelos de distribución: Este error consiste en creer que se podría distinguir idénticas (subconjuntos) celdas o que no es posible diferenciar celdas diferenciables (subconjuntos). cartas pares.

Dos ejemplos desarrollados por los estudiantes en el aula de clase en los que se evidencia estas dificultades y errores son:

Ejemplo 2: Se tienen una gaveta con seis pares de medias (dos blancas, dos azules, dos negras, dos cafes, dos grises y dos verdes) sueltas y revueltas, se sacan tres medias al azar y sin reemplazo. ¿de cuántas formas se pueden obtener un par?

Algunos enumeran las diferentes formas en que se pueden extraer las tres medias: $\Omega = rbb, brb, ..., vvg$, el problema es que olvidan que hay por ejemplo dos medias rojas y habría que considerar el espacio muestral como $\Omega = r1b1b2, b1r1b2, ..., v1v2g2$.

[10] Piaget, J. y Inhelder B. La génese de l'idée d'hasard chez l'enfant. Prensa Universitaria de Francia. 1951

[11] BATANERO, Carmen; GODINO, Juan; NAVARRO-PELAYO, Virginia. Op. cit.

La enumeración a través de prueba y error, y no distinguir entre dos objetos diferentes, son dos dificultades evidenciadas aquí. Para los estudiantes dos medias de un mismo color son objetos iguales, cuando en realidad son diferentes; si consideraran los objetos como: media roja uno y media roja dos, o no se confiaran en poder enumerar uno y cada uno de los elementos constitutivos del conjunto, tal vez este error no estaría presente .

Otros aplican procedimientos numéricos como la combinación, y tratan de determinar el número de elementos que componen el conjunto del evento: Se toman dos medias de un color y una de otro color, esto es posible hacerlo $\binom{6}{2}$ formas

$$n_{evento} = \binom{2}{2}\binom{2}{1}\binom{6}{2} = 30$$

aquí hay un error en el modelo de distribución, ya que este resultado debe ser multiplicado por dos, para especificar qué color va formando el par y cuál va solo. Una vez más *se evidencia la no distinción de objetos diferentes*

Ejemplo 3: De un grupo de 20 estudiantes debe elegirse tres de ellos para desempeñar los cargos de presidente, vicepresidente y secretario de la junta directiva para un evento. ¿Cuántas juntas directivas pueden formarse?

Los estudiantes al calcular este número utilizan procedimientos combinatorios y no de permutación, ya que *no perciben la importancia del orden, o no hacen diferenciación de los cargos dentro de cada grupo que conforma una junta*. Es diferente la junta directiva:

Estudiante 12: presidente, estudiante 13: vicepresidentes, y estudiante 14: secretario

a esta junta:

Estudiante 13: presidente, estudiante 12: vicepresidentes, y estudiante 14: secretario

2.2.2. Equiprobabilidad

Cuando el espacio muestral de una experiencia aleatoria está compuesto por elementos o puntos muestrales equiprobables (todos tienen la misma probabilidad de ocurrencia), la probabilidad de ocurrencia de un evento A, es igual al número de elementos del conjunto evento sobre el número de elementos del espacio muestral:

$$P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega}$$

Una dificultad al aplicar este concepto es hallar de forma correcta el número de elementos que conforman los conjuntos mencionados o la falta de correspondencia entre los elementos de ambos conjuntos (explicados en la sección anterior). *Existe igualmente un error común y es extender este concepto a espacios muestrales que no son equiprobables*.

Cuando se enseña este concepto se utiliza como ejemplo el lanzamiento de una moneda tres veces. El espacio muestral asociado con esta experiencia es $\Omega = \{ccc, ccs, csc, scc, ssc, scs, ssc, sss\}$, en donde cada uno de los 8 puntos muestrales tiene una probabilidad de 1/8. En el ejemplo sobre las balotas que se expuso anteriormente, el espacio muestral cuenta igualmente con 8 puntos muestrales y con una configuración similar a la aquí planteada, pero *los puntos muestrales no son equiprobables, sin embargo, es común que los estudiantes lo consideren así*. Al parecer el hecho que la configuración del espacio sea similar se sobrepone al hecho de que cada una de las respuestas elementales (puntos muestrales) no puede ser obtenida con igual probabilidad.

La elección de la forma de representar los elementos del conjunto espacio muestral es otra dificultad que se evidencia cuando al pedirle a un estudiante que calcule la probabilidad que se obtengan dos caras y un sello, el espacio muestral es representado de la forma:

$$\Omega = \{3c, 2c1s, 2s1c, 3s\}$$

y con el concepto en mente que es un espacio equiprobable, la probabilidad del conjunto A, dos sellos y un cara sería 1/4, ya que uno de los cuatro elementos cumple está condición; lo que no se ha considerado aquí es que al elegir esta representación del espacio muestral los puntos muestrales ya no son equiprobables, la razón, cada uno de los elementos del espacio muestral no equivale a una respuesta elemental, sino. a varias .

2.2.3. Aplicación de los teoremas de Probabilidad

Derivados de los axiomas de probabilidad se han formulado varios teoremas, de los cuales dos de los más usados en el cálculo de probabilidades son los siguientes:

Teorema 1: La probabilidad de un evento es igual a uno menos la de su complemento. P(A)=1-P(A)'.

Determinar de manera correcta el complemento de un conjunto representa una dificultad para muchos estudiantes. En un ejercicio clásico se le pide a los estudiantes que determinen la probabilidad de que al menos dos personas en una reunión de n personas, cumplan años el mismo día.

Desarrollar el ejercicio anterior tratando de hallar directamente la probabilidad del evento toma mucho más tiempo que si se determina el complemento del evento y se establece la probabilidad de ocurrencia de este último. Pero muchos estudiantes *fracasan en encontrar el complemento (sin contar a un número que olvida este teorema y se embarca en la ardua labor de hallar directamente la probabilidad de ocurrencia de tal evento, que entre mayor sea n se vuelve más complejo*. El complemento de que al menos dos personas cumplan años el mismo dia es que todas cumplan años en días distintos.

La razón por la cual algunos asumen la tarea de establecer el conjunto del evento es la imposiblidad de establecer el conjunto del complemento fundamentado en el ya mencionado razonamiento combinatorio y la aparición aqui de operaciones entre conjuntos.

Existe una dificultad relacionada con el lenguaje utilizado. El uso de frases adjetivantes como: a lo sumo, por mucho, al menos, no más de, etc. hace que para algunos estudiantes *el problema sea incomprensible, o mal entendido; lo que derivará en no poder establecer con claridad el evento o bien su complemento*.

Teorema 2: La probabilidad de la unión de dos eventos es igual a la suma de las probailidades de cada uno de ellos menos la probabilidad de su intersección $P(A\bigcup B)=P(A)+P(B)-P(A\bigcap B)$.

Este teorema utilizado para hallar la probabilidad del conjunto resultante de la unión de dos eventos, requiere de conocimientos previos de los estudiantes como operaciones entre conjuntos, y de las relaciones entre eventos: si son o no son

Figura 2.1: Ensamble

excluiyentes, si son o no son independientes. El siguiente ejemplo es ilustrativo para los dos teoremas mencionados.

Ejemplo cuatro: se conectan dos elementos idénticos en paralelo como se muestra en la figura 2.1, para que el ensamble funcione se requiere que al menos uno de los elementos funcione. Cada uno de los elementos funciona en forma independiente, con una probabilidad de presentar fallo en un instante cualquiera de tiempo del 0.02 ¿cuál es la probabilidad que el componente funcione en un momento dado?

LLamenos F al evento que un elemento funcione y L al evento que un elemento falle, y uno al elemento superior y dos al inferior. Es importante aquí considerar lo siguiente:

- Que F es el complemento de L
- Que hay indepencia entre cada uno de los resultados (falla o funcione) del compoprtamiento de cada elemento.
- Que no son mutuamente excluyentes el resultado del comportamiento de un elemento con el resultado del comportamiento del otro elemento.

Asi el estudiante debería plantearse dos posibles formas de dar respuesta a la pregunta: encontrar directamente la probabilidad del evento, el ensamble funciona, o encontrar la probabilidad del complemento, el ensamble falla.

En el primer caso los elementos constitutivos del evento el ensamble funciona seríann, A=1f2l, 1l2f, 2f2f, así la probabilidad de A sería:

$$P(A) = 0{,}98 * 0{,}02 + 0{,}98 * 0{,}02 + 0{,}98 * {,}98 = 0{,}9996$$

Sin embargo podría plantearse la probabilidad de que el ensamble funcione como la probabilidad de que funcione el elemento uno o el elemento dos: $P(A) = P(1f ó 2f) = P(1f \bigcup 2f) = P(1f) + P(2f) - p(1f * 2f)$. Lo que algunos estudiantes lo plantean de la siguiente manera : $P(A) = P(1f ó 2f) = P(1f \bigcup 2f) = P(1f) + P(2f)$, olvidando que es necesario restar la intersección, ya que puede ocurrir simultaneamente que los dos elementos funcionen pasando por alto el primer axioma de probabilidad ($0 \leq P(A) \leq 1$), ya que P(1f)+P(2f)=1.96.

2.2.4. Uso de tasas, razones y porcentajes

La probabilidad se mide a través de una razón, proporción, tasa o porcentaje, pero como lo señala Batanero, el razonamiento proporcional es un concepto dificil en matemáticas. Dificultad que está explicada en el texto de Shcield [12], donde señala que esta es un producto de una combinación de complejidad, sutilezas y ambigüedad. La complejidad es la causa dominante de la dificultad. Indicios de dificultad incluye la gramática única asociada con los tipos de comparaciones aritméticas y los nombres de las familias de razones o proporciones: porcentajes, tasas, oportunidades, fracción, y su uso. Esto conlleva a diferencias semánticas.

Ejemplos de la dificultad en el razonamiento se presentan en las siguientes descripciones:

Se encuestó a un grupo de hogares con al menos un niño entre los 5 y 12 años en ellos; se encontró que el 80 % de ellos poseía al menos un aparato de televisón, y de ellos un 60 % acudía frecuentemente a cine.

Identificar cuál es el todo y cuál es la parte de la que se está hablando, es esencial aquí.

Si A tiene una probabilidad de ocurrencia X, y B es 20 por ciento más probable que A, entonces la probabilidad de B es:

Entender que el porcentaje indica razón parte /todo y que por ciento son las unidades de la razón es clave aquí. La probabilidad de B es $1{,}2 \times P(A)$, y no 0.2+P(A)

[12] SCHIELD, Milo. Statistical literacy: Difficulties in describing and comparing rates and percentages. Ausburg College. Minneapolis.

(la probabilidad de B es un 20 % mayor). Es importante *la claridad en las comparaciones que pueden ser: una diferencia simple, una proporción simple o una difrencia relativa* como en el ejemplo.

Capítulo 3

Estructuración de actividades de enseñanza de los conceptos de azar y probabilida mediante del aprendizaje colaborativo

Se parte definiendo los objetivos de aprendizaje, lo que se quiere alcanzar, éstos están relacionados con el contenido curricular, con los conceptos que se busca que los estudiantes del programa de ingeniería industrial comprendan para la construcción, el análisis y la solución de los modelos mátematicos con datos de naturaleza probabilística utilizados en esta rama de la ingeniería. Lo primordial aquí es que los estudiantes incluyan la incertidumbre en el comportamiento de los sistemas que estudian, tenga una herramienta para realizar una medición de ésta mediante de la probabilidad y puedan llegar a tomar decisones basados en ello. Las actividades de enseñanza serán planteadas mediante problemas que los estudiantes deben resolver en grupos.

Como se busca la comprensión de la presencia del azar en los sistemas que se estudian en ingeniería y las herramientas que el cálculo de probabilidad ofrece para realizar una medición de éste, se debe partir, como se describió en el cápitulo anterior, de los conceptos previos que los estudiantes poseen y que se convierten en dificultades para el aprendizaje, conocimientos previos necesarios como son: conjuntos y operaciones entre conjuntos, razonamiento combinatorio, manejo de razones y proporciones, el uso de una semántica especial, y las representaciones gráficas y escritas. Con el trabajo en grupo en ambiente de aprendizaje cooperativo o colaborativo, utilizando la resolución de problemas, *se pretende que los estudiantes exploren la presencia del azar en algunos sistemas a estudiar y alcancen los objetivos académicos ya mencionados, dándose apoyo mutuamente, aportando ideas en conjunto para obtener el objetivo común, con el mismo nivel de importancia, descubran sus dificultades en el manejo del azar y su medición y encuentren formas para superarlas en grupo*.

3.1. Problemas a proponer

Ya planteados los objetivos de enseñanza se buscan problemas relacionados con la ingeniería industrial, que motive el trabajo de los estudiantes y que les favorezcan un encuentro con la incertidumbre. Se plantea, a modo de ejemplo un problema relacionado con el origen de la teoría de probabilidad, los juegos de azar, y dos problemas que involucran toma de decisiones, el primero relacionado con control de calidad y el segundo con el diseño de sistemas. Se espera que las ideas desarrolladas en la resolución de estos problemas tengan las características que facilite el cambio conceptual: intelegible, plausible y fructífera [1]:

Problema uno (El baloto): Juan ha comprado una fracción o tiquete del baloto, un juego de azar en donde el jugador debe seleccionar 6 números de entre cuarenta y cinco (45). El premio mayor se recibe si los seis números selecionados concuerdan con los escogidos aleatoriamente por una máquina de balotas; se reciben premios secuendarios por acertar cinco, cuatro o tres de los seis números, estos premios van disminuyendo en monto de dinero entre menos sean los números acertados, mientras que el número de ganadores va en aumento.

Problema dos (La inspección de lotes de unidades para producción):A una empresa llega un contenedor con 1000 unidades de un artículo que acaba de enviar un proveedor. El contenedor es recibido por la unidad de control de calidad del departamento de producción; el empleado de control de calidad va extrayendo de forma aleatoria una a una, unidades del contenedor y las somete a una prueba a fin de confirmar que están en buen estado o defectuosas. La empresa es muy exigente con el provevedor y no aceptaría que más de 10 unidades de las mil del cargamento

[1]PALACIOS, Carlos y ZAMBRANO Encaranación. Aprender y Enseñar Ciencias. Una relación a tener en cuenta. Boletín 31. agosto 1993. Proyecto Principal de Educación

resulten defectuosas. Después de revisar 9 unidades el empleado ha encontrado una defectuosa, la novena revisada; sin embargo al revisar la décima unidad seleccionada y descubrir que es defectuosa el empleado deteiene la revisión, decide devolver el cargamento por consideralo no apto acorde con las exigencias de la empresa.

Problema tres (Diseño de sistemas confiables): Se está diseñado un nuevo aparato electrónico utilizado en la lectura de códigos de barra a alta velocidad. Se ha está decidiendo cuantos lectores ubicar en cada aparato, aunque solo es necesario que un lector capture el código dada las grandes velocidades a las que se hace la lectura hay una probabilidad del 0.05 que un lector no lo registre. La empresa debe decidió colocar tres lectores en cada aparato porque en consulta con los posibles compradores del mismo estos dijeron no estar dispuestos a tolerar que más de un código de barra en mil no sea leído

Los problemas aquí planteados son artificiales, abiertos y con un objetivo dirigido, aunque su solución es conocida plantea nuevos interrogantes y formas de análisis, además se buscan ciertos resultados de aprendizaje. Son problemas situados entre las categorías de aplicación, ya que algunos de los conocimientos necesarios para su resolución ya han sido elaborados por los alumnos, pero se busca que sean aplicados a nuevas situaciones, y problemas de búsqueda, ya que se pretende la construcción de nuevos conocimientos.[2]

3.2. Preguntas a ser contestadas

Se describen aquí las preguntas a a ser contestadas por los estudiantes, a fin de que el desarrollo de la comprensión se de en la dirección deseada, se pretende que con la respuesta a estas preguntas los estudiantes:.

- Desarrollarán comprensión sobre sistemas o situaciones en donde no se puede anticipar el futuro, pero es posible determinar las respuestas y asignarles probabilidades a cada una de ellas.
- Desarrollarán comprensión acerca de la necesidad de preveer la totalidad de las evoluciones de un sistema para poder asignarles probabilidades.

[2] Ibid pág 50.

- Desarrollarán comprensión sobre lo posible, lo imposible y lo cierto, y cómo ello es un acuerdo entre la intuición y la experiencia.
- Desarrollarán comprensión acerca de la construcción de secuencia lógicas que los lleven de una situación a otra.
- Desarrollarán comprensión acerca de los diferentes tipos de predicción y argumentarán a partir de ello sus cursos de acción. Comparando sus concepciones contra aquellas de las personas del común.

Al lado de cada pregunta entre paréntesis aparecen los conceptos asociados.
Problema uno (El baloto)

- ¿De cuántas formas posibles puede escoger Juan los números a jugar en el baloto? (Los estudiantes comprenderan el concepto de experiencia aleatoria y espacio muestral)
- Juan tuvo un sueño anoche con los números del baloto y selecciona estos para su tiquete, ¿tendría la misma oportunidad de ganar el premio mayor si selecciona los números que soñó o deja que la máquina los seleccione automaticámente? (Los estudiantes comprenderán el concepto de aleatoriedad)
- ¿Por qué se paga más a los cinco aciertos que a los cuatro o a los tres?, ¿cuánto es más probable acertar tres, que cuatro o cinco números? (los estudiantes comprenderán las formas de determinar espacios de eventos, el concepto de equiprobabilidad y el cálculo de probabilidad de ocurrencia de un evento)
- ¿Cuál es la probabilidad que Juan gane algún premio?, ¿como es ésta en comparación con la probabilidad de perder su dinero? 0 ¿es riesgoso jugar el baloto? (Los estudiantes comprenderán el calculo de la probabilidad de eventos resultantes de operación entre conjunto y el grado de subjetividad que guarda la probabilidad)

Problema dos (la inspección de lotes de producción)

- ¿Cuales podrían ser los resultados esperados de la inspección de la forma que es realizada por el empleado?(Los estudiantes comprenderán el concepto de experiencia aleatoria y espacio muestral)

- ¿Mediante que tipo de medición podría el empleado comparar los resultados que ha obtenido con lo que la empresa espera? (los estudiantes comprenderán como el darle una medición a la incertidumbre puede contribuir a la toma de decisiones)
- ¿Por qué no se detuvo la inspección al encontrar la novena unidad defectusosa y sí al encontrar la décima? (Los estudiantes comprenderán la naturaleza subjetiva del cálculo de probabilidades)

Problema tres (Diseñando sistemas confiables)

- ¿Cómo pudo la empresa establecer la probabilidad que un lector no lea el código de barras? (Los estudaintes comprenderán las distintas formas de establecer la posibilidad de ocurrencia de un evento)
- ¿Por qué la empresa no colocó un número más alto o más bajo de lectores en cada aparato? (Los estudiantes comprenderán cómo calcular la probabilidad de ocurrencia de eventos resultantes de operación entre conjunto y cómo tomar decisiones basados en el cálculo de probabilidades)
- ¿La empresa cumple apenas las expectativas de sus clientes o éstos pueden darse más que satisfechos? (Los estudiantes comprenderán como el cálculo de probabilidad puede ser útil para realizar pronósticos acerca del comportamiento de un sistema)

3.3. Organización de las actividades

Para la resolución de los problemas se plantea la formación de grupos de tres a cuatro estudiantes, para formar estos grupos y que estos sean lo más heterogéneos posible se puede utilizar una evaluación diagnóstica sobre los conceptos previos en los que se ha encontrado los alumnos presentan dificultades, es decir, teoría de conjuntos, razonamiento combinatorio, utilización de razones y proporciones, y construcción de modelos verbales descriptivos, esquemáticos y gráficos a modelos matemáticos. Un miembro del grupo debe convertirse en relator, quien será el encargado de llevar el registro de la carta de resolución del problema, que será la guía utilizada como lo platea García García en su libro.[3]

[3] Ibid pág 132.

Cada grupo debe iniciar con la representación y replantemiento del problema, deben plantear el problema de una forma alterna, mediante esquemás ó gráficas, identificando la información que se aporta, las incógnitas que surgen, la relación entre las incógnitas y la información conque se cuenta y estructurar una guía para la solucción del mismo. Es importante aquí que se obtenga una lista de alternativas de enfrentar el problema y que los grupos argumente las decisiones tomadas.

Los grupos deben exponer la guía que hayan creado para la solución del problema, explicando qué pasos van a realizar, las ecuaciones que van a utilizar y una completa explicación de los conceptos que han encontrado necesarios comprender en la solución del problema. En este punto la labor del docente es muy importante, debe haberse explicado ya los conceptos de experiencia aleatorio, espacio muestral y evento en clase, pero los estudiantes deben, utilizando el problema número, enfrentarse a la labor de determinar la probabilidad de ocurrencia de un evento, en este caso el resultado de un juego de azar. Es importante que el docente recalque la importancia de ambiertar el problema, que los estudiantes expresen las consideraciones que deben ser tomadas y como la solución del problema puede variar si éstas cambian; por ejemplo cómo la máquina de balotas asegura una selección aleatoria de las seis balotas.

Cada grupo debe exponer la forma como abordó la resolución del problema para lo que el profesor seleccionará a un representante del grupo (este rol cambiará de miembro de grupo en cada etapa en la que se necesite una exposición ante el aula de clase), y el aula de clase debe escoger el plan o planes que sean más adecuados y si se requiere repartirse labores de cálculo y responsabilidades de investigación, si se observa que hay una gran complejidad o demasiados cómputos por realizar. El profesor debe asegurar que los alumnos no se enfransquen en labores desalentadoras o escojan alguna línea de acción en la que se requiera conceptos que no se hayan elaborado previamente

Los grupos deben seguir los pasos para la solución del problema, intercambiando información entre sí cuando sea necesario, describir cómo obtuvieron cada respuesta, como convirtieron el modelo lingüistico o gráfico en un modelo matemático, qué simbología utilizaron. Es importante aquí que los grupos hagan una lista de las dificultades que sus miembros encontraron al tratar de llevar acabo alguno de los pasos en la resolución del problema, que alternativas de cálculo desecharon y las razones para ello, y de los métodos que utilizaron para corroborar la valiadez de las respuesta.

Cada grupo debe exponer la solución hallada y justificar cómo ésta tiene en cuenta las condiciones de problema, resuelve las dudas plantedas y el sentido o no de la misma. De igual forma dede pedirse soluciones alternativas y una análisis de lo que pasaría si algunas de las suposiciones tomadas en cuenta no se cumpliera.

En el caso de que algunas respuestas dadas por los grupos sea incorrecta, debe pedirse una revisión de los pasos seguidos en la solución del problema y con la ayuda del profesor descubrir los posibles errores y establecer un plan para su solución.

3.3.1. Seguimiento de las actividades del grupo y evaluación

El profesor debe seguir las actividades de cada grupo, intercambiando los roles entre los integrantes para que los estudiantes apáticos no se camuflen. Además debe solicitarse un informe idividual, en el que exponga los conceptos, las teorías, los algoritmos y las herramientas de cálculo utilizados en la resolución del problema, y las dificultades que para él o ella estos elementos representaron. Hay que comparar estos resultados con lo evidenciado en los reportes del grupo, para asegurar así que los estudiantes han ido creando la red de conceptos necesarios y han podido establecer estrategias de aprendizaje para superar las dificultades encontradas

Las actividades del aula de clase deben ir paralelas al avance en la resolución del problema, pero solo como apoyo en la elaboración de los conceptos necesarios para que sean aplicados por los estudiantes. Además, debe darse una lista de textos de referencias y de lecturas que sean consideradas relevantes para superar las difiicultades ya establecidas en el cápitulo 2.

Debe hacerse hincapie en la evaluación del proceso de solución del problema y en la profundidad de la respuesta hallada, de las habilidades que los grupos demuestren en la labor emprendida. Es importante evaluar las reflexiones que se den como resultado, ya que algo que debe procurarse es que estos problemas que pueden ser considerados genéricos se conviertan en problemas duros, y que los estudiantes puedan crear sus propuios algoritmos de solución.

Estas actividades de grupo van complementadas con la evaluaciones individuales desarrolladas durante la asignatura del programa en donde estos conceptos son tratados. A fin de fomentar el intercambio de estrategías de aprendizaje y el compartir procedimientos de aprendizaje entre los miembros de grupo, y el genuino interés porque todos los miembros logren los objetivos planteados, se podría promediar estas evaluaciones individuales del grupo, y si están por encima del rendimiento esperado del grupo, basado en la evaluación diagnóstica, dar una bonificación en la nota individual, así no se perjudica a los miembros del grupo por la falla de uno sus integrantes, pero se benefician todos por el triunfo del mismo.

A los problemas planteados pueden ser agregadas preguntas para ser utilizados en la enseñanza de otros conceptos de probabilidad como variables aleatorias, esperanza matemática, variabilidad. Incluso algunos de ellos pueden derivar ya sea por sugerencia de los mismos grupos o del profesor en problemas que involucren, probabilidades condicionales, ley de probabilidad total y teorema de bayes.

Conclusiones

Los años de experiencia en la enseñanza deben traducirse en una comprensión de las dificultades que los estudiantes atraviesan en su intento por comprender conceptos y aprender procedimientos y técnicas, ésta debe materializarse en rediseños de la didáctica utilizada que esté más cercano a las necesidades de los estudiantes y que responda a objetivos que nazcan dentro de la interacción en el aula.

Aunque en estrategias de enseñanza no existe la fórmula mágica es claro que aquellas basadas en los conceptos previos que los estudiantes poseen, que impliquen una interacción entre individuos y en los que se promueva la búsqueda continua a través del inerrogante permanente, pueden ofrecer mayores probabilidades de éxito que aquellas en los que estos componentes no se consideren.

Bibliografía

POZO MUNICIO, Ignacio. Aprendices y Maestros. La nueva cultura del aprendizaje. Psicología y Educación. Madrid.2002:Alianza Editores.

AUSUBEL, David; NOVAK, Joseph y HANESIAN Helen. Psicología Educativa. Un punto de vista cognoscitivo.México D.F.: Editorial Trillas. 1976.

ESTEVÉZ NÉNNIGER, Etty Haydeé. Enseñar a aprender. Estrategias cognitivas. Barcelona: Paidós. 2002

BATANERO, C., GODINO, J. D. GREEN, D., HOLMES, P., VELLECILLOS, A. Errors and difficulties in understanding elementary statistical concepts. Journal of mathematics education in science and technology, 1994, 25(4), 527-547.

DIAZ BARRIGA Frida y HERNÁNDEZ ROJAS Gerardo. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. México: McGrawHill. 1998.

JOHNSON, David, JOHNSON, Roger y HOLUBEC Edythe J. Los nuevos cículos del aprendizaje: La cooperación en el aula y la escuela. Aique grupo editor S.A. 1999.

VYGOTSKY, L.S. El desarrollo de los procesos psicológicos superiores. Barcelona: Crítica, 1979.

MONEREO, Carles y POZO, Juan Ignacio. La universidad ante la nueva cultura educativa: Enseñar y aprender para la autonomía. Madrid: Síntesis. 2003.

Verkoeijen,Imbos, van de Wiel, Berger, Schmidt. Assessing Knowledge Structures in a Constructive Statistical Learning Environment.Journal of Statistics Education Volume 10, Number 2 (2002).

Cooper, J., and Mueck, R. (1990), ”Student Involvement in Learning: Cooperative Learning and College Instruction,”Journal on Excellence in College Teaching, 1, 68-76..

DÍAZ-BARRIGA, Frida y HERNÁNDEZ, Gerardo. Estrategias docentes para un aprendizaje significativo. Una interpretación constructivista. Méxixo: McGraw Hill. 2002. p. 125.

LESTER, F.K. Trends and issues in mathematical problem solving research. En:R. Lesh y M Landau (Eds), Acquisition of mathematical concepts an processes. Nueva York: Academic Press.

GARCÍA GARCÍA, José Joaquín. Didáctica de las ciencias. resolución de problemas y desarrollo de la creatividad. Bogotá: Magisterio. 2003. p.

WAGENSBERG, Jorge. Ideas sobre la complejidad del mundo. Barcelona: Serie Matemas 9. Tusquets Editores, S.A. 1989.

HOPP, Wallace J. SPEARMAN, Mark L. Factory Physiscs. Foundations of Manufacturing Management. Segunda Edición. Nueva York: IRWING-McGRAW HILL. 2001.

ISAAC, Richard. The pleausures of probability. Springer. Nueva York, 1995.

PAULOS, John Allen. El hombre anumérico. El analfabetismo matemático y sus consecuencias.Barcelona: Metatemas 20.Túsquets Editores. 2000.

BATANERO, Carmen; GODINO, Juan; NAVARRO-PELAYO, Virginia. Combinatorial, Reasoning and its assessment. En: I.GAl, & J.B. Garfield. The assessment challenge in statistics education. IOS Press and International Statistical Institute. Amsterdam. 1997. pp. 239-252.

SHARAN, Y., SHARAN, S. Group Investigation in the cooperative classroom. In: Sharan, S. (Ed.). Handbook of Cooperative Learning, pp. 97-114. New Jersey: Greenwood Press. 1994.

SCHIELD, Milo. Statistical literacy: Difficulties in describing and comparing rates and percentages. Ausburg College. Minneapolis.

PALACIOS, Carlos y ZAMBRANO Encaranación. Aprender y Enseñar Ciencias. Una relación a tener en cuenta. Boletín 31. agosto 1993. Proyecto Principal de Educación