

Inversión bayesiana unidimensional para el caso de la magnetotelúrica

Geraldine Andrea Ariza Serrano

Trabajo de Grado para Optar el título de Física

Director

William Pinto Hernández

Doctor en Ingeniería Mecánica

Codirector

José David Sanabria

Doctor en Física

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Física

Bucaramanga

2023

### **Agradecimientos**

En primer lugar, quiero agradecer a mis directores, William Pinto y José David Sanabria por su ayuda y paciencia a lo largo de todo el desarrollo de este trabajo. Muchas gracias por el tiempo, el esfuerzo y la dedicación puesta en él.

Quiero extender mis más sinceros agradecimientos a mi mami, quien ha sido mi mayor ejemplo a seguir. Gracias por enseñarme a amar de forma incondicional y por inspirarme a ser la mujer que soy hoy en día. No tengo palabras para describir el profundo amor y gratitud que siento por todo lo que hemos vivido juntas y por todo lo que aún podemos lograr juntas en el futuro.

Gracias a Sebas por permitirme ser y apoyarme en todo momento, gracias por hacerme mejor persona, confiar en todos mis sueños y ser el motivador numero uno para que los cumpla. Gracias por enseñarme el don de la paciencia e instruirme en la ciencia.

También quiero agradecer a las mujeres que me rodean, quienes me han enseñado sobre el significado de la palabra familia y han sido una fuente de apoyo y amor incondicional en mi vida. Muchas gracias tía Sandra, tía Lucila, Sara y nona. Ustedes saben lo mucho que las amo y lo agradecida que estoy por todo lo que han hecho por mí.

Deseo expresar mi sincera gratitud a Julián Álzate y Paulinn Ferrer por su apoyo incondicional durante el desarrollo de este trabajo. Su presencia y apoyo me han sido de gran ayuda a lo largo de todo el proceso. Como dicen, los amigos verdaderos se conocen en los tiempos de crisis, y ustedes han sido una prueba de ello. ¡Mil gracias!

Quiero agradecer a la Universidad Industrial de Santander por estos años de experiencias

y conocimientos aprendidos. Durante este tiempo he tenido la oportunidad de crecer no solo académicamente, sino también como persona. Esta experiencia ha sido invaluable y la atesoraré siempre en mi corazón.

**Tabla de contenido**

<b>Introducción</b>	<b>11</b>
<b>1 Objetivos</b>	<b>13</b>
1.1 Objetivo general . . . . .	13
1.2 Objetivos específicos . . . . .	13
<b>2 Marco teórico</b>	<b>13</b>
2.1 Método magnetotelúrico (MT) . . . . .	13
2.2 Modelo directo unidimensional para MT . . . . .	18
2.3 Proceso de inversión . . . . .	20
2.3.1 Marco bayesiano . . . . .	21
2.3.2 Algoritmo Metropolis-Hastings . . . . .	24
2.4 Selección de modelos . . . . .	25
<b>3 Resultados y discusión</b>	<b>27</b>
<b>4 Conclusiones y perspectivas</b>	<b>38</b>
<b>5 Estudios posteriores</b>	<b>38</b>
<b>Referencias bibliográficas</b>	<b>39</b>
<b>Apéndices</b>	<b>42</b>

**Lista de tablas**

Tabla	1. Datos esperados del modelo de 2 capas y datos hallados una vez hecha la inversión bayesiana. ....	30
-------	------------------------------------------------------------------------------------------------------	----

**Lista de figuras**

Figura	1. Esquema de la tierra en capas 1D homogéneas con $n$ capas. . . . .	18
Figura	2. Modelo directo unidimensional para 2 capas con un error de $\sigma=1$ . . . . .	28
Figura	3. Cadenas de Markov obtenidas para un modelo de 2 capas con un error de $\sigma=1$ . . . . .	29
Figura	4. En a figura A se muestran las funciones de densidad de probabilidad para cada parámetro, en donde la línea roja representa el valor más probable de la función. En la figura B se ven representadas las funciones de densidad de distribución acumulativa para cada valor. . . . .	30
Figura	5. Modelo directo unidimensional en MT. Los puntos $R_i$ y $R_f$ representan los límites de las resistividades dados por la frecuencia . . . . .	32
Figura	6. Resultado de la inversión 1D en magnetotelúrica para un número aleatorio de capas, en donde el modelo planteado es uno de 25 capas con espesores constantes. Se muestra la distribución vertical de la resistividad eléctrica del subsuelo en función de la profundidad. . . . .	33
Figura	7. Resultado de la inversión 1D en magnetotelúrica para un modelo de 6 capas, en donde el modelo planteado es uno de 25 capas con espesores constantes. Se muestra la distribución vertical de la resistividad eléctrica del subsuelo en función de la profundidad. . . . .	34
Figura	8. Resultado de la inversión 1D en magnetotelúrica para un modelo de 5 capas, en donde el modelo planteado es uno de 25 capas con espesores constantes. Se muestra la distribución vertical de la resistividad eléctrica del subsuelo en función de la profundidad. . . . .	35

Figura 9. Resultado de la inversión 1D en magnetotelúrica para un modelo de 3 capas,  
en donde el modelo planteado es uno de 25 capas con espesores constantes.  
Se muestra la distribución vertical de la resistividad eléctrica del subsuelo en  
función de la profundidad. .... 36

Figura 10. Probabilidad de los 7 modelos propuestos para el ejemplo de Figura 2. .... 37

**Lista de apéndices**

**Apéndice A.** Desacoplamiento del campo eléctrico y magnético en el dominio de la frecuencia  
usando las ecuaciones de Maxwell .....42



## RESUMEN

**TÍTULO:** Inversión bayesiana unidimensional para el caso de la magnetotelúrica \*

**AUTOR:** Ariza Serrano, Geraldine Andrea \*\*

**PALABRAS CLAVES:** magnetotelúrica, inversión, modelo directo, resistividades, capas.

**DESCRIPCIÓN:** La inversión magnetotelúrica es una herramienta útil para la exploración del subsuelo ya que proporciona información sobre la composición mineral. Por ello, se realizó el estudio del método geofísico magnetotelúrico (MT), mediante campos electromagnéticos naturales para determinar la resistividad del subsuelo a diferentes profundidades. De esta manera, se empleó un proceso de inversión bayesiana haciendo uso del método de Markov Chain Monte Carlo (MCMC) utilizando el algoritmo de Metropolis-Hastings (MH) para obtener información detallada sobre la distribución de la resistividad en el subsuelo. Posteriormente, se hizo el ejemplo para el modelo más sencillo con espesores variables para luego aplicar este análisis a un modelo de 25 capas con espesores constantes debido a las limitaciones que presenta el modelo al tener los espesores variables. Con base en estos resultados, se llevó a cabo un proceso de selección de modelos para estimar el número real de capas en estos ejemplos. Los resultados muestran la viabilidad del método y otorgan no solo un valor único sino una distribución de la densidad de probabilidad.

---

\* Proyecto de investigación.

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Asesores: Ph. D. William Pinto Hernández and Ph. D. José David Sanabria.

**ABSTRACT**

**TITLE:** One-dimensional Bayesian inversion for the case of magnetotelluric \*

**AUTHOR:** Ariza Serrano, Geraldine Andrea \*\*

**KEYWORDS:** magnetotelluric, inversion, direct model, resistivities, layers.

**DESCRIPTION:** Magnetotelluric inversion is a useful tool for subsurface exploration as it provides information on mineral composition. Therefore, a study of the magnetotelluric (MT) geophysical method was made by natural electromagnetic fields to determine the subsurface resistivity at different depths. Thus, a Bayesian inversion process was used using the Markov Chain Monte Carlo (MCMC) method using the Metropolis-Hastings (MH) algorithm to obtain detailed information on the resistivity distribution in the subsurface. Subsequently, the example was made for the simplest model with variable thicknesses to later apply this analysis to a 25-layer model with constant thicknesses due to the limitations that the model presents when having variable thicknesses. According to the results, a model selection process was carried out to estimate the actual number of layers in these examples. The results show the feasibility of the method and provide not only a single value but also a probability density distribution.

---

\* Investigation Project.

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Advisors: Ph. D. William Pinto Hernández and Ph. D. José David Sanabria.

## Introducción

La geofísica es la aplicación de los principios físicos en el estudio de la Tierra teniendo como principal objetivo la estimación de las propiedades físicas de la Tierra así como su constitución interna. La aplicación de la geofísica ha permitido la investigación de varios problemas prácticos entre los cuales se encuentra la exploración de hidrocarburos, la determinación del grosor de la corteza terrestre, la exploración de aguas subterráneas o incluso la ubicación de estratos hidrográficos (Reynolds, 2011).

Los problemas relacionados con la exploración del subsuelo y la caracterización de sus estructuras se abordan mediante el uso de métodos geofísicos que se basan en las propiedades físicas de los medios subterráneos. En este documento, se realiza un estudio sobre el método magnetotelúrico (MT) que permite la caracterización de las estructuras del subsuelo a través de la distribución de la resistividad eléctrica (Piña-Varas, 2014).

En MT, al igual que en otros métodos geofísicos, la inversión se utiliza para construir modelos de propiedades físicas a partir de datos adquiridos. Dependiendo del enfoque deseado, se pueden realizar diferentes tipos de inversión. En este trabajo, se estudia un proceso de inversión unidimensional utilizando inferencia bayesiana con muestreo mediante el método de Markov Chain Monte Carlo (MCMC) utilizando el algoritmo Metropolis-Hastings (MH).

Para desarrollar un modelo de calibración, es necesario realizar el proceso de inversión utilizando datos. Este proceso permite recuperar el número de capas conductoras en función de las profundidades y los valores de la resistividad eléctrica, y representarlos mediante su respectiva función de densidad de probabilidad. Cabe mencionar que el modelo directo unidimensional se basa en las ecuaciones de Maxwell, las cuales describen cómo se propagan los campos eléctricos y magnéticos

a través de medios conductores, como la Tierra.

La metodología empleada mantiene constante el espesor de las capas, pero introduce más capas al modelo para permitir una búsqueda más precisa en los parámetros de resistividad eléctrica. Hallando no solo un valor único si no también funciones de densidad de probabilidad para cada capa otorgando así un rango de confianza. De esta manera, se puede obtener una mejor caracterización de la estructura geológica. El modelo calibrado podrá ser utilizado en futuros estudios con datos de campo.

## **1. Objetivos**

### **1.1. Objetivo general**

Implementar una estrategia de inversión unidimensional y un esquema de selección de modelos para el método geofísico MT por medio del teorema de Bayes a partir del modelo directo que se obtiene a través de un análisis de las ecuaciones de Maxwell, con el uso de datos sintéticos.

### **1.2. Objetivos específicos**

- ✓ Implementar el modelo directo unidimensional para MT haciendo uso de las ecuaciones de Maxwell.
- ✓ Realizar el proceso de inversión unidimensional para MT haciendo uso de inferencia bayesiana.
- ✓ Aplicar las técnicas de selección de modelos de inferencia bayesiana con base en el número de capas.

## **2. Marco teórico**

### **2.1. Método magnetotelúrico (MT)**

En general, existen gran variedad de métodos geofísicos en los cuales se hace uso de campos naturales o artificiales. Para el primer caso que corresponde a los campos naturales, se utilizan campos eléctricos, magnéticos, gravitacionales y electromagnéticos de la Tierra con el fin de obtener perturbaciones que pueden ser causadas por ciertas anomalías geológicas, otorgando así, información sobre las propiedades de los substratos a mayores profundidades ya que trabajan a bajas frecuencias (Kearey, Brooks, y Hill, 2013). Por otro lado, los métodos de fuente artificial requieren la generación de señales artificiales para medir la respuesta del subsuelo a estas señales,

proporcionando así un análisis más detallado del subsuelo gracias a las imágenes que otorga .

El método magnetotelúrico (MT) es uno de los métodos geofísicos utilizados para estudiar el subsuelo. A diferencia de los métodos activos que requieren la generación de campos eléctricos o electromagnéticos artificiales, el MT es un método pasivo que utiliza las ondas electromagnéticas naturales como fuente de señal. Dependiendo del rango de frecuencias en el que MT opere es posible alcanzar profundidades de kilómetros otorgando información sobre la resistividad eléctrica del subsuelo (Muttaqien y Nurjaman, 2021).

Es un método que se basa en la interpretación de mediciones en superficie de los campos eléctricos y magnéticos generados por corrientes terrestres naturales que fluyen por el subsuelo. Estas mediciones permiten estimar la resistividad eléctrica en función de la frecuencia y posteriormente en función de la profundidad a través de algoritmos de inversión de datos (Arzate, Corbo, Quirola, Otiniano, y Araguás, 2011).

El fundamento básico del método magnetotelúrico (MT) radica en el análisis y estudio de las ecuaciones de Maxwell, las cuales describen los fenómenos electromagnéticos en una región del espacio. Estas ecuaciones son útiles para evaluar el comportamiento de los campos eléctricos y magnéticos en presencia de corrientes terrestres naturales que fluyen por el subsuelo, sin necesidad de considerar el movimiento de las cargas. presencia de ese campo electromagnético (Griffiths, 2005; Jackson, 2007).

Las ecuaciones de Maxwell se definen como

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{Ley de Faraday} \quad (1)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{Ley de Ampère-Maxwell} \quad (2)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Ley de Gauss para el campo eléctrico} \quad (3)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Ley de Gauss para el campo magnético} \quad (4)$$

Para el desarrollo del método se deben tener en cuenta las siguientes simplificaciones (Simpson y Bahr, 2005)

1. Se cumplen las ecuaciones electromagnéticas generales de Maxwell, ya que describen la propagación de los campos electromagnéticos en la Tierra.
2. La Tierra no genera energía electromagnética, solo la disipa o la absorbe.
3. Todos los campos pueden usarse como conservativos y analíticos lejos de la fuente. Es decir, que la energía almacenada en un campo electromagnético es constante.
4. Los campos de fuentes electromagnéticas naturales pueden tratarse como ondas electromagnéticas uniformes polarizadas en un plano que inciden sobre la Tierra con un incidencia casi vertical.
5. No existe acumulación de carga en ninguna capa dentro de la Tierra lo que quiere decir que la carga en un punto dado en la Tierra es constante en el tiempo.
6. La carga se conserva y la Tierra se comporta como un conductor óhmico, de modo que se cumple que  $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$ .
7. El campo de desplazamiento eléctrico es cuasi-estático para los períodos de sondeo MT. Esto

significa que los cambios en el campo eléctrico a lo largo del tiempo son muy lentos en comparación con la frecuencia de la fuente .

8. Se asume que cualquier variación en las permitividades eléctricas y permeabilidades magnéticas de las rocas es insignificante en comparación con las variaciones en las conductividades de las rocas.

Con dichas consideraciones y realizando un análisis en el dominio de la frecuencia con el fin de desacoplar el campo eléctrico del magnético se construyen ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden homogéneas (ver Apéndice A), en donde sus soluciones vienen dadas por

$$E_{xs}(z) = E_1 e^{(\alpha+i\beta)z} + E_2 e^{-(\alpha+i\beta)z},$$

$$H_{ys}(z) = H_1 e^{(\alpha+i\beta)z} + H_2 e^{-(\alpha+i\beta)z},$$

donde  $E_1, E_2, H_1$  y  $H_2$  son constantes conocidas como amplitudes de campo eléctrico y magnético, respectivamente.

Para una onda plana uniforme que se propaga en cierto medio, la relación entre el campo eléctrico y magnético es constante y a esta relación se le conoce como impedancia característica. Suponiendo que  $\mathbf{a}_y$  es una onda viajera y que su campo eléctrico es de la forma

$$\mathbf{E}_s = E_{xs} \mathbf{a}_z = E_0 e^{-\gamma z} \mathbf{a}_x,$$

el campo magnético correspondiente se puede encontrar a partir de las ecuaciones de Maxwell libres de fuente



$$\nabla \times \mathbf{E}_s = -i\omega\mu\mathbf{H}_s \longrightarrow \mathbf{H}_s = H_{ys}\mathbf{a}_y,$$

note que la dirección de propagación para esta onda es  $\mathbf{E} \times \mathbf{H}(\mathbf{a}_x \times \mathbf{a}_y = \mathbf{a}_z)$ .

Entonces la impedancia característica se define como la relación entre las amplitudes de los campos eléctricos y magnéticos (Başokur, 1994), por lo que

$$Z = \frac{E_{xs}}{H_{ys}} = \frac{E_0 e^{-\gamma z}}{\frac{\gamma}{i\omega\mu} E_0 e^{-\gamma z}} = \frac{i\omega\mu}{\gamma} = \frac{i\omega\mu}{\sqrt{i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)}} = \sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma + i\omega\epsilon}},$$

En este caso, se considera que se tienen buenos conductores, lo que implica que la corriente de desplazamiento es insignificante en comparación con la corriente de inducción, cumpliéndose la relación  $\sigma \gg \omega\epsilon$ . Como resultado, la impedancia característica se define de la siguiente manera

$$Z = \sqrt{\frac{i\omega\mu}{\sigma}}, \quad (5)$$

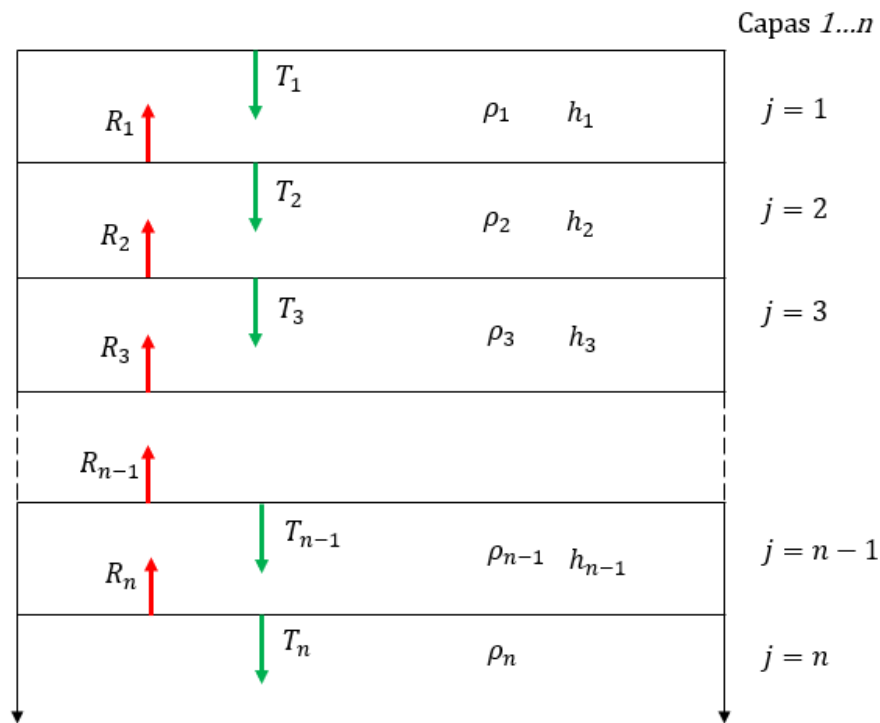
como  $\sigma = 1/\rho$ , la resistividad aparente vendría siendo (Niwas, Gupta, y Gaur, 2005)

$$\rho = \frac{1}{\omega\mu} |Z|^2, \quad (6)$$

la resistividad eléctrica del subsuelo es una medida de la dificultad que encuentra la corriente al pasar por un material, pero en la vida real está dada por diferentes estructuras geológicas, lo que la hace compleja y se representa como una resistividad aparente. (Lowrie y Fichtner, 2020).

**2.2. Modelo directo unidimensional para MT**

Para el modelo directo unidimensional en MT, se trabaja con  $n$  capas 1D homogéneas, cada una con su propia resistividad ( $\rho$ ) y grosor ( $h$ ). Durante el desarrollo del modelo directo, se utilizará un código presentado por Andrew Pethick de manera libre que permite realizar simulaciones del modelo directo unidimensional (Pethick, 2016).



**Figura 1.** Esquema de la tierra en capas 1D homogéneas con  $n$  capas.

Fuente: Imagen adaptada de (Pethick, 2016).

En la Figura 1 se puede observar el modelo de capas en el subsuelo, en donde cada capa tiene su respectiva resistividad. Además, se asume que las capas son horizontales e isotrópicas, es decir, que tienen las mismas propiedades físicas en todas las direcciones. Por otro lado, las ondas electromagnéticas se propagan por el medio y se pueden describir mediante las leyes de la reflexión y transmisión (flechas rojas y verdes en la Figura 1, respectivamente). Es decir, cuando una onda electromagnética se encuentra con una interfaz entre dos capas con diferentes propiedades eléctricas,

parte de la onda se refleja y parte se transmite. Este proceso se puede ver como uno iterativo ya que se repite desde la última capa hasta que llega a la superficie, es decir, la solución se calcula y se transmite a la anterior.

En la ecuación (5) se puede resolver la impedancia homogénea que corresponde a la proporcionalidad existente entre  $E_x$  y  $H_y$  (Pedersen y Hermance, 1986). El proceso comienza en la última capa, por lo que se resuelve la impedancia para la capa  $n$  como sigue

$$Z_n = \sqrt{i\omega\mu\rho_n}, \quad (7)$$

esta impedancia puede considerarse como una impedancia teórica, ya que representa la relación entre el campo eléctrico y el campo magnético para una capa homogénea en particular. Sin embargo, en la mayoría de los casos, el subsuelo está compuesto por varias capas con diferentes propiedades eléctricas, lo que significa que la impedancia teórica debe ser reevaluada y el problema resuelto para el caso en el que existan capas superiores. Para resolver este problema, es necesario conocer la energía que se refleja y se transmite en el límite de cada una de estas capas ( $j$ ).

Para realizar esto es necesario definir el coeficiente de reflexión  $R_j$  que ayuda a describir la amplitud de una onda reflejada respecto a la onda incidente, para ello se calcula el parámetro de inducción  $\gamma_j$ , el factor exponencial  $E_j$  y la impedancia intrínseca  $\omega_j$  (recordando que esto se halla para la capa  $j$ ) (Niwas y cols., 2005; Pethick, 2016; Grandis, 1999; Pedersen y Hermance, 1986),

$$\gamma_j = \sqrt{i\omega\mu_0\sigma_j}, \quad (8)$$

$$E_j = e^{-2\gamma_j h_j}, \quad (9)$$

$$\omega_j = \gamma_j \rho_j, \quad (10)$$

entonces el coeficiente de reflexión es

$$R_j = \frac{\omega_j - Z_{j+1}}{\omega_j + Z_{j+1}}, \quad (11)$$

y por lo tanto, la impedancia de la capa se calcula a partir del coeficiente de reflexión, obteniendo que

$$Z_j = \omega_j \frac{1 - R_j E_j}{1 + R_j E_j}, \quad (12)$$

por lo que una vez calculadas todas las impedancias ( $j = n..,1$ ), se toma la impedancia de la primera capa y se calcula la resistividad aparente ( $\rho_a$ ), esta resistividad se considera aparente debido a que se tiene un modelo de una tierra con capas y por otro lado, también se calcula la fase ( $\phi$ ) que se convierte en una función del periodo (Grandis, 1999)

$$\rho_a = \frac{1}{\omega \mu} |Z_1|^2, \quad (13)$$

$$\phi = \tan^{-1} \frac{Im(Z_1)}{Re(Z_1)}. \quad (14)$$

### 2.3. Proceso de inversión

La inversión es un proceso común en muchas áreas de la ciencia y la ingeniería, y en general se refiere a la técnica de encontrar una solución o modelo que sea consistente con un conjunto de datos y una serie de restricciones con el fin de encontrar parámetros que caracterizan el sistema (Tarantola, 2005). En el campo de la geofísica, la inversión se utiliza para inferir las propiedades físicas de la Tierra a partir de mediciones geofísicas y, en particular, para resolver el problema de la inversión en métodos electromagnéticos, cuyo resultado sea consistente tanto con los datos como con el conocimiento geológico (Kang, Heagy, Cockett, y Oldenburg, 2017).

En este caso para el problema de inversión se adopta el marco bayesiano y algunos de sus conceptos básicos se presentan a continuación, gran parte de la teoría que se va a presentar es tomada del artículo *Thermorheologically simple materials: A bayesian framework for model calibration and validation* (Hernández, Castello, Roitman, y Magluta, 2017).

**2.3.1 Marco bayesiano** En el marco bayesiano, todas las variables son modeladas como variables aleatorias. Es decir, se trata de una función que asigna un valor numérico al resultado de un experimento y las incertidumbres se describen mediante funciones de densidad de probabilidad (FDP), que indican la probabilidad relativa de que la variable aleatoria tome un valor determinado. Desde la perspectiva de la inversión estadística, la solución del problema inverso es la distribución de probabilidad de la cantidad de interés cuando se ha incorporado al modelo toda la información que se tenga disponible (Kaipio y Somersalo, 2006).

Es importante destacar que, a diferencia de otros métodos de inversión como la regresión lineal, el análisis discriminante o el análisis de mínimos cuadrados, entre otros, la inversión bayesiana no es determinista. En lugar de proporcionar una única solución, esta técnica proporciona una distribución de probabilidad que permite expresar la incertidumbre de los datos y explorar diferentes soluciones posibles que sean consistentes tanto con los datos como con el conocimiento geológico (Tarantola, 2005).

Este enfoque permite estimar toda la información posible sobre cantidades desconocidas en  $\theta \in \mathbb{R}^n$  conjugando

- ✓ Un conjunto de datos medidos.
- ✓ La estructura del modelo.

✓ Información sobre  $\theta$  que está disponible antes de la adquisición de datos.

Ahora, se supone que la relación entre las mediciones  $\mathbf{Y} \in \mathbb{R}^N$  y las predicciones del modelo pueden describirse mediante un modelo de observación con error aditivo de la siguiente manera

$$\mathbf{Y} = \mathbf{A}(\theta, \mathbf{x}) + \mathbf{e}, \quad (15)$$

donde  $\mathbf{A}(\theta, \mathbf{x})$  corresponde a un operador que proporciona predicciones del modelo  $\mathbf{Y}^m = \mathbf{A}(\theta, \mathbf{x})$  para la respuesta del sistema una vez que se especifica el del vector de parámetros  $\theta$  del modelo, así como sus condiciones iniciales y de contorno. Y la variable aleatoria  $N$  dimensional  $\mathbf{e}$  corresponde al ruido de medición aditivo y se modela como un gaussiano de media cero y desviación  $\zeta$ .

Como  $\mathbf{Y}$ ,  $\theta$  y  $\mathbf{e}$  se modelan como variables aleatorias, la regla de Bayes (Stone, 2013) se puede utilizar para describir la relación entre ellas

$$\pi(\theta | \mathbf{Y}) = \frac{\pi(\mathbf{Y} | \theta)\pi(\theta)}{\pi(\mathbf{Y})}, \quad (16)$$

donde  $\pi(\theta | \mathbf{Y})$  corresponde a la función de densidad de probabilidad posterior de los parámetros del modelo,  $\pi(\mathbf{Y} | \theta)$  representando el modelo de probabilidad, que relaciona el modelo y los datos y también es llamado verosimilitud,  $\pi(\theta)$  es el modelo anterior para los parámetros desconocidos  $\theta$ . En cuanto a  $\pi(\mathbf{Y})$  es la densidad de datos medidos  $\mathbf{Y}$ , en este caso actúa como factor de escala.

El modelo anterior  $\pi(\theta)$  mostrado en la ecuación (16) expresa el estado actual de conocimiento sobre los parámetros desconocidos y debe elegirse de acuerdo a lo que se conoce sobre  $\theta$  antes de obtener el conjunto de medidas  $\mathbf{Y}$ . Ahora, si el nivel de información sobre  $\theta$  no es suficiente, lo que se suele hacer es definir una función de densidad de probabilidad uniforme, es decir, existe un rango en que se encuentran las mismas probabilidades para diferentes parámetros. Para el modelo

de verosimilitud  $\pi(\mathbf{Y} | \theta)$  después de asumir que  $\theta$  y  $\mathbf{e}$  son independientes se puede definir como

$$\pi(\mathbf{Y} | \theta) = \pi_e(\psi(\theta)), \quad (17)$$

donde  $\pi_e(\psi(\theta))$  corresponde a la FDP del ruido aditivo  $\pi(\mathbf{e})$  evaluado en el residuo  $\psi(\theta) = \mathbf{Y} - A(\theta, \mathbf{x})$ . En algunos casos, se puede suponer que el vector de errores  $\mathbf{e}$  sigue una distribución gaussiana multivariada con media cero, lo que significa que los errores son aleatorios y no están sesgados hacia valores positivos o negativos. En este caso, el modelo de verosimilitud se puede reescribir de la siguiente forma

$$\pi(\mathbf{Y} | \theta) = \exp\left(-\frac{1}{2}[\psi(\theta)]^T \Sigma_e^{-1} [\psi(\theta)]\right). \quad (18)$$

Algo que hay que recalcar es que primero una vez se obtiene información sobre el  $\pi(\mathbf{Y} | \theta)$  posterior, se puede calcular estimaciones puntuales para  $\theta$ , como el estimador a posterior máximo  $\theta_{MAP}$  y el valor esperado  $\mathbb{E}[\theta]$  de la siguiente manera

$$\theta_{MAP} = \max \pi(\theta | \mathbf{Y}) \text{ y } \mathbb{E}[\theta] = \int \theta \pi(\theta | \mathbf{Y}) d\theta, \quad (19)$$

por lo que calcular  $\theta_{MAP}$  exige realizar procesos de optimización y el cálculo de  $\mathbb{E}[\theta]$  exige a su vez, integración en el espacio multidimensional  $\mathbb{R}_n$ , hecho que puede dificultar la solución. Lo segundo que hay que tener en cuenta es que la posterior  $\pi(\theta | \mathbf{Y})$  es a menudo una función compleja e implícita del conjunto  $\theta$  debido a las no linealidades entre los parámetros del modelo y las predicciones para  $A(\theta, \mathbf{x})$  así como el perfil de distribución  $\pi(\mathbf{e})$ . Por lo tanto para este caso la exploración de este  $\pi$  posterior se decide realizar por muestreo utilizando el método de Markov Chain Monte Carlo (MCMC).

El método MCMC produce una cadena de Markov <sup>1</sup> ergódica <sup>2</sup>, de modo que converge (Casella y Robert, 1999) y cuya distribución estacionario corresponde a  $\pi$ ; las muestras se extraen secuencialmente de modo que la distribución de las muestras depende de la última muestra extraída. Básicamente, lo que se hace es crear una cadena de estados aleatorios que a medida del tiempo evoluciona de modo que se acerque a la distribución objetivo. Para implementar este método es necesario usar algoritmos que ayuden a generar esas cadenas, tales como el algoritmo de Gibbs, el algoritmo Hamiltoniano Monte Carlo, el algoritmo de Metropolis-Hastings, entre otros. Para este caso en particular, se hará se utilizara el algoritmo de Metropolis-Hastings (MH) debido a que es el más utilizado debido a su simplicidad (Liu, 2008).

**2.3.2 Algoritmo Metropolis-Hastings** El algoritmo Metropolis-Hastings (MH) es un método de Monte Carlo en cadena de Markov que se usa para obtener muestras aleatorias con base en una distribución de probabilidad a partir de la cual es difícil el muestreo directo; es un método Monte Carlo porque realiza un muestreo aleatorio sobre el espacio de estados con los que se cuenta y es basado en cadena de Markov debido a que la convergencia se hace recorriendo distintos estados a partir de una probabilidad de transición (Marrero Gómez, 2017).

Por lo que este método es un procedimiento que genera muestras a partir de una distribución objetivo  $\pi(\theta)$ . De forma general, la secuencia de estados comienza en un estado inicial  $\theta^{(0)}$  y para cada paso  $j$  un estado candidato  $\theta^{(c)}$  se extrae de una distribución de propuesta que depende únicamente del estado anterior  $\theta^{(j-1)}$ . El nuevo estado candidato  $\theta^{(c)}$  se acepta o se rechaza según un nivel de probabilidad  $a_{MH}$ .

Entonces, en cuanto al algoritmo como tal para MH se presenta a continuación por medio de

---

<sup>1</sup>Una cadena de Markov hace referencia a un proceso que se mueve de un estado a otro en el tiempo, donde la probabilidad de pasar de un estado a otro depende únicamente del estado actual y no de los estados anteriores.

<sup>2</sup>Una cadena de Markov ergódica es un tipo de cadena donde el estado al que se llega después de muchas transiciones aleatorias no depende del estado inicial.



un número de pasos (Hernández y cols., 2017), en el que se adopta que la FDP objetivo  $\bar{\pi}(\theta)$  corresponde a la FDP posterior  $\pi(\theta | \mathbf{Y})$  definida en la ecuación (15), es decir,  $\bar{\pi}(\theta) = \pi(\theta | \mathbf{Y})$ .

1. Definir el número de muestras  $N_{mc}$ .
2. Elegir un estado inicial para la cadena de Markov  $\theta^{(0)}$ .
3. **for**  $j = 1$  a  $N_{mc}$  **do**
4. Extraer un estado de muestra candidato  $\theta^{(c)}$  de la propuesta FDP  $T(\theta^{(c)} | \theta^{(j-1)})$ .
5. Calcular la probabilidad de aceptación  $a_{MH}(\theta^{(c)} | \theta^{(j-1)})$  para el estado candidato  $\theta^{(c)}$ :

$$a_{MH}(\theta^{(c)} | \theta^{(j-1)}) = \min \left\{ 1, \frac{\pi(\theta^{(c)} | \mathbf{Y}) T(\theta^{(j-1)} | \theta^{(c)})}{\pi(\theta^{(j-1)} | \mathbf{Y}) T(\theta^{(c)} | \theta^{(j-1)})} \right\}. \quad (20)$$

6. Muestra  $u$  de un FDP uniforme  $u \sim \mathcal{U}(0, 1)$ .
7. **if**  $u \leq a_{MH}(\theta^{(c)} | \theta^{(j-1)})$  **then**
8. Aceptar la muestra del estado candidato  $\theta^{(c)}$ , entonces  $\theta^{(j)} = \theta^{(c)}$ .
9. **else**
10.  $j = j + 1$
11. **end**
12. Desechar las primeras muestras  $N_b$  (periodo *burn-in*).

#### 2.4. Selección de modelos

Al utilizar un enfoque bayesiano, se aborda la incertidumbre estadística en la que se utiliza una distribución de probabilidad conjunta para representar las relaciones entre todas las variables

desconocidas y los datos observados. La inferencia se basa en la distribución de probabilidad condicional de las variables desconocidas dadas las observaciones. Al condicionar los datos, se obtiene una distribución posterior que describe la incertidumbre del modelo, lo que permite la selección del mejor modelo (Chipman y cols., 2001). La selección del modelo bayesiano permite comparar diferentes clases de modelos candidatos para determinar cuál de ellos describe mejor los datos experimentales (Beck, 2010).

En resumen, la selección del modelo bayesiano es un enfoque estadístico que permite comparar el rendimiento de un conjunto de modelos candidatos al describir datos experimentales. Ahora, si se considera un conjunto  $M \equiv \{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \dots, \mathcal{M}_{N_M}\}$  de clases de modelo  $N_M$  el cual representa un sistema. En la selección del modelo bayesiano, los modelos en  $M$  se clasifican en función de sus probabilidades condicionados por datos  $D^x$  dados por el teorema de Bayes (Vakilzadeh, 2016)

$$P(\mathcal{M}_j | D^x, M) = \frac{p(D^x | \mathcal{M}_j) P(\mathcal{M}_j | M)}{\sum_{l=1}^{N_M} p(D^x | \mathcal{M}_l) P(\mathcal{M}_l | M)}, \quad (21)$$

donde  $P(\mathcal{M}_j | M)$  denota la probabilidad previa de  $\mathcal{M}_j$  que indica la creencia del modelador sobre la plausibilidad relativa inicial de  $\mathcal{M}_j$  dentro del conjunto  $M$ . Por otro lado,  $p(D^x | \mathcal{M}_j)$  se denomina evidencia de  $\mathcal{M}_j$  que indica la probabilidad de los datos  $D^x$  según  $\mathcal{M}_j$ . Esta evidencia se puede calcular haciendo uso del teorema de probabilidad total como (Mourelatos, Majcher, Pandey, y Baseski, 2015; Vakilzadeh, 2016; Cheung y Beck, 2010)

$$p(D^x | \mathcal{M}_j) = \int_{\Theta} p(D^x | \theta, \mathcal{M}_j) p(\theta | \mathcal{M}_j) d\theta. \quad (22)$$

Es de recalcar que la evidencia logarítmica, que es usada para la comparación del modelo a nivel de grupo, se puede escribir como la diferencia de dos términos (Stephan, Penny, Daunizeau, Moran, y Friston, 2009; Vakilzadeh, 2016)

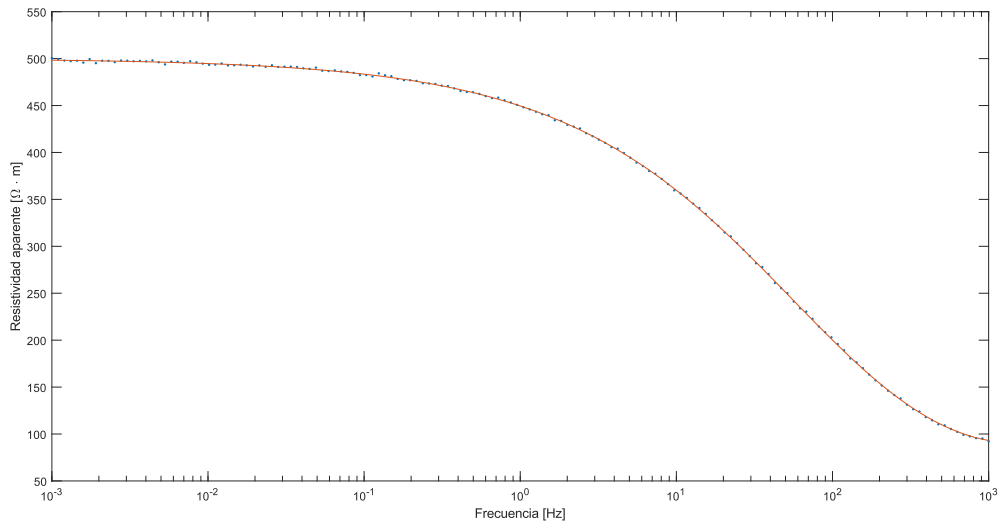
$$\ln p(D^x | \mathcal{M}_j) = \mathbb{E} [\ln p(D^x | \theta, \mathcal{M}_j)] - \mathbb{E} \left[ \ln \frac{p(\theta | D^x, \mathcal{M}_j)}{p(\theta | \mathcal{M}_j)} \right], \quad (23)$$

en el que  $\mathbb{E}$  se toma con respecto a la FDP posterior  $p(\theta | D^x, \mathcal{M}_j)$ . En esta expresión, el primer término corresponde a la media posterior de la función logarítmica de verosimilitud, que ayuda a codificar el grado en que la clase del modelo  $\mathcal{M}_j$  se ajusta a los datos y el segundo término es la divergencia de Kullback-Leibler, que refleja la cantidad de información extraída de los datos y también se puede ver como una diferencia entre dos funciones de probabilidad (Hershey y Olsen, 2007).

### 3. Resultados y discusión

Como un primer acercamiento al proceso de inversión propuesto se hace un ejemplo para un modelo de 2 capas, ya que es el más sencillo y permite tener una idea del posible comportamiento de dicho proceso. Este modelo tiene como característica principal que tiene 2 valores de resistividades ( $\rho_1$  y  $\rho_2$ ) y 1 espesor ( $h_1$ ) (que corresponde al de la primera resistividad) ya que la ultima capa, recordando, se toma como espesor infinito.

Los datos que se esperan recuperar por medio de este análisis, son, resistividades = [100 500] donde la unidad con la que se trabaja es [ $\Omega \cdot m$ ] y espesor = [150] donde la unidad trabajada es [m], al modelo se le asigno un ruido igual 1. El modelo directo unidimensional da una estimación de la distribución vertical de la resistividad eléctrica en el subsuelo a lo largo del perfil, en la Figura 2 se muestra el modelo directo hallado para el caso de 2 capas con un ruido de  $\sigma=1$ .



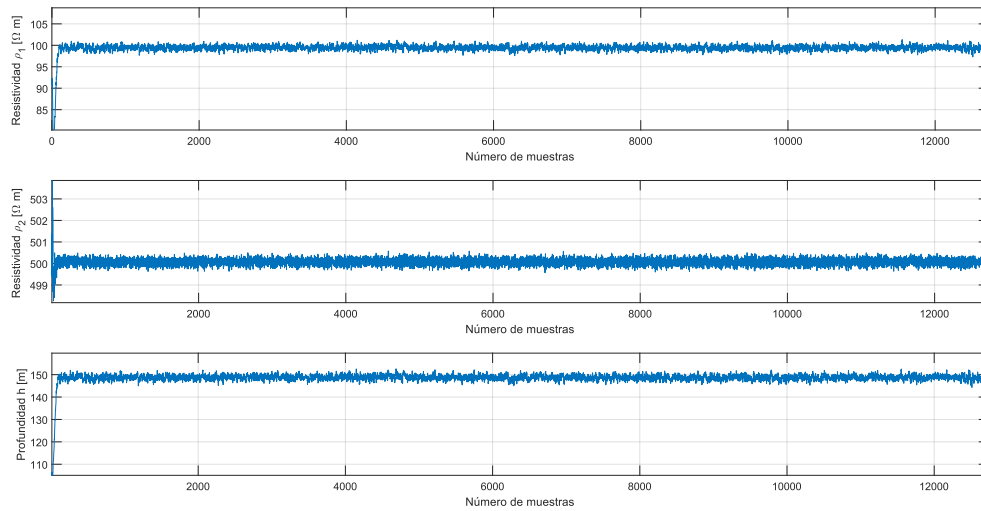
**Figura 2.** Modelo directo unidimensional para 2 capas con un error de  $\sigma=1$ .

Fuente: Autor.

Para poder hacer la búsqueda de estos parámetros se llevan a cabo tres cadenas de muestreo (dos para las resistividades y una para el espesor) que varían a través del espacio de parámetros, aceptando o rechazando cada muestra en función de su probabilidad en relación con la distribución a priori y los datos observados. Para el modelo planteado de 2 capas se generan estas cadenas y se realizan 500.000 iteraciones. También se hallan las funciones de densidad de probabilidad (FDP) que han sido obtenidas a partir de la función FDP objetivo y las funciones de distribución acumulativa (CDF), tomando las últimas 500 muestras de la cadena de Markov que corresponden a los valores en donde la cadena ya está estable, ya que estas iteraciones corresponden a la distribución estacionaria de la cadena.

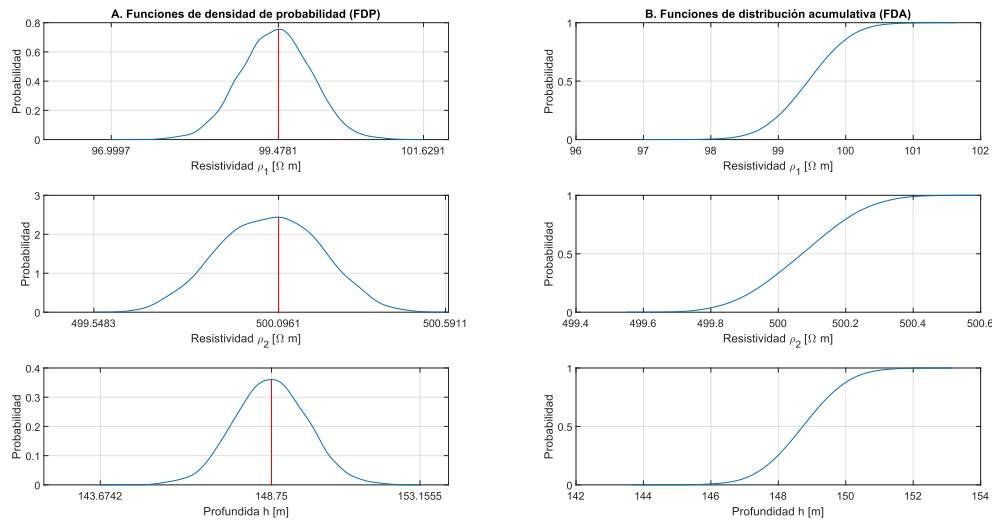
En la Figura 3 se pueden observar las 3 cadenas de Markov halladas para este modelo de 2 capas con un error de  $\sigma=1$ , en estas se puede ver como las cadenas logran estabilizarse y se mueven en el valor más probable a ocurrir y ahora tomando solo las últimas 500 muestras de esas cadenas se halló la Figura 4, donde la línea roja de la figura A representa el valor más probable de la función

y el que se tomará como el hallado al final del proceso y la figura B representa las funciones de densidad de distribución acumulativa donde el valor medio representa también el valor más probable y es el mismo que se tiene para FDP.



**Figura 3.** Cadenas de Markov obtenidas para un modelo de 2 capas con un error de  $\sigma=1$ .

Fuente: Autor.



**Figura 4.** En la figura A se muestran las funciones de densidad de probabilidad para cada parámetro, en donde la línea roja representa el valor más probable de la función. En la figura B se ven representadas las funciones de densidad de distribución acumulativa para cada valor.

Fuente: Autor.

Se puede observar que el método MCMC, mediante el algoritmo MH, responde de manera óptima. Es decir, se puede ver cómo las cadenas de Markov convergen y proporcionan los resultados de las resistividades y espesores de manera ideal (ver Tabla Tabla 1). En cuanto a las FDP, se comportan en forma de una distribución Gaussiana en donde el punto máximo de la función indica el valor más probable de la variable y por ende, es el valor de las resistividades y espesores, respectivamente.

**Tabla 1.** Datos esperados del modelo de 2 capas y datos hallados una vez hecha la inversión bayesiana.

	Valor esperado	Valor hallado por MCMC
$\rho_1 [\Omega \cdot m]$	100	99.4781
$\rho_2 [\Omega \cdot m]$	500	500.0961
$h_1 [m]$	150	148.7500

Fuente: Autor.

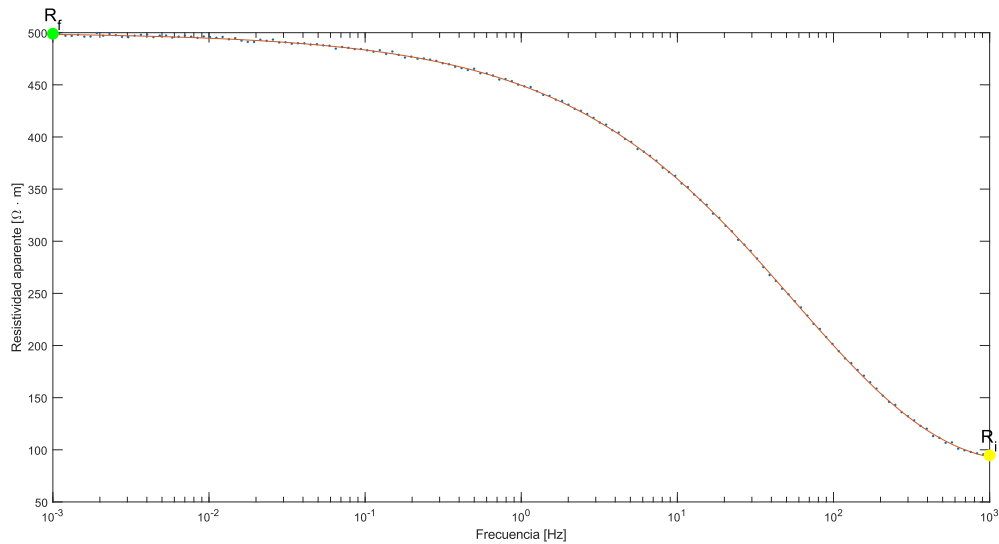
En las inversiones geofísicas es común encontrar inconvenientes relacionados con los espe-

sores del subsuelo debido a la complejidad de la estructura geológica y a las características del modelo utilizado. En particular, los espesores pueden presentar una gran variabilidad, con capas muy delgadas intercaladas entre capas muy gruesas, o incluso capas con diferentes inclinaciones y geometrías. Esto hace que la inversión sea muy compleja y requiera de una gran cantidad de tiempo computacional para su resolución, lo que puede hacerla costosa o incluso inviable en algunos casos (Telford, Telford, Geldart, y Sheriff, 1990).

Es importante tener en cuenta estos factores al realizar inversiones geofísicas y considerar soluciones alternativas para abordar estos problemas. Una alternativa para la solución de este problema es aumentar el número de capas dejando constante los espesores, por lo que el problema representado se reduce a hacer solo un búsqueda en el rango de las resistividades. Es decir, se pasa de tener un modelo de 5 capas a tener por ejemplo un modelo de 25 capas en el que todos los espesores sean constantes (Malinverno, 2002; Deng, Zhang, Kuang, Li, y Sun, 2022).

No obstante al tener un modelo nuevo con más variables el manejo que se le de a los parámetros debe ser más riguroso y debe implicar un mejor tratamiento de los datos, por lo que es necesario realizar una búsqueda adecuada de las resistividades. El modelo directo unidimensional permite ver como la resistividad varía en función de la frecuencia, por lo que si se hace uso de la información que pueda otorgar este modelo, se tendrá información a priori. Se realiza un ejemplo con un modelo de 2 capas para ver el comportamiento del modelo directo y se puede ver en la Figura 5.

Se sabe que las frecuencias altas penetran de manera superficial y que las frecuencias bajas pueden alcanzar capas más profundas (Telford y cols., 1990). Con esta información es posible establecer límites del modelo de directo, es decir, la resistividad inicial y final (representadas por  $R_i$  y  $R_f$  en la Figura 5, respectivamente). Esto se cumple para cualquier modelo de  $n$  capas.

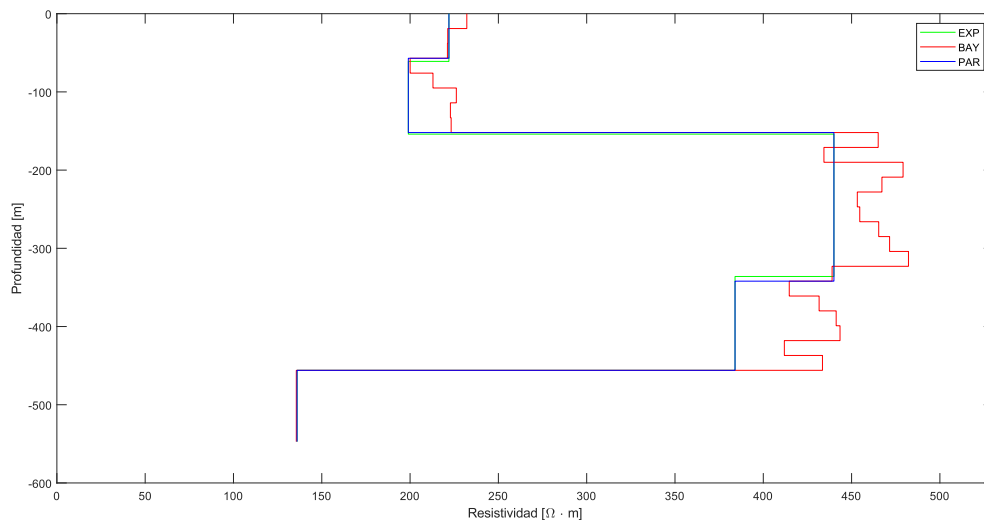


**Figura 5.** Modelo directo unidimensional en MT. Los puntos  $R_i$  y  $R_f$  representan los límites de las resistividades dados por la frecuencia

Fuente: Autor.

Ahora para un modelo de 5 capas con la nueva metodología y teniendo en cuenta esa información previa sobre las resistividades. Se procede a realizar la inversión para obtener una estimación de las resistividades de cada capa. EL modelo realiza 1'000.000 de iteraciones obteniendo que el resultado final de la inversión es el siguiente



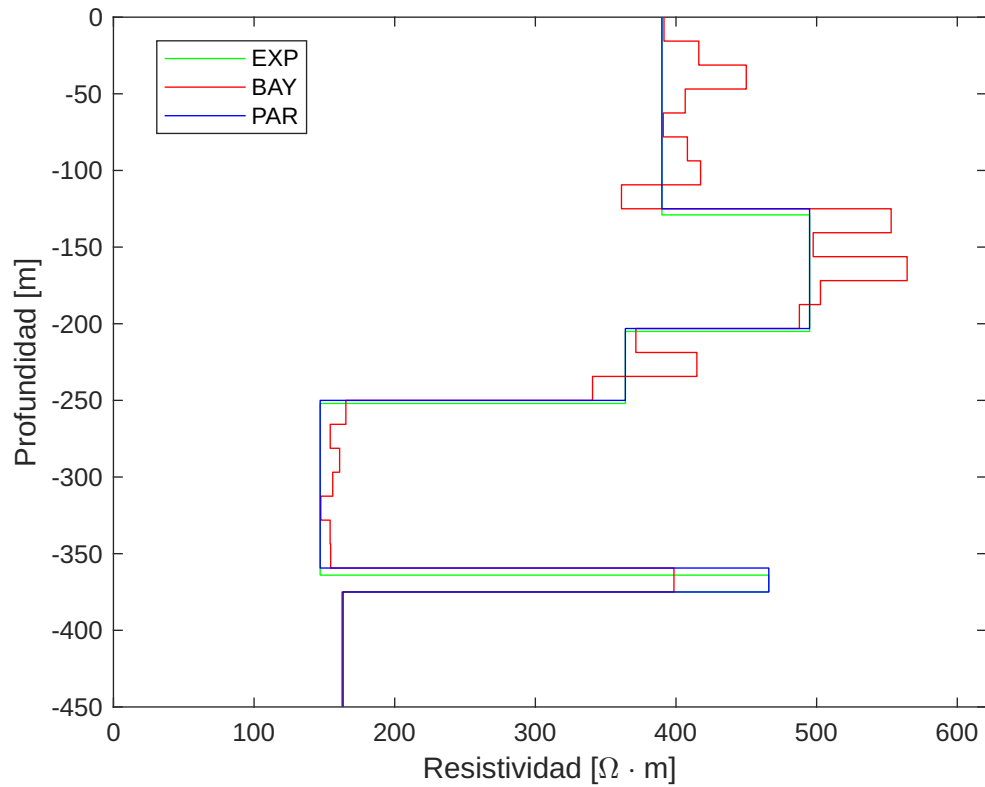


**Figura 6.** Resultado de la inversión 1D en magnetotelúrica para un número aleatorio de capas, en donde el modelo planteado es uno de 25 capas con espesores constantes. Se muestra la distribución vertical de la resistividad eléctrica del subsuelo en función de la profundidad.

Fuente: Autor.

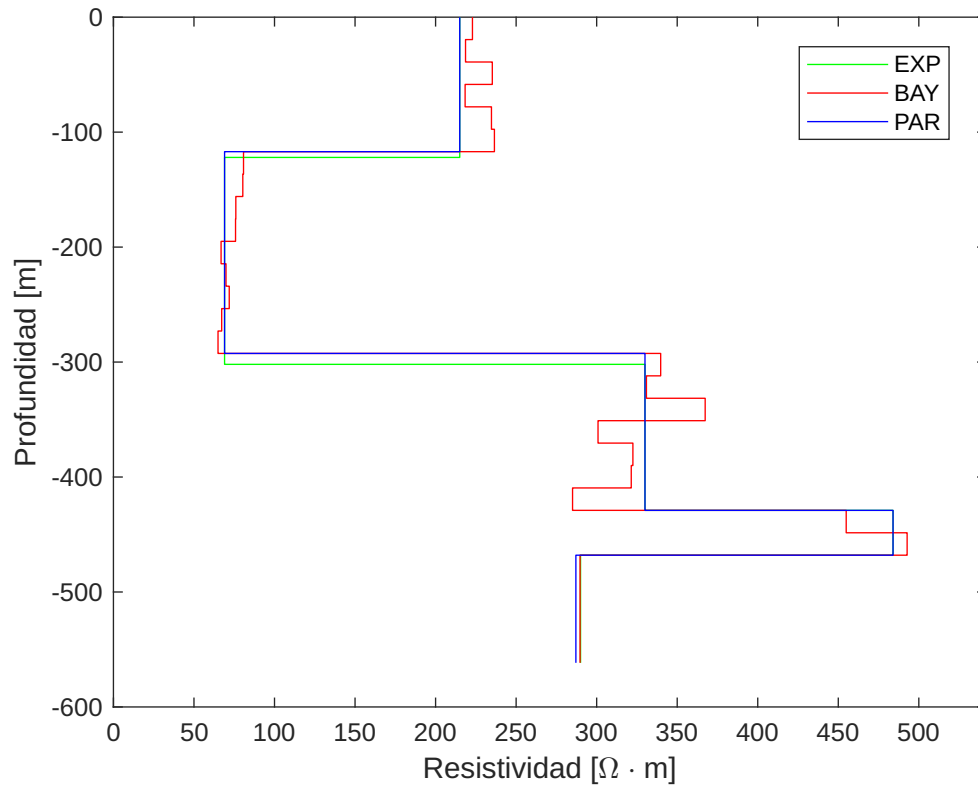
El modelo de 25 capas se ajusta bien a los parámetros del modelo real, lo que sugiere que la inversión fue exitosa y que el modelo actual está cercano al valor del modelo planteado de 5 capas. Además, es importante destacar que este tipo de inversión proporciona un rango de incertidumbre en los valores de resistividades, lo cual es una ventaja sobre otros modelos determinísticos, ya que no solo proporciona un valor, sino también un intervalo de confianza. Esta información es crucial en la interpretación de los datos.

Con el fin de corroborar que la metodología presenta buenos resultados, se hacen otros ejemplos con diferentes capas para ver la variabilidad del método, en todos los siguientes ejemplos se realizan 5'000.000 de iteraciones con el objetivo de lograr una estabilidad en las cadenas de Markov para que posterior a eso los datos extraídos sean aproximados a los reales.



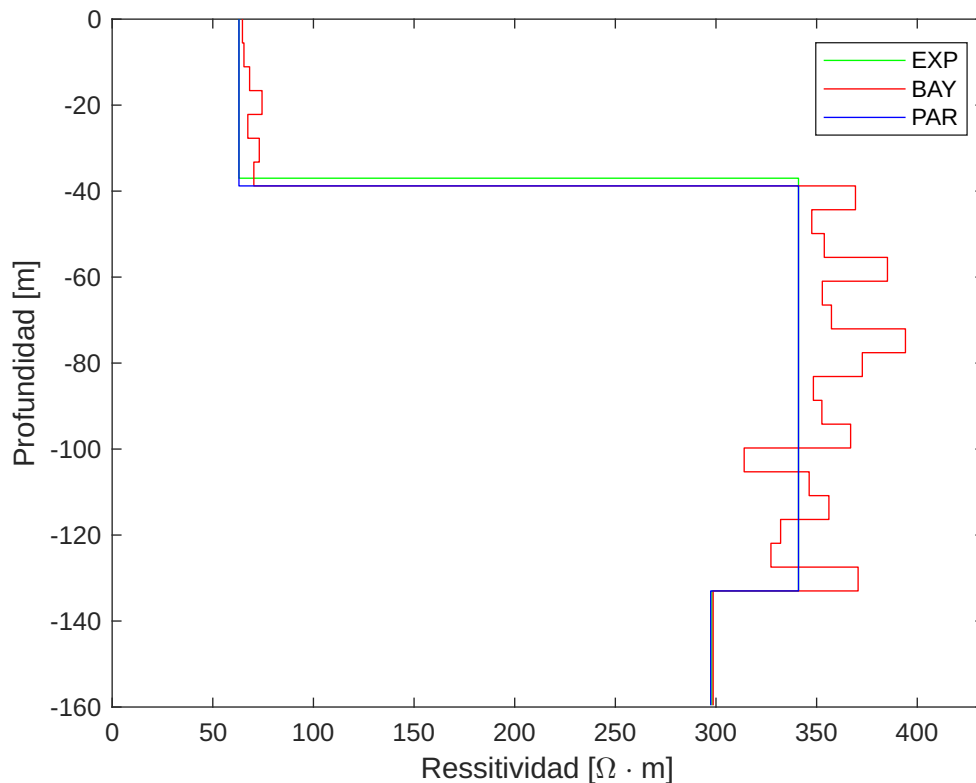
**Figura 7.** Resultado de la inversión 1D en magnetotelúrica para un modelo de 6 capas, en donde el modelo planteado es uno de 25 capas con espesores constantes. Se muestra la distribución vertical de la resistividad eléctrica del subsuelo en función de la profundidad.

Fuente: Autor.



**Figura 8.** Resultado de la inversión 1D en magnetotelúrica para un modelo de 5 capas, en donde el modelo planteado es uno de 25 capas con espesores constantes. Se muestra la distribución vertical de la resistividad eléctrica del subsuelo en función de la profundidad.

Fuente: Autor.



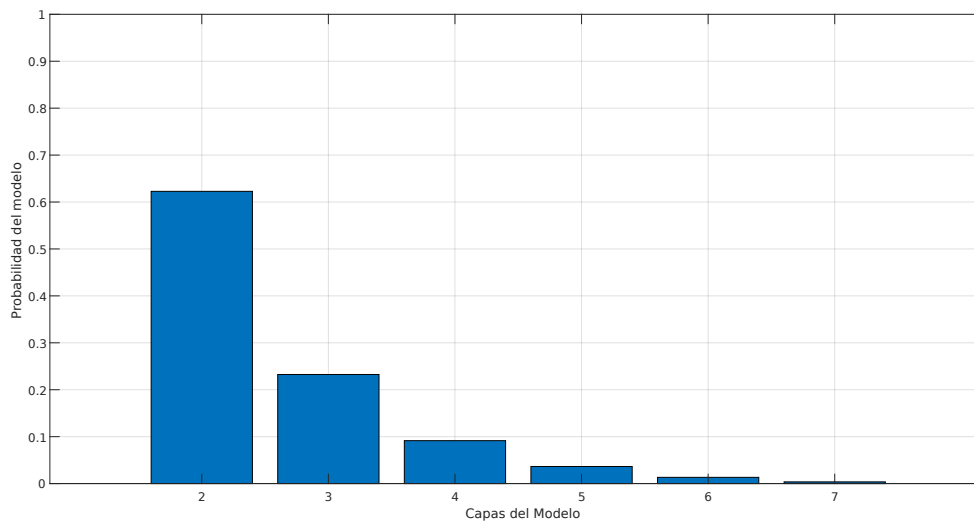
**Figura 9.** Resultado de la inversión 1D en magnetotelúrica para un modelo de 3 capas, en donde el modelo planteado es uno de 25 capas con espesores constantes. Se muestra la distribución vertical de la resistividad eléctrica del subsuelo en función de la profundidad.

Fuente: Autor.

Con esta nueva metodología se pudo mostrar como al agregar más capas y dejando constante los espesores se pueden evitar los inconvenientes al tener los espesores variables, pero sin dejar a un lado la estructura geológica del problema ya que entrega una estimación de la distribución de la resistividad en función de la profundidad.

En la práctica, es común que no se tenga conocimiento previo sobre el número de capas del subsuelo, por lo que se realiza una inversión totalmente a ciegas. En un principio se había propuesto una selección de modelos, esta selección se basaba en que el número de espesores que se presentaban eran diferentes y podían variar de manera arbitraria, por ejemplo para el caso de la Figura 2 se halla

que la probabilidad del modelo es la siguiente



**Figura 10.** Probabilidad de los 7 modelos propuestos para el ejemplo de Figura 2.

Fuente: Autor.

Como se puede observar, la selección de modelos elige el modelo más adecuado para el conjunto de datos indicando que el número de capas más probable es 2 con una probabilidad mayor al 60%, por lo que la hipótesis se cumple ya que en un principio se conocían los datos pseudo experimentales que provienen de un modelo de 2 capas. Pero ahora, como el enfoque a lo largo del proyecto ha cambiado la selección de modelos se vuelve aún más compleja y requiere un análisis más cuidadoso de los datos, por lo que para esta nueva metodología se entrega la Figura 10 y se espera que la persona que interprete los datos pueda estimar a partir de esta cuantas son las capas reales del subsuelo.

#### **4. Conclusiones y perspectivas**

Se implementó una estrategia de inversión bayesiana unidimensional por medio del método Markov Chain Monte Carlo utilizando el algoritmo de Metropolis-Hastings proporcionando una estimación de la distribución vertical de la resistividad eléctrica del subsuelo.

En la práctica estimar simultáneamente las resistividades y los espesores es complejo dado el problema no lineal de los modelos y la complejidad de la estructura geológica. Por lo que se demostró que tomar 25 capas y dejar los espesores constantes otorga resultados congruentes en donde las características de coherencia son estables, proporcionando un rango de valores en lugar de un valor único.

Se utilizaron técnicas de selección de modelos para adoptar un enfoque adecuado en la interpretación de modelos con espesores variables. En la nueva metodología propuesta, es decir, con 25 capas y espesores constantes, la selección de modelos resulta compleja por lo que la elección del modelo apropiado viene dada por la persona que interprete los datos, quien utiliza su conocimiento y experiencia para tal fin.

#### **5. Estudios posteriores**

El modelo teórico propuesto tiene como objetivo aplicarse a conjuntos de datos adquiridos en campo con el fin de estimar el número de capas conductoras, así como la distribución de las resistividades y espesores en la zona de estudio. Esto permitiría identificar posibles aplicaciones en la industria y mejorar la comprensión de la estructura geológica subyacente. Estos resultados pueden ser útiles para estudios posteriores y aplicaciones prácticas.

### Referencias bibliográficas

- Arzate, J. A., Corbo, F., Quirola, F., Otiniano, J., y Araguás, L. (2011). Sondeos magnetotelúricos de banda ancha (BMT) para el estudio del acuífero transfronterizo de Zarumilla, Ecuador-Perú. *Revista Geofísica*(63), 1–36.
- Başokur, A. T. (1994). Definitions of apparent resistivity for the presentation of magnetotelluric sounding data 1. *Geophysical Prospecting*, 42(2), 141–149.
- Beck, J. L. (2010). Bayesian system identification based on probability logic. *Structural Control and Health Monitoring*, 17(7), 825–847.
- Casella, G., y Robert, C. P. (1999). *Monte Carlo statistical methods*. Springer-Verlag, New York.
- Cheung, S. H., y Beck, J. L. (2010). Calculation of posterior probabilities for Bayesian model class assessment and averaging from posterior samples based on dynamic system data. *Computer-Aided Civil and Infrastructure Engineering*, 25(5), 304–321.
- Chipman, H., George, E. I., McCulloch, R. E., Clyde, M., Foster, D. P., y Stine, R. A. (2001). The practical implementation of Bayesian model selection. *Lecture Notes-Monograph Series*, 65–134.
- Deng, S., Zhang, N., Kuang, B., Li, Y., y Sun, H. (2022). Bayesian Markov Chain Monte Carlo inversion of surface-based transient electromagnetic data. *SN Applied Sciences*, 4(10), 254.
- Grandis, H. (1999). An alternative algorithm for one-dimensional magnetotelluric response calculation. *Computers & Geosciences*, 25(2), 119–125. Descargado de <https://www.sciencedirect.com/science/article/pii/S0098300498001101> doi: [https://doi.org/10.1016/S0098-3004\(98\)00110-1](https://doi.org/10.1016/S0098-3004(98)00110-1)
- Griffiths, D. J. (2005). *Introduction to electrodynamics*. American Association of Physics Teachers.
- Hernández, W. P., Castello, D. A., Roitman, N., y Magluta, C. (2017). Thermorheologically simple materials: A bayesian framework for model calibration and validation. *Journal of Sound and Vibration*, 402, 14–30.

- Hershey, J. R., y Olsen, P. A. (2007). Approximating the Kullback Leibler Divergence Between Gaussian Mixture Models. En *2007 IEEE International Conference on Acoustics, Speech and Signal Processing - ICASSP '07* (Vol. 4, p. IV-317-IV-320). doi: 10.1109/ICASSP.2007.366913
- Jackson, J. D. (2007). *Classical electrodynamics*. John Wiley & Sons.
- Kaipio, J., y Somersalo, E. (2006). *Statistical and computational inverse problems* (Vol. 160). Springer Science & Business Media.
- Kang, S., Heagy, L. J., Cockett, R., y Oldenburg, D. W. (2017). Exploring nonlinear inversions: A 1D magnetotelluric example. *The Leading Edge*, 36(8), 696–699.
- Kearey, P., Brooks, M., y Hill, I. (2013). *An introduction to geophysical exploration*. John Wiley & Sons.
- Liu, J. S. (2008). *Monte Carlo strategies in scientific computing*: Springer Science & Business Media.
- Lowrie, W., y Fichtner, A. (2020). *Fundamentals of geophysics*. Cambridge university press.
- Malinverno, A. (2002). Parsimonious Bayesian Markov chain Monte Carlo inversion in a nonlinear geophysical problem. *Geophysical Journal International*, 151(3), 675–688.
- Marrero Gómez, R. (2017). *Estudio del comportamiento del algoritmo Metropolis-Hastings en función del número de espines que se voltean en el Modelo de Ising* (Tesis Doctoral, Universidad Nacional de Educación a Distancia (España)). Descargado de <http://e-spacio.uned.es/fez/view/bibliuned:master-Ciencias-FSC-Rmarrero>
- Mourelatos, Z. P., Majcher, M., Pandey, V., y Baseski, I. (2015). Time-dependent reliability analysis using the total probability theorem. *Journal of Mechanical Design*, 137(3).
- Muttaqien, I., y Nurjaman, J. (2021). Two-dimensional inversion modeling of magnetotelluric (MT) synthetic data of a graben structure using SimPEG. *Riset Geologi Dan Pertambangan Indones J Geol Mining*, 31(1), 1–12.
- Niwas, S., Gupta, P. K., y Gaur, V. K. (2005). Normalized impedance function and the straight-forward inversion scheme for magnetotelluric data. *Journal of earth system science*, 114(5),



523–531.

- Pedersen, J., y Hermance, J. F. (1986). Least squares inversion of one-dimensional magnetotelluric data: An assessment of procedures employed by Brown University. *Surveys in Geophysics*, 8(2), 187–231.
- Pethick, A. (2016). *Tutorial-1D Forward Modelling (Magnetotelluric)*. Retrieved July. Descargado de <http://www.digitalearthlab.com/tutorial/tutorial-1d-mt-forward/>
- Piña-Varas, P. (2014, 5). Aplicación del método magnetotelúrico a la caracterización de reservorios: Anticlinal de El Hito (Cuenca) y Sistema Geotérmico de Tenerife. *TDX (Tesis Doctorals en Xarxa)*. Descargado de <http://www.tdx.cat/handle/10803/245208>
- Reynolds, J. M. (2011). *An introduction to applied and environmental geophysics*. John Wiley & Sons.
- Simpson, F., y Bahr, K. (2005). *Practical magnetotellurics*. Cambridge University Press.
- Stephan, K. E., Penny, W. D., Daunizeau, J., Moran, R. J., y Friston, K. J. (2009). Bayesian model selection for group studies. *Neuroimage*, 46(4), 1004–1017.
- Stone, J. V. (2013). Bayes' rule: A tutorial introduction to Bayesian analysis.
- Tarantola, A. (2005). *Inverse problem theory and methods for model parameter estimation*. SIAM.
- Telford, W. M., Telford, W. M., Geldart, L. P., y Sheriff, R. E. (1990). *Applied geophysics*. Cambridge university press.
- Vakilzadeh, M. K. (2016). *Stochastic Model Updating and Model Selection: With Application to Structural Dynamics*. Department of Applied Mechanics, Chalmers University of Technology.

## Apéndices

### Apéndice A. Desacoplamiento del campo eléctrico y magnético en el dominio de la frecuencia usando las ecuaciones de Maxwell

Las ecuaciones de Maxwell se definen como

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} \quad \text{Ley de Faraday} \quad (24)$$

$$\nabla \times \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J} + \mu_0 \epsilon_0 \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} \quad \text{Ley de Ampère-Maxwell} \quad (25)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \quad \text{Ley de Gauss para el campo eléctrico} \quad (26)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0 \quad \text{Ley de Gauss para el campo magnético} \quad (27)$$

Estas ecuaciones en la materia ayudan a predecir la propagación electromagnética y permiten describir los fenómenos electromagnéticos, otra forma de escribir estas ecuaciones es cuando la resistividad eléctrica ( $\rho$ ) es igual a 0, por lo que quedan como

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{E} &= -\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}, \\ \nabla \times \mathbf{H} &= \mathbf{J} + \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \mathbf{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mathbf{B} &= 0, \end{aligned}$$

en donde si se considera un medio isotrópico lineal, homogéneo y libre de fuentes, es decir, las características físicas no varían de un punto a otro y sus propiedades no dependen de la dirección en el espacio, se cumple que el desplazamiento eléctrico es  $\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}$ , que el campo magnético que

resume los efectos magnéticos de la materia es  $\mathbf{H} = \mathbf{B}/\mu$  y que además la densidad de corriente se puede escribir como  $\mathbf{J} = \sigma\mathbf{E}$ , por lo que las ecuaciones de Maxwell en el espacio toman la siguiente forma

$$\nabla \times \mathbf{E} = -\mu \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t}, \quad (28)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = \sigma\mathbf{E} + \varepsilon \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t}, \quad (29)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = 0, \quad (30)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{H} = 0. \quad (31)$$

Teniendo en cuenta estas ecuaciones, se hallan las ecuaciones de onda para los campos eléctrico y magnético, obteniendo las ecuaciones (32) y (33) respectivamente, que corresponden a ecuaciones de Helmholtz.

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} = 0. \quad (32)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} - \mu\sigma \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} - \mu\varepsilon \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} = 0. \quad (33)$$

Para campos armónicos de tiempo, cualquier vector  $\mathbf{A}$  en el dominio del tiempo está relacionado con otro vector  $\mathbf{A}_s$  en el dominio de la frecuencia, de modo que es posible reescribir las ecuaciones (32) y (33) a su forma de fasor

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s = \mu\sigma(i\omega)\mathbf{E}_s + \mu\varepsilon(i\omega)^2\mathbf{E}_s = i\omega\mu(\sigma + i\omega\varepsilon)\mathbf{E}_s,$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_s = \mu\sigma(i\omega)\mathbf{H}_s + \mu\varepsilon(j\omega)^2\mathbf{H}_s = i\omega\mu(\sigma + i\omega\varepsilon)\mathbf{H}_s,$$

si ahora se define la constante de propagación como  $\gamma = \sqrt{i\omega\mu(\sigma + i\omega\epsilon)} = \alpha + i\beta$  es posible entonces reducir las ecuaciones de onda vectorial en su forma fasorial como

$$\nabla^2 \mathbf{E}_s - \gamma^2 \mathbf{E}_s = 0, \quad (34)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H}_s - \gamma^2 \mathbf{H}_s = 0. \quad (35)$$

Como se sabe que los campos eléctricos y magnéticos en coordenadas rectangulares poseen tres componentes, de tal forma que las ecuaciones (34) y (35) pueden escribirse como

$$\begin{aligned} (\nabla^2 E_{xs})\mathbf{a}_x + (\nabla^2 E_{ys})\mathbf{a}_y + (\nabla^2 E_{zs})\mathbf{a}_z &= \gamma^2 (E_{xs}\mathbf{a}_x + E_{ys}\mathbf{a}_y + E_{zs}\mathbf{a}_z), \\ (\nabla^2 H_{xs})\mathbf{a}_x + (\nabla^2 H_{ys})\mathbf{a}_y + (\nabla^2 H_{zs})\mathbf{a}_z &= \gamma^2 (H_{xs}\mathbf{a}_x + H_{ys}\mathbf{a}_y + H_{zs}\mathbf{a}_z), \end{aligned}$$

en este tipo de sondeos (MT) se requiere de mediciones de las componentes horizontales  $E_x$ ,  $E_y$  del campo eléctrico y  $H_x$ ,  $H_y$  del campo magnético en un rango de frecuencias y en un rango de 24 horas o más se obtienen series de tiempo de las variaciones de los campos (Arzate y cols., 2011) y además, como el análisis que se hará a lo largo del proyecto será un análisis unidimensional, se tomará el caso en donde el campo eléctrico solo tiene una componente en  $x$  y el campo magnético solo con componente en  $y$ , de modo que ambos campos quedarán en función de  $z$ . Por lo que al no existir ciertas dependencias las ecuaciones se pueden reducir por componentes y aplicando de forma inmediata el laplaciano, se obtiene que

$$\frac{\partial^2 E_{xs}}{\partial z^2} = \gamma^2 E_{xs},$$

$$\frac{\partial^2 H_{ys}}{\partial z^2} = \gamma^2 H_{ys},$$

como se han quitado varias dependencias es posible entonces cambiar esas derivadas parciales por derivadas totales, generando que las relaciones anteriores queden como

$$\frac{d^2 E_{xs}}{dz^2} - \gamma^2 E_{xs} = 0,$$

$$\frac{d^2 H_{ys}}{dz^2} - \gamma^2 H_{ys} = 0,$$

como se ha podido ver, se ha podido desacoplar el campo eléctrico del magnético, constituyendo así ecuaciones diferenciales ordinarias de segundo orden homogéneas. En donde sus soluciones vienen dadas por

$$E_{xs}(z) = E_1 e^{(\alpha+i\beta)z} + E_2 e^{-(\alpha+i\beta)z},$$

$$H_{ys}(z) = H_1 e^{(\alpha+i\beta)z} + H_2 e^{-(\alpha+i\beta)z},$$

donde  $E_1, E_2, H_1$  y  $H_2$  son constantes conocidas como amplitudes de campo eléctrico y magnético, respectivamente.