ANÁLISIS TEÓRICO DE UN MODELO ESTACIONARIO DE QUIMIOTAXIS CON CONDICIONES DE FRONTERA NO HOMOGÉNEAS

JULIETH DANIELA CARREÑO GONZÁLEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA
2023

ANÁLISIS TEÓRICO DE UN MODELO ESTACIONARIO DE QUIMIOTAXIS CON CONDICIONES DE FRONTERA NO HOMOGÉNEAS

JULIETH DANIELA CARREÑO GONZÁLEZ

Trabajo de Grado para optar al título de
Matemática

Director
Élder Jesús Villamizar Roa
Ph.D. en Matemáticas

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA
2023

DEDICATORIA

A mi madre

con mucho amor y cariño,

gracias por todo lo que hemos superado juntas.

¡Gracias por ser mi mayor fuente de fortaleza!

AGRADECIMIENTOS

Cada paso que he dado en este proceso académico, ha sido posible gracias al apoyo inquebrantable y la fe en mi, de mis padres Nubia, Eduardo y mis hermanos, Andrés, Dayana, Angie y Mafe. Porque cada sacrificio y dedicación han sido un ejemplo para mí, recordándome constantemente el valor del esfuerzo y la perseverancia.

Agradezco al profesor Élder Jesús Villamizar Roa, por la orientación durante el desarrollo de mi tesis. Tu compromiso y dedicación han sido fundamentales para el éxito de este proyecto.

A través de estas palabras, quiero expresar a mis amigos, Julián, Álvaro y Gian, mi más sincero agradecimiento por su apoyo incondicional. Gian, desde el principio estuviste a mi lado apoyándome, incluso en los momentos en que yo misma dudaba de mis capacidades. Estoy agradecida porque fueron un impulso para seguir adelante y han dejado una huella profunda en mi corazón.

Jeinson, quiero reconocer la importancia que tuviste en este proceso y como fuiste especial para mí, el apoyo, comprensión y crecimiento mutuo, fueron muy significativos y quiero agradecerte por ello.

CONTENIDO

RESUMEN

TÍTULO: ANÁLISIS TEÓRICO DE UN MODELO ESTACIONARIO DE QUIMIOTAXIS CON CONDICIONES DE FRONTERA NO HOMOGÉNEAS *

AUTOR: JULIETH DANIELA CARREÑO GONZÁLEZ **

PALABRAS CLAVE: QUIMIOTAXIS, SISTEMA ESTACIONARIO, EXISTENCIA Y UNICIDAD DE SOLUCIONES CLÁSICAS.

DESCRIPCIÓN:

La quimiotaxis es el fenómeno sensorial que describe la influencia de determinadas sustancias químicas, presentes en el medio ambiente, sobre las especies móviles. Este trabajo trata sobre un sistema estacionario no lineal de ecuaciones diferenciales parciales que describe el proceso biofísico conocido como quimioatracción, en el que el movimiento de organismos vivos en respuesta a un estímulo químico se da hacia mayores niveles concentración de la sustancia química. Asumimos que la señal química es consumida por los organismos y se consideran condiciones de frontera más realistas. El principal objetivo de este trabajo es analizar, desde un punto de vista teórico, la existencia y unicidad de soluciones clásicas al modelo estacionario. El contenido de este trabajo monográfico se basa en la referencia[1].

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Élder Jesús Villamizar Roa, Ph.D. en Matemáticas.

[1] M. Braukhoff y J. Lankeit. *"Stationary solutions to a chemeotaxis-consumption model with realistic boundary conditions"*. En:*Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 29 11 (2019), págs. 2033-2062.

ABSTRACT

TITLE: THEORETICAL ANALYSIS OF A STATIONARY MODEL OF CHEMOTAXIS WITH NOT HOMOGENEOUS BOUNDARY CONDITIONS *

AUTHOR: JULIETH DANIELA CARREÑO GONZÁLEZ **

KEYWORDS: CHEMOTAXIS, STATIONARY SYSTEM, EXISTENCE AND UNIQUENESS OF CLASSICAL SOLUTIONS

DESCRIPTION:

Chemotaxis is the sensory phenomenon that describes the influence of certain chemical substances, present in the environment, on mobile species. This work deals with a stationary nonlinear system of partial differential equations that describes the biophysical process known as chemoattraction, in which the movement of living organisms in response to a chemical stimulus is given towards a higher concentration of the chemical. We assume that the chemical signal is consumed by organisms, and more realistic boundary conditions are considered. The main objective of this work is to analyze, from a theoretical point of view, the existence and uniqueness of classical solutions to that stationary model. The content of this monographic work is based on the reference[1].

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Élder Jesús Villamizar Roa, Ph.D. en Matemáticas.

INTRODUCCIÓN

Quimiotaxis es el término usado para describir el fenómeno sensorial de la influencia de sustancias químicas presentes en el ambiente sobre el movimiento de especies móviles. Bacterias, células somáticas y otros organismos uni o pluricelulares dirigen su movimiento de acuerdo a la concentración de ciertas sustancias químicas en su entorno, lo cual les permite encontrar su alimento o huir de venenos. Cuando el movimiento del organismo se da hacia mayores niveles de concentración (en el mismo sentido del gradiente de concentración) se dice que la quimiotaxis es positiva; en este caso, al químico se le denomina *atractor*. Por otra parte, se dice que la quimiotaxis es negativa cuando los organismos se mueven hacia regiones con menores niveles de concentración, y en ese caso a la sustancia química se denomina *repelente*. El modelo clásico de la quimiotaxis fue introducido por Keller y Segel [1] con el fin de describir la agregación del *Dictyostelium discoideum*.

El modelo matemático general que describe el fenómeno de la quimiotaxis en un dominio espacial $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N = 1, 2, 3,$ es dado por el siguiente sistema de EDP:

$$\begin{cases} n_t = \nabla \cdot (\underbrace{D_n(n,c)\nabla n}_{difusión} - \underbrace{\chi(n,c)\nabla c}_{quimiotaxis}) + \underbrace{H(n,c)}_{fuente\ especie}, \\ c_t = \nabla \cdot (\underbrace{D_c(n,c)\nabla c}_{difusión}) + \underbrace{K(n,c)}_{fuente\ señal}, \end{cases} \tag{1}$$

donde $n = n(t,x)$ representa la densidad de los organismos en la posición $x \in \Omega$ y el tiempo $t \in (0,\infty)$, $c = c(t,x)$ denota la concentración del químico atractor, $D_c(n,c)$ representa la difusividad del químico atractor, $D_n(n,c)$ representa la difusividad de la especie y los términos $K(n,c)$ y $H(n,c)$ están asociados a las fuentes de la señal y la especie respectivamente [2,3]. El sistema (1) se deduce a través de la Ley de Fick y la Ley de conservación de la masa. El libro de Murray [4] ofrece una

1 Keller E. y Segel L. "Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability". En: *Journal of Theoretical Biology* 26.3 (1970), págs. 399-415.

2 Bellomo N. et al. "Toward a mathematical theory of Keller- Segel models of pattern formation in biological tissues". En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 25.09 (2015), págs. 1663-1763.

3 Hillen T. y Painter K. "A user's guide to PDE models for chemotaxis". En: *Journal of mathematical biology* 58.1-2 (2009), págs. 183-217.

4 Murray J. *Mathematical Biology. II Spatial Models and Biomedical Applications*. Springer-Verlag New York Incorporated, 2001.

descripción de la derivación del modelo (ver también [5]). Un caso particular de (1) es dado por

$$\begin{cases} n_t = \Delta n - \nabla \cdot (n \nabla c), \\ c_t = \Delta c - nc, \end{cases} \tag{2}$$

el cual ha recibido mucho interés en los últimos años debido al sin número de aplicaciones. En este caso la quimiotaxis es de tipo atractiva y la señal química es consumida por las células, lo cual es expresado por el término $-nc$.

Un punto importante en el análisis del sistema (1), y en particular del sistema (2), es determinar el tipo de condición de frontera que debe ser asociado. Tradicionalmente se han considerado condiciones de frontera de tipo Neumann homogéneas, es decir,

$$\partial_\nu n = 0, \qquad \partial_\nu c = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \times (0, \infty).$$

Sin embargo, este tipo de condiciones de frontera, aunque son matemáticamente convenientes según Braukhoff [6] y Lankeit [7], no son totalmente realistas de acuerdo a las aplicaciones, ya que si bien parece razonable suponer que las bacterias no salen o entran en el dominio donde se genera la dinámica, la interfaz entre el dominio y el aire circundante puede admitir el paso de oxígeno producto de la actividad de las bacterias cuando estas se encuentran, por ejemplo, en un medio fluídico. En efecto, modelos matemáticos describiendo el fenómeno de la quimiotaxis atractiva con señal química de consumo y con condiciones de frontera distintas de las condiciones de Neumann homogéneas hicieron su aparición producto de la experiementación numérica, como aquellos observados en [8,9]. En este experimento se consideró una cámara delgada de agua con una cierta cantidad de bacterias dentro, distribuidas de manera casi homogénea. Observaron que las bacterias nadaban hacia la superficie en busca de oxígeno, se agrupaban, y posteriormente emergían ciertas estructuras, plu-

---

[5] Horstmann D. et al. “From 1970 until present: the Keller- Segel model in chemotaxis and its consequences”. En: *Jahresberichte Deutsch. Math.-Verein* 105 (2003), págs. 103-165.

[6] Braukhoff M. “Global (weak) solution of the chemotaxis-Navier–Stokes equations with non-homogeneous boundary conditions and logistic growth”. En: *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéari* 34 (2017), págs. 1013-1039.

[7] Braukhoff M. y Lankeit J. “Stationary solutions to a chemeotaxis-consumption model with realistic boundary conditions”. En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 29* 11 (2019), págs. 2033-2062.

[8] Hillesdon A., Pedley T. y Kessler J. “The development of concentration gradients in a suspension of chemotactic bacteria”. En: *Bulletin of Mathematical Biology* 55.(2) (1995), págs. 299-344.

[9] Tuval I. et al. “Bacterial swimming and oxygen transport near contact lines”. En: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 102.7 (2005), págs. 2277-2282.

mas hidrodinámicas en forma de dedo, que escurrían por efecto de la gravedad. Se concluyó que la interacción entre el fluido y la densidad celular era sustancial, lo que llevó a que en el año 2005, en el artículo [9] se considerara un modelo diferencial que acopla el modelo de Keller-Segel con las ecuaciones de Navier-Stokes. Este modelo está dado por

$$\begin{cases} c_t + u \cdot \nabla c = \nabla \cdot (D_c \nabla c) - nc, \\ n_t + u \cdot \nabla n = \nabla \cdot (D_n \nabla n) - \chi n \cdot \nabla c, \\ \rho(u_t + (u \cdot \nabla) u) = \eta \Delta u - \nabla p - ng, \\ \nabla \cdot u = 0, \end{cases}$$

donde n denota la densidad de bacterias, c la concentración de oxígeno, u representa la velocidad del fluido y ρ la presión hidrostática; los términos $u \cdot \nabla c$ y $u \cdot \nabla n$ representan el transporte de la señal química y las células por el fluido. χ es un coeficiente que mide la fuerza de la quimiotaxis, mientras que las constantes $D_c, D_n,$ y η representan la difusión para la densidad, difusión para el oxígeno y para el fluído, respectivamente; ρ denota la densidad del fluido. El término, $-ng$ representa los efectos de flotación debido a la diferencia entre la densidad del fluido y las bacterias; $\nabla \cdot u = 0$ denota la incompresibilidad del fluido y $(u \cdot \nabla)u$ es el término de convección, producido por el fluido. Sobre este modelo, un considerable número de resultados han sido obtenidos, ver por ejemplo [10,11,12,13,14,15] y referencias citadas en ellos. Sin embargo, en esos trabajos, las condiciones de frontera para la densidad celular y la concentración química, son de tipo Neuman cero, es decir, no hay flujo a través de la frontera; distinto a lo considerado en el experimento [9].

---

[10] Villamizar-Roa E.J. y Duarte-Rodriguez A. “Análisis teórico de un modelo matemático de la quimiotaxis atractivo-repulsiva, con crecimiento logístildero, en fluidos”. En: *Tesis de maestría en Matemáticas* (2018).

[11] Villamizar-Roa E.J., Duarte-Rodriguez A. y Ferreira L.C.F. “Global existence for an attraction-repulsion chemotaxis-fluid system in a framework of Besov-Morrey types”. En: *J. Math. Fluid Mech.* 22 (2020), pág. 18.

[12] Villamizar-Roa E.J., Duarte-Rodriguez A. y Ferreira L.C.F. “Global existence for an attraction-repulsion chemotaxis fluid model with logistic source”. En: *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 24 (2019), 423–447.

[13] Winkler M. “Global large-data solutions in a chemotaxis-(Navier–) Stokes system modeling cellular swimming in fluid drops”. En: *Communications in Partial Differential Equations* 37 (2012), págs. 319-351.

[14] Winkler M. “Global weak solutions in a three-dimensional chemotaxis- Navier–Stokes system”. En: *Annales de l'Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis* 33 (2016), págs. 1329-1352.

[15] Lorz A. “Coupled chemotaxis fluid model”. En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 20.06 (2010), págs. 987-1004.

Los resultados considerando condiciones de fronteras distintas a las Neumann homogéneas, como las consideradas en la referencia [6] no son abundantes. En [6] se han obtenido resultados de existencia global de soluciones débiles, en dominios acotados de $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}^3$. En [6] las condiciones de frontera consideradas son de la forma

$$\partial_\nu c = 1 - c, \quad \partial_\nu n = n\partial_\nu c, \quad u = 0, \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega \times (0, \infty).$$

En la referencia[7], se estudia la versión estacionaria de (2)

$$\begin{cases} 0 = \Delta n - \nabla \cdot (n\nabla c), \\ 0 = \Delta c - nc, \end{cases} \tag{3}$$

considerando condiciones de frontera sin flujo para n y una condición de frontera físicamente significativa sobre c:

$$\partial_v c(x) = (\gamma - c(x))g(x) \quad \text{ sobre } \partial\Omega, \tag{4}$$

donde γ es una constante positiva que representa la máxima saturación de oxigeno en el fluido y la función g modela la tasa de absorción del oxigeno en el fluido. En [7], se demostró la existencia y unicidad de soluciones clásicas no constantes, para cualquier masa dada y adicionalmente, se hace un análisis particular sobre la cara de la solución en el caso cuando Ω es la bola N-dimensional.

En conclusión, el modelo que constituye el objeto y análisis de este trabajo es la versión estacionaria de (1) con condiciones de frontera distintas a condiciones Neumann homogéneas; es decir, el estudio del siguiente sistema elíptico de EDP:

$$\begin{cases} \Delta n = \nabla \cdot (n\nabla c) & \text{en } \Omega, \\ \Delta c = nc & \text{en } \Omega, \\ \partial_v c = (\gamma - c)g & \text{sobre } \partial\Omega, \\ \partial_v n = n\partial_v c & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{5}$$

Este trabajo es de carácter disertativo y su contenido se basa en el análisis de los resultados obtenidos por Braukhoff y Lankeit en [7], desde el punto de vista de la existencia y unicidad de soluciones clásicas del problema de valor de frontera (5) satisfaciendo que $\int_\Omega n = m$, con $m > 0$ un valor fijo, y siendo Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$, $N \geq 1$, con frontera suficientemente suave.

El contenido de está disertación será dividido de la siguiente manera: en el Capítulo 1, se introducen algunos conceptos y resultados preliminares que son necesarios para la lectura y desarrollo del trabajo. En el Capítulo 2, se estudia la existencia y unicidad de solución para un problema escalar equivalente a (5). Finalmente, en el Capítulo 3, se usarán los resultados y la información obtenida en el capítulo anterior para resolver el sistema completo (5) y analizar la forma de la solución en dominios particulares.

1. PRELIMINARES

En este capítulo se introducen algunos preliminares que serán relevantes a lo largo del trabajo. Se inicia presentando definiciones y propiedades sobre algunos espacios de funciones, especialmente, los espacios de Hölder y Lebesgue. Posteriormente, se enuncia el Teorema de punto fijo de Leray Schauder y algunos conceptos relacionados. También se incluirán importantes resultados relativos al principio del máximo (mínimo) para operadores elípticos que serán usados con frecuencia. Se finaliza recordando el teorema de compacidad de Arzelá-Ascoli.

1.1. ESPACIOS DE FUNCIONES

Se inicia esta sección recordando la definición los espacios de Hölder $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$, los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$ y $L^\infty(\Omega)$, los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ y algunos resultados importantes relativos a estos espacios, en cada caso siendo Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$.

Sea $0 \leq \gamma \leq 1$. El conjunto de funciones $u : \Omega \to \mathbb{R}$ que verifican

$$|u(x) - u(y)| \leq C|x - y|^\gamma \quad \textit{para todo} \ \ x, y \in \Omega,$$

son llamadas funciones Hölder continuas de exponente γ. En el caso particular $\gamma = 1$ dichas funciones son llamadas Lipschitzianas. $C(\overline{\Omega})$ denota el conjunto de las funciones continuas definidas en $\overline{\Omega}$ con valores en $\mathbb{R}$.

Definición 1.1.1.

1. Si $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es acotada y continua, se define la norma de $u \in C(\overline{\Omega})$ como

$$\|u\|_{C(\overline{\Omega})} := \sup_{x\in\Omega} |u(x)|.$$

2. La $\gamma-$ésima semi-norma de $u : \Omega \to \mathbb{R}$ es:

$$[u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sup_{\substack{x,y\in\Omega \\ x\neq y}} \left\{ \frac{|u(x) - u(y)|}{|x - y|^\gamma} \right\}.$$

3. La $\gamma-$ésima norma es:

$$\|u\|_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} := \|u\|_{C(\overline{\Omega})} + [u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})}.$$

Definición 1.1.2. Un multi-índice α es una N-tupla de número enteros no negativos, esto es, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$ con $\alpha_i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Además su módulo se define como $|\alpha| = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i$.

Usando la notación de multi-índice se puede compactar la notación para las derivadas parciales de orden α de una función $u : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$, de clase $C^{|\alpha|}(\mathbb{R}^N)$, de la siguiente manera:

$$D^{\alpha} u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} \partial x_2^{\alpha_2} \cdots \partial x_N^{\alpha_N}}.$$

Recordemos que $C^k(\overline{\Omega})$ denota el conjunto de funciones $k-$veces diferenciables, con $k-$ésima derivada continua sobre $\overline{\Omega}$, y su norma está dada por:

$$\|u\|_{C^k(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha} u\|_{C(\overline{\Omega})}.$$

Definición 1.1.3. (Espacios de Hölder). Sea $k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq \gamma \leq 1$. El espacio de Hölder $C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})$ se define como el conjunto de todas las funciones $u \in C^k(\overline{\Omega})$ que verifican

$$||u||_{C^{k,\gamma}(\overline{\Omega})} := \sum_{|\alpha| \leq k} ||D^{\alpha} u||_{C(\overline{\Omega})} + \sum_{|\alpha| = k} [D^{\alpha} u]_{C^{0,\gamma}(\overline{\Omega})} < +\infty.$$

Proposición 1.1.1.

- *Para $k \in \mathbb{N}$ y $0 \leq \gamma \leq 1$ el espacio de Hölder $C^{k+\gamma}(\overline{\Omega})$ es un espacio de Banach.*
- *Para todo $\beta > \gamma > 0$ y $k \in \mathbb{N}$ se tienen las siguientes imersiones $C^{\beta} \subset C^{\gamma} \subset C^0$, y se satisface que*

$$\|u\|_{C^{\gamma}(\Omega)} \leq \|u\|_{C^{\beta}(\Omega)}.$$

Definición 1.1.4. Para $1 \leq p < \infty$, se define el espacio $L^p(\Omega)$ como el espacio vectorial de todas las (clases de equivalencia) funciones Lebesgue medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que $\|u\|_{L^p(\Omega)} < \infty$, donde

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} := \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{6}$$

El funcional (6) define una norma en $L^p(\Omega)$, con la cual la dupla $\left(L^p, \|\cdot\|_{L^p(\Omega)}\right)$ es un espacio de Banach. El espacio $L^2(\Omega)$ es un espacio de Hilbert con el producto interno dado por

$$(u, v)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} u(x) v(x) dx.$$

Definición 1.1.5. El espacio $L^{\infty}(\Omega)$ es definido como el espacio vectorial de todas las (clases de equivalencia) funciones Lebesgue medibles $u : \Omega \to \mathbb{R}$ tal que $\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} < \infty$, donde

$$\|u\|_{L^{\infty}(\Omega)} := \sup \text{ess } \{|u(x)| : x \in \Omega\}. \tag{7}$$

Por su parte el funcional (7) define una norma en $L^{\infty}(\Omega)$, con la cual la dupla $(L^{\infty}, \|\cdot\|_{L^{\infty}(\Omega)})$ es un espacio de Banach. Adicionalmente, $L^{p}_{loc}(\Omega)$ denota el conjunto de las funciones medibles, tales que $u \in L^{p}(\Omega')$, para todo $\Omega' \subset \Omega$ abierto y acotado.

Para introducir los espacios de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$, primero se recuerda el concepto de derivada débil. Dada $u \in L^{1}_{loc}(\Omega)$ y $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_N)$ un multi-índice, se dice que la función u tiene $\alpha-$ésima derivada débil, si existe una función $v \in L^{1}_{loc}(\Omega)$, tal que

$$\int_{\Omega} u(x) D^{\alpha}\phi(x)dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v(x)\phi(x)dx, \quad \text{para toda } \phi \in C_0^{\infty}(\Omega),$$

donde $C_0^{\infty}(\Omega)$ denota el conjunto de todas las funciones infinitamente diferenciables con soporte compacto en Ω. En este caso, se denota $D^{\alpha}u = v$.

Definición 1.1.6. (Espacios de Sobolev). Sean $k \in \mathbb{N}$ y $p \in \mathbb{R}$ con $1 \leq p \leq \infty$. El espacio de Sobolev $W^{k,p}(\Omega)$ se define como el espacio vectorial de todas las funciones $u \in L^{1}_{loc}(\Omega)$ tales que para cada multi-índice α con $|\alpha| \leq k$, $D^{\alpha}u \in L^{p}(\Omega)$ existe en el sentido débil.
Los espacios $W^{k,p}(\Omega)$ son espacios de Banach con norma

$$\begin{aligned}
\|u\|_{W^{k,p}(\Omega)} &:= \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^{p}(\Omega)} \right)^{\frac{1}{p}} \qquad \text{si } 1 \leq p < \infty, \\
\|u\|_{W^{k,\infty}(\Omega)} &:= \max_{|\alpha| \leq k} \|D^{\alpha}u\|_{L^{\infty}(\Omega)} \qquad \text{si } p = \infty.
\end{aligned}$$

Para $p = 2$, los espacios $H^{k}(\Omega) := W^{k,2}(\Omega)$ son espacios de Hilbert con producto interno

$$(u, v)_{H^{k}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq k} \int_{\Omega} D^{\alpha}u D^{\alpha}v dx.$$

1.2. UN TEOREMA DE PUNTO FIJO

Definición 1.2.1. Dados dos espacios normados X y Y, se dice que un operador $T : X \to Y$ es compacto si, para cada $A \subset X$ acotado, $T(A)$ es un conjunto relativamente compacto. Equivalentemente, $T : X \to Y$ es compacto si dada $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una sucesión acotada en X, existe $\{x_{n_k}\}_{k\in\mathbb{N}}$, subsucesión de $\{x_n\}$, y un $x \in X$ tales que $\{T(x_{n_k})\}$ converge a $T(x)$ en Y.

Teorema 1.2.1. *(Teorema de punto fijo de Leray-Schauder). Sea X un espacio de Banach y $T : X \to X$ una aplicación continua y compacta. Si existe $M > 0$ tal que*

$$||x||_X \leq M,$$

para todo $x \in X$ y $\sigma \in [0, 1]$ satisfaciendo $x = \sigma T x$, entonces T admite al menos un punto fijo.

1.3. OPERADORES ELÍPTICOS

El sistema (5) se enmarca dentro de las ecuaciones diferenciales elípticas de segundo orden; por ello, en esta sección se recuerdan algunos preliminares que serán significativos en el análisis de existencia de solución para dichas ecuaciones.

Un operador diferencial de segundo orden en N variables:

$$Lu = \sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^{N} b_i(x)\frac{\partial u}{\partial x_i} + h(x)u, \qquad a_{ij} = a_{ji}, \tag{8}$$

donde $x = (x_1, x_2, \cdots, x_N)$ pertenece a un dominio Ω de $\mathbb{R}^N$, se dice elíptico en Ω si para todo $x \in \Omega$ y $\zeta \in \mathbb{R}^N$ se tiene

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j > 0.$$

En adelante, al mencionar el operador L, se hace referencia a un operador en la forma de (8).

Definición 1.3.1. (Operador uniformemente elíptico). Se dice que el operador L es uniformemente elíptico, si existe $\lambda_0 > 0$ tal que

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\zeta_i\zeta_j > \lambda_0|\zeta|^2, \qquad \forall \zeta \in \mathbb{R}^N.$$

El siguiente lema técnico, proporciona un resultado de que será útil en esta disertación.

Lema 1.3.1. *Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera de clase C^2. Entonces existen $C > 0$ y $\beta_0 > 0$ tales que para cada función $u \in C^2(\overline{\Omega}) \cap C^1(\overline{\Omega})$ se satisface*

$$\|u\|_{C^{\beta_0}(\overline{\Omega})} \leq C \left(\|u\|_{C^0(\Omega)} + \|\Delta u\|_{L^\infty(\Omega)} + \|\partial_\nu u\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \right).$$

Demostración. Ver [16] Teorema 1.1. □

Gran parte del análisis de este trabajo se ocupará de ecuaciones elípticas con condiciones de frontera tipo Robin y el siguiente lema da condiciones para la solubilidad de este tipo de ecuaciones.

Lema 1.3.2. *Sea Ω un dominio en $\mathbb{R}^N$ de clase $C^{2+\beta}$, $a \in C^\beta(\overline{\Omega})$, $\quad a \leq 0$, $b \in C^{1+\beta}(\partial\Omega)$, y $\quad b \geq 0$. Si*
(i) $\quad b > 0$ *o al menos* $\quad (ii) \quad a \neq 0$ *ó* $b \neq 0$,
entonces para cada $\; f \in C^\beta(\overline{\Omega})$ *y* $\; \varphi \in C^{1+\beta}(\partial\Omega)$, *el problema*

$$\begin{cases} (\Delta + a)u = f & en\ \Omega, \\ \partial_v u + bu = \varphi & sobre\ \partial\Omega, \end{cases}$$

tiene solución única en $C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$.

Demostración. Ver Teorema 6.31 en la referencia [17], página 124. □

Lema 1.3.3. *Sea Ω un dominio acotado de $\mathbb{R}^N$ de clase $C^{2+\beta}$, y sea $u \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$ una solución en Ω de $\; -\Delta u + au = f$ satisfaciendo la condición de frontera*

$$B(x)u \equiv b(x)u + \partial_v u = \varphi(x), \qquad x \in \partial\Omega.$$

Si se asume que $f \in C^\beta(\overline{\Omega})$, $\quad \varphi \in C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$, $\quad a \in C^\beta(\overline{\Omega})$ y $b \in C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ con

$$\|a\|_{C^\beta(\overline{\Omega})}, \|b\|_{C^{1+\beta}(\overline{\Omega})}, \|\varphi\|_{C^{1+\beta}(\overline{\Omega})} \leq K,$$

entonces

$$\|u\|_{C^{2+\beta}(\overline{\Omega})} \leq C \Big(\|u\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \|\varphi\|_{C^{1+\beta}(\overline{\Omega})} + \|f\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} \Big),$$

---

[16] Nadirashvili N. “On a problem with oblique derivative”. En: *Mathematics of the USSR-Sbornik* 55.(2) (1986), pág. 397.

[17] Gilbarg D. y Trudinger N. *Elliptic partial differential equations of second order*. SpringerVerlag, Berlin-New York, 1977.

donde $C = C(N, \beta, K, \Omega) > 0$.

Demostración. Ver Teorema 6.30 en la referencia [17]. $\square$

Para finalizar esta sección se enunciarán dos importantes resultados para operadores uniformemente elípticos, a saber, el principio del máximo y el Lema de frontera de Hopf (ver [17] Teorema 3.5 y Lema 3.4, respectivamente). Estos resultados serán citados con frecuencia durante el desarrollo de este trabajo.
Antes de enunciar el Lema de Hopf, recordemos que un dominio Ω satisface la condición de esfera interior en $x_0 \in \partial\Omega$, si existe una bola abierta $B \subset \Omega$ tal que $x_0 \in \partial B$.

Lema 1.3.4. *(Lema de Hopf). Suponga que L es un operador uniformemente elíptico con $h(x) = 0$, $u \in C^2(\Omega)$ y $Lu \geq 0$ en Ω. Sea $x_0 \in \partial\Omega$ tal que*

(i) u *es continua en* x_0*,*

(ii) $u(x_0) > u(x)$ *para todo* $x \in \Omega$*,*

(iii) $\partial\Omega$ *satisface la condición de esfera interior en* x_0*.*

Entonces la derivada normal de u en x_0, si existe, satisface

$$\partial_\nu u(x_0) > 0. \tag{9}$$

Si $h(x) \leq 0$ y $\frac{h(x)}{\lambda_0}$ es acotado, se cumple (9) siempre que $u(x_0) \geq 0$.

Teorema 1.3.1. *(Principio del máximo fuerte). Sea L un operador uniformemente elíptico con $h(x) = 0$, $u \in C^2(\Omega)$ y $Lu \geq 0$ (≤ 0) en un dominio Ω (no necesariamente acotado). Entonces, si u alcanza su máximo (mínimo) en el interior de Ω, u es constante. Si $h(x) \leq 0$ y es acotada, entonces u no puede alcanzar un máximo no- negativo (mínimo no-positivo) en el interior de Ω, a menos que u sea constante.*

1.4. TEOREMA DE ARZELÁ-ASCOLI

Sea X un espacio métrico compacto. El espacio $C(X)$ de las funciones continuas definidas en X, con valores en $\mathbb{R}$, es un espacio métrico completo, con lo métrica del máximo

$$d(u, v) = \max\{|u(x) - v(x)| : x \in X\}.$$

Definición 1.4.1. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones de X en $\mathbb{R}$ es puntualmente acotada, si existe $M > 0$, tal que $|u(x)| \leq M$ para cada $x \in X$ y cada $u \in \mathcal{F}$.

Definición 1.4.2. Una familia $\mathcal{F}$ de funciones de X en $\mathbb{R}$ es equicontinua, si dado $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$, que depende solo de ε, tal que para todo $x, y \in X$

$$d(x, y) < \delta \implies |u(x) - u(y)| < \varepsilon \quad \forall\, u \in \mathcal{F},$$

donde d es la métrica en X.

Teorema 1.4.1. *(Teorema de Arzelá-Ascoli). Sea X un espacio métrico compacto. Si una sucesión $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ en $C(X)$ es puntualmente acotada y equicontinua, entonces tiene una subsucesión que converge uniformemente.*

2. UN PROBLEMA ELÍPTICO CON CONDICIONES DE FRONTERA TIPO ROBIN

Un elemento clave para el estudio del sistema estacionario (5) es que si $n = \alpha e^c$, para algún parámetro α, entonces $\Delta n = \nabla \cdot (\alpha e^c \nabla c) = \nabla \cdot (n \nabla c)$ y $\partial_\nu n = \alpha e^c \partial_\nu c = n \partial_\nu c$, por lo tanto (5) es transformado en el siguiente problema escalar

$$\begin{cases} \Delta c = \alpha c e^c & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu c = (\gamma - c) g & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{10}$$

En este capítulo, se analiza la buena postura del problema (10) y la relación de su solución con el parámetro α. También se estudia la dependencia entre la masa bacteriana y α, resultado sustancial para el análisis de (5). Es necesario especificar los supuestos más técnicos que se harán; los números $N \in \mathbb{N}$ y $\beta_* \in (0,1)$ se asume que son fijos a lo largo del trabajo, también se plantea la siguiente condición sobre el dominio:

$$\Omega \subset \mathbb{R}^N \quad \text{es un dominio acotado con frontera} \quad C^{2+\beta}, \text{para algún} \quad \beta \in (0,1). \tag{11}$$

Además, sobre la condición de frontera, se considera que g es una función definida sobre $\overline{\Omega}$ tal que

$$g \in C^{1+\beta_*}(\overline{\Omega}), \qquad g \geq 0 \quad \text{en} \quad \overline{\Omega}, \qquad g \not\equiv 0 \quad \text{sobre} \quad \partial\Omega. \tag{12}$$

2.1. ESTIMACIONES A PRIORI Y SOLUCIÓN DEL PROBLEMA ESCALAR

En esta sección se busca garantizar la existencia de solución para el problema de valor de frontera (10). Se inicia proporcionando estimaciones *a priori* para la solución de

$$\begin{cases} \Delta c = \alpha c e^{\tilde{c}} & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu c = (\gamma - c) g & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{13}$$

y posteriormente, con base en un argumento de punto fijo de Leray-Schauder se analiza la solubilidad de (10).

Lema 2.1.1. *Sea* $\alpha \geq 0$, $\gamma \geq 0$ *y sea* Ω *como en* (11) *y* g *como en* (12). *Si una función* $c \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *es solución de (13) para alguna* $\tilde{c} \in C^\beta(\overline{\Omega})$, $\beta \in (0,1)$, *entonces* c *es no constante, a menos que* $c \equiv \gamma$, *y* $\alpha\gamma = 0$.

Demostración. Si c es constante, la condición de frontera en (13) implica que $0 = (\gamma - c)g$ sobre $\partial\Omega$, y dado que $g \not\equiv 0$, se tiene que $c \equiv \gamma$. Sin embargo, si $c = \gamma$, entonces $\Delta c = 0$ lo que implica que c no es solución de (13) a menos que $\alpha\gamma = 0$. □

Lema 2.1.2. *Sea* $\alpha \geq 0$, $\gamma \geq 0$, *y sea* Ω *como en* (11) *y* g *como en* (12). *Si* $c \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *es solución de* (13) *para alguna* $\tilde{c} \in C^\beta(\overline{\Omega})$, $\beta \in (0,1)$, *entonces* $c > 0$ *en* $\overline{\Omega}$ *ó* $c \equiv \gamma$ *y* $\alpha\gamma = 0$.

Demostración. Considerando el operador elíptico $L = \Delta - \alpha e^{\tilde{c}}$, se tiene que si $c \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ es solución de (13) para alguna $\tilde{c} \in C^\beta(\overline{\Omega})$, $Lc = 0$ y $-\alpha e^{\tilde{c}} \leq 0$. Entonces, por el principio del máximo fuerte (Teorema 1.3.1) c es constante ó c no puede alcanzar un mínimo no positivo en Ω.
Si c es constante, por el Lema 1.3.1 $c \equiv \gamma$ y $\alpha\gamma = 0$. Por otro lado, si c no puede alcanzar un mínimo no positivo en Ω, entonces existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $c(x_0) < c(x)$, para todo $x \in \Omega$. Si $c(x_0) \leq 0$, por el Lema de Hopf (Lema 1.3.4), se tiene que $\partial_\nu c(x_0) < 0$. Por lo tanto, usando la condición de frontera y la no negatividad de g, se concluye que

$$0 > (\gamma - c(x_0))g(x_0) \geq (\gamma - 0)g(x_0) = \gamma g(x_0) \geq 0,$$

lo que genera una contradicción, y en consecuencia, el mínimo de c en $\overline{\Omega}$ es positivo, lo que concluye la demostración. □

Lema 2.1.3. *Sea* $\alpha \geq 0$, $\gamma \geq 0$ *y sea* Ω *como en* (11) *y* g *como en* (12). *Si* $c \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *es solución de* (13) *para alguna* $\tilde{c} \in C^\beta(\overline{\Omega})$, $\beta \in (0,1)$, *entonces* $0 < c(x) < \gamma$ *para todo* $x \in \overline{\Omega}$ *ó* $c \equiv \gamma$ *y* $\alpha\gamma = 0$.

Demostración. Aplicando el principio del máximo fuerte (Teorema 1.3.1) al operador uniformemente elíptico $L := \Delta - \alpha e^{\tilde{c}}$, se tiene que c es constante (y así, por el Lema 2.1.1 $c \equiv \gamma$ y $\alpha\gamma = 0$) o existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $c(x_0) > c(x)$ para todo $x \in \Omega$. Luego por el Lema de Hopf (Lema 1.3.4) y la ecuación $(13)_2$ se tiene que

$$\partial_\nu c(x_0) \;=\; (\gamma - c(x_0))g(x_0) \;>\; 0,$$

con lo cual, a partir de la no negatividad de g se concluye que $\gamma > c(x_0)$, y por lo tanto, usando el Lema 2.1.2, se concluye que $0 < c(x) < \gamma$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. □

Lema 2.1.4. *Sea* Ω *satisfaciendo* (11)*. Para cada* $\beta \in (0, \text{mín}\{\beta_0, \beta_*\})$ *con* β_0 *como en el Lema 1.3.1, existe un* $K > 0$ *tal que para cualquier* $\alpha \geq 0$ *y* $\gamma \geq 0$ *y cualquier* g *como en* (12)*, cada solución* $c \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ *de* (10) *satisface*

$$\|c\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} \leq K \, (\, \gamma \, + \, \alpha\gamma e^\gamma \, + \, \gamma \, \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \,).$$

Demostración. Por hipótesis, Ω satisface (11); por lo tanto, el Lema 1.3.1 garantiza la existencia de $K > 0$ y $\beta_0 > 0$ tal que cada función $c \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ satisface

$$\|c\|_{C^{\beta_0}(\overline{\Omega})} \leq K \, \left(\|c\|_{C^0(\Omega)} \, + \, \|\Delta c\|_{L^\infty(\Omega)} \, + \, \|\partial_\nu c\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \right);$$

además, como $\beta < \beta_0$, se tiene que

$$\|c\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} < \|c\|_{C^{\beta_0}(\overline{\Omega})}.$$

Por otra parte, el Lema 2.1.3 aplicado a $\tilde{c} = c$ implica que $0 \leq c(x) \leq \gamma$ para todo $x \in \overline{\Omega}$, en consecuencia, $\Delta c = \alpha c e^c \in [0, \alpha\gamma e^\gamma]$ en Ω y $\partial_\nu c = (\gamma - c)g \in [0, \gamma g]$ sobre $\partial\Omega$, puesto que, $0 \leq \alpha c(x) e^{c(x)} \leq \alpha\gamma e^\gamma$ para todo $x \in \Omega$ y $0 \leq (\gamma - c(x))g(x) \leq \gamma g(x)$ para $x \in \partial\Omega$; por lo tanto,

$$\|c\|_{C^0(\Omega)} \leq \gamma, \qquad \|\Delta c\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \alpha\gamma e^\gamma, \qquad \|\partial_\nu c\|_{L^\infty(\partial\Omega)} \leq \gamma \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}.$$

De las desigualdades anteriores, se concluye que la solución c de (10) satisface

$$\|c\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} \leq K \, (\, \gamma \, + \, \alpha\gamma e^\gamma \, + \, \gamma \, \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}).$$

□

El siguiente lema garantiza la existencia y unicidad de solución para el problema escalar (13).

Lema 2.1.5. *Sea* Ω *satisfaciendo* (11) *y* $\beta \in (0, \beta_*)$*. Para cada* $\alpha \geq 0$*,* $\gamma \geq 0$*,* g *como en* (12) *y* $\tilde{c} \in C^\beta(\overline{\Omega})$*, el problema de valor en la frontera* (13) *tiene única solución* $c \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$*. Además, para cada* $K > 0$*, existe* $C > 0$ *tal que para cada* $\alpha \in [0, K]$*,* $\gamma \in [0, K]$*,* g *como en* (12) *con* $\|vert|g\|_{C^{1+\beta}(\overline{\Omega})} \leq K$ *y* $\tilde{c} \in C^\beta(\overline{\Omega})$ *con* $\|\tilde{c}\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} \leq K$*, se tiene que la solución* c *de* (13) *satisface*

$$\|c\|_{C^{2+\beta}(\overline{\Omega})} \leq C.$$

Demostración. Con el fin de usar el Lema 1.3.2, se reescriben las ecuaciones del sistema (13) como

$$\begin{cases} (\Delta - \alpha e^{\tilde{c}})c = 0 \quad en\ \Omega, \\ \partial_\nu c + gc = \gamma g \quad sobre\ \partial\Omega. \end{cases}$$

Ahora, si $a = -\alpha e^{\tilde{c}}$, entonces $a \in C^\beta(\overline{\Omega})$ y la no negatividad de α implica $a \leq 0$; para $b = g$, por la condición (12) se tiene que $b \not\equiv 0$ sobre $\partial\Omega$; además, $\varphi = \gamma g \in C^{1+\beta^*}(\partial\Omega) \subset C^{1+\beta}(\overline{\Omega})$ y $f = 0 \in C^\beta(\overline{\Omega})$. Esto muestra que el sistema (13) satisface las hipótesis del Lema 1.3.2, y por lo tanto, el problema de valor en la frontera (13) tiene única solución $c \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$.
Para la segunda parte del Lema, sea $K > 0$ tal que $0 \leq \alpha \leq K$, $0 \leq \gamma \leq K$, y

$$\|g\|_{C^{1+\beta}(\overline{\Omega})} \leq K, \qquad \|\tilde{c}\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} \leq K.$$

Sin pérdida de generalidad se puede escribir

$$\|-\alpha e^{\tilde{c}}\|_{C^\beta(\overline{\Omega})}, \quad \|g\|_{C^{1+\beta}(\overline{\Omega})}, \quad \|\gamma g\|_{C^{1+\beta}(\overline{\Omega})} \leq K,$$

así, del Lema 1.3.3 existe $C_0 = C_0(K) > 0$, tal que

$$\|c\|_{C^{2+\beta}(\overline{\Omega})} \leq C_0 \Big(\|c\|_{C^0(\overline{\Omega})} + \gamma \|g\|_{C^{1+\beta}(\overline{\Omega})} \Big).$$

Además, por el Lema $2.1.3$, $0 \leq c(x) \leq \gamma$ para todo $x \in \Omega$, por lo tanto, $c \leq K$ en Ω; por consiguiente, c satisface

$$\|c\|_{C^{2+\beta}(\overline{\Omega})} \leq C_0(K + K) = C.$$

□

Para finalizar está sección se demuestra la existencia de solución del problema escalar (10).

Lema 2.1.6. *Sea* Ω *como en* (11), $\alpha \geq 0$, $\gamma \geq 0$, g *como en* (12) *y* $\beta \in (0, \min\{\beta_*, \beta_0\})$ *con* β_0 *como en el Lema 1.3.1. Entonces* (10) *tiene solución* $c \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$*. Además, para cada* $K > 0$ *existe* $C > 0$ *tal que si* $\alpha \in [0, K]$, $\gamma \in [0, K]$ *y* g $\|g\|_{C^{1+\beta}(\overline{\Omega})} \leq K$, *se tiene que cada solución* c *de* (10) *satisface*

$$\|c\|_{C^{2+\beta}(\overline{\Omega})} \leq C.$$

Demostración. Para demostrar la existencia de solución del problema (10) se hará uso del Teorema de punto fijo de Leray-Schauder (Teorema 1.2.1); se inicia definiendo la aplicación $\Phi : C^\beta(\overline{\Omega}) \to$

$C^\beta(\overline{\Omega})$ que a cada $\tilde{c} \in C^\beta(\overline{\Omega})$, le asocia con la solución del problema escalar (13), esto es, $\Phi(\tilde{c})$ satisface

$$\begin{cases} \Delta\Phi(\tilde{c}) = \alpha\Phi(\tilde{c})e^{\tilde{c}} & \text{en} \quad \Omega, \\ \partial_\nu\Phi(\tilde{c}) = (\gamma - \Phi(\tilde{c}))g & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{14}$$

Veremos que Φ cumple las hipótesis del Teorema 1.2.1.

- Sea $\tilde{c} \in C^\beta(\overline{\Omega})$. Como $\beta < \beta^*$, el Lema 2.1.5 implica que (13) tiene solución única $\Phi(\tilde{c}) \in C^{2+\beta^*}(\overline{\Omega}) \subset C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$; por consiguiente, Φ está bien definida, además es continua.

- Φ es compacta. En efecto, dada una sucesión $\{\tilde{c}_n\} \subset C^\beta(\overline{\Omega})$ que converge a $\tilde{c}$ débilmente en $C^\beta(\overline{\Omega})$, por el Lema 2.1.5, $\{\Phi(\tilde{c}_n)\} \subset C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$ y es acotada. Como $C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$ es compacto en $C^\beta(\overline{\Omega})$, $\{\Phi(\tilde{c}_n)\}$ admite una subsucesión, aún denotada por $\{\Phi(\tilde{c}_n)\}$, que converge a algún $c \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$. Por la unicidad del límite, $\Phi(\tilde{c}) = c$, y así Φ es compacta.

- Veamos que el conjunto de los posibles puntos fijos de $\sigma\Phi$ para $\sigma \in [0,1]$ es acotado en $C^\beta(\overline{\Omega})$. Sea $c \in C^\beta(\overline{\Omega})$ y $\sigma \in [0,1]$ tal que $c = \sigma\Phi(c)$. De las ecuaciones $(14)_1$ y $(14)_2$ se sigue que

  $$\begin{aligned} \Delta c &= \Delta(\sigma\Phi(c)) = \sigma(\Delta\Phi(c)) = \sigma(\alpha\Phi(c)e^c) = \alpha(\sigma\Phi(c))e^c = \alpha c e^c \qquad en\ \Omega, \\ \partial_\nu c &= \partial_\nu(\sigma\Phi(c)) = \sigma\partial_\nu\Phi(c) = \sigma(\gamma - \Phi(c))g = (\sigma\gamma - c)g \qquad sobre\ \partial\Omega. \end{aligned}$$

  Además, por el Lema 2.1.3 se tiene que $0 \le c \le \sigma\gamma$ en $\overline{\Omega}$; por lo tanto, existe $C > 0$ (Lema 1.3.1) tal que

  $$\begin{aligned} \|c\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} &\le C\left(\|c\|_{C0(\overline{\Omega})} + \|\alpha c e^c\|_{L^\infty(\Omega)} + \|(\sigma\gamma - c)g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right) \\ &\le C\left(\sigma\gamma + \alpha\sigma\gamma e^{\sigma\gamma} + \sigma\gamma\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right) \\ &\le C\gamma\left(1 + \alpha e^\gamma + \|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right) = M, \end{aligned}$$

  esto es, para cualquier $c \in C^\beta(\overline{\Omega})$ y $\sigma \in [0,1]$ satisfaciendo $c = \sigma\Phi(c)$ se tiene $\|c\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} \le M$.

Por el Teorema de Leray- Schauder se concluye que Φ tiene un punto fijo y por lo tanto, el problema de valor en la frontera (10) tiene solución $c \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$.
Finalmente, tomando $K = \max\left\{\alpha, \gamma, M, \|g\|_{C^{1+\beta}(\overline{\Omega})}\right\}$, el Lema 2.1.5 implica la existencia de $C > 0$ tal que

$$\|c\|_{C^{2+\beta}(\overline{\Omega})} \le C.$$

□

2.2. DEPENDENCIA DE LA SOLUCIÓN RESPECTO A α

Teniendo en cuenta que (10) tiene solución para cualquier parámetro α, en esta sección se demostrará la dependencia de la solución respecto a dicho parámetro y la unicidad de la misma. Esto proporcionará información crucial para la unicidad del sistema (5). Inicialmente, se muestra que la solución c de (10) es monótona respecto a α.

Lema 2.2.1. *Sea Ω satisfaciendo (11), $\gamma \geq 0$ y g como en (12). Asuma que $\alpha_1 \geq \alpha_2 > 0$ o $\alpha_1 > \alpha_2 \geq 0$. Si c_{α_1}, $c_{\alpha_2} \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ denotan soluciones de (10) para $\alpha = \alpha_1$ y $\alpha = \alpha_2$ respectivamente, entonces*

$$c_{\alpha_1} \leq c_{\alpha_2} \quad \textit{en} \quad \overline{\Omega}.$$

Demostración. Supóngase que existe $x* \in \Omega$ tal que $c_{\alpha_1}(x*) > c_{\alpha_2}(x*)$. Sean $\tilde{c} : \Omega \to \mathbb{R}$ donde $\tilde{c} := c_{\alpha_1} - c_{\alpha_2}$ y $\tilde{\Omega} := \{x \in \Omega \mid \tilde{c}(x) > 0\}$. Por la continuidad de $\tilde{c}$ y la existencia de $x*$, se tiene que $\tilde{\Omega}$ es abierto y no vacío. Sin pérdida de generalidad se asume $\tilde{\Omega}$ conexo. Entonces, el principio del máximo (Teorema 1.3.1) aplicado a la función $\tilde{c}$ y al operador uniformemente elíptico $L = \Delta - \alpha e^{\tilde{c}}$, implica que $\tilde{c}$ es constante o no alcanza máximo no-negativo en el interior de $\tilde{\Omega}$. Veremos que $\tilde{c}$ es no constante.

Nótese que la función $\xi \longmapsto \xi e^{\xi}$ es monótona en $[0, \infty)$, y además, por el Lema 2.1.3 y la definición de $\tilde{\Omega}$, se tiene que $c_{\alpha_1} > c_{\alpha_2} > 0$; así, $c_{\alpha_1} e^{c_{\alpha_1}} > c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}}$ en $\tilde{\Omega}$. Luego, para $\alpha_1 \geq \alpha_2 > 0$ se satisface que

$$\Delta \tilde{c} = \alpha_1 c_{\alpha_1} e^{c_{\alpha_1}} - \alpha_2 c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}} \geq \alpha_2 (c_{\alpha_1} e^{c_{\alpha_1}} - c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}}) > 0,$$

y si $\alpha_1 > \alpha_2 \geq 0$,

$$\Delta \tilde{c} = \alpha_1 c_{\alpha_1} e^{c_{\alpha_1}} - \alpha_2 c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}} > \alpha_2 (c_{\alpha_1} e^{c_{\alpha_1}} - c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}}) \geq 0.$$

Consecuentemente, $\Delta \tilde{c}$ es estrictamente positiva en $\tilde{\Omega}$, por lo tanto, $\tilde{c}$ es no constante. Entonces, existe $x_0 \in \partial \tilde{\Omega}$ tal que $\tilde{c}(x_0) > \tilde{c}(x)$ para todo $x \in \tilde{\Omega}$, y así, el Lema de Hopf 1.3.4 implica que $\partial_\nu \tilde{c}(x_0) > 0$.

Ahora, se analizará cómo se comportan los puntos en la frontera de $\tilde{\Omega}$. Note que $\partial \tilde{\Omega}$ puede escribirse como $\partial \tilde{\Omega} = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, donde $\Gamma_1 := (\partial \tilde{\Omega} \cap \partial \Omega)^\circ$ y $\Gamma_2 := \partial \tilde{\Omega} \setminus \Gamma_1$. Note que

- En $\Gamma_1 := (\partial \tilde{\Omega} \cap \partial \Omega)^\circ$, tomando el interior respecto a la topología relativa a $\partial \Omega$, como la normal en Γ_1 coincide con la normal de $\partial \Omega$ y c_{α_1}, c_{α_2} resuelven la ecuación $(10)_{(2)}$, se satisface

$$\partial_\nu \tilde{c} := \partial_\nu c_{\alpha_1} - \partial_\nu c_{\alpha_2} = (\gamma - c_{\alpha_1}) g - (\gamma - c_{\alpha_2}) g = -\tilde{c} g.$$

- En $\Gamma_2 := \partial\tilde{\Omega} \setminus \Gamma_1 = \overline{\partial\tilde{\Omega} \setminus \partial\Omega}$, por como está definido $\tilde{\Omega}$, se tiene que $\tilde{c}(x) = 0$ para todo $x \in \Gamma_2$.

Necesariamente, $x_0 \in \Gamma_1$ y por lo tanto,

$$0 < \partial_\nu \tilde{c}(x_0) = -g(x_0)\tilde{c}(x_0).$$

La positividad de g implica que $\tilde{c}(x_0) < 0$, lo cual contradice la definición de $\tilde{\Omega}$ y la continuidad de $\tilde{c}$. Se concluye que $c_{\alpha_1} \leq c_{\alpha_2}$ para todo $x \in \overline{\Omega}$. □

Una primera consecuencia importante de esta monotonicidad es la unicidad de las soluciones de (10).

Lema 2.2.2. *Sea* Ω *como en* (11)*,* $\alpha > 0$*,* $\gamma \geq 0$*,* g *como en* (12)*. Entonces la solución de* (10) *es única en* $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$*.*

Demostración. Dado el parámetro $\alpha > 0$, sean $c_1, c_2 \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ funciones asociadas a α que solucionan el problema (10). Tomando $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha > 0$ y aplicando el Lema 2.2.1 se tiene que $c_1 \leq c_2$ y $c_2 \leq c_1$; por lo tanto, $c_1 = c_2$ en $\overline{\Omega}$.

□

2.3. MONOTICIDAD DE LA MASA

El objetivo de esta sección es garantizar la unicidad del parámetro α respecto a una masa bacteriana dada $m > 0$, la cuál es necesaria para concluir la unicidad de la solución de (5) a partir de la unicidad de solución de (10). Para alcanzar este objetivo, es fundamental establecer la relación entre la masa bacteriana y α. Con el fin de preparar la derivación necesaria de c, se introducen las siguientes funciones auxiliares:
Dado $\gamma > 0$, Ω como en (11) y g como en (12), para α_1, $\alpha_2 \in [0, \infty)$ con $\alpha_1 \neq \alpha_2$ se define

$$\omega_{\alpha_2,\alpha_1} := \frac{c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1}, \tag{15}$$

donde c_{α_1}, c_{α_2} denotan soluciones de (10) para $\alpha = \alpha_1$ y $\alpha = \alpha_2$, respectivamente.
Además, se definen

$$f_{1,\alpha_2} := c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}}, \tag{16}$$

y

$$f_{2,\alpha_1,\alpha_2} := \alpha_1 e^{c_{\alpha_2}} + \alpha_1 c_{\alpha_1} e^{c_{\alpha_1}} F(c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}), \tag{17}$$

donde F es la función analítica, no negativa definida por

$$F(z) = \begin{cases} \frac{e^z - 1}{z} & \text{para } \ z \neq 0, \\ 1 & \text{para } \ z = 0. \end{cases} \tag{18}$$

La razón de la elección de las funciones f_{2,α_1,α_2} y f_{2,α_1,α_2} quedará clara en el siguiente lema.

Lema 2.3.1. *Sea* Ω *como en* (11), $\gamma > 0$, g *como en* (12) *y* α_1, $\alpha_2 \in [0, \infty)$ *con* $\alpha_1 \neq \alpha_2$*. La función* $\omega_{\alpha_2,\alpha_1}$ *definida en* (15) *satisface*

$$\begin{cases} \Delta \omega_{\alpha_2,\alpha_1} = f_{1,\alpha_2 + f_{2,\alpha_1,\alpha_2}} \omega_{\alpha_2,\alpha_1} & \textit{en } \ \Omega, \\ \partial_\nu \omega_{\alpha_2,\alpha_1} = -g \omega_{\alpha_2,\alpha_1} & \textit{sobre } \ \partial\Omega, \end{cases} \tag{19}$$

con f_{1,α_2} *como en* (16) *y* f_{2,α_1,α_2} *como en* (17)*.*

Demostración. Sean c_{α_1}, c_{α_2} soluciones de (10) asociadas a los parámetros α_1, α_2, respectivamente. De la ecuación $(10)_1$ se tiene que $\Delta c_{\alpha_1} = \alpha_1 c_{\alpha_1} e^{c_{\alpha_1}}$ y $\Delta c_{\alpha_2} = \alpha_2 c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}}$ en Ω, además

$$F(c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}) = \frac{e^{c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}} - 1}{c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}}.$$

De lo anterior, se sigue que

$$\begin{aligned} &\Delta(c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}) \\ &\quad = \alpha_2 c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}} - \alpha_1 c_{\alpha_1} e^{c_{\alpha_1}} \\ &\quad = \alpha_2 c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}} - \alpha_1 c_{\alpha_1} e^{c_{\alpha_1}} + \alpha_1 c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}} - \alpha_1 c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}} + \alpha_1 c_{\alpha_1} e^{c_{\alpha_2}} - \alpha_1 c_{\alpha_1} e^{c_{\alpha_2}} \\ &\quad = (\alpha_2 - \alpha_1) c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}} + \alpha_1 (c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}) e^{c_{\alpha_2}} + \alpha_1 c_{\alpha_1} (e^{c_{\alpha_2}} - e^{c_{\alpha_1}}) \\ &\quad = (\alpha_2 - \alpha_1) c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}} + \alpha_1 (c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}) e^{c_{\alpha_2}} + \alpha_1 c_{\alpha_1} e^{c_{\alpha_1}} (e^{c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}} - 1) \\ &\quad = (\alpha_2 - \alpha_1) c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}} + \alpha_1 (c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}) e^{c_{\alpha_2}} + \alpha_1 c_{\alpha_1} e^{c_{\alpha_1}} F(c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1})(c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}). \end{aligned}$$

Entonces, dividiendo entre $\alpha_2 - \alpha_1$ se obtiene que

$$\frac{\Delta(c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1})}{\alpha_2 - \alpha_1} = c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}} + \alpha_1 \left(\frac{c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right) e^{c_{\alpha_2}} + \alpha_1 c_{\alpha_1} e^{c_{\alpha_1}} F(c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}) \left(\frac{c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right).$$

Así, de las definiciones (15), (16) y (17) se sigue que

$$\begin{aligned}\Delta\omega_{\alpha_2,\alpha_1} &= \frac{\Delta(c_{\alpha_2}-c_{\alpha_1})}{\alpha_2-\alpha_1}\\ &= c_{\alpha_2}e^{c_{\alpha_2}} + (\alpha_1 e^{c_{\alpha_2}} + \alpha_1 c_{\alpha_1}e^{c_{\alpha_1}}F(c_{\alpha_2}-c_{\alpha_1}))\,\omega_{\alpha_2,\alpha_1}\\ &= f_{1,\alpha_2} + f_{2,\alpha_1,\alpha_2}\omega_{\alpha_2,\alpha_1}.\end{aligned}$$

Por otra parte, la ecuación $(10)_2$ implica que

$$\partial_\nu(c_{\alpha_2}-c_{\alpha_1}) = (\gamma - c_{\alpha_2})g - (\gamma - c_{\alpha_1})g = (c_{\alpha_1}-c_{\alpha_2})g,$$

sobre $\partial\Omega$, de donde

$$\partial_\nu\omega_{\alpha_2,\alpha_1} = \frac{(c_{\alpha_1}-c_{\alpha_2})g}{\alpha_2-\alpha_1} = -\omega_{\alpha_2,\alpha_1}g.$$

Por lo anterior, se concluye que $\omega_{\alpha_2,\alpha_1}$ satisface (20). $\square$

Lema 2.3.2. *Sea Ω como en (11),$\gamma > 0$, g como en (12) y $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,\infty)$ con $\alpha_1 \neq \alpha_2$. Entonces $\omega_{\alpha_1,\alpha_2} \leq 0$.*

Demostración. Supóngase que $\alpha_2 > \alpha_1$. Por el Lema 2.2.1, $c_{\alpha_2} \leq c_{\alpha_1}$ en $\overline{\Omega}$, esto es, $\alpha_2 - \alpha_1 > 0$ y $c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1} \leq 0$; por lo tanto,

$$w_{\alpha_2,\alpha_1} := \frac{c_{\alpha_2}-c_{\alpha_1}}{\alpha_2-\alpha_1} \leq 0.$$

Análogamente para $\alpha_1 > \alpha_2$. $\square$

Lema 2.3.3. *Sean Ω y g satisfaciendo (11) y (12) respectivamente. Sea $\gamma > 0$. Para cualquier $\beta \in (0,\beta_*)$, el problema de valor en la frontera*

$$\begin{cases} \Delta\tilde{\omega} = \gamma e^{\gamma} & \textit{en } \Omega,\\ \partial_\nu\tilde{\omega} = -g\tilde{\omega} & \textit{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \tag{20}$$

tiene solución única $\tilde{\omega} \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$, la cual satisface $\tilde{\omega} \leq \omega_{\alpha_1,\alpha_2} \leq 0$ para cualquier elección de α_1, $\alpha_2 \in [0,\infty)$ con $\alpha_1 \neq \alpha_2$.

Demostración. Una aplicación del Lema 1.3.2 para $a = \varphi = 0$, $f = \gamma e^{\gamma}$ y $b = g$, garantiza la existencia y unicidad de la solución $\tilde{\omega} \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$ de (20). Por otro lado, sean $\alpha_1, \alpha_2 \in [0,\infty)$ con $\alpha_1 \neq \alpha_2$ y $c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2}$ las respectivas soluciones de (10). Por el Lema 2.1.3 se tiene que $0 \leq c_{\alpha_1}, c_{\alpha_2} \leq \gamma$

en Ω, lo que implica que

$$0 \leq f_{1,\alpha_2} = c_{\alpha_2} e^{c_{\alpha_2}} \leq \gamma e^{\gamma} \qquad \text{en } \Omega.$$

Además, la positividad de la función $F(z)$ definida en (18), indica que

$$f_{2,\alpha_1,\alpha_2} = \alpha_1 e^{c_{\alpha_1}} + \alpha_1 c_{\alpha_1} e^{c_{\alpha_1}} F(c_{\alpha_1} - c_{\alpha_2}) \geq 0 \qquad \text{en } \Omega.$$

Por lo anterior y la no positividad de $\omega_{\alpha_2,\alpha_1}$, dada por el Lema 2.3.2, se tiene que

$$\Delta(\tilde{\omega} - \omega) = \gamma e^{\gamma} - f_{1,\alpha_2} - f_{2,\alpha_1,\alpha_2} \omega_{\alpha_2,\alpha_1} \geq 0. \tag{21}$$

Ahora, sean $\omega = \omega_{\alpha_2,\alpha_1}$ y $x_0 \in \overline{\Omega}$ el punto donde la función $(\tilde{\omega} - \omega)$ obtiene su máximo; nótese que si que $(\tilde{\omega} - \omega)(x_0) \leq 0$ el resultado es directo. Entonces, suponiendo que $(\tilde{\omega} - \omega)(x_0) > 0$, para el operador uniformemente elíptico $L = \Delta$, por (21) se tiene que $L(\tilde{\omega} - \omega) \geq 0$, luego, el principio del máximo fuerte (Teorema 1.3.1) implica que $x_0 \in \partial\Omega$ o la función $(\tilde{\omega} - \omega)$ es constante en Ω. Si $x_0 \in \partial\Omega$, el Lema de Hopf (Lema 1.3.4) implica que $\partial_\nu(\tilde{\omega} - \omega)(x_0) > 0$, esto es,

$$\partial_\nu(\tilde{\omega} - \omega)(x_0) = -g(x_0)(\tilde{\omega} - \omega)(x_0) > 0,$$

luego, la negatividad de $-g(x_0)$ implica que $(\tilde{\omega} - \omega)(x_0) < 0$, lo cual es contradictorio. Por otra parte, si $(\tilde{\omega} - \omega)$ es constante, entonces $\Delta(\tilde{\omega} - \omega) = 0$, pero esto solo es posible si $\gamma e^{\gamma} - f_{1,\alpha_2}$, y $f_{2,\alpha_1,\alpha_2}\omega_{\alpha_2,\alpha_1}$ se anulan simultáneamente; por lo tanto, $\gamma e^{\gamma} = f_{1,\alpha_2} = \alpha_2 e^{\alpha_2}$ de donde $c_{\alpha_2} \equiv \gamma$; además, $f_{2,\alpha_1,\alpha_2}\omega_{\alpha_2,\alpha_1} = 0$ implica que $\alpha_1 = 0$ o $c_{\alpha_1} = c_{\alpha_2} \equiv \gamma$. Entonces, por el Lema 2.1.3 y dado que $\gamma > 0$, se tiene que $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, lo que contradice que $\alpha_1 \neq \alpha_2$; por lo tanto, $(\tilde{\omega} - \omega)(x_0) < 0$. Se concluye que $\tilde{\omega}(x) < \omega_{\alpha_2,\alpha_1}(x) \leq 0$ para todo $x \in \Omega$. □

Un propósito importante de estas estimaciones puntuales para $\omega_{\alpha_2,\alpha_1}$ es servir como base para estimaciones en mejores espacios, preparando así la aplicación de argumentos tipo Arzelá-Ascoli.

Lema 2.3.4. *Sean Ω y g como en (11) y (12), respectivamente, y $\gamma > 0$. Entonces, para cada $\beta \in (0, \min\{\beta_*, \beta_0\})$, con β_0 como en el Lema 1.3.2, se cumple que, para cada $K > 0$, existe una constante $C > 0$, tal que para cualquier elección de $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, K]$ con $\alpha_1 \neq \alpha_2$, la función $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}$ definida en (15) satisface*

$$\|\omega_{\alpha_1,\alpha_2}\|_{C^{2+\beta}(\overline{\Omega})} \leq C. \tag{22}$$

Demostración. De acuerdo con Lema $2.1.4$, para cualquier $\alpha > 0$, existe $M_0 > 0$ tal que la solución

c_α de (10) satisface

$$\|c_\alpha\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} \leq M_0 \left(\gamma + \alpha\gamma e^\gamma + \gamma\|g\|_{L^\infty(\partial\Omega)}\right). \tag{23}$$

Así, dado $K > 0$ y $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, K]$, con $\alpha_1 \neq \alpha_2$, por la estimación (23), junto con las condiciones (11) y (12), se tiene que $\sup\limits_{\alpha_1,\alpha_2\in[0,K]} \|f_{2,\alpha_1,\alpha_2}\|_{C^\beta(\overline{\Omega})}$ y $\sup\limits_{\alpha_2\in[0,K]} \|f_{1,\alpha_2}\|_{C^\beta(\overline{\Omega})}$ son finitos, con f_{1,α_2} y f_{2,α_1,α_2} definidas en (16) y (17), respectivamente. Por otro lado, por el Lema 1.3.3 para cada $\Lambda > 0$, existe $M > 0$, tal que si

$$\|a\|_{C^\beta(\overline{\Omega})} \leq \Lambda, \qquad \|g\|_{C^{1+\beta}(\overline{\Omega})} \leq \Lambda,$$

cualquier solución ω de $(\Delta - a)\omega = f$ en Ω, $g\omega + \partial_\nu\omega = 0$ sobre $\partial\Omega$ satisface

$$\|\omega\|_{C^{2+\beta}(\overline{\Omega})} \leq M \left(\|\omega\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f\|_{C^\beta(\overline{\Omega})}\right).$$

Por lo tanto, tomando

$$\Lambda := \max\left\{\sup_{\alpha_1,\alpha_2\in[0,K]} \|f_{2,\alpha_1,\alpha_2}\|_{C^\beta(\overline{\Omega})},\ \|g\|_{C^{1+\beta}(\overline{\Omega})}\right\},$$

el Lema 2.3.1, permite aplicar estas estimaciones a la solución $\omega_{\alpha_1,\alpha_2}$ de (20), concluyendo que para cada $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, K]$ con $\alpha_1 \neq \alpha_2$,

$$\|\omega_{\alpha_2,\alpha_1}\|_{C^{2+\beta}(\overline{\Omega})} \leq M \left(\|\omega_{\alpha_2,\alpha_1}\|_{L^\infty(\Omega)} + \|f_{1,\alpha_2}\|_{C^\beta(\overline{\Omega})}\right).$$

Finalmente, por el Lema 2.3.3, se obtiene (22) con

$$C = M\left(\|\tilde{\omega}\|_{L^\infty(\Omega)} + \sup_{\alpha_2\in[0,K]} \|f_{1,\alpha_2}\|_{C^\beta(\overline{\Omega})}\right).$$

$\square$

Corolario 2.3.1. *Sea Ω satisfaciendo (11), g como en (12) y $\gamma > 0$. La función*

$$\begin{aligned} \Gamma : [0,\infty) &\to C^2(\overline{\Omega}) \\ \alpha &\mapsto c_\alpha, \end{aligned} \tag{24}$$

donde c_α denota la solución de (10) asociada a α, es continua.

Demostración. El Lema $2.2.2$ garantiza que la función Γ está bien definida. Además, dado $K > 0$, del

Lema $2.3.4$ existe $C > 0$ tal que

$$\|\omega_{\alpha_2,\alpha_1}\|_{C^{2+\beta}(\overline{\Omega})} \leq \quad C,$$

siempre que $\alpha_1, \alpha_1 \in [0, k]$. Por la definición de $\omega_{\alpha_2,\alpha_1}$ se tiene que

$$\left\| \frac{c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}}{\alpha_2 - \alpha_1} \right\|_{C^{2+\beta}(\overline{\Omega})} \leq \ C.$$

Entonces,

$$\frac{\|c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}\|_{C^{2+\beta}(\overline{\Omega})}}{|\alpha_2 - \alpha_1|} \leq \ C,$$

es decir,

$$||c_{\alpha_2} - c_{\alpha_1}||_{C^{2+\beta}(\overline{\Omega})} \leq \ C|\alpha_2 - \alpha_1|.$$

Por lo tanto, la función Γ es localmente Lipschitz, y esto implica su continuidad. □

Ahora, es el momento de probar que c_α es diferenciable con respecto a α y la caracterización de su derivada.

Lema 2.3.5. *Sea* Ω *satisfaciendo* (11), g *como en* (12) *y* $\gamma > 0$. *Para cada* $\alpha > 0$, *la función*

$$c'_\alpha := \lim_{\alpha_2 \to \alpha} \omega_{\alpha_2,\alpha}, \tag{25}$$

existe como límite en $C^2(\overline{\Omega})$ *y es la única solución de*

$$\begin{cases} \Delta c'_\alpha = c_\alpha e^{c_\alpha} + (\alpha e^{c_\alpha} + \alpha c_\alpha e^{c_\alpha})c'_\alpha & \textit{en } \Omega, \\ \partial_\nu c'_\alpha = -g c'_\alpha & \textit{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{26}$$

Demostración. Sea $\alpha > 0$ y $K := \alpha + 1$, el Lema 2.3.4 garantiza la existencia de $C > 0$ tal que para cada $\alpha_2 \in [0, K]$ se tiene que

$$\|\omega_{\alpha_2,\alpha}\|_{C^{2+\beta}(\overline{\Omega})} \leq C. \tag{27}$$

Supóngase que $\omega_{\alpha_2,\alpha}$ no converge a la solución c'_α de (26) cuando $\alpha_2 \to \alpha$. Entonces, existe $\epsilon_0 > 0$ y una secuencia $\{\alpha_{2_k}\}_{k\in\mathbb{N}} \subset [0, K]$ con limite α, tal que $\|\omega_{\alpha_{2_k},\alpha} - c'_\alpha\|_{C^2(\overline{\Omega})} > \epsilon_0$ para cada $k \in \mathbb{N}$. Sin embargo, de acuerdo con (27) y el Teorema de Arzelá-Ascoli (Teorema 1.4.1), para una subsecuencia escogida adecuadamente $\{\alpha_{2_{kj}}\}_{j\in\mathbb{N}}$, la subsecuencia $\{\omega_{\alpha_{2_{kj}},\alpha}\}$ converge en $C^2(\overline{\Omega})$ a una función ω. Por el Colorario 2.3.1 y la definición de F, se tiene que $\lim_{\alpha_{2_{kj}} \to \alpha} F(c_{\alpha_{2_{kj}}} - c_\alpha) = 1$, luego

$$\lim_{\alpha_{2_{kj}} \to \alpha} f_{2,\alpha,\alpha_{2_{kj}}} = \lim_{\alpha_{2_{kj}} \to \alpha} \Big(\alpha e^{c_\alpha} + \alpha c_\alpha e^{c_\alpha} F(c_{\alpha_{2_{kj}}} - c_\alpha) \Big) = \alpha e^{c_\alpha} + \alpha c_\alpha e^{c_\alpha},$$

existe en $C^2(\overline{\Omega})$, por lo que ω tendría que resolver:

$$\begin{cases} \Delta\omega & = c_\alpha e^{c_\alpha} + (\alpha e^{c_\alpha} + \alpha c_\alpha e^{c_\alpha})\omega, \\ \partial_\nu \omega & = - g\omega. \end{cases} \tag{28}$$

Pero el Lema 1.3.2 garantiza que c'_α es la única solución de (28); por lo tanto, $\omega = c'_\alpha$, lo cual contradice la elección de $\{\alpha_{2kj}\}_{j\in\mathbb{N}}$.

□

La siguiente estimación da exactamente la cantidad de control en c'_α que se va a necesitar.

Lema 2.3.6. *Sean Ω como en (11), g como en (12), $\gamma > 0$, y $\alpha > 0$. Entonces la función c'_α satisface*

$$-\frac{1}{\alpha} < c'_\alpha \leq 0.$$

Demostración. Para cada $k \in \mathbb{N}$, el Lema 1.3.2 garantiza la existencia de solución $\zeta_k \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$ del problema

$$\begin{cases} (\Delta - (\alpha e^{c_\alpha} + \alpha c_\alpha e^{c_\alpha}))\,\zeta_k = c_\alpha e^{c_\alpha} & \text{en } \Omega, \\ \partial_\nu \zeta_k = -\left(g + \dfrac{1}{k}\right)\zeta_k & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \tag{29}$$

Por el Lema 1.3.3 y el Teorema de Arzelá-Ascoli (Teorema 1.4.1), junto con la unicidad de la solución de (26), se tiene que $\zeta_k \to c'_\alpha$ en $C^2(\overline{\Omega})$ cuando $k \to \infty$. Así, para cualquier $k \in \mathbb{N}$, o bien existe $x_0 \in \partial\Omega$ tal que $\zeta_k(x_0) \leq \zeta_k(x)$ para todo $x \in \Omega$, o existe $x_0 \in \Omega$ tal que ζ_k alcanza el mínimo en x_0. En el primer caso, considerando el operador $L = \Delta - \alpha c_\alpha e^{c_\alpha}$, la ecuación $(29)_1$ implica que $L(\zeta_k) \geq 0$; así, del Lema de Hopf (Lema 1.3.4) se tiene que

$$\partial_\nu \zeta_k(x_0) = -\left(g(x_0) + \frac{1}{k}\right)\zeta_k(x_0) \leq 0,$$

de donde, la no negatividad de $g(x_0) + \frac{1}{k}$, implica que $\zeta_k \geq 0$ en $\overline{\Omega}$. Por otra parte, si $x_0 \in \Omega$, el principio del máximo (Teorema 1.3.1), implica que $\Delta\zeta_k(x_0) \geq 0$, es decir,

$$c_\alpha(x_0)e^{c_\alpha(x_0)} + (\alpha e^{c_\alpha(x_0)} + \alpha c_\alpha(x_0) e^{c_\alpha(x_0)})\zeta_k(x_0) \geq 0,$$

por lo tanto,

$$c_\alpha(x_0) + (\alpha + \alpha c_\alpha(x_0))\zeta_k(x_0) \geq 0.$$

Despejando $\zeta_k(x_0)$ se obtiene

$$\zeta_k(x_0) \geq -\frac{c_\alpha(x_0)}{\alpha(1 + c_\alpha(x_0))} \geq -\frac{1}{\alpha\left(1 + \frac{1}{\sup c_\alpha}\right)} > -\frac{1}{\alpha},$$

donde la segunda desigualdad se satisface puesto que $-c_\alpha(x_0) \geq -\sup c_\alpha$ y $\frac{1}{1+c_\alpha(x_0)} \geq \frac{1}{1+\sup c_\alpha}$. En consecuencia, pasando el límite cuando $k \to \infty$, se infiere que

$$0 \geq c'_\alpha > -\frac{1}{\alpha},$$

donde la primera desigualdad $0 \geq c'_\alpha$ se tiene de la definición de $c'_\alpha := \lim_{\alpha_2 \to \alpha} \omega_{\alpha_2,\alpha}$ y la negatividad de $\omega_{\alpha_2,\alpha}$, dada por el Lema 2.3.2.

$\square$

Lema 2.3.7. *Sea Ω satisfaciendo (11), g como en (12) y $\gamma > 0$. La función*

$$\begin{aligned} m^* : [0,\infty) &\longrightarrow [0,\infty) \\ \alpha &\longmapsto \alpha \int_\Omega e^{c_\alpha} \end{aligned}$$

es continua en $[0,\infty)$, diferenciable en $(0,\infty)$, monótona creciente, sobreyectiva, y por ello biyectiva.

Demostración. Sean $\alpha > 0$ y $\alpha_2 \in [0,\infty)$ con $\alpha_2 \neq \alpha$, para F definida en (18). Se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{m^*(\alpha_2) - m^*(\alpha)}{\alpha_2 - \alpha} &= \int_\Omega \frac{\alpha_2 e^{c_{\alpha_2}} - \alpha e^{c_\alpha}}{\alpha_2 - \alpha} \\ &= \int_\Omega e^{c_{\alpha_2}} + \int_\Omega \alpha e^{c_{\alpha_2}} \frac{e^{c_{\alpha_2} - c_\alpha} - 1}{\alpha_2 - \alpha} \\ &= \int_\Omega e^{c_{\alpha_2}} + \int_\Omega \alpha e^{c_{\alpha_2}} F(c_{\alpha_2} - c_\alpha)\omega_{\alpha_2,\alpha}. \end{aligned}$$

El Corolario 2.3.1 y el Lema 2.3.5 implican que

$$\begin{aligned} \lim_{\alpha_2 \to \alpha} \frac{m^*(\alpha_2) - m^*(\alpha)}{\alpha_2 - \alpha} &= \int_\Omega \lim_{\alpha_2 \to \alpha} e^{c_{\alpha_2}} + \int_\Omega \lim_{\alpha_2 \to \alpha} \alpha e^{c_{\alpha_2}} F(c_{\alpha_2} - c_\alpha)\omega_{\alpha_2,\alpha} \\ &= \int_\Omega e^{c_\alpha} + \int_\Omega \alpha e^{c_\alpha} c'_\alpha, \end{aligned}$$

así, m^* es derivable y su derivada está dada por

$$m^{*\prime}(\alpha) = \int_\Omega e^{c_\alpha}(1 + \alpha c_\alpha').$$

Además, la estimación del Lema 2.3.6 $c_\alpha' > -\frac{1}{\alpha}$ implica que $m^{*\prime}(\alpha) > 0$; por lo tanto, m^* es monótona creciente. Finalmente, por el Lema 2.1.2 se tiene que $c_\alpha > 0$, de donde

$$m^*(\alpha) = \alpha \int_\Omega e^{c_\alpha} \geq \alpha \int_\Omega e^0 = \alpha|\Omega|,$$

por lo tanto, m^* es sobreyectiva. $\square$

3. EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL MODELO ESTACIONARIO

En este capitulo, se analiza la existencia y unicidad de soluciones para el modelo estacionario (5). Además, se analiza la cara de la solución cuando Ω es una bola abierta y para el caso unidimensional se deriva una representación implícita de la solución.

3.1. EXISTENCIA Y UNICIDAD DEL MODELO ESTACIONARIO

En esta sección se estudia la buena postura del sistema (5) apartir de la información obtenida en el capitulo anterior para el problema escalar (10). Para ello, primero se debe asegurar que (5) puede ser transformado en (10).

Lema 3.1.1. *Sea Ω un dominio acotado y $c \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$. Asuma que $n \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ satisface*

$$\begin{cases} 0 = \Delta n - \dot{\nabla}(n \nabla c) & \text{en} \quad \Omega, \\ \partial_\nu n = n \partial_\nu c & \text{sobre} \quad \partial\Omega. \end{cases} \tag{30}$$

Entonces existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que

$$n = \alpha e^c. \tag{31}$$

Demostración. Para cualquier c, con suficiente regularidad, e^c es una función positiva de $C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ y

$$\Delta e^c - \nabla \cdot (e^c \nabla c) = \nabla \cdot (e^c \nabla c) - \nabla \cdot (e^c \nabla c) = 0, \quad \text{en} \ \ \Omega.$$

Si $n \equiv 0$, la afirmación es trivial con $\alpha = 0$. Note que $-n$ también es solución de (30), por lo tanto, sin pérdida de generalidad se puede asumir que existe un punto $x_0 \in \Omega$ tal que $n(x_0) > 0$. Así, para cada $\epsilon > 0$, se tiene que

$$\begin{aligned} 4\left|\nabla\sqrt{\frac{n}{e^c}}\right|^2 e^c &= \left|\nabla \frac{n}{e^c}\right|^2 \frac{e^{2c}}{n} = \left|\frac{\nabla n}{e^c} - \frac{n \nabla e^c}{e^{2c}}\right|^2 \frac{e^{2c}}{n} \\ &= \left(\frac{|\nabla n|^2}{n} - \frac{\nabla n \cdot \nabla e^c}{e^c}\right) + \left(\frac{n|\nabla e^c|^2}{e^{2c}} - \frac{\nabla n \cdot \nabla e^c}{e^c}\right) \\ &= \nabla n \cdot \nabla \ln \frac{n}{e^c} - \nabla e^c \cdot \nabla \frac{n}{\epsilon e^c} \\ &= \nabla n \cdot \nabla \ln \frac{n}{\epsilon e^c} - \epsilon \nabla e^c \cdot \nabla \frac{n}{\epsilon e^c}, \end{aligned} \tag{32}$$

en $\Omega_+ := \{x \in \Omega \mid n(x) > 0\}$. La forma más útil en la cuál se va a usar la ecuación para n será la versión débil de (30). Cada función $\rho \in \{n, e^c\}$ satisface

$$\int_\Omega \nabla\rho \cdot \nabla\varphi = \int_\Omega \rho\nabla c \cdot \nabla\varphi \qquad \text{para cada } \varphi \in H^1(\Omega). \tag{33}$$

Para $\epsilon > 0$ considerando $\psi_\epsilon := \max\{\frac{n}{\epsilon e^c}, 1\}$, se tiene que $\psi_\epsilon(x_0) \neq 1$ si $\epsilon < \frac{n(x_0)}{e^{c(x_0)}}$. Además, $\psi_\epsilon, \sqrt{\psi_\epsilon}$ y $\ln\psi_\epsilon$ están en $H^1(\Omega)$. Por lo tanto, se puede usar ψ_ϵ y $\log\psi_\epsilon$ como funciones test en (33). Por (32) se tiene que

$$\begin{aligned}
4\int_{\{n\geq\epsilon e^c\}} \left|\nabla\sqrt{\frac{n}{e^c}}\right|^2 e^c dx &= \int_{\{n\geq\epsilon e^c\}} \nabla n \cdot \nabla \log\frac{n}{\epsilon e^c} dx - \epsilon\int_{\{n\geq\epsilon e^c\}} \nabla e^c \cdot \nabla\frac{n}{\epsilon e^c} dx \\
&= \int_\Omega \nabla n \cdot \nabla \ln\psi_\epsilon dx - \epsilon\int_\Omega \nabla e^c \cdot \nabla\psi_\epsilon dx \\
&= \int_\Omega n\nabla c \cdot \nabla \ln(\psi_\epsilon) dx - \int_\Omega e^c\nabla c \cdot \nabla\psi_\epsilon dx \\
&= \int_{\{n\geq\epsilon e^c\}} \nabla c \cdot \left(n\frac{\nabla n}{n} - n\frac{\nabla e^c}{e^c} - \frac{e^c}{e^c}\nabla n + e^c n\frac{\nabla e^c}{e^{2c}}\right) dx = 0.
\end{aligned}$$

Haciendo $\epsilon \to 0$, se obtiene que $\frac{n}{e^c}$ es constante en la componente conexa de Ω_+ que contiene x_0. Sea A la componente conexa de Ω_+ que contiene x_0, entonces se puede concluir que existe $\alpha > 0$ tal que $n = \alpha e^c$ en A. De la continuidad de c y n se tiene que en $\overline{A}$, también se cumple $n = \alpha e^c > 0$. Sin embargo, esto implica directamente que $A = \Omega$, lo que prueba la afirmación.

$\square$

Teorema 3.1.1. *Sea Ω satisfaciendo (11), g como en (12) y $\gamma > 0$. Para cada $m > 0$ existe exactamente una pareja $(n, c) \in \left(C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})\right)^2$ que soluciona (5) y satisface $\int_\Omega n = m$. Esta solución es positiva sobre $\overline{\Omega}$ en ambas componentes, pero no es constante.*

Demostración. Debido al Lema 2.3.7, existe exactamente un número $\tilde{\alpha} \in [0, \infty)$ tal que $m^*(\tilde{\alpha}) = m$. Para este $\tilde{\alpha}$, el Lema 2.1.6 garantiza la existencia de solución $\tilde{c} \in C^{2+\beta}(\overline{\Omega})$; luego tomando $\tilde{n} := \tilde{\alpha}e^{\tilde{c}}$, la pareja $(\tilde{n}, \tilde{c})$ soluciona el sistema (5) y satisface $m^*(\tilde{\alpha}) = \tilde{\alpha}\int_\Omega e^{\tilde{c}} = \int_\Omega \tilde{n} = m$.
Por otra parte, si $(n, c) \in \left(C^2(\Omega) \cup C^1(\overline{\Omega})\right)^2$ es solución de (5) y satisface $\int_\Omega n = m > 0$, entonces por el Lema 3.1.1, existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tal que $n = \alpha e^c$; además, la condición $\int_\Omega \alpha e^c \geq 0$, implica que $\alpha \geq 0$. Así, de las ecuaciones $(5)_{(2)}$ y $(5)_{(4)}$ se tiene que c es solución del problema (10) para dicho α, así, el Lema 2.3.7, implica que $m = \int_\Omega n = \alpha\int_\Omega e^c = m^*(\alpha)$. Dado que la función m^* es inyectiva, se tiene que $\alpha = \tilde{\alpha}$, por lo tanto, la unicidad de la solución de (5), dada por el Lema 2.2.2, implica que $c = \tilde{c}$. Por consiguiente, el sistema estacionario (5) tiene solución única $(n, c) \in \left(C^2(\Omega) \cup C^1(\overline{\Omega})\right)^2$

que satisface $\int_\Omega n = m$.

Finalmente, la positividad de los parámetros γ y α, junto con el Lema 2.1.1, garantizan que c es no constante, además del Lema 2.1.3 $c > 0$ sobre $\overline{\Omega}$. Por lo tanto, la solución (n, c) es positiva sobre $\overline{\Omega}$ y no constante. $\square$

3.2. SOLUCIÓN EN EL CASO RADIAL

En esta sección se estudia la solución cuando $\Omega := B_R$, es decir, Ω es una bola abierta con centro en 0 y radio $R > 0$. Además, se asume que la función g es constante. Sea $\partial_r = \frac{x}{|x|} \cdot \nabla$ la derivada radial. En este caso, el sistema (5) se puede reescribir como

$$\begin{cases} \Delta n = \nabla \cdot (n \nabla c) & \text{en } B_R, \\ \Delta c = nc & \text{en } B_R, \\ \partial_v c = (\gamma - c) g & \text{sobre } \partial B_R, \\ \partial_v n = n \partial_v c & \text{sobre } \partial B_R, \end{cases} \tag{34}$$

para algún $g > 0$ y $\gamma > 0$. Dada una masa $m > 0$, por el Teorema 3.1.1, se sigue que el sistema (34), admite una única solución clásica $(n, c) \in \left(C^2(\Omega) \cup C^1(\overline{\Omega})\right)^2$ con $n \geq 0$ satisfaciendo $\int_\Omega n = m$. Esta solución debe ser radialmente simétrica y se tiene que $n\left(|x|\right) = n(x)$, así como $c\left(|x|\right) = c(x)$. Además, por el Lema 3.1.1 existe $\alpha > 0$, tal que para todo $0 \leq r \leq R$, se tiene que $n(r) = \alpha e^{c(r)}$ y $n(R) = \alpha e^{c(R)}$ de donde $\alpha = \frac{n(R)}{e^{c(R)}}$, y por lo tanto,

$$n(r) = n(R) e^{c(r) - c(R)} \quad \text{para } r \in (0, R).$$

3.3. UN CASO UNIDIMENSIONAL

En esta sección se deriva una representación implícita de la solución (n, c) del sistema (5), para el caso unidimensional, esto es, cuando Ω es un intervalo abierto. De secciones anteriores, se tiene que $n = \alpha e^c$, para algún parámetro $\alpha > 0$, que depende monótonamente de la densidad total de bacterias, $\int_\Omega n$. Además, c resuelve $c'' = \alpha c e^c$. Sin pérdida de generalidad, se asume que la función $c(0)$ alcanza su valor mínimo en $x = 0$; así se estudia el problema para $\Omega = (0, L)$. Además, para $\partial\Omega = \{0, L\}$, se considera en 0 una condición de contorno tipo Neumann homogénea y en L se satisface la condición de frontera original $(5)_4$. Tomando $G := g(L)$, se tiene el siguiente problema de valor en la frontera

$$\begin{cases} c'' = \alpha c e^c \quad \text{en} \quad (0, L), \\ c'(L) = G\gamma - Gc(L) \\ c'(0) = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Multiplicado la ecuación $(35)_1$ por $2c'$ se obtiene

$$\begin{aligned} c''(2c') &= 2c'(\alpha c e^c) = 2\alpha(c'(c-1)e^c + c'e^c), \\ ((c')^2)' &= (2\alpha(c-1)e^c)'. \end{aligned}$$

Así, por el Teorema fundamental del cálculo se sigue que

$$(c')^2 = 2\alpha(c-1)e^c - 2\alpha(c_0 - 1)e^{c_0},$$

donde $c_0 := \inf c = c(0)$. Además, como $c'' = \alpha e^c$ es positiva, se sigue que c' es monótona creciente, y dado que $c'(0) = 0$ se concluye que c' es positiva en $(0, L)$. Por consiguiente,

$$c' = \sqrt{2\alpha}\sqrt{(c-1)e^c - (c_0 - 1)e^{c_0}}. \tag{36}$$

Por lo tanto, para cada $x \in [0, L]$ se tiene que

$$\frac{1}{\sqrt{2\alpha}} \int_{c_0}^{c(x)} \frac{1}{\sqrt{(c-1)e^c - (c_0 - 1)e^{c_0}}} dc = x. \tag{37}$$

Ahora, para determinar el valor c_0, nótese que usando la condición de frontera en (35) y la ecuación (36), c_0 puede ser expresado en términos de $c(L)$, como sigue

$$G\gamma - Gc(L) = \sqrt{2\alpha}\sqrt{(c(L) - 1)e^{c(L)} - (c_0 - 1)e^{c_0}}.$$

Finalmente, el valor de $c(L)$ se obtiene de la ecuación (37) para $x = L$.

BIBLIOGRAFÍA

A., Hillesdon, Pedley T. y Kessler J. “The development of concentration gradients in a suspension of chemotactic bacteria”. En: *Bulletin of Mathematical Biology* 55.(2) (1995), págs. 299-344 (vid. pág. 9).

A., Lorz. “Coupled chemotaxis fluid model”. En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 20.06 (2010), págs. 987-1004 (vid. pág. 10).

D., Gilbarg y Trudinger N. *Elliptic partial differential equations of second order*. SpringerVerlag, Berlin-New York, 1977 (vid. págs. 17, 18).

D., Horstmann et al. “From 1970 until present: the Keller- Segel model in chemotaxis and its consequences”. En: *Jahresberichte Deutsch. Math.-Verein* 105 (2003), págs. 103-165 (vid. pág. 9).

E., Keller y Segel L. “Initiation of slime mold aggregation viewed as an instability”. En: *Journal of Theoretical Biology* 26.3 (1970), págs. 399-415 (vid. pág. 8).

E.J., Villamizar-Roa y Duarte-Rodriguez A. “Análisis teórico de un modelo matemático de la quimiotaxis atractivo-repulsiva, con crecimiento logístildero, en fluidos”. En: *Tesis de maestría en Matemáticas* (2018) (vid. pág. 10).

E.J., Villamizar-Roa, Duarte-Rodriguez A. y Ferreira L.C.F. “Global existence for an attraction-repulsion chemotaxis fluid model with logistic source”. En: *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B* 24 (2019), 423–447 (vid. pág. 10).

E.J., Villamizar-Roa, Duarte-Rodriguez A. y Ferreira L.C.F. “Global existence for an attraction-repulsion chemotaxis-fluid system in a framework of Besov-Morrey types”. En: *J. Math. Fluid Mech.* 22 (2020), pág. 18 (vid. pág. 10).

I., Tuval et al. “Bacterial swimming and oxygen transport near contact lines”. En: *Proceedings of the National Academy of Sciences of the United States of America* 102.7 (2005), págs. 2277-2282 (vid. págs. 9, 10).

J., Murray. *Mathematical Biology. II Spatial Models and Biomedical Applications*. Springer-Verlag New York Incorporated, 2001 (vid. pág. 8).

M., Braukhoff. “Global (weak) solution of the chemotaxis-Navier–Stokes equations with non-homogeneous boundary conditions and logistic growth”. En: *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéari* 34 (2017), págs. 1013-1039 (vid. págs. 9, 11).

M., Braukhoff y Lankeit J. “Stationary solutions to a chemeotaxis-consumption model with realistic boundary conditions”. En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences 29* 11 (2019), págs. 2033-2062 (vid. págs. 9, 11).

M., Winkler. “Global large-data solutions in a chemotaxis-(Navier–) Stokes system modeling cellular swimming in fluid drops”. En: *Communications in Partial Differential Equations* 37 (2012), págs. 319-351 (vid. pág. 10).

— “Global weak solutions in a three-dimensional chemotaxis- Navier–Stokes system”. En: *Annales de l’Institut Henri Poincaré (C) Non Linear Analysis* 33 (2016), págs. 1329-1352 (vid. pág. 10).

N., Bellomo et al. “Toward a mathematical theory of Keller- Segel models of pattern formation in biological tissues”. En: *Mathematical Models and Methods in Applied Sciences* 25.09 (2015), págs. 1663-1763 (vid. pág. 8).

N., Nadirashvili. “On a problem with oblique derivative”. En: *Mathematics of the USSR-Sbornik* 55.(2) (1986), pág. 397 (vid. pág. 17).

T., Hillen y Painter K. “A user’s guide to PDE models for chemotaxis”. En: *Journal of mathematical biology* 58.1-2 (2009), págs. 183-217 (vid. pág. 8).