

ESTUDIO DE LA RELACIÓN ENTRE LA ESTRUCTURA MULTIPOLAR Y LA
MASA APLICADO AL ESPACIOTIEMPO DE LA q -METRIC EN GRAVEDAD DE
EINSTEIN

ANGIE MILENA SÁNCHEZ MÉNDEZ

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2022

ESTUDIO DE LA RELACIÓN ENTRE LA ESTRUCTURA MULTIPOLAR Y LA
MASA APLICADO AL ESPACIOTIEMPO DE LA q -METRIC EN GRAVEDAD DE
EINSTEIN

ANGIE MILENA SÁNCHEZ MÉNDEZ

TRABAJO DE GRADO PARA OPTAR POR EL TÍTULO DE
FÍSICA

DIRECTOR

ANTONIO CALIXTO GUTIÉRREZ PIÑEREZ
Doctor EN CIENCIAS NATURALES, FÍSICA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE FÍSICA
BUCARAMANGA
2022

*A la memoria de mi abuelo,
mi claro ejemplo a seguir.*

Agradecimientos

¿Quién podría conocerse a sí mismo sin haber visto antes su propio reflejo?

De la misma forma en que podemos ver nuestra apariencia física sobre una superficie reflectiva; es posible también, mediante otros, ver nuestro reflejo interior, tomarlo, y modelarlo para hacer de nosotros alguien mejor.

Durante esta larga jornada, la presencia y contribución de algunas personas han sido crucial para el desarrollo de este trabajo, y su legado se quedará conmigo para el resto de la vida.

Quisiera empezar por mi madre, quien me ha enseñado con amor y firmeza, desde que tengo memoria, a mantener el coraje y la resiliencia para alcanzar mis ideales. A mi abuela, mujer de carácter fuerte y que aún así, demuestra una incesable ternura cuando se trata de su nieta, gracias por todos estos años de amabilidad y consuelo cuando tanto lo necesité. Junto a ellas y mi abuelo formaron lo que soy ahora, no me cabe duda que sin su ayuda, nada de esto podría haber sucedido.

Soy consciente de que en los tiempos de ahora es más fácil mantenernos en contacto y que por ende sería sencillo forjar inquebrantables relaciones de amistad, No obstante, esto no es del todo cierto. Por tal motivo, me llena de alegría saber que cuento con ustedes: Angie, Stephany, Miguel, Camilo x2 y Sebastián. A Gabriela de João Pessoa: obrigada pela paciência toda que tem tido comigo, as incontáveis noites me acompanhando enquanto estudava simplesmente não tem preço. Você, meu xodó. A Teffa y Jorge por su incondicional apoyo durante la carrera. A Jhonattan, gracias por tanto apoyo, desde tiempos inmemorables. Tampoco quisiera pasar por alto la compañía de Yuki y Betobe. A la señora Stella, mi segunda madre, agradezco enormemente su apoyo, amabilidad y disposición conmigo, por su consejo y platos de comida que tantas veces me salvaron. Debo admitir también que si hay alguien de quien nunca quisiera prescindir sería de ti, Nicolás: mi incansable sensación de querer conocer el mundo a través de una sola persona; tenerte como colega, amigo y compañero de vida es un verdadero privilegio.

Finalmente, pero lejos de ser menos importante, expongo mi más sincera gratitud a cuatro docentes en especial, cuyas aportaciones a mi formación fueron de vital relevancia: al profesor Yeinzon por aceptarme como asistente en sus cursos y con ello, ofrecerme una nueva perspectiva de la física, las matemáticas y la vida como investigador; A Carlos, por su amabilidad, paciencia y buen criterio en las discusiones en cada área que estudiaba; Al profesor Luis Núñez, por recibirme en su grupo de investigación desde el inicio de mi carrera y contribuir a ella con importantes apreciaciones de manera desinteresada; y Al profesor Antonio, mi director de proyecto: gracias por recibirme como su estudiante e ilustrarme con fructíferas lecciones tanto académicamente como para la vida, además de darme a conocer el romanticismo de la física a través de la buena literatura.

CONTENIDO

	pág.
Prolegómenos	11
1. El espaciotiempo de la q-metric	23
1.1. Naturaleza de la solución	24
2. Estructura multipolar en gravedad de Einstein	28
2.1. Preliminares: estructura multipolar newtoniana no covariante	29
2.2. Estructura multipolar newtoniana covariante	30
2.3. Estructura multipolar en espaciotiempo estacionario	31
2.3.1. Estructura multipolar para soluciones con simetría axial	34
2.4. Método Fodor-Hoenselaers-Perjés (<i>FHP</i>) para el cálculo de momentos multipolares asociados a sistemas estacionarios y axialmente simétricos	36
2.4.1. Contextualización	36
2.4.2. Elementos necesarios para desarrollar el método <i>FHP</i>	38
2.4.3. Descripción detallada del método <i>FHP</i>	40
2.5. Momentos multipolares másicos asociados a la q -metric	47
3. Definiciones de masa en gravedad de Einstein	49
3.1. El formalismo ADM	49
3.1.1. Formulación Hamiltoniana de la Relatividad General	49
3.1.2. Determinación de la masa ADM aplicado al espaciotiempo de la q -metric	57
3.2. El formalismo de Komar	60
3.2.1. Determinación de la masa Komar aplicado a la q -metric	62
4. Conclusiones	65
BIBLIOGRAFÍA	67

LISTA DE FIGURAS

- pág.**
- Figura 1. Representación gráfica de las superficies de divergencia de las singularidades de curvatura de la q -metric en coordenadas polares, donde mediante el estudio del escalar de Krestchman, muestra que la solución exhibe una singularidad en el origen de coordenadas y en $r = 2m$. Imagen tomada de: K Boshkayev y col.: *Motion of test particles in the field of a naked singularity*. En: *Physical Review D* 93.2 (2016), pág. 024024. 26
- Figura 2. Representación de la descomposición del vector t^μ en términos de las componentes del vector normal, función lapso y vector tangente a cada hipersuperficie Σ_t de la *foliación* del espaciotiempo, cuyo dominio al interior y en su frontera corresponde a \mathcal{V} y $\partial\mathcal{V}$, respectivamente. 53
- Figura 3. Superficie de integración \mathcal{S}_t sobre la hipersuperficie Σ_t . La región \mathcal{S}_t corresponde al límite exterior de \mathcal{V}_t , en la cual se encuentra contenida la masa de la fuente. El límite inferior puede estar delimitado por dos o más huecos \mathcal{H}_t . Imagen tomada de: Ericourgoulhon: *3+1 formalism and bases of numerical relativity*. En: *arXiv preprint gr-qc/0703035* (2007). 61

LISTA DE ANEXOS

	pág.
Anexo A. La ecuación de Poisson y el potencial generado por una distribución arbitraria de masa	72
Anexo B. La <i>q-metric</i> como solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío	78

RESUMEN

TÍTULO: ESTUDIO DE LA RELACIÓN ENTRE LA ESTRUCTURA MULTIPOLAR Y LA MASA APLICADO AL ESPACIOTIEMPO DE LA q -METRIC EN GRAVEDAD DE EINSTEIN¹

AUTOR: ANGIE MILENA SÁNCHEZ MÉNDEZ ².

PALABRAS CLAVE: ESTRUCTURA MULTIPOLAR, GRAVEDAD DE EINSTEIN, q -METRIC, MASA ADM, MASA KOMAR.

DESCRIPCIÓN: Los conceptos de estructura multipolar y de masa válidos en la gravedad de Einstein carecen de una definición generalizada. Sin embargo, en los últimos años se han desarrollado algunos trabajos que nos permiten abordar estas temáticas bajo ciertas condiciones preestablecidas según la simetría intrínseca del espaciotiempo. En este trabajo se evalúa la posibilidad de encontrar la relación existente entre la masa ADM (Arnowitt-Desser-Misner), válida para geometrías asintóticamente planas; la masa Komar, válida en un espaciotiempo estacionario, y los momentos multipolares hallados a partir de la definición de Geroch-Hansen, mediante el método de G. Fodor, C. Hoenselaers y Z. Perjés (*FHP*). Para ello, se implementa el modelo teórico de una métrica con estructura cuadrupolar denominada q -metric. De esta manera, a partir de las definiciones de masa ADM y Komar se observa que las expresiones funcionales asociadas a la q -metric coinciden. Como conclusión final, se muestra que el término monopolar, la masa de la fuente, de este espaciotiempo coincide con los valores de masa encontrados, con lo cual, se corrobora la equivalencia entre las dos definiciones de masa.

¹ Trabajo de Grado.

² Facultad de Ciencias, Escuela de Física, Antonio Calixto Gutiérrez Piñeres (Director).

ABSTRACT

TITLE: STUDY OF THE RELATIONSHIP BETWEEN THE MULTIPOLAR STRUCTURE AND THE MASS APPLIED TO THE SPACETIME OF THE q -METRIC IN EINSTEIN GRAVITY³.

AUTHOR: ANGIE MILENA SÁNCHEZ MÉNDEZ ⁴.

KEYWORDS: MULTIPOLAR ESTRUCTURE, EINSTEIN GRAVITY, q -METRIC, ADM MASS, KOMAR MASS.

DESCRIPTION: The concepts of multipolar structure and mass valid in Einstein's gravity lack a generalized proper definition. However, some works have been developed in recent years, which allow us to address these issues under certain pre-established conditions according to the intrinsic symmetry of spacetime. In this work, we evaluate the possibility of finding a relation between the ADM (Arnowitt-Desser-Misner) mass, valid for asymptotically flat geometries; the Komar mass, valid in a stationary spacetime, and the multipole moments proposed by Geroch-Hansen definition, using the method of G. Fodor, C. Hoenselaers and Z. Perjés (*FHP*). In order to get that, the theoretical model of a metric with a quadrupole structure called q -metric was implemented. Therefore, from the ADM and Komar definitions of mass, it was shown that the functional functions associated with the q -metric coincide. In addition, it was shown that the monopolar term, the mass of the source, of this spacetime coincides with the mass values found, thus corroborating the equivalence between the two definitions of mass.

³ Bachelor Thesis.

⁴ Faculty of sciences, School of Physics, Antonio Calixto Gutiérrez Piñeres (Director).

Prolegómenos

Nothing in the history of science is perhaps so extraordinary as the doubt and confusion surrounding the concept of mass.

—George Burniston Brown
American Journal of Physics, 1960.

Naturaleza e Importancia del Problema

La masa es uno de los conceptos más fundamentales en física, en especial cuando se trata de describir de la dinámica de un sistema. Sin embargo, su comprensión a profundidad se ve opacada a no más que axiomas dependiendo del escenario en el que se encuentre. El concepto más arraigado que poseemos es quizás aquel propuesto por Newton en sus *Philosophiae naturalis principia mathematica* de 1687, en el que establece la “cantidad de materia” como sinónimo de “masa”; así como también de “cuerpo”. De otro lado, también postula esta cantidad como una medida de la inercia, señalándola como una propiedad innata de la materia en un cuerpo. En sus propias palabras expone:

... the least particles of all bodies [are] all extended, and hard and impenetrable and moveable and endowed with their proper inertia⁵.

Newton señala que la inercia es directamente proporcional a la materia en un cuer-

⁵ Isaac Newton: *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. Univ of California Press, 1999.

po⁶. Esto se muestra como consecuencia directa de su concepción de que las partículas elementales son iguales en naturaleza y densidad, y que además, la inercia de cada partícula era proporcional a su volumen:

*... there is no difference between ... bodies but in mere form of matter ...*⁷.

También argumenta que aplicando su segunda ley del movimiento, la relación de las fuerzas de gravedad que actúan sobre dos cuerpos cualesquiera, en un lugar dado, será igual a la relación compuesta de sus cantidades de materia y sus aceleraciones. Pero dado que las aceleraciones son iguales -la de gravedad-, se puede concluir que la relación de pesos en un lugar dado es igual a la relación de cantidades de materia⁸. Desde el punto de vista moderno, lo que Newton demostró fue la igualdad entre la relación de pesos y la de inercias⁹. Del mismo modo, años después, Leonhard Euler enuncia la masa o cantidad de materia como “cantidad de Inercia”¹⁰, no desde la visión geométrica e hipotética de Newton sino de una más dinámica basada en interpretaciones analíticas de sólidos rígidos empleados en situaciones cotidianas.

Posteriormente, Albert Einstein, en su teoría de la relatividad especial de 1905, extendió el concepto de masa al demostrar su equivalencia con la energía¹¹. Bajo esta visión, la masa es concebida como un “reservorio de energía”. Luego, en 1907,

⁶ Ibid, pág 2.

⁷ Ibid, pág 341.

⁸ Ibid, pág 411.

⁹ James Wood: *The principles of mechanics: Designed for the use of students in the university.* Deighton, 1824.

¹⁰ L Euler: *Theorie motus corpus solidorum.* 1765.

¹¹ Albert Einstein, John Stachel y Martin J Klein: *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol. 5, The Swiss Years: Correspondence, 1902-1914.* Princeton University Press, 1993.

Einstein empleó los dos conceptos conocidos como “masa inercial” y “masa gravitacional”, en concordancia con las ideas de Galileo y el principio de equivalencia fuerte, donde establece que el resultado de cualquier experimento local no gravitacional en un laboratorio en caída libre es independiente de la velocidad del laboratorio y su ubicación en el espaciotiempo ¹².

Más tarde, en 1957, de acuerdo con las ideas de Euler, Hermann Bondi llevó un poco más lejos estos conceptos. Para ello, reescribió la “masa gravitacional” como “masa gravitacional pasiva” y añadiendo el nuevo término “masa gravitacional activa” ¹³. La primera definición hace referencia a la “masa” de un objeto medida a través de su interacción con un campo gravitacional externo; asimismo, la segunda correspondería a la obtenida por medio del campo gravitacional que ésta genera, medida por una partícula de prueba. El implementar estas definiciones hace más preciso el entendimiento de esta cantidad, aunque indetermina la unicidad en el concepto al fragmentarlo en tres con distintos enfoques.

Cada concepto de masa mencionado anteriormente tiene su respectivo rango de validez, según la teoría sobre la cual fue planteada. En el contexto de la teoría newtoniana¹⁴, el régimen a satisfacer corresponde a: rango de velocidades considerablemente pequeñas a la de la luz y campo gravitacional débil¹⁵. A su vez, el régimen de la teoría de la relatividad especial¹⁶ corresponde al de campo débil. Cabe resaltar

¹² Mark P Haugan y Claus Lämmerzahl: *Principles of equivalence: their role in gravitation physics and experiments that test them*. En: *Gyros, Clocks, Interferometers...: Testing Relativistic Gravity in Space*. 2001, págs. 195-212.

¹³ Hermann Bondi: *Negative mass in general relativity*. En: *Reviews of Modern Physics* 29.3 (1957), pág. 423.

¹⁴ Teoría invariante ante el grupo de Galileo.

¹⁵ Por campo gravitacional débil entiéndase como aquel cuyo espaciotiempo se asemeja al plano, salvo por una pequeña perturbación sobre la métrica.

¹⁶ Teoría invariante ante el grupo de Poincaré¹⁷.

que ambas teorías se desarrollan en espaciotiempo plano e hipersuperficie ortogonal, haciendo posible abordar el concepto de masa sin mayor dificultad; es decir, esta puede ser hallada como la integral de una determinada densidad de energía contenida en un volumen acotado.

Para la Teoría General de Relatividad (RG) no se deben las condiciones mencionadas anteriormente, ya que estas serán atribuidas tanto al límite newtoniano como al régimen de campo débil o en ausencia de gravedad, lo que permite que la teoría sea válida para el espaciotiempo plano. La RG, por su lado, al considerar la gravedad como una propiedad geométrica intrínseca del espaciotiempo, hace que el régimen que solía ser válido en la relatividad especial, lo sea ahora a nivel local. Este hecho, junto con el principio de equivalencia fuerte, constituyen uno de los mayores problemas abiertos, el cual radica en describir de manera covariante en qué consiste una fuente de campo gravitacional con estructura multipolar, y su relación con otros conceptos que hasta el momento también carecen de una formulación definitiva; por ejemplo, masa o centro de masa. Para el desarrollo de este trabajo se pretende encontrar el valor de la masa de la q -metric a través de tres formalismos diferentes. El primero, la estructura multipolar; el segundo, la masa de Komar y el tercero, la masa de Komar. Esto con el ánimo de hacer una revisión sobre algunas características relevantes de esta métrica como modelo teórico, y a su vez, encontrar la posible relación existente entre cada uno de estos formalismos.

Estado General del Tema

Toda teoría física se cimenta sobre leyes de conservación que codifican sus respectivas simetrías, expresadas en la forma de una ecuación de continuidad ¹⁸. De esta ecuación, en el contexto de la teoría de relatividad especial, se deriva la ley de conservación

¹⁸ Stephen W Hawking y George Francis Rayner Ellis: *The large scale structure of space-time*. Vol. 1. Cambridge university press, 1973.

$$\partial_\nu T^{\mu\nu} = 0,$$

donde $T^{\mu\nu}$ corresponde al tensor simétrico de rango dos, denominado el tensor energía-momentum, el cual contiene la información de la densidad de energía, de momentum lineal y de esfuerzos, asociados a cualquier distribución continua de materia y campos no gravitacionales. En la teoría de relatividad general, espaciotiempo curvo, el tensor de energía-momentum actúa como fuente de campo gravitacional a través de la ecuación de Einstein y, análogo a la ley de conservación en espacio plano, se satisface también la condición libre de divergencia, excepto que su validez se ve limitada como una condición local ¹⁹:

$$\nabla_\nu T^{\mu\nu} = 0. \tag{1}$$

De otro modo, para la caracterización de las propiedades físicas del campo gravitatorio, tales como su energía-momentum y momentum angular, se podría intentar realizar un análogo con la empleada para los campos de materia. Esto equivaldría a identificar densidades locales apropiadas que luego se integrarían en regiones de espacio-tiempo finitas. Sin embargo, tal enfoque se enfrenta algunas dificultades conceptuales. Una densidad de energía local, situada en un punto o región infinitesimal, asociada al campo gravitacional no se puede definir en la Relatividad General. Las razones de esto provienen del principio de equivalencia. De manera heurística, este principio se puede utilizar para “suprimir” los efectos del campo gravitatorio en un punto dado del espaciotiempo, bajo una escogencia conveniente de la carta coordenada. En otras palabras, una partícula puntual en caída libre no siente ningún campo gravitatorio, por lo que, en particular, no se puede identificar ninguna densidad de energía gravitacional en los puntos del espaciotiempo.

¹⁹ Kip S Thorne, Charles W Misner y John Archibald Wheeler: *Gravitation*. Freeman San Francisco, CA, 2000.

Aún así, cuando no es posible considerar la contribución del campo gravitacional dentro de $T_{\mu\nu}$, se puede obtener la energía total (de forma global) para un objeto aislado en un espaciotiempo estático y asintóticamente plano para un tiempo dado, donde, además cumpla con el teorema de energía positiva ²⁰. Este formalismo es conocido por el nombre de ADM (Arnowit-Deser-Misner). Asimismo, en 1959, A. Komar estableció una forma de obtener la energía para un objeto aislado mediante la demostración de una ley de conservación covariante, una densidad de energía, asociada a una transformación infinitesimal de coordenadas aplicable a espaciotiempos estacionarios ²¹.

El concepto de masa no solamente puede ser abordado a partir de las diferentes definiciones planteadas hasta la fecha, también puede ser descrita a través de los momentos multipolares. Este es uno de los motivos por los cuales la estructura multipolar constituye una base fundamental en Relatividad General, ya que con ellos es posible describir las principales características de la fuente e identificar su campo gravitacional externo. Adicionalmente, este concepto puede ser implementado como una herramienta tal que se logre obtener una interpretación más precisa de las soluciones exactas a las ecuaciones de Einstein en el vacío ²².

En gravedad Newtoniana, los momentos multipolares surgen a partir de un potencial escalar tal que satisfaga la ecuación de Laplace $\nabla^2\psi = 0$. Comúnmente se definen a través de una distribución conocida de masa o como coeficientes de una expansión multipolar para un potencial dado en un punto alejado de la fuente que lo produce. A su vez, existe otra definición totalmente equivalente, la cuál consiste en considerar

²⁰ Richard Arnowitt, Stanley Deser y Charles W Misner: *Dynamical structure and definition of energy in general relativity*. En: *Physical Review* 116.5 (1959), pág. 1322.

²¹ Arthur Komar: *Covariant conservation laws in general relativity*. En: *Physical Review* 113.3 (1959), pág. 934.

²² Thorne, Misner y Wheeler 2000.

estos momentos como objetos geométricos asociados al grupo conforme, con el fin de poder ser tomados como tensores conformes de Killing definidos en el espacio euclidiano ²³.

En el mismo año, luego de haber definido los momentos multipolares en el marco de la teoría Newtoniana, R. Geroch los dedujo también para un espaciotiempo estático y libre de fuente, en el límite donde la geometría se considera asintóticamente plana, extraídos de potenciales métricos que satisfagan las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío ²⁴. Años después, en 1973, R.O. Hansen extendió lo planteado por R. Geroch a espaciotiempos estacionarios. Con ello, no sólo obtuvo las expresiones asociadas a los momentos multipolares para la distribución de masa, sino también, para los provenientes de la distribución de momento angular ²⁵.

Posteriormente, en los años 80, partiendo de una versión linealizada de la gravedad Einsteiniana, y sin tener en cuenta una transformación conforme, Kip S. Thorne postuló que los multipolos podían ser expresados como coeficientes de una expansión en potencias inversas mediante los potenciales métricos que presenten un comportamiento asintótico en coordenadas ACMC (asintóticamente cartesianas y centrado en la masa) ²⁶. Con base en los planteamientos anteriores, R. Beig y W. Simon tomaron los potenciales de Geroch-Hansen, con ellos obtuvieron la misma colección de momentos para la masa (M_{a_1, \dots, a_l}^{BS}) y para el momento angular (J_{a_1, \dots, a_l}^{BS}), bajo la

²³ Robert Geroch: *Multipole moments. I. Flat space*. En: *Journal of Mathematical Physics* 11.6 (1970), págs. 1955-1961.

²⁴ Robert Geroch: *Multipole moments. II. Curved space*. En: *Journal of Mathematical Physics* 11.8 (1970), págs. 2580-2588.

²⁵ Richard O Hansen: *Multipole moments of stationary space-times*. En: *Journal of Mathematical Physics* 15.1 (1974), págs. 46-52.

²⁶ Kip S Thorne: *Multipole expansions of gravitational radiation*. En: *Reviews of Modern Physics* 52.2 (1980), pág. 299.

noción de coordenadas asintóticamente armónicas ²⁷.

Una vez expuestas estas definiciones cabe preguntarse, *¿son estas definiciones equivalentes entre sí?* La respuesta es afirmativa. Esto lo evidencia Gürsel²⁸, al mostrar que los momentos multipolares de Geroch-Hansen se diferencian de los momentos de K. Thorne mediante un factor constante. A su vez, Beig and Simon²⁹, mostraron que su formulación de estructura multipolar era totalmente equivalente a la de Geroch-Hansen. Debido a la equivalencia en los tres enfoques y sin pérdida de generalidad, en este trabajo se abordará únicamente el formalismo propuesto por R.Geroch y O. Hansen.

Ahora bien, no debemos perder de vista que la gravedad es el más universal de los campos, de manera que debemos tener en cuenta la influencia de este con otros campos y distribuciones continuas de materia, los cuales deben reflejarse en la *solución exacta* obtenida a partir de las ecuaciones de campo de Einstein. Sin embargo, es importante señalar que este tipo de soluciones representan una situación ideal en la naturaleza, la cual es asequible mediante simplificaciones sustanciales en la situación a estudiar. Esto nos permite expresarlas en una carta coordenada lo suficientemente conveniente donde sus componentes correspondan a polinomios, funciones trigonométricas, entre otras. De tal suerte que sean sencillos de manipular y, a su vez, nos brinden toda la información física del problema de forma clara y concisa, para así proceder a analizarlo.

²⁷ R Beig y W Simon: *On the multipole expansion for stationary space-times*. En: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 376.1765 (1981), págs. 333-341.

²⁸ Yekta Gürsel: *Multipole moments for stationary systems: The equivalence of the Geroch-Hansen formulation and the Thorne formulation*. En: *General relativity and gravitation* 15.8 (1983), págs. 737-754.

²⁹ Walter Simon y Robert Beig: *The multipole structure of stationary space-times*. En: *Journal of Mathematical Physics* 24.5 (1983), págs. 1163-1171.

Es así como, en 1915, poco tiempo después de la publicación de las ecuaciones de campo de Einstein, Karl Schwarzschild encontró la primera solución estática y esféricamente simétrica a las ecuaciones de campo ³⁰, la cual presenta un sólo momento multipolar: el monopolo. Asimismo, en 1917, Hermann Weyl generalizó esta métrica para el caso axialmente simétrico ³¹. Luego, Erez y Rosen ³² propusieron la primera solución estática que además del monopolo, posee momento cuadrupolar. Solución que luego fue generalizada por Quevedo ³³ para incluir un número infinito de momentos multipolares. En 1966 y 1970, Zipoy ³⁴ y Voorhees ³⁵ encontraron una transformación que nos permite generar nuevas soluciones estáticas a partir de soluciones conocidas. En particular, si se aplica esta transformación a la métrica de Schwarzschild, se obtiene una nueva solución como producto de una redefinición del parámetro de Zipoy-Voorhees. A esta solución se le conoce como *q-metric*, la cuál tiene asociado dos momentos multipolares: el monopolo y el cuadrupolo.

Dependiendo de los valores obtenidos del parámetro cuadrupolar (q), se podrá determinar características de las órbitas geodésicas -con o sin una velocidad radial o angular inicial- descritas por partículas con y sin masa bajo la influencia del campo gravitacional generado por la fuente, que para este caso corresponderá a una singularidad desnuda. A nuestro parecer, la *q-metric* puede ser usada como un modelo

³⁰ Karl Schwarzschild: *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einstein'schen Theorie*. En: *Berlin. Sitzungsberichte* 18 (1916).

³¹ Hermann Weyl: *Republication of: 3. On the theory of gravitation*. En: *General Relativity and Gravitation* 44.3 (2012), págs. 779-810.

³² G Erez y N Rosen: *The gravitational field of a particle possessing a multipole moment*. Inf. téc. Israel Inst. of Tech., Haifa, 1959.

³³ Hernando Quevedo: *General static axisymmetric solution of Einsteins vacuum field equations in prolate spheroidal coordinates*. En: *Physical Review D* 39.10 (1989), pág. 2904.

³⁴ David M Zipoy: *Topology of some spheroidal metrics*. En: *Journal of Mathematical Physics* 7.6 (1966), págs. 1137-1143.

³⁵ BH Voorhees: *Static axially symmetric gravitational fields*. En: *Physical Review D* 2.10 (1970), pág. 2119.

de prueba orientado a dilucidar no sólo los problemas discutidos en los dos párrafos anteriores, sino también podría ayudar en la distinción observacional entre un agujero negro y una singularidad desnuda ³⁶.

Propósito y Organización del Trabajo

Si aceptamos como válida la existencia de una singularidad desnuda, y además que el campo gravitacional en su exterior se puede describir como el de una fuente con estructura cuadrupolar, cabe preguntarnos: *¿cuál es el valor de la masa de la fuente?* Para el desarrollo de este trabajo, se pretende implementar los conceptos de masa asociados a los formalismos AMD y Komar con el fin de responder a esta pregunta. Así pues, el desarrollo del mismo se llevará de la siguiente manera: en el capítulo 2 se discuten algunas generalidades y aspectos relevantes relacionados al espaciotiempo de la *q-metric*, con la debida justificación del porqué se implementará a cada concepto posteriormente tratado.

El capítulo 3 se dedica enteramente a la descripción y transición de la concepción de momentos multipolares desde el enfoque newtoniano, pasando por la definición pionera de R. Geroch, hasta la de O. Hansen para métricas estacionarias. Por otra parte, también se hace una descripción detallada del método de G. Fodor, C. Hoenselaers y Z. Perjés (*FHP*), para el cálculo explícito de los momentos multipolares asociados a métricas estacionarias, según el formalismo Geroch-Hansen, pero que adicionalmente, sean axialmente simétricas. Esto, con el ánimo de simplificar la labor operativa. Por último, en este apartado se presentan los términos multipolares obtenidos para la *q-metric*, haciendo uso de dicho método.

En el capítulo 1 se presentan dos definiciones de masa relevantes en Relatividad General: La masa ADM y la de Komar. Allí se tratarán sus respectivas descripciones

³⁶ JA Arrieta-Villamizar y col.: *Shadows around the q-metric*. En: *Classical and Quantum Gravity* 38.1 (2020), pág. 015008.

por separado, teniendo en cuenta que la definición de masa ADM surge a partir del formalismo 3+1, y la masa de Komar, de la conservación de la energía cuando la métrica posee un vector de killing temporal para un sistema aislado. Definiciones que posteriormente emplearán para determinar el valor de la masa asociado a la *q-metric*. El capítulo 4 corresponde a discusión y comentarios generales respecto a la realización del trabajo y resultados obtenidos. Finalmente, en las conclusiones se expondrán los aspectos más destacados en este trabajo.

1. El espaciotiempo de la q -metric

The art of simplicity is a puzzle of complexity.

—Douglas Horton (1936).

En este capítulo se estudian algunos aspectos relacionados con la q -metric: una métrica estática con simetría axial y solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío. Tales aspectos son su naturaleza y sus singularidades respectivamente. Varias soluciones de naturaleza similar a esta se han encontrado anteriormente³⁷. No obstante, la q -metric ha sido interpretada como la solución con parámetro cuadrupolar más simple por cuanto es exacta y la viabilidad en su interpretación física³⁸. Esto ha permitido desarrollar numerosos estudios en diferentes áreas de la astrofísica relativista, tales como en: oscilaciones de neutrinos³⁹; sombras⁴⁰, trayectorias geodésicas⁴¹, entre otras.

³⁷ Ts I Gutsunayev y VS Manko: *On the gravitational field of a mass possessing a multipole moment*. En: *General relativity and gravitation* 17.11 (1985), págs. 1025-1027; Hernando Quevedo: *On the exterior gravitational field of a mass with a multipole moment*. En: *General relativity and gravitation* 19.10 (1987), págs. 1013-1023; VS Manko: *On the description of the external field of a static deformed mass*. En: *Classical and Quantum Gravity* 7.9 (1990), pág. L209; JL Hernández-Pastora y J Martín: *Monopole-quadrupole static axisymmetric solutions of Einstein field equations*. En: *General Relativity and Gravitation* 26.9 (1994), págs. 877-907.

³⁸ Hernando Quevedo: *Mass quadrupole as a source of naked singularities*. En: *International Journal of Modern Physics D* 20.10 (2011), págs. 1779-1787.

³⁹ Kuantay Boshkayev, Orlando Luongo y Marco Muccino: *Neutrino oscillation in the q -metric*. En: *The European Physical Journal C* 80.10 (2020), págs. 1-12.

⁴⁰ Arrieta-Villamizar y col. 2020.

⁴¹ K Boshkayev y col.: *Motion of test particles in the field of a naked singularity*. En: *Physical Review D* 93.2 (2016), pág. 024024.

1.1. Naturaleza de la solución

Es bien sabido que la solución más general de las ecuaciones de Einstein que describe un espaciotiempo estático, axial-simétrico y asintóticamente plano en el vacío corresponde a la clase de Weyl ⁴², de la forma:

$$\mathbf{g} \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = e^{2\psi} dt \otimes dt - e^{-2\psi} [e^{2\gamma} (dr \otimes dr + dz \otimes dz) + r^2 d\varphi \otimes d\varphi], \quad (2)$$

donde $\psi = \psi(r, z)$ y $\gamma = \gamma(r, z)$ corresponden a los potenciales métricos. Ahora bien, al reescribir (2) en la carta coordenada esférica y bajo una escogencia adecuada de los potenciales métricos se puede demostrar que esta contiene a la solución de Schwarzschild como caso particular⁴³. Esta es la única que posee sólo un término no nulo en el desarrollo multipolar: el monopolo, la masa de la fuente.

Así pues, para obtener una posible generalización a la métrica de Schwarzschild que contenga la deformación de una fuente estática, se debe realizar una transformación de Zipoy-Voorhees sobre los potenciales métricos en (2), de la forma

$$\psi \rightarrow \delta\psi \quad \text{y} \quad \gamma \rightarrow \delta^2\gamma, \quad (3)$$

donde $\delta \in \mathbb{R}$, el cual funge como un parámetro que caracteriza a la familia de soluciones generada por la transformación (3) aplicada sobre la semilla (2). Tomando $\delta = 1 + q$ se obtendrá la denominada *q-metric*, cuyo tensor métrico escrito en la carta coordenada esférica, está dado por ⁴⁴:

⁴² D Kramer y col.: *Exact solutions of Einsteins field equations*. En: *Berlin* (1980).

⁴³ *Ibid.*

⁴⁴ Hernando Quevedo: *Multipolar solutions*. En: *arXiv preprint arXiv:1201.1608* (2012).

$$g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1+q} dt \otimes dt - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q} \left[\left(1 + \frac{m^2 \sin^2 \theta}{r^2 - 2mr}\right)^{-q(2+q)} \right. \\ \left. \times \left(dr \otimes dr \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} + r^2 d\theta \otimes d\theta \right) + r^2 \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi \right]. \quad (4)$$

Nótese que (4) posee simetría axial; sin embargo, cuando $q \rightarrow 0$ se reduce a la solución de Schwarzschild. Otra característica importante es que presenta planitud asintótica para cualquier valor finito de los parámetros m y q . Para el caso $m \rightarrow 0$, (4) no depende de q , obteniendo como resultado la solución de Minkowski, con lo que se evidencia la relación directa de q con la masa de la fuente.

Singularidades presentes en la q -metric

Para determinar las singularidades en (4), será necesario calcular el escalar⁴⁵ de Krestchman⁴⁶, descrito como la doble contracción del tensor de Riemann $K = R_{\alpha\beta\gamma\delta} R^{\alpha\beta\gamma\delta}$ ⁴⁷. En el caso de la q -metric, este adquiere la siguiente estructura:

$$K = \frac{16m^2(1-q)^2 (r^2 - 2mr + m^2 \sin^2 \theta)^{2q^2-4q-1}}{r^{4(2-2q+q^2)} (1 - 2m/r)^{2(q^2-q+1)}} L(r, \theta), \quad (5)$$

donde

$$L(r, \theta) = 3(r - 2m + qm)^2 (r^2 - 2mr + m^2 \sin^2 \theta) \\ - q(2 - q)m^2 \sin^2 \theta [q(2 - q)m^2 + 3(r - m)(r - 2m + qm)]. \quad (6)$$

Con ello, en un primer análisis, vemos que las singularidades se encuentran tanto

⁴⁵ Una cantidad invariante es aquel objeto geométrico que permanece constante ante cualquier transformación de coordenadas.

⁴⁶ Alan Coley, Sigbjørn Hervik y Nicos Pelavas: *Spacetimes characterized by their scalar curvature invariants*. En: *Classical and Quantum Gravity* 26.2 (2009), pág. 025013.

⁴⁷ Thorne, Misner y Wheeler 2000.

en el origen de coordenadas $r = 0$, como en la hipersuperficie $r = 2m$ cuando $q = 0$, que corresponden a las halladas en Schwarzschild: la singularidad física y la coordenada, respectivamente. Gráficamente, las singularidades presentes en la q -metric se pueden apreciar en la figura 1.

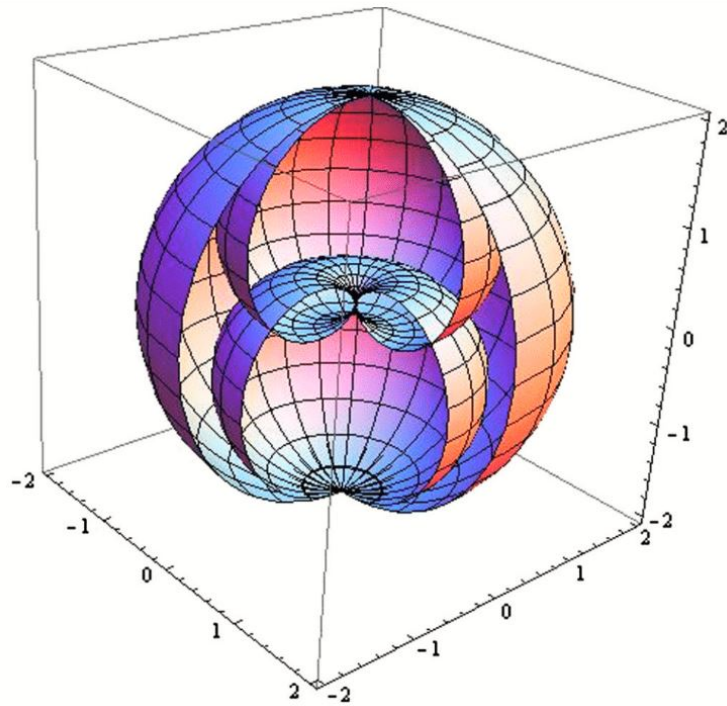


Figura 1. Representación gráfica de las superficies de divergencia de las singularidades de curvatura de la q -metric en coordenadas polares, donde mediante el estudio del escalar de Krestchman, muestra que la solución exhibe una singularidad en el origen de coordenadas y en $r = 2m$. Imagen tomada de: K Boshkayev y col.: *Motion of test particles in the field of a naked singularity*. En: *Physical Review D* 93.2 (2016), pág. 024024.

Así pues, cabe resaltar que estas no son las únicas singularidades presentes en la solución, ya que al analizar nuevamente el escalar de Krestchman, vemos que en el intervalo $q \in (-1, -1 + \sqrt{3/2}] \setminus \{0\}$, aparecen al interior de la esfera de radio $r = 2m$ dos superficies de divergencia con distancias $r_{\pm} = m(1 \pm \cos \theta)$. Estas correspondrían a dos singularidades desnudas ⁴⁸.

⁴⁸ Boshkayev y col. 2016.

Una vez presentadas las características principales asociadas a esta solución, lo siguiente será determinar algunos de sus momentos multipolares relativistas y su masa a través de dos distintos formalismos.

2. Estructura multipolar en gravedad de Einstein

*The best way to eat the elephant
standing in your path is to cut it up
into little pieces.*

—African Proverb.

En este capítulo se presenta la formulación covariante de la estructura multipolar a la luz de la teoría de la gravedad newtoniana y de relatividad general. El desarrollo multipolar no relativista⁴⁹, visto como una expansión en series, no es compatible con las soluciones a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío, ya que se ha demostrado que para una métrica en específico, se obtienen momentos radicalmente distintos con sólo realizar una transformación de coordenadas. Debido a esta anomalía, surge la necesidad de proponer una definición cuyos momentos multipolares no varíen frente a tales transformaciones. Por tal motivo se presenta a continuación la formulación de Geroch-Hansen, desde la generalización de Geroch para el espacio 3-dimensional euclídeo, pasando por el espaciotiempo estático, hasta el estacionario. Adicionalmente, se expone una descripción detallada del método de G. Fodor, C. Hoenselaers y Z. Perjés (*FHP*) para determinar la forma explícita de los momentos multipolares asociados a espaciotiempos axialmente simétricos. Esto permite reducir considerablemente el número de tensores a ser calculados, al introducir un potencial gravitacional distinto al planteado inicialmente por Hansen. Posteriormente, como caso particular, se exponen los momentos másicos asociados a la *q-metric* hallados mediante el uso de este método.

⁴⁹ Con el término expansión no relativista se hace referencia al formalismo dependiente de coordenadas previamente existente al de Geroch ⁵⁰.

2.1. Preliminares: estructura multipolar newtoniana no covariante

Los momentos multipolares en la teoría de gravedad newtoniana para una distribución de masa finita localizada, se definen como los coeficientes de una expansión en series de potencias. Para ello, se considera un observador a una distancia x del origen 0 -arbitrario pero conveniente- hasta un punto p fuera del volumen en el que la fuente está contenida. Esta debe ser tal que sea considerablemente mayor que la distancia x' que separa 0 de cualquier punto sobre la fuente. El potencial generado ϕ que proviene como solución a la ecuación de Poisson viene dado por $\phi(x) = -G \int \frac{\rho(x')}{|x-x'|} d^3x'$, donde G es la constante gravitacional. Para la derivación explícita de la ecuación de Poisson y de su solución general para un potencial arbitrario al interior y exterior de la fuente, ver apéndice (1).

Posteriormente, se expande la función $\frac{1}{|x-x'|}$ en términos de los armónicos esféricos, con lo que se obtiene:

$$\Phi(\mathbf{x}) = \frac{1}{\epsilon_0} \sum_{l,m} \frac{1}{2l+1} \left[\int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\mathbf{x}') d^3x' \right] \frac{Y_{lm}(\theta, \phi)}{r^{l+1}}, \quad (7)$$

donde los momentos multipolares corresponden a la parte de la expresión (7) entre paréntesis ⁵¹

$$\mathbf{M}_m \equiv \int Y_{lm}^*(\theta', \phi') r'^l \rho(\mathbf{x}') d^3x'. \quad (8)$$

Si ahora se considera un campo gravitacional axisimétrico, los momentos tomarán la forma

$$M_l = \int \rho(x') r' P_l(\cos(\theta)) d^3x', \quad (9)$$

donde $\rho(x')$ corresponde a la densidad de masa de la fuente y $P_l(\cos\theta)$ a los polino-

⁵¹ John David Jackson: *Classical electrodynamics*. 1999.

mios de Legendre ⁵².

Vale la pena resaltar que este formalismo es válido siempre y cuando no se intente extrapolar a soluciones en el contexto de la relatividad general; ya que debido al carácter no covariante de las ecuaciones, los momentos multipolares que describen una fuente gravitacional en una carta coordenada, puede describir una fuente completamente diferente en otra. Tómese, por ejemplo, la solución de Schwarzschild en dos coordenadas distintas: las esféricas y las isotrópicas. Al calcular los momentos multipolares en coordenadas esféricas, se obtiene el monopolo, lo que sí correspondería con la fuente. No obstante, en coordenadas isotrópicas, los momentos asociados que se obtienen corresponden a una vara de longitud infinita ⁵³. Consecuentemente, se ve la necesidad de implementar una formulación más general, como se mostrará en la próximo apartado.

2.2. Estructura multipolar newtoniana covariante

Los momentos multipolares, en su formulación independiente de la elección de la carta coordenada, se definen como objetos geométricos o mapeos multilineales dotados con una estructura algebraica conforme, cuya definición más precisa se escribe como: dado un espacio euclidiano V de 3 dimensiones, con métrica no singular, definida positiva h_{ij} , cuya topología corresponde a $S^2 \times R$, y teniendo un potencial gravitacional ψ como solución a la ecuación de Laplace $\nabla^2\psi = 0$, válido para todo V ; los momentos emergen como una colección de matrices $Q, Q_i, Q_{ij}...$ totalmente simétricas, libres de traza e independientes definidas en un punto p arbitrario. Además, se puede demostrar que estas matrices pueden ser reescritas como campos tensoriales de killing, es decir, que satisfacen la ecuación:

⁵² Oliver Dimon Kellogg: *Foundations of potential theory*. Vol. 31. Courier Corporation, 1953.

⁵³ Hernando Quevedo: *Multipole moments in general relativity static and stationary vacuum solutions*. En: *Fortschritte der Physik/Progress of Physics* 38.10 (1990), págs. 733-840.

$$\nabla^{(i} k^{jk\dots l)} = h^{(ij} T^{k\dots l)}, \quad (10)$$

donde tanto la derivada covariante ∇^i como las componentes del tensor arbitrario $T^{k\dots l}$ pertenecen a V ⁵⁴.

Ahora bien, debido al carácter covariante de esta formulación, es de esperar que pueda ser extendida a la teoría de gravedad de Einstein para soluciones estáticas asintóticamente planas en el vacío y con ello, determinar los momentos multipolares relativistas con las mismas propiedades que se tendría en la teoría de Newton. Esto se aclarará en el apartado que sigue junto con la generalización de la definición a espaciotiempos estacionarios.

2.3. Estructura multipolar en espaciotiempo estacionario

Así como es posible tener una formulación covariante para los momentos multipolares asociados soluciones a las ecuaciones de Einstein estáticas en el vacío, también se puede extrapolar la idea a métricas estacionarias ⁵⁵. Para definir los momentos multipolares será necesario partir de una 4-variedad Pseudo-Riemanniana $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ de torsión nula cuya métrica Lorentziana $g_{\mu\nu}$, de signatura Lorentziana $(-1, 1, 1, 1)$, sea solución a las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío y tenga asociado un campo vectorial de killing tipo tiempo k^μ tal que:

$$\lambda = -g(k, k), \quad (11)$$

⁵⁴ Geroch 1970a.

⁵⁵ Hansen 1974.

$$\omega_\mu = \epsilon_{\mu\nu\alpha\beta} k^\nu \nabla^\alpha k^\beta, \quad (12)$$

donde $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ corresponde al tensor de Levi-Civita. Adicionalmente, esta métrica requiere se satisfaga las ecuaciones de Einstein en el vacío, de la forma $\nabla_{[\mu}\omega_{\nu]} = 0$ i.e., que exista un campo escalar ω , tal que satisfaga:

$$\omega_\mu = \nabla_\mu \omega. \quad (13)$$

Al tener la cantidad escalar ω y la norma del vector de killing temporal λ , se podrá definir una cantidad denominada el potencial complejo de Ernst ⁵⁶ de la forma

$$E = \lambda + i\omega. \quad (14)$$

De esta manera, el conjunto de todas las trayectorias (órbitas) del campo vectorial k^μ constituirán una variedad diferenciable tridimensional \mathcal{S} cuya métrica inducida por $g_{\mu\nu}$,

corresponderá a h_{ab} , ⁵⁷, tal que:

$$h_{ab} = \lambda g_{\mu\nu} e_a^\mu e_b^\nu + k_\mu k_\nu e_a^\mu e_b^\nu. \quad (15)$$

Se debe tener en cuenta que si el espaciotiempo es estacionario implica también que (15) será válida al menos localmente.

Otra característica importante que el espaciotiempo, $g_{\mu\nu}$, sea un posible candidato para determinar sus momentos multipolares asociados es que debe ser asintótica-

⁵⁶ Frederick J Ernst: *New formulation of the axially symmetric gravitational field problem*. En: *Physical Review* 167.5 (1968), pág. 1175.

⁵⁷ Robert Geroch: *A method for generating solutions of Einstein's equations*. En: *Journal of Mathematical Physics* 12.6 (1971), págs. 918-924.

mente plano; es decir, que en el infinito espacial el campo gravitacional vaya disminuyendo y $g_{\mu\nu}$ sea aproximadamente Minkowski. Para que un espaciotiempo pueda considerarse asintóticamente plano, se debe cumplir que al añadir un punto λ a la variedad \mathcal{S} , el nuevo espacio $\tilde{\mathcal{S}}$, preservará la estructura conforme de su espacio origen; con lo que se posibilitará establecer las propiedades asintóticas de \mathcal{S} como aquellas definidas en $\Lambda \subset (\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{h}_{ab})$ bajo las siguientes condiciones:

$$\begin{aligned}
i) \quad & \tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \Lambda, \\
ii) \quad & \tilde{h}_{ab} = \Omega^2 h_{ab}, \\
iii) \quad & (\Omega)_\Lambda = 0, \quad \left(\tilde{\nabla}_a \Omega \right)_\Lambda = 0, \quad \left(\tilde{\nabla}_a \tilde{\nabla}_b \Omega \right)_\Lambda = 2 \left(\tilde{h}_{ab} \right)_\Lambda,
\end{aligned} \tag{16}$$

siendo Ω un campo escalar en $\tilde{\mathcal{S}}$ correspondiente al factor conforme ⁵⁸.

Posteriormente, se introducen los campos escalares asociados a la masa y al momento angular, tanto en la subvariedad \mathcal{S} ⁵⁹, como en la conforme en $\tilde{\mathcal{S}}$:

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_M &= \Omega^{-1/2} \Phi_M, \quad \Phi_M = \frac{1}{4\lambda} (\lambda^2 + \omega^2 - 1), \\
\tilde{\Phi}_J &= \Omega^{-1/2} \Phi_J, \quad \Phi_J = \frac{1}{2\lambda} \omega.
\end{aligned} \tag{17}$$

Estos potenciales fueron escogidos por Hansen en ⁶⁰ con el ánimo de modelar los momentos multipolares relativistas como campos tensoriales simétricos y de traza nula $P_{a_1 \dots a_l}^M$ y $P_{a_1 \dots a_l}^J$ a modo de una ecuación de recurrencia de la forma:

⁵⁸ Robert Geroch: *Multipole moments. II. Curved space*. En: *Journal of Mathematical Physics* 11.8 (1970), págs. 2580-2588.

⁵⁹ La subvariedad \mathcal{S} se define como: $\tilde{\mathcal{S}} := \mathcal{S} \cup \Lambda$.

⁶⁰ Hansen 1974.

$$P^A = \tilde{\Phi}^A, \quad (18)$$

$$P^A a_1 \dots a_{l+1} = \left[\tilde{D}_{a_{l+1}} P^A a_1 \dots a_l - \frac{1}{2} l(2l-1) \tilde{R}_{a_l a_{l+1}} P^A a_1 \dots a_{l-1} \right]^{\text{STF}},$$

donde \tilde{D}_a representa la derivada covariante, el superíndice A como $A = M/J$, correspondientes a lo momentos tanto másicos como de momento angular, y \tilde{R}_{ab} el tensor de Ricci definidos en \tilde{h}_{ab} . Las siglas STF hacen referencia a la parte simétrica y de traza nula.

De lo anterior se define lo siguiente: el momento 2^l -polar de $\tilde{\Phi}_M$ y $\tilde{\Phi}_J$ se encuentran determinados por las componentes de los tensores $P^M_{a_1 \dots a_l}$ y $P^J_{a_1 \dots a_l}$ en Λ , de la forma:

$$M_{a_1 \dots a_l} = P^M_{a_1 \dots a_l}(\Lambda), \quad (19)$$

$$J_{a_1 \dots a_l} = P^J_{a_1 \dots a_l}(\Lambda),$$

donde $M_{a_1 \dots a_l}$ y $J_{a_1 \dots a_l}$ corresponden a los momentos asociados a la masa y al momento angular, respectivamente ⁶¹.

2.3.1. Estructura multipolar para soluciones con simetría axial Para este tipo de soluciones a las ecuaciones de Einstein, es sabido que se tiene un vector de Killing k en S , tal que satisface las relaciones

$$\mathcal{L}_k h_{ab} = 0, \quad \mathcal{L}_k \Phi^M = \mathcal{L}_k \Phi^J = 0, \quad (20)$$

siendo \mathcal{L}_k el operador derivada de Lie en dirección del campo vectorial de killing

⁶¹ Hansen 1974.

temporal, actuando sobre la métrica inducida h_{ab} , además de los potenciales Φ^M y Φ^J , respectivamente.

De esta manera, el factor conforme Ω ha de escogerse tal que k^a siga siendo un vector de Killing temporal en \tilde{S} y su vector axial sea unitario, es decir,

$$\tilde{z} = 2\tilde{\epsilon}^{abc}\tilde{D}_b\tilde{k}_c. \quad (21)$$

Al gozar la métrica de esta simetría bajo rotaciones en uno de los ejes, los momentos multipolares asociados a la masa $P_{a_1\dots a_l}^M$ y el momento angular $P_{a_1\dots a_l}^J$, se podrán determinar por los siguientes escalares

$$M_l = \frac{1}{l!}M_{a_1\dots a_l}\tilde{z}^{a_1}\dots\tilde{z}^{a_l}\Big|_{\Lambda} \quad (22)$$

y

$$J_l = \frac{1}{l!}J_{a_1\dots a_l}\tilde{z}^{a_1}\dots\tilde{z}^{a_l}\Big|_{\Lambda}, \quad (23)$$

respectivamente ⁶².

En resumen, dada una métrica axialmente simétrica y estacionaria, la forma de determinar sus momentos multipolares será ⁶³: en primer lugar, obtener los potenciales λ y ω , a partir de (11)-(13); en segundo lugar, escoger el factor Ω tal que las condiciones de asintoticidad plana (16) se satisfagan; en tercer lugar, se deberá obtener los potenciales $\tilde{\Phi}_M$ y $\tilde{\Phi}_J$ de (17); para finalmente, hallar los momentos (19) a partir de (22) y (23).

Vale la pena resaltar que, el cálculo explícito de estos momentos en la manera que

⁶² Hansen 1974.

⁶³ Quevedo 1990.

se acaban de presentar, resulta ser ardua e intrincada a la hora de obtener los potenciales $\tilde{\Phi}_M$ y $\tilde{\Phi}_J$, razón por la cual G. Fodor, C. Hoenselaers y Z. Perjés ⁶⁴ propusieron un método que permite calcular los momentos multipolares para el caso de simetría axial, empleando a su vez el potencial transformado de Ernst $\tilde{\xi}$. Una explicación más detallada se mostrará en el siguiente apartado.

2.4. Método Fodor-Hoenselaers-Perjés (FHP) para el cálculo de momentos multipolares asociados a sistemas estacionarios y axialmente simétricos

2.4.1. Contextualización Como se vió anteriormente, la formulación de Geroch-Hansen se plantea para el caso de las soluciones estacionarias que satisfacen las ecuaciones de Einstein en el vacío. A partir de ello y tomando el vector de killing temporal \mathbf{k} , se construyen potenciales escalares Φ_M y Φ_J de la forma en que se presentan en (17), con los que, luego de una transformación conforme apropiada, se podrán obtener los momentos multipolares. Tomando estas ideas y aplicándolas al caso en que se tiene simetría axial, G. Fodor, C. Hoenselaers y Z. Perjés propusieron cambiar estas funciones empleando el formalismo de Ernst ⁶⁵, cuyo potencial está dado por

$$\xi = \frac{1 - E}{1 + E}. \quad (24)$$

Téngase en cuenta que E se definió en (14) con λ como parámetro asociado a la parte real y ω a la imaginaria. Con ello, se obtiene la función compleja:

$$\Phi \equiv \Phi_M + i\Phi_J = \frac{\xi}{\xi\xi^* - 1}, \quad (25)$$

la cual corresponde a la nueva forma del potencial.

⁶⁴ G Fodor, C Hoenselaers y Z Perjés: *Multipole moments of axisymmetric systems in relativity*. En: *Journal of Mathematical Physics* 30.10 (1989), págs. 2252-2257.

⁶⁵ Ernst 1968.

Se demostró también que la transformación conforme de esta función Φ era holomorfa⁶⁶, quedando así, los momentos multipolares totalmente definidos. Siguiendo esta condición, G. Fodor, C. Hoenselaers y Z. Perjés consideraron precisamente tomar al potencial transformado de Ernst ξ como la función Φ en (25), gracias a que $\tilde{\xi}$ también es holomorfa en el punto Λ . Esto se hace evidente cuando se toma $\hat{g}_{ab} = \Omega g_{ab}$, siendo g_{ab} solución a las ecuaciones de Einstein, y da cuenta de que es la misma ecuación de Ernst para métricas con simetría axial; lo que representa una cierta simplicidad a la hora de expresar la ecuaciones de Einstein en términos del potencial del Ernst en la forma

$$\xi = \Phi_M + i\Phi_J, \quad (26)$$

en lugar de (25).

Con lo anterior, se verán reducidos notablemente los cálculos de los tensores en (19), al poder expresar los momentos en términos de los coeficientes pertenecientes al desarrollo en series de la función ξ , y aún más importante, se realizará sobre el eje de simetría. Por lo tanto, decimos que el cálculo de los momentos multipolares a partir de la formulación de Geroch-Hansen aplicada al potencial ξ se le denomina método *FHP*. La definición brindada por Fodor y col., corresponde a la siguiente⁶⁷:

Los momentos multipolares estarán dados recursivamente por tensores totalmente simétricos y de traza nula de la forma

$$\begin{aligned} P^{\text{Fod}} &:= \tilde{\xi} \equiv \frac{\xi}{\sqrt{\Omega}} \\ P_{a_1 \dots a_n}^{\text{Fod}} &:= \left[\tilde{D}_{a_1} P_{a_2 \dots a_n}^{\text{Fod}} - \frac{(n-1)(2n-3)}{2} \tilde{R}_{a_1 a_2} P_{a_3 \dots a_n}^{\text{Fod}} \right]^{\text{STF}}. \end{aligned} \quad (27)$$

⁶⁶ Una función holomorfa es aquella que en la que existen derivadas continuas de clase C^∞ . Para este caso particular, en el punto Λ .

⁶⁷ Robert Filter y Andreas Kleinwächter: *On the multipole moments of a rigidly rotating fluid body*. En: *Annalen der Physik* 18.2-3 (2009), págs. 102-106.

Con lo cual, Filter demostró que es equivalente a la definición presentada en (41).

2.4.2. Elementos necesarios para desarrollar el método FHP En concordancia con la definición brindada por Geroch-Hansen, consideremos una métrica h_{ab} sobre la 3-variedad \mathcal{S} inducida por la métrica estacionaria $g_{\mu\nu}$ sobre la 4-variedad \mathcal{M} en coordenadas isotrópicas⁶⁸, escrita de la forma:

$$\mathbf{g} \equiv g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = -f(dt - a d\varphi)^2 + f^{-1} [e^{2\gamma} (d\rho \otimes d\rho + dz \otimes dz) + \rho^2 d\varphi \otimes d\varphi]. \quad (28)$$

Cabe realzar que (28) representa una solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío. A partir de h_{ab} en (15) se construye una métrica conforme representada como

$$\bar{h}_{ab} = \lambda h_{ab}, \quad (29)$$

siendo $\lambda = g(\xi, \xi)$ y h_{ab} en coordenadas cilíndricas de Weyl:

$$h_{ab} = \begin{pmatrix} e^{2\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \rho^2 \end{pmatrix}. \quad (30)$$

Así pues, bajo un cambio apropiado de coordenadas:

$$\begin{aligned} \bar{\rho} &= \frac{\rho}{\rho^2 + z^2}, \\ \bar{z} &= \frac{z}{\rho^2 + z^2}, \\ \bar{\varphi} &= \varphi, \end{aligned} \quad (31)$$

la métrica conforme $\bar{h}_{\bar{a}\bar{b}}$ corresponderá a

⁶⁸ Kramer y col. 1980.

$$\bar{h}_{\bar{a}\bar{b}} = \frac{1}{\bar{r}^4} \begin{pmatrix} e^{2\gamma} & 0 & 0 \\ 0 & e^{2\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & \bar{\rho}^2 \end{pmatrix}, \quad (32)$$

donde $\bar{r}^2 = \bar{\rho}^2 + \bar{z}^2 = r^{-2}$, es la componente radial ⁶⁹.

Ahora bien, tomando la variedad $\tilde{\mathcal{S}}$ definida como $\tilde{\mathcal{S}} = \mathcal{S} \cup \Lambda$, se le aplica la transformación conforme $\tilde{h}_{ab} = \Omega^2 \bar{h}_{ab}$, bajo la condición que $\bar{h}_{\bar{a}\bar{b}}$ sea holomorfa. La función escalar Ω escogida según la definición en (16). Lo que permite inferir que el factor conforme puede tomarse como $\Omega = \bar{r}^2$, con \bar{r} definida en (32).

El potencial transformado de Ernst $\tilde{\xi}$ se halla a partir del potencial conforme $\tilde{\xi} = \Omega^2 \xi$ ⁷⁰. La ecuación de campo asociada está dada por

$$\begin{aligned} \left(\bar{r}^2 \tilde{\xi} \tilde{\xi}^* - 1 \right) \Delta \tilde{\xi} &= 2 \tilde{\xi}^* (\nabla \bar{r} \tilde{\xi})^2 \\ &= 2 \tilde{\xi}^* \left(\bar{r}^2 (\nabla \tilde{\xi})^2 + 2 \bar{r} \tilde{\xi} (\nabla \tilde{\xi})(\nabla \bar{r}) + \tilde{\phi}^2 \right), \end{aligned} \quad (33)$$

siendo los operadores ∇ y Δ correspondientes al gradiente y laplaciano tridimensional respectivamente, además del símbolo * como representación del complejo conjugado.

Finalmente, tensor de Ricci \tilde{R}_{ab} se calculará haciendo uso de la métrica $\tilde{h}_{\bar{a}\bar{b}} = \Omega^2 \bar{h}_{\bar{a}\bar{b}}$ ⁷¹, además de poderse escribir en términos del potencial conforme $\tilde{\xi}$ en virtud de saber que las ecuaciones de Einstein pueden ser escritas en términos de la ecuación asociada al potencial de Ernst (14), de modo que \tilde{R}_{ab} permite expresarse

⁶⁹ Fodor, Hoenselaers y Perjés 1989.

⁷⁰ Recordemos que este potencial se relaciona con la definición de Geroch-Hansen de los potenciales Φ en (17).

⁷¹ Entiéndase $\tilde{h}_{\bar{a}\bar{b}}$ como la métrica conforme en $\tilde{\mathcal{S}}$, cuya forma corresponde a la presentada en (32) a excepción del término \bar{r}^{-4} .

a partir de las componentes de \bar{R}_{ab} . Obteniendo así:

$$\tilde{R}_{ij} = \frac{1}{\left(\bar{r}^2 \tilde{\xi} \tilde{\xi}^* - 1\right)^2} \left(G_i G_j^* + G_j G_i^*\right) \quad (34)$$

con

$$\begin{aligned} G_1 &\equiv \bar{z} \tilde{\xi}_{\bar{\rho}} - \bar{\rho} \tilde{\xi}_{\bar{z}}, \\ G_2 &\equiv \bar{\rho} \tilde{\xi}_{\bar{\rho}} + \bar{z} \tilde{\xi}_{\bar{z}} + \tilde{\xi}, \\ G_3 &= 0. \end{aligned} \quad (35)$$

Una vez expuesto lo necesario para desarrollar el cálculo, lo que procede será la explicación del algoritmo *FHP* para la obtención de los momentos multipolares mediante los coeficientes del desarrollo en serie potencias de $\tilde{\xi}$, característica principal del método de Fodor y col.

2.4.3. Descripción detallada del método *FHP* Retomemos, los momentos multipolares se desean obtener a partir de los coeficientes del desarrollo del potencial conforme de Ernst, en el eje de simetría, de la forma

$$\tilde{\xi}(\rho = 0) = \sum_{n=0}^{\infty} m_n z^n. \quad (36)$$

El potencial $\tilde{\xi}$ puede ser reescrito como

$$\tilde{\xi} = \sum_{i,j=0}^{\infty} a_{ij} \bar{\rho}^i \bar{z}^j, \quad (37)$$

tal que aquellos coeficientes a_{0j} resultan ser los coeficientes m_j en el desarrollo de (36). Esto es posible ya que $\tilde{\xi}$ es una función holomorfa.

El paso siguiente corresponde a insertar (37) en la ecuación de campo de Ernst (33), para luego obtener una ecuación cuyo lado izquierdo se escribe como:

$$\sum_{\substack{a+c+e=k \\ b+d+f=l}} a_{ab}\bar{a}_{cd} [a_{ef} (e^2 + f(f-1)) + a_{e+2}f - 2(e+2)^2 + a_{e-2}f + 2(f+2)(f+1)] - a_{k+2}l(k+2)^2 - a_kl + 2(l+2)(l+1); \quad (38)$$

y su lado derecho será:

$$2 \sum_{\substack{a+c+e=k \\ b+d+f=l}} a_{ab}\bar{a}_{cd} [a_{ef}(1 + ae + bf + 2(e+f)) + a_{e+2}f - 2a(e+2) + a_{e-2}f + 2b(f+2)]. \quad (39)$$

Igualando (38) y (39), tendremos la expresión completa de la forma:

$$a_{k+2l}(k+2)^2 = - (l+2)(l+1)a_kl + 2 + \sum_{\substack{a+c+e=k \\ b+d+f=l}} a_{ab}\bar{a}_{cd} \times [(a_{ef} (e^2 + f^2 - 2 - 2ae - 2bf - 4e - 5f) + a_{e+2}f - 2(e+2)(e+2-2a) + a_{e-2}f + 2(f+2)(f+1-2b)], \quad (40)$$

siendo a, b, c, d, e, f, l y k índices correspondientes al desarrollo.

Con (40) nos es suficiente para determinar todos los demás coeficientes $a_{ij} = a_{ij}(m_k, k \leq i+j)$. También se cumplirá que $a_{ij} = 0$ para i impar, lo que también es de esperar ya que $\tilde{\xi}$ debe ser una función par en $\tilde{\rho}$. Cabe resaltar que (40) fue tomada con las debidas correcciones realizadas por L. H. Pastora⁷², en cuanto a notación y forma de presentar la expresión (16) en el trabajo de Fodor y col⁷³.

La definición recursiva dada en (41) según Geroch-Hansen para determinar los mo-

⁷² JL Hernandez-Pastora: *CAMPOS GRAVITATORIOS RELATIVISTAS PROXIMOS A LA SOLUCION DE SCHWARZSCHILD*. En: *Spanish. PhD thesis, University of Salamanca, Spain* (1996).

⁷³ Fodor, Hoenselaers y Perjés 1989.

mentos multipolares como tensores sin traza y totalmente simétricos es

$$P^A_{a_1 \dots a_{l+1}} = \left[\tilde{D}_{a_{l+1}} P^A_{a_1 \dots a_l} - \frac{1}{2} l(2l-1) \tilde{R}_{a_l a_{l+1}} P^A_{a_1 \dots a_{l-1}} \right]^{\text{STF}}, \quad (41)$$

con STF indicando las operaciones de simetrización y sustracción de traza. Dado que los tensores deben ser simétricos, $P^A_{a_1 \dots a_{l+1}}$ se podrán reescribir usando la siguiente convención

$$\tilde{P}_{a,b,c}^{(n)} \equiv \tilde{P}^{(n)} \underbrace{1 \dots 1}_a \underbrace{2 \dots 2}_b \underbrace{3 \dots 3}_c, \quad (42)$$

teniendo en cuenta que $a + b + c = n$, lo que indica que la suma de estas cantidades coincide con el orden n del tensor.

Si tomamos nuevamente (41) y analizamos por separado los dos sumandos del lado derecho, tendremos en primer lugar la derivada del tensor de orden menor

$$\left(\tilde{\nabla}_{i_n} \tilde{P}_{i_1 \dots i_{n-1}}^{(n-1)} \right)^S = \frac{1}{n} \left[a \tilde{\nabla}_1 \tilde{P}_{a-1,b,c}^{(n-1)} + b \tilde{\nabla}_2 \tilde{P}_{a,b-1,c}^{(n-1)} + c \tilde{\nabla}_3 \tilde{P}_{a,b,c-1}^{(n-1)} \right]; \quad (43)$$

y el segundo como producto con el tensor de Ricci $\tilde{R}_{a_l a_{l+1}}$ será

$$\begin{aligned} \left(\tilde{R}_{i_1 i_2} \tilde{P}_{i_3 \dots i_n}^{(n-2)} \right)^S &= \frac{1}{n(n-1)} \left[a(a-1) \tilde{R}_{11} \tilde{P}_{a-2,b,c}^{(n-2)} \right. \\ &\quad \left. + b(b-1) \tilde{R}_{22} \tilde{P}_{a,b-2,c}^{(n-2)} + 2ab \tilde{R}_{12} \tilde{P}_{a-1,b-1,c}^{(n-2)} \right]. \end{aligned} \quad (44)$$

Ahora bien, para hallar (34), se necesitan los símbolos de Cristoffel; aquellos diferentes de cero corresponden a

$$\begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= \Gamma_{21}^2 = -\Gamma_{22}^1 = \partial_1 \gamma, \\ \Gamma_{22}^2 &= \Gamma_{21}^1 = -\Gamma_{11}^2 = \partial_2 \gamma, \\ \Gamma_{33}^1 &= -e^{-2\gamma} \\ \Gamma_{13}^3 &= \frac{1}{\rho}. \end{aligned} \quad (45)$$

Consecuentemente, se obtiene la expresión completa a partir de (43) y (34), como sigue

$$\begin{aligned}
\tilde{P}_{a,b,c}^{(n)} = & \frac{1}{n} \left\{ a\partial_1 \tilde{P}_{a-1,b,c}^{(n-1)} + b\partial_2 \tilde{P}_{a,b-1,c}^{(n-1)} - \right. \\
& - \left[a(a-1)\tilde{\Gamma}_{11}^1 + 2ba\tilde{\Gamma}_{12}^2 + 2ac\tilde{\Gamma}_{13}^3 \right] \tilde{P}_{a-1,b,c}^{(n-1)} - \\
& - \left[2ab\tilde{\Gamma}_{12}^1 + b(b-1)\tilde{\Gamma}_{22}^2 \right] \tilde{P}_{a,b-1,c}^{(n-1)} \\
& - a(a-1)\tilde{\Gamma}_{11}^2 \tilde{P}_{a-2,b+1,c}^{(n-1)} - b(b-1)\tilde{\Gamma}_{22}^1 \tilde{P}_{a+1,b-2,c}^{(n-1)} - c(c-1)\tilde{\Gamma}_{33}^1 \tilde{P}_{a+1,b,c-2}^{(n-1)} \\
& \left. - (n-1) \left[a(a-1)\tilde{R}_{12} \tilde{P}^{(n-2)} + 2ab\tilde{R}_{12} \tilde{P}_{a-1,b-1,c}^{(n-2)} + b(b-1)\tilde{R}_{22} \tilde{P}_{a,b-2,c}^{(n-2)} \right] \right\}^{TF}.
\end{aligned} \tag{46}$$

Con el ánimo de desarrollar (46) en dos partes, gracias a que tanto las operaciones de simetrización y extracción de traza son lineales, tomemos primero los sumandos interiores a la operación de extracción de traza $[\cdot]^{TF}$. Estos tensores serán renombrados $S_{a,b,c}^{(n)}$. Con ello se tendrá

$$\begin{aligned}
S_{a,b,c}^{(0)} & \equiv \tilde{P}_{a,b,c}^{(0)} \\
S_{a,b,c}^{(1)} & \equiv \tilde{P}_{a,b,c}^{(1)} \\
S_{a,b,c}^{(n)} & \equiv \tilde{P}_{a,b,c}^{(n)} + M_{a,b,c}^{(n)},
\end{aligned} \tag{47}$$

considerando

$$M_{a,b,c}^{(n)} \equiv \mathcal{S} \left(\tilde{h}_{i_1 i_2} Q_{i_3 \dots i_n}^{(n-2)} \right), \tag{48}$$

donde los $Q_{i_3 \dots i_n}^{(n-2)}$ resultan ser tensores arbitrarios representados de la forma

$$Q_{a,b,0}^{(n-2)} = \frac{n-1}{\tilde{g}_{33}} \tilde{\Gamma}_{33}^1 S_{a+1,b,0}^{(n-1)}. \tag{49}$$

Con la nueva notación introducida en (47), la expresión en (46) se verá como sigue

74

⁷⁴ Fodor, Hoenselaers y Perjés 1989.

$$\tilde{P}_{a,b,c}^{(n)} = \left(S_{a,b,c}^{(n)} \right)^{\text{TF}}. \quad (50)$$

Si se cumple (49), entonces significa que las cantidades no nulas de (47) serán únicamente aquellas cuyo índice c sea igual a cero. Así, para que se siga siendo válido que la suma de los índices a, b y c siga siendo n , el rango del tensor inicial (S_{abc}^n) deberá tener $S_{a,n-a,0}^n$, al cual podemos renombrar como S_a^n . El desarrollo será

$$\begin{aligned} S_0^{(0)} &\equiv P_{0,0,0}^{(0)} \\ S_0^{(1)} &\equiv P_{0,1,0}^{(1)} = \partial_2 S_0^{(0)} \\ S_1^{(1)} &\equiv P_{1,0,0}^{(1)} = \partial_1 S_0^{(0)} \\ S_a^{(n)} &= M_{a,n-a,0}^{(n)} + \frac{1}{n} \left\{ a \partial_1 S_{a-1}^{(n-1)} + (n-a) \partial_2 S_a^{(n-1)} - a \left[(a-1) \tilde{\Gamma}_{11}^1 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + 2(n-a) \tilde{\Gamma}_{12}^2 \right] S_{a-1}^{(n-1)} - (n-a) \left[2a \tilde{\Gamma}_{12}^1 + (n-a-1) \tilde{\Gamma}_{22}^2 \right] S_a^{(n-1)} \right. \\ &\quad \left. - a(a-1) \tilde{\Gamma}_{11}^2 S_{a-2}^{(n-1)} - (n-a)(n-a-1) \tilde{\Gamma}_{22}^1 S_{a+1}^{(n-1)} - \right. \\ &\quad \left. - \left(n - \frac{3}{2} \right) \left[a(a-1) \tilde{R}_{11} S_{a-2}^{(n-2)} + 2a(n-a) \tilde{R}_{12} S_{a-1}^{(n-2)} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + (n-a)(n-a-1) \tilde{R}_{22} S_a^{(n-2)} \right] \right\}, \end{aligned} \quad (51)$$

siendo

$$M_{a,n-a,0}^{(n)} = \frac{\tilde{\Gamma}_{33}^1}{n} \left[a(a-1) \frac{\tilde{g}_{11}}{\tilde{g}_{33}} S_{a-1,n-a,0}^{(n-1)} + b(b-1) \frac{\tilde{g}_{22}}{\tilde{g}_{33}} S_{a+1,n-a-2,0}^{(n-1)} \right]. \quad (52)$$

Con la forma recursiva general para los S_a^n , de acuerdo con el formalismos de Geroch-Hansen, es necesario ahora introducir la particularidad del método *FHP* introducido en este apartado. Este consiste en reemplazar las funciones escalares $\tilde{\phi}$ definidas en (17) por el potencial transformado de Ernst $\tilde{\xi}$. A continuación se presentará la forma que adoptarán estos tensores:

$$\begin{aligned}
S_0^{(0)} &= \bar{\xi}, \quad S_0^{(1)} = \partial_{\bar{z}} S_0^{(0)}, \quad S_1^{(1)} = \partial_{\bar{\rho}} S_0^{(0)}, \\
S_a^{(n)} &= \frac{1}{n} \left\{ a \partial_{\bar{\rho}} S_{a-1}^{(n-1)} + (n-a) \partial_{\bar{z}} S_a^{(n-1)} + \right. \\
&\quad a \left[(a+1-2n) \partial_{\bar{\rho}} \gamma - \frac{a-1}{\bar{\rho}} \right] S_{a-1}^{(n-1)} + (a-n)(a+n-1) \partial_{\bar{z}} \gamma S_a^{(n-1)} + \\
&\quad a(a-1) \partial_{\bar{z}} \gamma S_{a-2}^{(n-1)} + (n-a)(n-a-1) \left(\partial_{\bar{\rho}} \gamma - \frac{1}{\bar{\rho}} \right) S_{a+1}^{(n-1)} - \\
&\quad \left(n - \frac{3}{2} \right) \left(a(a-1) \tilde{R}_{11} S_{a-2}^{(n-2)} + 2a(n-a) \bar{R}_{12} S_{a-1}^{(n-2)} + \right. \\
&\quad \left. (c-e)(c-e-1) \bar{R}_{22} S_e^{(c-2)} \right) \left. \right\}. \tag{53}
\end{aligned}$$

Ahora que los tensores (53) se han simetrizado se procede a la extracción de la respectiva traza. Se debe tener en cuenta que para el caso axialmente simétrico, los momentos se dan como la proyección de los tensores P_{abc} sobre el eje de simetría en el infinito. Para calcular los momentos se debe calcular la proyección libre de traza de los $S_a^{(n)}$. Por esta razón, es preciso determinar de manera general la componente sin traza de un tensor $(T_{i_1 \dots i_n})$ totalmente simétrico de n -ésimo orden

$$\begin{aligned}
(T_{i_1 \dots i_n})^{TF} &= T_{i_1 \dots i_n} + \sum_{k=1}^{[n/2]} A_k^{(n)} \mathcal{S} \left[i_1 i_2 i_2 \tilde{g}_{i_3 i_4} \dots \tilde{g}_{i_{2k-1} i_{2k}} \times \right. \\
&\quad \left. \times \bar{g}^{i_1 i_2} \bar{g}^{i_3 i_4} \dots \tilde{g}^{i_{2k-1} i_{2k}} T_{i_1 i_2 \dots i_n} \right], \tag{54}
\end{aligned}$$

siendo

$$A_k^{(n)} = (-1)^k \frac{n!(2n-2k-1)!!}{2^k k! (n-2k)! (2n-1)!!}. \tag{55}$$

Tomando sólo la 2-componente, la expresión (54) quedará

$$\begin{aligned}
\{(T_{i_1 \dots i_n})\}_{2 \dots 2}^{TF} &= T_{2 \dots 2} \left(1 + \frac{n!}{(2n-1)!!} \sum_{k=1}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k-1)!!}{2^k k! (n-2k)!} \right) \\
&= T_{2 \dots 2} \left(\sum_{k=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^k (2n-2k-1)!!}{2^k k! (n-2k)!} \right) \frac{n!}{(2n-1)!!}.
\end{aligned} \tag{56}$$

Adicionalmente, es posible demostrar que la parte de la la sumatoria escrita en azul en (56) es igual a uno, evidenciando la proporcionalidad entre la componente sobre el eje de un tensor simétrico libre de traza y la componente sobre el eje de dicho tensor. Por ende, la expresión para los tensores en (47) nos queda

$$\left\{ \left(S_{a,b,c}^{(n)} \right) \right\}_{2 \dots 2}^{TF} = \frac{n!}{(2n-1)!!} \left(S_{a,b,c}^{(n)} \right)_{2 \dots 2} \equiv S_0^{(n)} \frac{n!}{(2n-1)!!}, \tag{57}$$

Así pues, el momento multipolar de orden n , teniendo en cuenta la expresión (57), vendrá dado por la componente sobre el eje del tensor $S_{a,b,c}^{(n)}$, sin traza evaluado en el punto del infinito (Λ), de la forma:

$$M_n \equiv \frac{1}{n!} \left(S_a^{(n)} \right)_{2 \dots 2}^{TF} = \frac{1}{(2n-1)!!} S_0^{(n)} |_{\Lambda}. \tag{58}$$

Luego de toda la descripción anterior a lo largo de esta subsección, en resumidas cuentas, para hallar cualquier momento multipolar de orden n , mediante la formulación de Geroch-Hansen y haciendo uso del método *FHP* para soluciones a las ecuaciones de Einstein en el vacío y axialmente simétricas, se deberá:

1. Expandir el potencial de Ernst ξ en series de la forma (37) hasta el orden n deseado.
2. Calcular los coeficientes a_{ij} a partir del desarrollo (40) para el mismo n .
3. Partiendo de la subvariedad (\mathcal{S}, h_{ab}) formada por las trayectorias de los vectores de killing temporal asociado a la variedad $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$, construir la variedad $(\tilde{\mathcal{S}}, \tilde{h}_{ab})$, de acuerdo con (16), introduciendo el factor conforme Ω de manera apropiada.

4. Determinar el tensor de Ricci, haciendo uso del potencial de Ernst conforme $\tilde{\xi}$ como se muestra en (72).
5. Finalmente, mediante las expresiones (53), se obtienen los tensores $S_a^{(n)}$, tal que los momentos multipolares asociados a la masa y momento angular correspondientes a la parte real e imaginaria serán los M_n en (58).

2.5. Momentos multipolares másicos asociados a la q -metric

Basado en el método *FHP* expuesto en la sección anterior, se presentarán dos de los momentos multipolares calculados correspondientes a la q -metric, en (4):

$$g = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1+q} dt \otimes dt - \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q} \left[\left(1 + \frac{m^2 \sin^2 \theta}{r^2 - 2mr}\right)^{-q(2+q)} \times \left(dr \otimes dr \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} + r^2 d\theta \otimes d\theta \right) + r^2 \sin^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi \right].$$

Estos son:

$$\begin{aligned} M_0 &= m(1+q), \\ M_2 &= \frac{1}{3}m^3(1+q)(1-(1+q)^2), \end{aligned} \tag{59}$$

el momento monopolar y cuadrupolar, respectivamente. Se debe tener en cuenta que los momentos de orden 1, el dipolo, se anula debido a que, hasta el momento, no se ha demostrado experimentalmente la existencia de masa negativa en la naturaleza. Es posible demostrar también que los momentos de orden superior son proporcionales a m^q y se pueden reescribir completamente en términos de M_0 y M_2 . Pongamos como ejemplo el caso del momento de cuarto orden:

$$M_4 = (1+q)m^5 \left(\frac{19}{105}(1+q)^4 - \frac{8}{21}(1+q)^2 + \frac{1}{5} \right); \tag{60}$$

el cual como vemos, puede ser escrito en potencias de M_0 . De otro lado, debido al carácter estático de la métrica, los momentos imaginarios asociados al momento angular son nulos.

Realicemos ahora una interpretación física de los resultados obtenidos: el monopolo M_0 correspondería a la masa del objeto, donde, a diferencia del monopolo asociado a la solución de Schwarzschild, este no solo consta de la masa m , sino que viene precedido de una cantidad que depende del parámetro cuadrupolar q . Asimismo, la existencia del cuadrupolo M_2 nos dice de que el objeto astrofísico no posee simetría esférica, sino que puede presentar alguna deformación, ya sea oblata o prolata, respecto a su eje de simetría, dependiendo del signo del parámetro q .

3. Definiciones de masa en gravedad de Einstein

*Who sees the human face correctly:
the photographer, the mirror, or the
painter?*

—Pablo Picasso (1907).

En este capítulo se discuten dos de los varios formalismos que describen una misma cantidad a la luz de la relatividad general: la masa. Para ello, primero se expone el principio de equivalencia como la dificultad principal que impide una definición unívoca a nivel local de la densidad de energía asociada a un campo gravitacional. Esa es precisamente la razón por la que esta se debe analizar desde el punto de vista de observadores no locales -es decir, que su dominio se extienda por todo el espaciotiempo-. El formalismo ADM se puede ver como una generalización de la ley de Gauss; por su parte, el de Komar toma la simetría del espaciotiempo estacionario para obtener la masa como una cantidad global. Una vez estudiado estos dos formalismos, se aplican al espaciotiempo de la q -metric para determinar una la relación -si existe- entre ellas y, a su vez, con los resultados obtenidos en el capítulo anterior.

3.1. El formalismo ADM

3.1.1. Formulación Hamiltoniana de la Relatividad General Para describir la dinámica en Relatividad General se requiere modelarla como un problema de Cauchy o problema de valor inicial, el cual consiste en analizar la evolución de una hipersuperficie tridimensional de tiempo constante sobre la cual se definen los campos. De

este formalismo, podemos extraer las variables ADM⁷⁵, pues son las que poseen el contenido dinámico explícito de las ecuaciones de Einstein. Esto permite la construcción del hamiltoniano a partir de la funcional gravitacional de Einstein-Hilbert, expresada como la integral sobre el espaciotiempo (la 4-variedad $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ completa) de la densidad lagrangiana $\mathcal{L} = \sqrt{-g}R$, es decir,

$$S = \int_{\mathcal{V}} dx^4 \sqrt{-g} R, \quad (61)$$

siendo $dx^4 \sqrt{-g}$ el hipervolumen, g el determinante del tensor métrico y R el escalar de curvatura; todos estos integrados sobre el dominio \mathcal{V} de una variedad $(\mathcal{M}, \mathbf{g})$ arbitraria. Si se varía el funcional respecto a las componentes $g_{\mu\nu}$ del tensor métrico \mathbf{g} , y se aplica el principio de Hamilton, se obtendrán las ecuaciones de Einstein en el vacío:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (62)$$

Sin embargo, al intentar modelar (61) como un problema de Cauchy, nos encontramos con la imposibilidad de llevarlo a cabo, debido a la intrínseca covariancia en las ecuaciones de campo. Por tal razón, Arnowit, Dessser y Misner plantearon el formalismo ADM ⁷⁶, el cual consiste en privilegiar la coordenada temporal, tal que desempeñe el papel de parámetro o etiqueta para la *foliación* que se formará en el espaciotiempo. Estas subdivisiones corresponderán a hipersuperficies espaciales Σ_t tridimensionales no intersectantes entre sí, dotadas con una métrica inducida h_{ab} y definido-positiva.

⁷⁵ Estas variables serán abordadas a lo largo de la sección.

⁷⁶ Arnowitt, Deser y Misner 1959.

Teniendo en cuenta la simetría en dichas hipersuperficies, esta métrica sólo poseerá 6 componentes, por lo que será necesario adicionar otras 4 con el fin de tener el mismo número de componentes de la métrica $g_{\mu\nu}$ que describe todo el espaciotiempo. Por tanto, estas variables serán brindadas de manera natural por la hipersuperficie misma ⁷⁷. Para ello, se define inicialmente la *foliación* previamente mencionada a partir de las funciones

$$x^\mu = X^\mu(\xi^\alpha, t), \quad (63)$$

siendo x^μ las coordenadas asociadas a la variedad 4-dimensional \mathcal{M} con coordenadas intrínsecas ξ^a y t el parámetro asociado a cada hipersuperficie. Así pues, el vector ∂_t será aquel que conecta los puntos entre dos hipersuperficies cuyas componentes de la base vendrán dadas por

$$\frac{\partial}{\partial t} = \frac{dx^\mu}{dt} \frac{\partial}{\partial x^\mu} = t^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (64)$$

Como siguiente paso consideremos una congruencia de curvas γ que intersecan cada Σ_t -no necesariamente de forma ortogonal, al igual que tampoco deben ser geodésicas- e imponiendo el cumplimiento de la restricción $\xi^a(P) = \xi^a(P') = \xi^a(P'')\dots$, donde P, P' y P'' corresponden a puntos sobre las hipersuperficies $\Sigma_t, \Sigma_{t'}$, y $\Sigma_{t''}$, respectivamente (ver figura 2). Cada punto sobre estas curvas tendrá un vector tangente asociado t^μ descrito en (64), el cual al descomponerlo en sus proyecciones paralela y ortogonal a la hipersuperficie toma la forma

⁷⁷ Miguel Alcubierre: *Introduction to 3+ 1 numerical relativity*. Vol. 140. Oxford University Press, 2008.

$$t^\mu = N\eta^\mu + N^a X_a^\mu, \quad (65)$$

donde N corresponde a la función escalar de normalización del vector ortogonal a la hipersuperficie Σ_t con componentes η_μ , y denominada función *lapso*⁷⁸. Por su parte, N^a corresponde a las funciones desplazamiento del vector temporal con componentes t^μ tangentes a la hipersuperficie Σ_t ⁷⁹. La descomposición de t^μ en términos de las funciones lapso y las de desplazamiento se muestran gráficamente en la figura (2). Las variables N y N^a , junto con la métrica h_{ab} , constituyen las variables ADM.

De esta manera, en términos de dichas variables el elemento de línea viene dado como:

$$ds^2 = (N_a N^a - N^2) dt \otimes dt + 2N_a dx^a \otimes dt + h_{ab} dx^a \otimes dx^b. \quad (66)$$

Con esto, h_{ab} permitirá definir una derivada covariante única en la hipersuperficie Σ_t , tal que $\nabla_a h_{bc} = 0$. Adicionalmente, es posible determinar el valor del escalar de curvatura 4R en términos de las variables ADM, objeto necesario para replantear la acción de Einstein-Hilbert en (61). Para ello, primero se necesitará conocer la expresión de la curvatura extrínseca⁸⁰, descrita por $K_{ab} = -X^\mu_a X^\nu_b \eta_{\mu;\nu}$, la cuál en coordenadas adaptadas tendrá la forma $K_{ab} = -\eta_{a;b}$ ⁸². Finalmente, y con la ayuda

⁷⁸ La función $N : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$, normaliza las componentes del vector η_μ de la forma $N := (\partial^t \partial_t)^{-\frac{1}{2}}$.

⁷⁹ Ericourgoulhon: *3+ 1 formalism and bases of numerical relativity*. En: *arXiv preprint gr-qc/0703035* (2007).

⁸⁰ La definición de este tipo de curvatura se puede encontrar en el capítulo 8 de ⁸¹.

⁸² Betsy Stovall y Brian Street: *Coordinates adapted to vector fields: canonical coordinates*. En: *Geometric and Functional Analysis* 28.6 (2018), págs. 1780-1862.

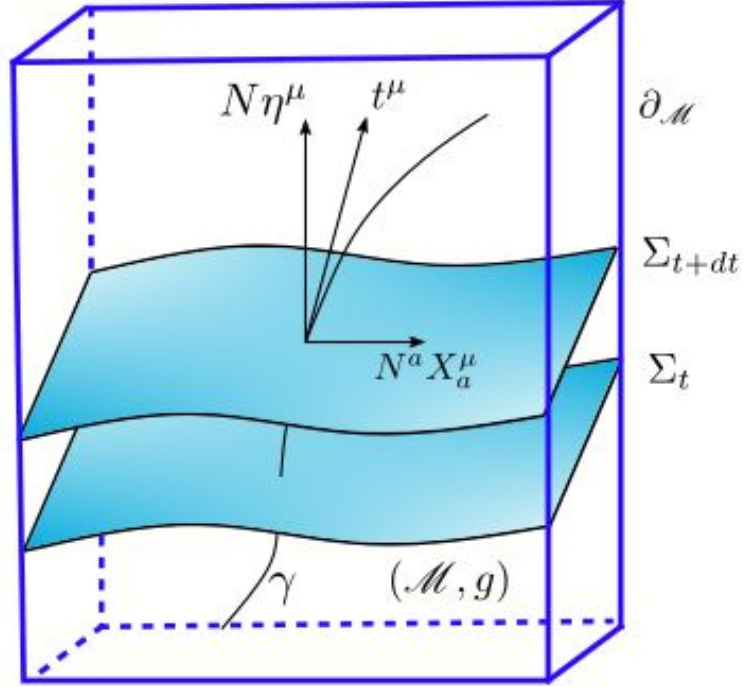


Figura 2. Representación de la descomposición del vector t^μ en términos de las componentes del vector normal, función lapso y vector tangente a cada hipersuperficie Σ_t de la *foliación* del espaciotiempo, cuyo dominio al interior y en su frontera corresponde a \mathcal{V} y $\partial\mathcal{V}$, respectivamente.

de la definición de derivada covariante intrínseca a la hipersuperficie, obtenemos la siguiente expresión para la curvatura extrínseca:

$$K_{ab} = \frac{1}{2N}(\nabla_b N_a + \nabla_a N_b - \dot{h}_{ab}). \quad (67)$$

Ahora se determinará la expresión para las componentes del tensor de Riemann ${}^4R^a{}_{bcd}$ que vive en el espacio ambiente, el cual será construido a partir de la derivada covariante intrínseca a la hipersuperficie Σ_t , con el fin de escribirlo en términos de las componentes ${}^3R^a{}_{bcd}$ asociadas a Σ_t , de la misma forma que se llevó a cabo con la curvatura extrínseca. Sin embargo, es importante señalar que ya no se tomará ∂_t como vector base sino el vector normal n . Con base en lo anterior, las proyecciones sobre la hipersuperficie serán de la forma

$${}^4R_{cab}{}^d = {}^3R_{cab}{}^d + K_{cb}K_a{}^d - K_{ca}K_b{}^d, \quad (68)$$

y sobre la normal

$${}^4R_{cab}{}^\perp = K_{ca;b} - K_{cb;a}. \quad (69)$$

Estas dos expresiones son conocidas como las ecuaciones de Gauss-Codazzi y Codazzi-Mainardi, respectivamente ⁸³. Así, dichas componentes del tensor de Riemann se escribirán como

$$R^\perp{}_{\nu\beta\alpha} = \eta_{\nu;\alpha\beta} - \eta_{\nu;\beta\alpha}. \quad (70)$$

Teniendo en cuenta lo anterior, el escalar de curvatura se definirá así:

$${}^4R := {}^4R^{\mu\nu}{}_{\mu\nu} = {}^4R^{ab}{}_{ab} + 2{}^4R^{\mu\perp}{}_{\mu\perp}, \quad (71)$$

donde el primer término está dado por la expresión (68), y el segundo se define mediante la contracción del segundo y cuarto término en (70), llegando así a la definición $R^{\mu\perp}{}_{\mu\perp} := \eta^\nu R^{\mu\perp}{}_{\nu\mu}$, con la cual se obtendrá $R^{\mu\perp}{}_{\mu\perp} = \eta^\nu(\eta^\lambda{}_{;\lambda\nu} - \eta^\lambda{}_{;\nu\lambda})$. De esta manera, el escalar de curvatura adquirirá la siguiente estructura:

$${}^4R = {}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 + 2(\Delta^\lambda)_{;\lambda}, \quad (72)$$

donde $\Delta^\lambda \equiv \eta^\lambda \eta^\nu{}_{;\nu} - \eta^\nu \eta^\lambda{}_{;\nu}$, con $-K = \eta^\nu{}_{;\nu}$ y $\eta^\nu{}_{;\nu} \eta^\nu{}_{;\nu} = K^{ab}K_{ab}$.

Mediante (72), podemos obtener el valor del escalar de curvatura para 4R correspondiente a la variedad \mathcal{M} , y con ello, obtener la densidad lagrangiana en términos de estas variables tal que la funcional de Einstein-Hilbert en (61) adquiera la forma

⁸³ Gourgoulhon 2007.

$$S[h_{\mu\nu}, N, N^\mu] = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_{\Sigma_t} \sqrt{h} N \left({}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 + (\Delta^\lambda)_{;\lambda} \right) d^3x. \quad (73)$$

Es importante resaltar que (73) ya no será integrada sobre una región arbitraria del espaciotiempo, sino estará definida por la topología $(m \times \mathbb{R})$, donde m corresponde a la variedad compuesta por la sumatoria de las hipersuperficies ⁸⁴. Así, sabiendo que la densidad lagrangiana en este caso corresponde a la segunda integral de la forma

$$\mathcal{L} = \int_{\Sigma_t} \sqrt{h} N \left({}^3R + K_{ab}K^{ab} - K^2 + (\Delta^\lambda)_{;\lambda} \right) d^3x,$$

la cuál puede ser escrita también como

$$\mathcal{L} = N\sqrt{h} (R + K_{ab}K^{ab} - K^2) = N\sqrt{\gamma} [R + (\gamma^{ac}\gamma^{bd} - \gamma^{ab}\gamma^{cd}) K_{ab}K_{cd}]. \quad (74)$$

Dado que la densidad lagrangiana no depende de las derivadas temporales del vector de desplazamiento N^μ , es posible construir de manera directa, tal que:

$$\pi^{ab} := \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{h}_{ab}}. \quad (75)$$

Resolviendo (75) mediante el correspondiente escalar de Ricci (72) y la expresión para \mathcal{L} , se obtendrán los momentos conjugados

$$\pi^{ab} = \sqrt{h}(Kh^{ab} - K^{ab}). \quad (76)$$

Si ahora se aplica la transformada de Legendre con el ánimo de obtener la densidad hamiltoniana $\mathcal{H} = \pi^{ab} \dot{h}_{ab} - \mathcal{L}$, con las expresiones asociadas la densidad lagrangiana en (74), la derivada de la métrica y los momentos conjugados, el hamiltoniano

⁸⁴ Thorne, Misner y Wheeler 2000.

$$H = \int_{\Sigma_t} \mathcal{H} d^3x,$$

para el campo gravitacional, adquiere la forma

$$H = - \int_{\Sigma_t} (NC_0 - 2N^a C_a) \sqrt{h} d^3x, \quad (77)$$

con $C_a = 2\pi_{a;b}{}^b$ y $C_0 = \sqrt{h} (K_{ab}K^{ab} - K^{-3} R)$.

Como se ve en la expresión (73), por simplicidad se despreciaron los términos de frontera. No obstante, si se consideran, la funcional S toma la forma

$$S = \int_{\mathcal{V}} \sqrt{-g}({}^4R) d^4x + 2 \oint_{\partial\mathcal{V}} (Y - Y_0) \sqrt{\sigma} d^3y, \quad (78)$$

con $\partial\mathcal{V}$ como la frontera del dominio \mathcal{V} y Y la curvatura extrínseca de $\partial\mathcal{V}$, embebida en (\mathcal{M}, g) , con su respectiva traza Y_0 , embebida en (\mathcal{M}, η) ⁸⁵. Adicionalmente, se tiene $\sqrt{\sigma} d^3y$ como el elemento de volumen en $\partial\mathcal{V}$ inducido por \mathbf{g} . Las componentes de la métrica \mathbf{h} poseen coordenadas $y^a(y^1, y^2)$ en $\partial\mathcal{V}$. Así pues, a partir de la funcional en (78), se halla el hamiltoniano el cual posee dos integrales: una compuesta por la expresión (??) del interior de la hipersuperficie, y la segunda correspondiente a la frontera de la misma, escritas como

$$H = \int_{\Sigma_t^{int}} (2N^a C_a - NC_0) \sqrt{h} d^3x - 2 \oint_{\mathcal{S}_t} [N(\kappa - \kappa_0) + N_a (K_{ab} - K_{h_{aj}}) s^b] \sqrt{\tau} d^2y, \quad (79)$$

donde \mathcal{S}_t corresponde a la región $\mathcal{S}_t := \partial\mathcal{V}_t \cap \Sigma_t$, cuya topología es la de una esfera, k a la curvatura extrínseca de Σ_t^{int} junto con la traza k_0 de la curvatura extrínseca, \mathbf{s} es el vector normal orientado hacia la región asintótica \mathcal{S}_t , y $\sqrt{\tau} d^2y$ corresponde al

⁸⁵ donde η es la métrica lorentziana.

elemento de volumen inducido en S_t ⁸⁶. Para que (79) sea solución a las ecuaciones de Einstein, se debe cumplir que $C_0 = 0$ y $C_a = 0$, por lo que se tendrá:

$$H_G = -\frac{1}{8\pi} \oint_{S_t} [N(k - k_0) - N_a (K^{ab} - Kh^{ab}) s_b] \sqrt{\tau} d^2y. \quad (80)$$

Ahora bien, para determinar la energía total contenida en la hipersuperficie Σ_t se debe tomar sobre la superficie S_t en el infinito espacial⁸⁷ con coordenadas para un observador asintóticamente inercial (t, x^i) , tal que se cumpla $N = 1$ y $N_a = 0$. Así, se obtendrá

$$M_{ADM} = -\frac{1}{8\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{S_t} (k - k_0) \sqrt{\tau} d^2y. \quad (81)$$

A esta cantidad global se le conoce como masa ADM.

3.1.2. Determinación de la masa ADM aplicado al espaciotiempo de la q -metric

Partamos escribiendo la métrica (4) en coordenadas esféricas $x^\alpha = (t, r, \theta, \varphi)$:

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left[-\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1+q}, \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q-1} \left(1 + \frac{m^2 \text{sen}^2 \theta}{r^2 - 2mr^{-q}}\right)^{-q(2+q)}, \right. \\ \left. r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q} \left(1 + \frac{m^2 \text{sen}^2 \theta}{r^2 - 2mr^{-q}}\right)^{-q(2+q)}, \right. \\ \left. \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q} r^2 \text{sen}^2 \theta \right]. \quad (82)$$

Tomando como hipersuperficie Σ_t de coordenada constante t , las componentes de la métrica inducida $x^a = (r, \theta, \varphi)$, serán

⁸⁶ Gourgoulhon 2007.

⁸⁷ Es decir, cuando $r \rightarrow \infty$, con $r := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ en el sistema de coordenadas cartesiano $x^i = (x, y, z)$.

$$h_{ab} = \text{diag} \left[\left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q-1} \left(1 + \frac{m^2 \sin^2 \theta}{r^2 - 2mr^{-q}}\right)^{-q(2+q)}, \right. \\ \left. r^2 \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q} \left(1 + \frac{m^2 \sin^2 \theta}{r^2 - 2mr}\right)^{-q(2+q)}, \right. \\ \left. \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q} r^2 \sin^2 \theta \right]. \quad (83)$$

Así pues, usando las mismas coordenadas de (83), la métrica asociada al espacio plano corresponderá a

$$f_{ab} = \text{diag} (1, r^2, r^2 \sin^2 \theta), \quad (84)$$

cuya inversa es

$$f^{ab} = \text{diag} (1, r^{-2}, r^{-2} \sin^{-2} \theta). \quad (85)$$

De acuerdo con la definición en (81), escogeremos la superficie S_t de coordenada $r = cte$, tal que las coordenadas allí serán $y^a = (\theta, \varphi)$, junto con su respectivo elemento de volumen $s^a \sqrt{\tau} d\theta \wedge d\varphi$, donde $\sqrt{\tau} = r^2 \sin \theta$ y $s^a = (\partial_r)^a$; de tal forma que se tendrá la ecuación como

$$M_{ADM} = \frac{1}{16\pi} \lim_{S_t \rightarrow \infty} \oint_{r=cte} [\bar{D}^b h_{rb} - \bar{D}_r (f^{cd} h_{cd})] r^2 \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (86)$$

El operador derivada covariante asociado a las coordenadas x^a serán

$$\bar{D}^b h_{rb} = \frac{\partial_{rr}}{\partial r} - 2\Gamma_{rr}^r h_{rr} \\ - \Gamma_{\theta r}^\theta h_{\theta\theta} - \Gamma_{\theta\theta}^r h_{rr} \\ + \Gamma_{\varphi r}^\varphi h_{\varphi\varphi} - \Gamma_{\varphi\varphi}^r h_{rr}, \quad (87)$$

por lo tanto será necesario escribir (87) en términos de la métrica plana (f^{ab}) de la forma

$$\begin{aligned}
\bar{D}^b h_{rb} &= \bar{D}^r h_{rr} + \bar{D}^\theta h_{r\theta} + \bar{D}^\varphi h_{r\varphi} \\
&= f^{ab} \bar{D}_a h_{rb} = f^{rr} \bar{D}_r h_{rr} + f^{\theta\theta} \bar{D}_\theta h_{r\theta} + f^{\varphi\varphi} \bar{D}_\varphi h_{r\varphi},
\end{aligned} \tag{88}$$

cuyos símbolos de Cristoffel no nulos corresponderán a

$$\begin{aligned}
\bar{\Gamma}_{\theta\theta}^r &= -r, & \bar{\Gamma}_{\varphi\varphi}^r &= -r \sin^2 \theta, \\
\bar{\Gamma}_{r\theta}^\theta &= \frac{1}{r}, & \bar{\Gamma}_{\varphi\varphi}^\theta &= -\cos \theta \sin \theta, \\
\bar{\Gamma}_{r\varphi}^\varphi &= \bar{\Gamma}_{\varphi r}^\varphi = \frac{1}{r}, & \bar{\Gamma}_{\theta\varphi}^\varphi &= \frac{1}{\tan \theta}.
\end{aligned} \tag{89}$$

Con ellos, tendremos

$$\begin{aligned}
\bar{D}^r h_{rr} &= \frac{\partial h_{rr}}{\partial r}, \\
\bar{D}^\theta h_{r\theta} &= \left(-\frac{1}{r} h_{\theta\theta} + r h_{rr} \right) \frac{1}{r^2}, \\
\bar{D}^\varphi h_{r\varphi} &= \left(-\frac{1}{r} h_{\varphi\varphi} + r \sin^2 \theta h_{rr} \right) \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta}.
\end{aligned} \tag{90}$$

Al sumar cada término de (90), obtendremos la primera parte del integrando en (86)

$$\bar{D}^b h_{rb} = \frac{\partial h_{rr}}{\partial r} - \frac{1}{r^3} h_{\theta\theta} + \frac{1}{r} h_{rr} - \frac{h_{\varphi\varphi}}{r^3 \sin^2 \theta} + \frac{1}{r} h_{rr}. \tag{91}$$

De otro lado, la segunda parte del integrando correspondiente a la derivada covariante de la cantidad escalar $f^{cd} h_{cd}$, será

$$\bar{D}_r (f^{cd} h_{cd}) = \frac{\partial}{\partial r} (h_{rr} + r^{-2} h_{\theta\theta} + r^{-2} \sin^{-2} \theta h_{\varphi\varphi}). \tag{92}$$

A partir de (91) y (92) obtenemos la expresión

$$[\bar{D}^b h_{rb} - \bar{D}_r (f^{cd} h_{cd})] = \frac{2h_{rr}}{r} + \frac{1}{r} \left(\frac{h_{\theta\theta}}{r} \right) + \frac{1}{r \sin^2 \theta} \left(\frac{h_{\varphi\varphi}}{r} \right). \tag{93}$$

Si ahora reemplazamos las componentes de las métrica h_{ab} de (83) en (93), operamos y luego introducimos este valor en la definición (86), se tendrá

$$M_{ADM} = \frac{1}{16} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint \left[\frac{4m(q+1)}{r^2} r^2 \sin \theta d\theta d\varphi + q(2+q)m^2 \sin^2 \theta \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q-2} \left[-\frac{3}{r^3} - \frac{2mq}{r^4}\right] r^2 \sin^2 \theta \right] d\theta d\varphi. \quad (94)$$

Para finalmente obtener la cantidad invariante

$$\boxed{M_{ADM} = m(q+1)}. \quad (95)$$

De este resultado, podemos automáticamente percibir que M_{ADM} no depende de la distancia sobre la cual se tomó la 2-superficie. Adicionalmente, si comparamos con el primer momento monopolar M_0 obtenido en el capítulo anterior (ver (59)), es posible notar que son idénticos; por lo tanto, su factor de proporcionalidad es uno. Esto indica que ambos formalismos -la estructura multipolar en RG y el concepto de masa ADM- determinan la misma cantidad: la masa del objeto. Observamos también que esta masa depende del parámetro cuadrupolar q , lo que nos indica que el objeto no posee simetría esférica, sino que exhibe una deformación dependiendo del valor y signo de dicho parámetro.

3.2. El formalismo de Komar

Una de las formas para determinar la masa en un espaciotiempo estacionario ⁸⁸ y axialmente simétrico, es mediante la técnica brindada por Komar ⁸⁹, la cual consiste en tomar las integrales de flujo de la derivada del vector de killing dependiendo de la simetría del espaciotiempo, ya sea temporal o angular. Dicha simetría se preservará, es decir, será independiente de la 2-superficie S_t , siempre y cuando se tome en las afueras de la fuente. Si ahora se realiza la *foliación* de la variedad \mathcal{M} formando las

⁸⁸ Es decir, se debe cumplir que $\mathcal{L}_{\mathbf{k}} \mathbf{g} = 0$, donde \mathcal{L} corresponde a la derivada de Lie respecto al vector de killing \mathbf{k} asociado a la simetría del espaciotiempo, (normalizado en el infinito, tal que $\mathbf{g}(\mathbf{k}, \mathbf{k}) = -1$ se cumpla en el infinito espacial) y \mathbf{g} el tensor métrico.

⁸⁹ Komar 1959.

hipersuperficies tridimensionales Σ_t , donde $t \in \mathbb{R}$, y se toma la 2-superficie cerrada \mathcal{S}_t , la masa vendría dada por:

$$M_K := -\frac{1}{8\pi} \oint_{\mathcal{S}_t} \nabla^\mu k^\nu dS_{\mu\nu}, \quad (96)$$

donde el elemento de línea corresponde a $dS_{\mu\nu} = (s_\mu n_\nu - n_\mu s_\nu) \sqrt{q} d^2y$ siendo \mathbf{n} el vector tipo tiempo normal a la hipersuperficie Σ_t (con coordenadas y^a) y \mathbf{s} el vector normal a \mathcal{S}_t de Σ_t ⁹⁰. Con el ánimo de demostrar la no dependencia de M_K con \mathcal{S}_t , como se ve a priori en (96), se hará la transformación de dicha expresión presentada como una integral de superficie a una integral de volumen, suponiendo que \mathcal{S}_t es difeomórfico a \mathbb{R}^3 , y por lo tanto lo será también a \mathbb{R}^3 menos un agujero, denotado por \mathcal{H}_t , el cuál deberá estar contenido en \mathcal{S}_t , como se muestra en la figura (3).

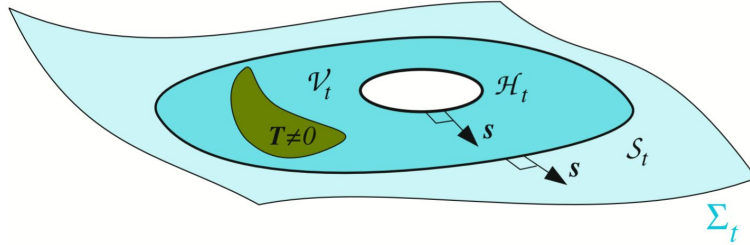


Figura 3. Superficie de integración \mathcal{S}_t sobre la hipersuperficie Σ_t . La región \mathcal{S}_t corresponde al límite exterior de \mathcal{V}_t , en la cual se encuentra contenida la masa de la fuente. El límite inferior puede estar delimitado por dos o más huecos \mathcal{H}_t . Imagen tomada de: Ericourgoulhon: *3+1 formalism and bases of numerical relativity*. En: *arXiv preprint gr-qc/0703035* (2007).

Partiendo del hecho que la expresión $\nabla^\mu k^\nu$ son las componentes de un tensor antisimétrico \mathbf{A} tipo (2,0), este debe cumplir la siguiente identidad:

$$2 \int_{\mathcal{V}_t} \nabla_\nu A^{\mu\nu} dV_\mu = \oint_{\mathcal{S}_t} A^{\mu\nu} dS_{\mu\nu} + \oint_{\mathcal{H}_t} A^{\mu\nu} dS_{\mu\nu}^{\mathcal{H}}, \quad (97)$$

⁹⁰ Gourgoulhon 2007.

donde dV_μ es el elemento de volumen sobre Σ_t y $dS_{\mu\nu}^{\mathcal{H}}$ es el elemento de superficie sobre \mathcal{H} . Aplicando el teorema de Gauss-Ostrogradsky ⁹¹ a (97) se tendrá:

$$M_K = -\frac{1}{4\pi} \int_{\mathcal{V}_t} \nabla_\nu \nabla^\mu k^{\nu} dV_\mu + M_K^{\mathcal{H}}, \quad (98)$$

donde

$$M_K^{\mathcal{H}} := \frac{1}{8\pi} \oint_{\mathcal{H}_t} \nabla^\mu k^{\nu} dS_{\mu\nu}^{\mathcal{H}}. \quad (99)$$

La expresión $M_K^{\mathcal{H}}$ correspondería a la masa de Komar para el hueco descrito en la figura 3. Si ahora se emplea la identidad de Ricci

$$\nabla_\nu \nabla^\mu k^{\nu} - \nabla^\mu \underbrace{\nabla_\nu k^{\nu}}_0 = {}^4R^\mu{}_\nu k^{\nu},$$

en (99), y a su vez, expresamos el escalar de curvatura en términos del tensor energía momentum \mathbf{T} , la nueva expresión para la masa será de la forma:

$$M_K = 2 \int_{\Sigma_t} \left[\mathbf{T}(\mathbf{n}, \mathbf{k}) - \frac{1}{2} \mathbf{T} \mathbf{n} \cdot \mathbf{k} \right] \sqrt{h} d^3x + M_K^{\mathcal{H}}. \quad (100)$$

La integración sobre \mathcal{V}_t se realiza con el fin de determinar la localización de la fuente, es decir, la región en donde $\mathbf{T} \neq 0$. Además, es importante resaltar que el segundo término de la expresión (100) es independiente de la elección de la superficie cerrada \mathcal{S}_t en la hipersuperficie debido al vector de killing temporal, por lo cuál es posible determinar la masa de la fuente.

3.2.1. Determinación de la masa Komar aplicado a la q -metric Partamos escribiendo la métrica (4) en coordenadas esféricas $x^\alpha = (t, r, \theta, \varphi)$:

⁹¹ Este teorema está dado por: $\int_{\mathcal{V}_t} \nabla_\nu A^{\mu\nu} dV_\mu = \oint_{\partial\mathcal{V}_t} V^i s_i \sqrt{\tau} d^2y$. No obstante, este paso también puede ser desarrollado a través del teorema de Stokes ⁹².

$$g_{\mu\nu} = \text{diag} \left[- \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{1+q}, \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-q-1} \left(1 + \frac{m^2 \sin^2 \theta}{r^2 - 2mr^{-q}} \right)^{-q(2+q)}, \right. \\ \left. r^2 \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-q} \left(1 + \frac{m^2 \sin^2 \theta}{r^2 - 2mr} \right)^{-q(2+q)}, \right. \\ \left. \left(1 - \frac{2m}{r} \right)^{-q} r^2 \sin^2 \theta \right].$$

Para el cálculo de la masa de Komar implementaremos la definición (100). Dado que se desea obtener a partir de una solución exterior a la fuente como lo es la q -metric en (4), entonces tendremos la definición de la forma

$$M_K := -\frac{1}{8\pi} \oint_{S_t} \nabla^\mu k^\nu dS_{\mu\nu}, \quad (101)$$

Para ello, será necesario determinar el integrando de (99):

$$\begin{aligned} \nabla^\mu k^\nu &= g^{\gamma\mu} \nabla_\gamma k^\nu \\ &= g^{tt} \nabla_t k^t + g^{rr} \nabla_r k^t + g^{\theta\theta} \nabla_\theta k^t + g^{\varphi\varphi} \nabla_\varphi k^t. \end{aligned} \quad (102)$$

Al desarrollar las derivadas covariantes en las mismas coordenadas x^α e insertando los símbolos de Cristoffel diferentes de cero en (89), se tendrá

$$\nabla^r k^t = g^{rr} \nabla_r k^t = g^{rr} [\partial_r k^t + \Gamma_{rt}^t k^t]. \quad (103)$$

Ahora Reemplazamos las componentes de \mathbf{g} en este integrando, obteniendo

$$\begin{aligned} \nabla^r k^t &= g^{rr} \Gamma_{rt}^t k^t \\ &= \left(\frac{r-2m}{r} \right)^q \left(\frac{-m^2 \sin^2 \theta - 2mr + r^2}{2mr^2 - r^2} \right)^{q(2+q)} \left(\frac{(1+q)m}{r^2} \right). \end{aligned} \quad (104)$$

Ahora bien, sabemos que el elemento de volumen está dado por

$$dS_{uv} = -2(s_u n_v - n_u s_v) \sqrt{\tau} d^2 y, \quad (105)$$

donde $d^2 y = d\theta \wedge d\varphi$, $\sqrt{\tau} = r^2 \sin \theta$. Además, los vectores perpendicular y paralelo a la superficie que encierra la fuente serán $s_\mu = (0, 1, 0, 0)$ y $n_\mu = (1, 0, 0, 0)$, respec-

tivamente.

Al sustituir todos los elementos (3.41) y (3.42) en la definición (99), se llega a

$$\begin{aligned}
 M_K = \frac{2}{8\pi} \lim_{r \rightarrow \infty} \oint \left[\frac{(1+q)m}{r^2} - \frac{2qm^2(1+q)}{r^3} \right. \\
 + \frac{q(2+q)(1+q)m^3 \sin^2 \theta}{r^2(r^2 - 2mr)} \\
 \left. - \frac{2q^2m^4(2+q)(1+q) \sin^2 \theta}{r^3(r^2 - 2mr)} \right] r^2 \sin \theta d\theta d\varphi ;
 \end{aligned} \tag{106}$$

con lo que se obtendrá finalmente

$$\boxed{M_{Komar} = m(q+1)} . \tag{107}$$

Con el resultado obtenido en (107), en (59) y (95), vemos nuevamente que las tres cantidades coinciden; lo que nos lleva a concluir que para el espaciotiempo de la *q-metric*, existe una equivalencia en los valores hallados a partir de las dos definiciones de masa, ADM y Komar, así como también con el primer momento polar según la definición de momentos multipolares de Geroch-Hansen.

4. Conclusiones

La realización de este trabajo nos lleva a concluir lo siguiente: a partir de la definición covariante de estructura multipolar propuesta por Geroch-Hansen, e implementando el método analítico de G. Fodor, C. Hoenselaers y Z. Perjés (*FHP*) para el cálculo de los momentos multipolares, se obtuvieron los dos primeros términos asociados al campo gravitacional externo del espaciotiempo de la *q-metric*: el monopolo y el cuadrupolo. Estos términos coinciden con los encontrados en la literatura⁹³. El monopolo M_0 , corresponde a la masa de la fuente. El cuadrupolo muestra también la existencia de una desviación de la simetría esférica. Esta desviación es responsable de la aparición de una singularidad de curvatura, la cual no está cubierta por un horizonte de eventos, como se vió en el capítulo 1. De esta manera, la comparación del modelo teórico de la *q-metric* con otras soluciones, cuya fuente corresponda a la de un agujero negro, podría permitirnos distinguir una singularidad desnuda de un agujero negro a través del análisis de trayectorias geodésicas.

Ahora bien, el primer concepto de masa que se estudió fue el de Arnowitt-Dessner-Misner (ADM), mediante el uso del formalismo $3 + 1$ de la relatividad general. Con ello se obtuvo el valor de la masa M_{ADM} en (95) asociado a la *q-metric*. Sabemos que este resultado es consistente con el valor hipotético que se esperaba, ya que el termino de masa encontrado depende explícitamente del parámetro de deformación q . Esto permite deducir que si q se anula, entonces $M_{ADM} = m$, lo que correspondería a la masa de Schwarzschild. Asimismo, si $q \neq 0$ y $m = 0$, independientemente del valor que tome q , implica que el espaciotiempo en consideración es plano.

El segundo concepto de masa estudiado corresponde al de Komar. Dicho concepto

⁹³ Quevedo 2011; Hernando Quevedo: *Quadrupolar metrics*. En: *arXiv preprint arXiv:1606.09361* (2016).

se pudo considerar gracias a que la q -metric es estática, dado que posee un vector de killing en la dirección temporal. Así pues, se encontró que el valor obtenido para la masa M_k , en (107), asociado a esta métrica, coincide con el encontrado en (95), usando el primer concepto; valor que a su vez coincide también con el primer término de la estructura multipolar según el formalismo de Geroch-Hansen. Esto nos permitió corroborar la equivalencia entre ambos conceptos.

Con el ánimo de extender el trabajo a futuro, se espera aplicar estos formalismos a métricas estacionarias, tal como la de Kerr. Del mismo modo, se pretende ampliar la investigaciones a otras de las diferentes definiciones que se tienen de masa, tal como la de Bondi-Sachs, Ruffini, entre otras, con el fin de profundizar en el área y dar una explicación complementaria basada el últimas investigaciones. De otro lado, también se pretende seguir aplicando la q -metric a fenómenos de actual relevancia; entre ellos resaltan el estudio de las sombras, y como solución alternativa más próxima a un escenario físico real de un objeto astrofísico que presenta desviaciones de la simetría esférica, al emplearlos en el sistema de navegación satelital (GPS). Estudios recientes se realizan empleando el espaciotiempo de Schwarzschild u otras métricas en el marco del límite newtoniano; con lo que se esperaría una mejor precisión y eficiencia en este tipo de tecnologías al modelar el planeta tierra como un objeto con cierto grado de deformación.

BIBLIOGRAFÍA

Alcubierre, Miguel: *Introduction to 3+ 1 numerical relativity*. Vol. 140. Oxford University Press, 2008.

Arfken, George B y col.: *Mathematical methods for physicists*. 1999.

Arnowitt, Richard y col.: *Dynamical structure and definition of energy in general relativity*. En: *Physical Review* 116.5 (1959), pág. 1322.

Arrieta-Villamizar, JA y col.: *Shadows around the q-metric*. En: *Classical and Quantum Gravity* 38.1 (2020), pág. 015008.

Beig, R y col.: *On the multipole expansion for stationary space-times*. En: *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences* 376.1765 (1981), págs. 333-341.

Binney, James y col.: *Galactic dynamics*. Vol. 13. Princeton university press, 2011.

Bondi, Hermann: *Negative mass in general relativity*. En: *Reviews of Modern Physics* 29.3 (1957), pág. 423.

Boshkayev, K y col.: *Motion of test particles in the field of a naked singularity*. En: *Physical Review D* 93.2 (2016), pág. 024024.

Boshkayev, Kuantay y col.: *Neutrino oscillation in the q-metric*. En: *The European Physical Journal C* 80.10 (2020), págs. 1-12.

Coley, Alan y col.: *Spacetimes characterized by their scalar curvature invariants*. En: *Classical and Quantum Gravity* 26.2 (2009), pág. 025013.

De Felice, Fernando y col.: *Relativity on curved manifolds*. Cambridge University Press, 1992.

Einstein, Albert y col.: *The Collected Papers of Albert Einstein. Vol. 5, The Swiss Years: Correspondence, 1902-1914*. Princeton University Press, 1993.

Erez, G y col.: *The gravitational field of a particle possessing a multipole moment*. Inf. téc. Israel Inst. of Tech., Haifa, 1959.

Ernst, Frederick J: *New formulation of the axially symmetric gravitational field problem*. En: *Physical Review* 167.5 (1968), pág. 1175.

Euler, L: *Theorie motus corpus solidorum*. 1765.

Filter, Robert y col.: *On the multipole moments of a rigidly rotating fluid body*. En: *Annalen der Physik* 18.2-3 (2009), págs. 102-106.

Fodor, G y col.: *Multipole moments of axisymmetric systems in relativity*. En: *Journal of Mathematical Physics* 30.10 (1989), págs. 2252-2257.

Geroch, Robert: *A method for generating solutions of Einstein's equations*. En: *Journal of Mathematical Physics* 12.6 (1971), págs. 918-924.

— *Multipole moments. I. Flat space*. En: *Journal of Mathematical Physics* 11.6 (1970), págs. 1955-1961.

— *Multipole moments. II. Curved space*. En: *Journal of Mathematical Physics* 11.8 (1970), págs. 2580-2588.

— *Multipole moments. II. Curved space*. En: *Journal of Mathematical Physics* 11.8 (1970), págs. 2580-2588.

Gourgoulhon, Eric: *3+ 1 formalism and bases of numerical relativity*. En: *arXiv preprint gr-qc/0703035* (2007).

Gourgoulhon, Éric: *Special relativity in general frames*. Springer, 2016.

Gürsel, Yekta: *Multipole moments for stationary systems: The equivalence of the Geroch-Hansen formulation and the Thorne formulation*. En: *General relativity and gravitation* 15.8 (1983), págs. 737-754.

Gutsunayev, Ts I y col.: *On the gravitational field of a mass possessing a multipole moment*. En: *General relativity and gravitation* 17.11 (1985), págs. 1025-1027.

Hansen, Richard O: *Multipole moments of stationary space-times*. En: *Journal of Mathematical Physics* 15.1 (1974), págs. 46-52.

Haugan, Mark P y col.: *Principles of equivalence: their role in gravitation physics and experiments that test them*. En: *Gyros, Clocks, Interferometers...: Testing Relativistic Gravity in Space*. 2001, págs. 195-212.

Hawking, Stephen W y col.: *The large scale structure of space-time*. Vol. 1. Cambridge university press, 1973.

Hernandez-Pastora, JL: *CAMPOS GRAVITATORIOS RELATIVISTAS PROXIMOS A LA SOLUCION DE SCHWARZSCHILD*. En: *Spanish. PhD thesis, University of Salamanca, Spain* (1996).

Hernández-Pastora, JL y col.: *Monopole-quadrupole static axisymmetric solutions of Einstein field equations*. En: *General Relativity and Gravitation* 26.9 (1994), págs. 877-907.

Jackson, John David: *Classical electrodynamics*. 1999.

Kellogg, Oliver Dimon: *Foundations of potential theory*. Vol. 31. Courier Corporation, 1953.

Komar, Arthur: *Covariant conservation laws in general relativity*. En: *Physical Review* 113.3 (1959), pág. 934.

Kramer, D y col.: *Exact solutions of Einsteins field equations*. En: *Berlin* (1980).

Manko, VS: *On the description of the external field of a static deformed mass*. En: *Classical and Quantum Gravity* 7.9 (1990), pág. L209.

Newton, Isaac: *The Principia: mathematical principles of natural philosophy*. Univ of California Press, 1999.

Quevedo, Hernando: *General static axisymmetric solution of Einsteins vacuum field equations in prolate spheroidal coordinates*. En: *Physical Review D* 39.10 (1989), pág. 2904.

— *Mass quadrupole as a source of naked singularities*. En: *International Journal of Modern Physics D* 20.10 (2011), págs. 1779-1787.

— *Multipolar solutions*. En: *arXiv preprint arXiv:1201.1608* (2012).

— *Multipole moments in general relativity static and stationary vacuum solutions*. En: *Fortschritte der Physik/Progress of Physics* 38.10 (1990), págs. 733-840.

— *On the exterior gravitational field of a mass with a multipole moment*. En: *General relativity and gravitation* 19.10 (1987), págs. 1013-1023.

— *Quadrupolar metrics*. En: *arXiv preprint arXiv:1606.09361* (2016).

Schwarzschild, Karl: *Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie*. En: *Berlin. Sitzungsberichte* 18 (1916).

Simon, Walter y col.: *The multipole structure of stationary space-times*. En: *Journal of Mathematical Physics* 24.5 (1983), págs. 1163-1171.

Stovall, Betsy y col.: *Coordinates adapted to vector fields: canonical coordinates*. En: *Geometric and Functional Analysis* 28.6 (2018), págs. 1780-1862.

Thorne, Kip S: *Multipole expansions of gravitational radiation*. En: *Reviews of Modern Physics* 52.2 (1980), pág. 299.

Thorne, Kip S y col.: *Gravitation*. Freeman San Francisco, CA, 2000.

Voorhees, BH: *Static axially symmetric gravitational fields*. En: *Physical Review D* 2.10 (1970), pág. 2119.

Wald, Robert M: *General relativity*. University of Chicago press, 2010.

Weyl, Hermann: *Republication of: 3. On the theory of gravitation*. En: *General Relativity and Gravitation* 44.3 (2012), págs. 779-810.

Wood, James: *The principles of mechanics: Designed for the use of students in the university*. Deighton, 1824.

Zipoy, David M: *Topology of some spheroidal metrics*. En: *Journal of Mathematical Physics* 7.6 (1966), págs. 1137-1143.

ANEXOS

Anexo A. La ecuación de Poisson y el potencial generado por una distribución arbitraria de masa

Para obtener el potencial gravitacional al exterior y/o interior asociado a un cuerpo masivo de volumen limitado, partiremos de la ecuación de fuerza gravitacional por unidad de masa a una posición \mathbf{x} de la distribución arbitraria de masa $\rho(\mathbf{x}')$

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = G \int \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \rho(\mathbf{x}') d^3\mathbf{x}'; \quad (108)$$

Si ahora tenemos en cuenta que el primer producto del integrando en (108) puede ser reescrito como:

$$\nabla_{\mathbf{x}} \left(\frac{1}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} \right) = \frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3}. \quad (109)$$

Reemplazando (109), en la expresión para la fuerza, tendremos

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = \nabla_{\mathbf{x}} \int \frac{G\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} d^3\mathbf{x}'. \quad (110)$$

Al definir la cantidad

$$\Phi(\mathbf{x}) = -G \int \frac{\rho(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|} d^3\mathbf{x}', \quad (111)$$

como el potencial gravitacional, vemos que es posible obtener una expresión para la fuerza de la forma

$$\mathbf{F}(\mathbf{x}) = -\nabla\Phi. \quad (112)$$

Esto tiene validez gracias que la fuerza gravitacional es conservativa⁹⁴, es decir, que la circulación del campo a lo largo de una curva es independiente del camino, solo depende de los puntos inicial y final de la trayectoria. Su expresión matemática corresponde a $\oint_c \vec{g} \cdot d\vec{l} = 0$.

La divergencia de la fuerza en la ecuación (108), estará dada por

$$\nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) = G \int \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) \rho(\mathbf{x}') d^3 \mathbf{x}'. \quad (113)$$

No obstante, sabemos que

$$\nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) = 0, \quad (114)$$

para todo $\mathbf{x}' \neq \mathbf{x}$; razón por la cual consideramos sólo cuando $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$, con lo que se permite restringir el volumen de integración a una esfera -muy pequeña- de radio h centrada en este punto. Dado que, para un h suficientemente pequeño, la densidad será casi constante a través de este volumen, podemos sacar a $\rho(\mathbf{x}')$ de la integral. Los términos restantes del integrando se pueden ordenar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{F}(\mathbf{x}) &= G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| \leq h} \nabla_{\mathbf{x}} \cdot \left(\frac{\mathbf{x}' - \mathbf{x}}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \right) d^3 \mathbf{x}' \\ &= -G\rho(\mathbf{x}) \int_{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}| = h} \frac{(\mathbf{x}' - \mathbf{x}) \cdot d^2 \mathbf{S}'}{|\mathbf{x}' - \mathbf{x}|^3} \\ &= -G\rho(\mathbf{x}) \int d^2 \Omega = -4\pi G \rho(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (115)$$

teniendo en cuenta que $d^2 \mathbf{S}' = (\mathbf{x}' - \mathbf{x}) h d^2 \Omega$, siendo $d^2 \Omega$ el elemento de ángulo sólido. De lo anterior, reemplacemos el potencial definido en (111), en (115), tendremos la ecuación de Poisson,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho, \quad (116)$$

⁹⁴ Jackson 1999.

donde la solución homogénea a (116) se denomina ecuación de Laplace. Esta se aplica en el caso en el que se tome una posición tal que $\rho(\mathbf{x}) = 0$; es decir, en la región externa a la fuente.

Ahora bien, para determinar el potencial externo e interno de la fuente en cuestión, tomemos la ecuación de Poisson (116) para un cascarón cuyo grosor es lo suficientemente despreciable, tal que sea equivalente a resolver la ecuación de Laplace. Para ello, en coordenadas esféricas, la ecuación toma la forma:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \Phi}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\sin \theta \frac{\partial \Phi}{\partial \theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \theta} \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (117)$$

Se propone una solución mediante el método separación de variables de la forma

$$\Phi(r, \theta, \phi) = R(r)P(\theta)Q(\phi), \quad (118)$$

de tal forma que 117 se podrá expresar como:

$$\frac{\sin^2 \theta}{R} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) + \frac{\sin \theta}{P} \frac{d}{d\theta} \left(\sin \theta \frac{dP}{d\theta} \right) = -\frac{1}{Q} \frac{d^2 Q}{d\phi^2}. \quad (119)$$

Luego de resolver la parte derecha de (119), es decir, para la función $Q(\phi)$, tendremos:

$$Q(\phi) = Q_m^+ e^{im\phi}, \quad (120)$$

con el coeficiente $m = \dots, -1, 0, 1, \dots$, dado que ϕ varía de 0 a 2π , para que se preserve la periodicidad del potencial Φ .

Por lo que, al lado izquierdo nos quedará:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{dR}{dr} \right) - l(l+1)R = 0, \quad (121)$$

para la función $R(r)$, y para $P(\theta)$, con $x \equiv \cos(\theta)$, será

$$\frac{d}{dx} \left[(1-x^2) \frac{dP}{dx} \right] - \frac{m^2}{1-x^2} P + l(l+1)P = 0. \quad (122)$$

Las dos soluciones linealmente independientes de (121), son

$$R(r) = Ar^l \quad \text{y} \quad R(r) = Br^{-(l+1)}. \quad (123)$$

Mientras que la solución para (122), corresponde a las funciones asociadas de Legendre $P_l^m(x)$ ⁹⁵, donde sólo serán físicamente aceptables aquellas en las que l toma valores enteros positivos y $|m| \leq l$.

$$\begin{aligned} \int d^2\Omega Y_l^{m*}(\Omega) Y_{l'}^{m'}(\Omega) &\equiv \int_0^\pi d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_l^{m*}(\theta, \phi) Y_{l'}^{m'}(\theta, \phi) \\ &= \delta_{ll'} \delta_{mm'}. \end{aligned} \quad (124)$$

De lo anterior, sabemos ahora que la expresión para Φ será:

$$\Phi_{lm}(r, \Omega) = (A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}) Y_l^m(\Omega) \quad (125)$$

$$\Phi_{\text{int}}(r, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (A_{lm}r^l + B_{lm}r^{-(l+1)}) Y_l^m(\Omega) \quad (r \leq a)$$

y

$$\Phi_{\text{ext}}(r, \Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l (C_{lm}r^l + D_{lm}r^{-(l+1)}) Y_l^m(\Omega) \quad (r \geq a)$$

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l A_{lm} a^l Y_l^m(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l D_{lm} a^{-(l+1)} Y_l^m(\Omega) \quad (126)$$

Expandiendo la densidad superficial del cascarón delgado de la forma:

$$\sigma(\Omega) = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=-l}^l \sigma_{lm} Y_l^m(\Omega) \quad (127)$$

⁹⁵ George B Arfken y Hans J Weber: *Mathematical methods for physicists*. 1999.

Integrando a lo largo de todo Ω

$$\int d^2\Omega Y_{l'm'}^{m'*}(\Omega)\sigma(\Omega) = \sigma_{l'm'} \quad (128)$$

Aplicando el teorema de Gauss a una pequeña parte del cascarón delgado, tendremos:

$$\left(\frac{\partial\Phi_{\text{ext}}}{\partial r}\right)_{r=a} - \left(\frac{\partial\Phi_{\text{int}}}{\partial r}\right)_{r=a} = 4\pi G\sigma(\Omega) \quad (129)$$

$$-\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^l((l+1)D_{lm}a^{-(l+2)} + lA_{lm}a^{l-1})Y_l^m(\Omega) = 4\pi G\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=-l}^l\sigma_{lm}Y_l^m(\Omega) \quad (130)$$

A_{lm} y D_{lm} toman valores y se obtiene

$$\begin{aligned} \Phi_{\text{int}}(r, \Omega) &= -4\pi G a \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{r}{a}\right)^l \sum_{m=-l}^l \frac{\sigma_{lm}}{2l+1} Y_l^m(\Omega) \\ \Phi_{\text{ext}}(r, \Omega) &= -4\pi G a \sum_{l=0}^{\infty} \left(\frac{a}{r}\right)^{l+1} \sum_{m=-l}^l \frac{\sigma_{lm}}{2l+1} Y_l^m(\Omega). \end{aligned} \quad (131)$$

Adicionalmente, la variación de la densidad de masa superficial, estará dada de la forma:

$$\delta\sigma_{lm}(a) = \int_0^{\pi} d\theta \sin\theta \int_0^{2\pi} d\phi Y_l^{m*}(\Omega)\rho(a, \Omega)\delta a \equiv \rho_{lm}(a)\delta a. \quad (132)$$

Con lo que se obtendrá el campo generado por una distribución volumétrica arbitraria de masa, tanto en el exterior como en el interior estará dada por⁹⁶:

$$\begin{aligned} \Phi(r, \Omega) &= \sum_{a=0}^r \delta\Phi_{\text{ext}} + \sum_{a=r}^{\infty} \delta\Phi_{\text{int}} \\ &= -4\pi G \sum_{l,m} \frac{Y_l^m(\Omega)}{2l+1} \left(\frac{1}{r^{l+1}} \int_0^r da a^{l+2} \rho_{lm}(a) + r^l \int_r^{\infty} \frac{da}{a^{l-1}} \rho_{lm}(a) \right). \end{aligned} \quad (133)$$

⁹⁶ James Binney y Scott Tremaine: *Galactic dynamics*. Vol. 13. Princeton university press, 2011.

Debido a que la q -metric corresponde a una solución exterior, para la realización de este trabajo se tomó únicamente el primer término en (133).

Anexo B. La q -metric como solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío

Para demostrar que una métrica satisface las ecuaciones de Einstein en el vacío, es necesario determinar, a partir de esta, el tensor y el escalar de Ricci⁹⁷, respectivamente. Para dicho procedimiento se implementarán' las ecuaciones de estructura de Élie Cartan:

$$\begin{aligned} d\omega^j &= -\Gamma_i^j \wedge \omega^i, \\ \Omega_j^i &\equiv \frac{1}{2} R^i{}_{jkm} \omega^k \wedge \omega^m = d, \Gamma_j^i + \Gamma_k^i \wedge \Gamma_j^k, \end{aligned} \quad (134)$$

las cuales se encuentran escritas en el lenguaje de las formas diferenciales en el espacio cotangente de la 4-variedad de métrica $g_{\mu\nu}$, que para este caso en particular, será (4).

Para comenzar recordemos que en el capítulo 1, en coordenadas esféricas, la q -metric adopta la forma en (4); Sin embargo, para el desarrollo de este cálculo, se tomará bajo la siguiente notación:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = A^2 dt \otimes dt - B^2 [C^2 (dr \otimes dr D^2 + r^2 d\theta \otimes d\theta) + r^2 \text{sen}^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi], \quad (135)$$

donde

$$\begin{aligned} A^2 &\equiv A^2(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{1+q} \\ B^2 &\equiv B^2(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q} \\ C^2 &\equiv C^2(r, \theta) = \left(1 + \frac{m^2 \text{sen}^2 \theta}{r^2 - 2mr}\right)^{-q(2+q)} \\ D^2 &\equiv D^2(r) = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1}. \end{aligned} \quad (136)$$

⁹⁷ Por tensor de Ricci hacemos referencia a la primera contracción del tensor de Riemann, y al escalar, como su segunda contracción.

Adicionalmente, definiremos nuevas funciones en términos de las definidas previamente; con el fin de encontrar la cantidad asociada a cada tétrada, de la forma:

$$\begin{aligned} H^2(r, \theta) &\equiv H^2 = B^2 C^2 D^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-(q+1)} \left(1 + \frac{m^2 \operatorname{sen} \theta}{r^2 - 2mr}\right)^{-q(2+q)}, \\ F^2(r, \theta) &\equiv F^2 = B^2 C^2 = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-q} \left(1 + \frac{m^2 2 \operatorname{sen}^2 \theta}{r^2 - 2mr}\right)^{-q(2+q)}, \end{aligned} \quad (137)$$

Tal que la métrica nos quede:

$$g_{\mu\nu} dx^\mu \otimes dx^\nu = A^2 dt \otimes dt - H^2 dr \otimes dr - r^2 F^2 d\theta \otimes d\theta - B^2 r^2 \operatorname{sen}^2 \theta d\varphi \otimes d\varphi. \quad (138)$$

A partir de (138), vemos que las tétradas ortonormales serán:

$$\omega^0 = A dt; \omega^1 = H dr; \omega^2 = F r d\theta; \omega^3 = B r \operatorname{sen} \theta d\varphi. \quad (139)$$

Antes de poder calcular la primera ecuación de Cartan en (134), será necesario determinar las derivadas de (139) para cada 1-forma, como sigue:

$$d\omega^0 = d(Adt) = A_r dr \wedge dt = \boxed{\frac{A_r}{AH} \omega^1 \wedge \omega^0}; \quad (140)$$

$$d\omega^1 = d(Hdr) = H_r dr \wedge dr + H_\theta d\theta \wedge dr = \boxed{\frac{H_\theta}{r F H} \omega^2 \wedge \omega^1}; \quad (141)$$

$$\begin{aligned} d\omega^2 &= d(Frd\theta) = F_r r dr \wedge d\theta + F dr \wedge d\theta + F_\theta r d\theta \wedge d\theta \\ &= \boxed{\frac{(F_r r + F)}{HF r} \omega^1 \wedge \omega^2}; \end{aligned} \quad (142)$$

$$\begin{aligned} d\omega^3 &= d(Br \operatorname{sen} \theta d\varphi) = B_r r \operatorname{sen} \theta dr \wedge d\varphi + B \operatorname{sen} \theta dr \wedge d\varphi + B r \cos \theta d\theta \wedge d\varphi \\ &= \boxed{\frac{(B_r r + B)}{HB r} \omega^1 \wedge \omega^3 + \frac{\cot(\theta)}{F r} \omega^2 \wedge \omega^3}, \end{aligned} \quad (143)$$

siendo H_θ , A_r , F_r y B_r derivadas de las funciones H, A, F y B respecto a las coorde-

nadas θ y r , respectivamente.

Con ello, será posible escribir la primera ecuación de Cartan,

$$d\omega^j = -\Gamma_i^j \wedge \omega^i,$$

con lo que obtendremos:

$$d\omega^0 = -\Gamma^0_0 \wedge \omega^0 - \Gamma^0_1 \wedge \omega^1 - \Gamma^0_2 \wedge \omega^2 - \Gamma^0_3 \wedge \omega^3 = \boxed{\frac{Ar}{AH} \omega^1 \wedge \omega^2}; \quad (144)$$

$$d\omega^1 = -\Gamma^1_0 \wedge \omega^0 - \Gamma^1_1 \wedge \omega^1 - \Gamma^1_2 \wedge \omega^2 - \Gamma^1_3 \wedge \omega^3 = \boxed{-\frac{H\theta}{rFH} \omega^1 \wedge \omega^2}; \quad (145)$$

$$d\omega^2 = -\Gamma^2_0 \wedge \omega^0 - \Gamma^2_1 \wedge \omega^1 - \Gamma^2_2 \wedge \omega^2 - \Gamma^2_3 \wedge \omega^3 = \boxed{-\frac{F_r r + F}{HF r} \omega^2 \wedge \omega^1}; \quad (146)$$

$$\begin{aligned} d\omega^3 &= -\Gamma^3_0 \wedge \omega^0 - \Gamma^3_1 \wedge \omega^1 - \Gamma^3_2 \wedge \omega^2 - \Gamma^3_3 \wedge \omega^3 \\ &= \boxed{-\frac{(B_r r + B)}{H B r} \omega^3 \wedge \omega^1 - \frac{\cot(\theta)}{F r} \omega^3 \wedge \omega^2}. \end{aligned} \quad (147)$$

Estas expresiones nos permitirá determinar las 1-formas Γ^j_l diferentes de zero, las cuales son:

$$\begin{aligned} \Gamma^0_1 &= -\Gamma^1_0 = -\frac{A_r}{AH} \omega^2, \\ \Gamma^1_2 &= -\Gamma^2_1 = -\frac{H\theta}{rFH} \omega^1, \\ \Gamma^2_2 &= \frac{F_r r + F}{H r F} \omega^1, \\ \Gamma^3_1 &= -\Gamma^1_3 = -\frac{B r + B}{H B r} \omega^3, \\ \Gamma^3_2 &= -\Gamma^2_3 = -\frac{\cot(\theta)}{F r} \omega^3. \end{aligned} \quad (148)$$

Con el ánimo de determinar la segunda colección de ecuaciones de acuerdo con la segunda ecuación de Cartan, (134), será necesario hallar las derivadas de las

1-formas en (148). Estas corresponden a:

$$d\Gamma^0_1 = d\left(\frac{A_r}{AH}\omega^2\right) = -\frac{A_{rr}}{AH^2} + \frac{A_r}{H^2}\left(\frac{A'_r}{A^2}\right) + \frac{A_r}{A}\left(\frac{H'_r}{H^3}\right) + \frac{A_r}{AH}\left(\frac{F_r r + F}{HF r}\right)\omega^1 \wedge \omega^2, \quad (149)$$

$$d\Gamma^1_2 = d\left(\frac{-H_\theta}{rFH}\omega^1\right) = \left[\frac{H_{\theta\theta}}{(rF)^2 H} - \frac{H_\theta}{(rF)^2}\left(\frac{H'_\theta}{H^2}\right) - \frac{H_\theta}{r^2 HF}\left(\frac{F'_\theta}{F^2}\right) + \left(\frac{H_\theta}{rFH}\right)^2\right]\omega^1 \wedge \omega^2, \quad (150)$$

$$d\Gamma^2_2 = d\left(\frac{F_r r + F}{H r F}\omega^1\right) = \left[\frac{F_{r\theta}}{H r F^2} + \frac{F_\theta}{H(rF)^2} - \frac{(F_r r + F)}{(rF)^2 H^2} H'_\theta - \frac{(F_r r F)}{F^3 r^2 H} F'_\theta - \frac{(F_r r F) H_\theta}{(H r F)^2}\right]\omega^2 \wedge \omega^1, \quad (151)$$

$$d\Gamma^3_1 = d\left(-\frac{B_{rr} + B}{HB r}\omega^3\right) = -\left[\left(-\frac{B_{rr}}{B} + \frac{B'_r B_r}{B^2} + \frac{1}{r^2}\right)\frac{1}{H^2} + \frac{H'_r}{H^3}\left(\frac{B_r}{B} + \frac{1}{r}\right) + \left(\frac{B_{rr} + B}{HB r}\right)\right]\omega^3 \wedge \omega^1 + \left[\left(\frac{B_{rr} + B}{HB r^2}\right)\frac{\cot(\theta)}{F}\right]\omega^3 \wedge \omega^2, \quad (152)$$

$$d\Gamma^3_2 = d\left(-\frac{\cot(\theta)}{F r}\omega^3\right) = \left(\frac{\csc^2(\theta)}{(F)^2} + \frac{\cot(\theta)F'\theta}{F^3 r} + \frac{\cot(\theta)}{F r}\right)\omega^3 \wedge \omega^2 - \frac{\cot(\theta)}{HF r}\left(\frac{F'_r}{F} - \frac{B_r}{B}\right)\omega^1 \wedge \omega^3, \quad (153)$$

donde vale la pena mencionar nuevamente que los subíndices θ y r corresponden a las derivadas de las funciones con respecto a estas coordenadas. De otro lado, aquellas funciones que tengan el apóstrofe, como supraíndice, corresponden a las derivadas internas.

De lo anterior, podemos obtener las Ω^i_j a partir de la segunda ecuación de Cartan

en (134),

$$\Omega^i_j \equiv \frac{1}{2} R^i_{jkm} \omega^k \wedge \omega^m = d\Gamma^i_j + \Gamma^i_k \wedge \Gamma^k_j,$$

se escriben de la forma:

$$\Omega^0_1 = d\Gamma^0_1; \quad (154)$$

$$\Omega^0_2 = \Gamma^0_2 \wedge \Gamma^2_1; \quad (155)$$

$$\Omega^0_3 = \Gamma^0_1 \wedge \Gamma^1_3; \quad (156)$$

$$\Omega^1_2 = d\Gamma^1_2; \quad (157)$$

$$\Omega^1_3 = d\Gamma^1_3 + \Gamma^1_2 \wedge \Gamma^2_3; \quad (158)$$

$$\Omega^2_3 = d\Gamma^2_3 + \Gamma^2_1 \wedge \Gamma^1_3 + \Gamma^2_2 \wedge \Gamma^2_3; \quad (159)$$

$$\Omega^2_2 = d\Gamma^2_2. \quad (160)$$

Para las demás Ω^i_j , es posible demostrar que son nulas, debido a que no todas las 1-formas Γ son diferentes de cero. Ahora bien, en términos de las componentes del tensor de Riemman, y teniendo en cuenta la propiedad de antisimetría del producto (\wedge), quedará:

$$\Omega^0_1 = \frac{1}{2} R^0_{112} \omega^1 \wedge \omega^2;$$

$$\Omega^0_2 = \frac{1}{2} R^0_{221} \omega^2 \wedge \omega^1;$$

$$\Omega^0_3 = \frac{1}{2} R^0_{323} \omega^2 \wedge \omega^3;$$

$$\Omega^1_2 = \frac{1}{2} R^1_{212} \omega^1 \wedge \omega^2;$$

$$\Omega^2_2 = \frac{1}{2} R^2_{221} \omega^2 \wedge \omega^1;$$

$$\Omega^1_3 = \frac{1}{2} R^1_{331} \omega^3 \wedge \omega^1 + \frac{1}{2} R^1_{332} \omega^3 \wedge \omega^2;$$

$$\Omega^2_3 = \frac{1}{2} R^2_{313} \omega^1 \wedge \omega^3 + \frac{1}{2} R^2_{332} \omega^3 \wedge \omega^2.$$

En ese orden de ideas, podemos ahora tener las componentes del tensor de Riemann distintas de cero en términos de las componentes de la q -metric como:

$$R^0_{112} = -\frac{A_{rr}}{AH^2} + \frac{A_r}{H^2} \left(\frac{A'_r}{A^2} \right) + \frac{A_r}{A} \left(\frac{H'_r}{H^3} \right) + \frac{A_r}{AH} \left(\frac{F_r r + F}{HF r} \right),$$

$$R^0_{221} = \frac{A_r H_\theta}{AH^2 F r},$$

$$R^0_{323} = -\frac{A_r (B_r r + B)}{AH^2 B r},$$

$$R^1_{212} = \frac{H_{\theta\theta}}{(rF)^2 H} - \frac{H_\theta}{(rF)^2} \left(\frac{H'_\theta}{H^2} \right) - \frac{H_\theta}{r^2 H F} \left(1 + \frac{F'_\theta}{F^2} \right) + \left(\frac{H_\theta}{r F H} \right)^2,$$

$$R^1_{331} = \left(\frac{-B_{rr}}{B} + \frac{B'_r B_r}{B^2} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{1}{H^2} + \frac{H'_r}{H^3} \left(\frac{B_r}{B} + \frac{1}{r} \right) + \frac{B_r r + B}{H B r} + \frac{H_\theta \cot(\theta)}{(rF)^2 H},$$

$$R^1_{332} = \left(\frac{B_r r + B}{1 + B r^2} \right) \frac{\cot(\theta)}{F},$$

$$R^2_{313} = \frac{\cot(\theta)}{H F r^2} + \frac{\cot(\theta) F'_\theta}{H F^2 r} - \frac{\cot(\theta)}{F r^2} \left(\frac{B_r r + B}{H B} \right) + \frac{H_\theta}{(rH)^2 F} \left(\frac{B_r r + B}{B} \right),$$

$$+ \left(\frac{F_r r + F}{H (F r)^2} \right) \cot(\theta),$$

$$R^2_{332} = \frac{csc^2(\theta)}{(F r)^2} + \cot(\theta) F'_\theta + \frac{\cot(\theta)}{F r},$$

$$R^2_{221} = \frac{F_{r\theta}}{H r F^2} + \frac{F_\theta}{H (rF)^2} - \frac{F_r r + F}{(rF)^2 H} H'_\theta - \frac{(F_r r + F)}{F^3 r^2 H} F'_\theta - \frac{(F_r r F) H_\theta}{(H r F)^2}.$$

Estas expresiones nos conducen directamente a determinar las componentes correspondientes a las componentes del tensor de Ricci, mediante la contracción de índices de las componentes del tensor de Riemann; las cuales serán:

$$\begin{aligned}
 R^1_{212} &= \frac{H_{\theta\theta}}{(rF)^2H} - \frac{H_\theta}{(rF)^2} \left(\frac{H'_\theta}{H^2} \right) - \frac{H_\theta}{r^2HF} \left(1 + \frac{F'_\theta}{F^2} \right) + \left(\frac{H_\theta}{rFH} \right)^2, \\
 R^1_{331} &= -R^1_{313} = - \left(\frac{B'_r B_r}{B^2} - \frac{B_r r}{B} + \frac{1}{r^2} \right) \frac{1}{H^2} - \frac{H'_r}{H^3} \left(\frac{B_r}{B} + \frac{1}{r} \right) - \frac{(B_r r + B)}{HB r} - \frac{H_\theta \cot(\theta)}{(rF)^2 H}, \\
 R^2_{221} &= \frac{F_{r\theta}}{H r F^2} + \frac{F_\theta}{H (rF)^2} - \frac{F_r r + F}{(rF)^2 H} H'_\theta - \frac{(F_r r + F)}{F^3 r^2 H} F'_\theta - \frac{(F_r r F) H_\theta}{(H_r r F)^2}, \\
 R^2_{332} &= -R^2_{323} = - \frac{(\csc^2(\theta))}{(F)^2} - \cot(\theta) F' \theta - \frac{\cot(\theta)}{F r}.
 \end{aligned}$$

Mediante el uso del programa *Wolfram Mathematica*, realizamos la suma de las componentes R^1_{212} , R^1_{331} , R^2_{221} y R^2_{332} , obtuvimos $R_{jm} = 0$, el cual corresponde al resultado esperado para aquellas soluciones que satisfacen las ecuaciones de Einstein en el vacío.