SERIES DE FOURIER Y POLÍGONOS

Realizado por:
Luis Roberto Gueto Tettay

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Bucaramanga
2004

SERIES DE FOURIER Y POLÍGONOS

Realizado por:
Luis Roberto Gueto Tettay

Monografía presentado como requisito para
optar al título de LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Director
Edilberto J. Reyes G.

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas

Bucaramanga
2004

Dedicatoria

A las personas a las que dia a dia me dan su amor, su confianza, su respeto y sus ganas de seguir luchando pase lo que pase, esas personas por las que hoy soy un profesional : **Mi Mamá, Mi Papá, Nelly, Carlos, Cesar, Pilo, Simer, Muriel** y **mi Mamá Enilda**. Gracias por su sincero apoyo, amor y comprensión.

Agradecimientos

Mi más sinceros agradecimientos:

- A mis padres **CASTA y LUCHO** por todo el apoyo y buen ejemplo que me han dado hasta hoy.
- A mi hermana **NELLY** por ser la referencia profesional a seguir y por su gran colaboración economica.
- A mis hermanos **CARLOS, CESAR Y PILO** por ser parte de mi vida brindarme ese afecto de familia.
- Al profesor **EDILBERTO REYES** por su total y sincera colaboración.
- A **YENNY, HERMAN, SERGIO y ANDERSON** por estar conmigo en los momentos alegres y tristes, por toda su sinceridad conmigo.
- A la familia **BUENO GUERRERO** por ser mi hogar en esta ciudad.
- Al orgullo deportivo de la universidad, el **CLUB DE SOFTBALL UNIVERSITARIOS UIS** y todos sus integrantes por contar conmigo y por ser grandes amigos.
- A los profesores **ROSALBA, ISAACS, SONIA, GERMAN, MAYORGA E ILIA** por brindarme los conocimientos necesarios para alcanzar este gran logro.
- A **GUIDO POLO**, su esposa y sus hijos por apoyarme en el momento más adecuado.
- A todas aquellas personas que de una u otra me apoyarón y estuvierón conmigo a lo largo de mi primera carrera profesional.

TITULO: SERIES DE FOURIER COMPLEJAS Y POLÍGONOS*

AUTOR: LUIS ROBERTO GUETO TETTAY**

PALABRAS CLAVES:

Sistemas completos

Series de Fourier

Series de Fourier complejas

Polígonos

DESCRIPCIÓN La teoría de las series de Fourier nos permite expresar cualquier función continua como una combinación lineal de senos y cosenos. Estas combinaciones se conocen con el nombre de *series de Fourier*, y se han convertido en una parte importante de la física y algunas ingenierias por su gran aporte al estudio de ciertos fenómenos periódicos tales como movimientos ondulatorios, vibraciones, rotaciones, etc.

Todos estos estudios nos lleva a pensar en problemas totalmente matemáticos, algunos de ellos son: porqué cualquier función continua puede expresarse por medio de una serie de senos y cosenos?, converge la serie?, y si converge su suma vale la función ?. Estas y muchas más preguntas son resueltas por medio de la teoría de las series de Fourier, y es un hecho que gran parte del desarrollo del análisis matemático de nuestra época se basa en la busqueda de respuestas a tales problemas.

La serie de Fourier definida en la sección (2.2) puede expresarse de una manera más compacta y en forma compleja y recibe el nombre de *series de Fourier complejas*, el objetivo principal de esta monografía es mostrar una aplicación a la geometría de la serie mencionada anteriormente.

Este trabajo se desarrollo así: En el primer capítulo se mencionó lo relacionado con los espacios euclídeos, introduciendo en él los sistemas completos y cerrados. En el segundo capítulo, damos a construcción, definiciones y propiedades de las series de Fourier, mostrando la convergencia y la derivación de éstas series. En el tercer capítulo vemos como podemos transformar las series de Fourier a la forma compleja y mostramos finalmente la aplicación de éstas series, creando por medio de éstas polígonos regulares estrellados.

---

* Monografía ** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS. Director Edilberto José Reyes G.

TITLE: COMPLEX FOURIER SERIES AND POLYGONS*

AUTHOR:LUIS ROBERTO GUETO TETTAY **

KEY WORDS:

Fourier series

Complex Fourier series

Polygons

DESCRIPTION The theory of Fourier series of allows us to express any continuous function as a lineal combination of sines and cosines. These combinations are known with the name of *Fourier series*, and they have become an important part of the Physics and some Engineering, for their great contribution to the study of certain periodic phenomena, such as wave movements, vibrations, rotations, etc.

Do all these studies take us to think of completely mathematical problems, are some of them are: why any continuous function can be expressed by means of a series of sines and cosines? Does the series converge? And if it converges, is their sum worth the function? These and many more questions are resolved by means of the theory of Fourier series, and it is a fact that great part of the development of the mathematical analysis of our time is based on the search of answers to such problems.

The series of Fourier defined in the section 2.2 can be expressed in a more compact way and in complex form that it receives the name of complex Fourier series; the main objective of this Monograph is to show an application to the Geometry of the series mentioned previously.

This work was developed this way: In the first chapter it was mentioned the related with the spaces Euclidean, introducing in him the complete and closed systems. In the second chapter, we give to know the construction, definitions and properties of the Fourier series , also showing the convergence and the derivation of these series. In the third chapter, we see like we can transform the Fourier series to the complex form and finally, we show the application of these series; creating by means these, starry regular polygons.

---

* Monograph ** FACULTY OF SCIENCES, LICENTIATE IN MATHEMATICS. Director Edilberto José Reyes G.

Índice general

Introducción **1**

1. ESPACIOS EUCLÍDEOS **2**

1.1. Definición y ejemplos 2

1.2. Existencia de bases ortogonales 5

1.3. Sistemas ortogonales cerrados 6

1.4. Espacios euclideos completos 11

1.4.1. Caracterización de los sitemas completos 12

1.5. Espacios euclideos complejos 14

2. SERIES DE FOURIER **16**

2.1. Definición y propiedades del espacio L_2 16

2.2. Sistema trigonométrico. Serie trigonométrica de Fourier 18

2.3. Distancia y coeficientes de Fourier 23

2.4. Extensión de funciones a $[-l, l]$ y $[0, l]$ 28

2.5. Serie de Fourier de senos 30

2.6. Serie de Fourier de cosenos 33

2.7. Convergencia de los coeficientes y series de Fourier 35

2.7.1. Teorema de Fourier 37

2.8. Derivación de las series de Fourier 40

3. SERIE DE FOURIER COMPLEJA Y POLÍGONOS 42

3.1. Serie de Fourier compleja 42

3.2. Algunos resultados sobre serie de Fourier compleja 45

3.3. Serie de Fourier de los polígonos regulares de n-lados 51

3.4. Ejemplos 55

Bibliografia 59

Índice de figuras

3.1. $|senx|$ 46
3.2. función linealmente afín 47
3.3. Triángulo isósceles. 54
3.4. Estrella de doble punto. 56
3.5. Polígono estrellado de 10 puntas 57
3.6. Polígono estrellado de 8 puntas 58

Introducción

En 1807 el matemático francés Joseph Fourier afirmó que cualquier función continua podía expresarse como una combinación lineal de senos y cosenos; esto es posible gracias a que el sistema $\{\cos nx, \sin nx\}$ es un sistema ortogonal completo; estas combinaciones se conocen hoy en día como *series trigonométricas de Fourier*, y son de la forma

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

Toda la teoría de las series trigonométricas fue elaborada por Fourier, pero fue Euler quien dio las fórmulas para los coeficientes a_0, a_n y b_n.

Por medio de algunas sustituciones esta serie puede expresarse de una manera más compacta y en forma compleja, así,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(f\right) e^{inx},$$

denominada *serie de Fourier compleja*. A través de estas series se pueden construir unos polígonos especiales llamados polígonos estrellados, los cuales, además de ser regulares, tienen forma de estrella.

Capítulo 1

ESPACIOS EUCLÍDEOS

1.1. Definición y ejemplos

Definición 1.1. *Un conjunto no-vacío L de elementos $x, y, z, \ldots$ se llama espacio lineal, cuando satisface las siguientes condiciones:*

- *Para cada par de elementos $x, y \in L$ está definido un tercer elemento $z \in L$, denotado por $x + y$, tal que*
  1. $x + y = y + x$,
  2. $x + (y + z) = (x + y) + z$,
  3. *en L existe un elemento 0 tal que $x + 0 = x$, para todo $x \in L$,*
  4. *para todo $x \in L$ existe un elemento $-x$ tal que $-x + x = 0$.*
- *Para cualquier número α y cualquier elemento $x \in L$, está definido el elemento $\alpha x \in L$ de manera que*
  1. $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$,
  2. $1.x = x$.
- *Las operaciones de suma y multiplicación están relacionadas por medio de las leyes distributivas*
  1. $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

2. $\alpha(x+y) = \alpha x + \alpha y$.

Ejemplo 1.1. *El conjunto de todos los sistemas posibles de n números (reales o complejos) $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, en el que la adición y la multiplicación por un real λ se definen mediante las fórmulas*

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n),$$

$$\lambda(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n)$$

es un espacio lineal.

Definición 1.2. *La función real $\langle x, y\rangle$ definida para cada par de elementos $x, y \in L$, donde L es un espacio lineal real, se llama producto interno si se verifican las siguientes condiciones:*

1. $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$;
2. $\langle x, y + y^{\circ}\rangle = \langle x, y\rangle + \langle x, y^{\circ}\rangle$;
3. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$;
4. $\langle x, x\rangle \geq 0$ *y* $\langle x, x\rangle = 0$ *entonces* $x = 0$.

Algunos ejemplos clásicos de producto interno son:

Ejemplo 1.2. *En $\mathbb{R}^n$ definimos $\langle x, y\rangle = x * y$, donde $x, y \in \mathbb{R}^n$ con las operaciones de suma y multiplicacion habitual en $\mathbb{R}^n$ forman un producto interno.*

Ejemplo 1.3. *Supóngase que $a < b$ y sea $C^2[a, b]$ el espacio de funciones continuas sobre $[a, b]$, y definamos $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx$, donde $f, g \in C^2[a, b]$. Este es un producto interno en ese espacio. Veamos que cumple con las condiciones enumeradas anteriormente*

1. $\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)dx = \int_a^b g(x)f(x)dx = \langle g, f\rangle$.
2. $\langle f, g_1 + g_2\rangle = \int_a^b f(x)[g_1(x) + g_2(x)]dx$
   $= \int_a^b f(x)g_1(x)dx + \int_a^b f(x)g_2(x)dx$
   $= \langle f, g_1\rangle + \langle f, g_2\rangle$.

3. $\langle \lambda f, g\rangle = \int_a^b [\lambda f(x)]g(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)g(x)dx = \lambda\langle f, g\rangle$.

4. $\langle f, f\rangle \geq 0$ *y* $\langle f, f\rangle = 0$, *entonces* $\int_a^b f^2(x)dx \geq 0$ *y* $\int_a^b f^2(x)dx = 0$, *ya que* $a < b$ *se tiene que* $f^2(x) = 0$ *y por lo tanto* $f(x) = 0$.

Definición 1.3. *Un espacio lineal real L con un producto interno definido en él, se denomina espacio euclídeo real.*

Definición 1.4. *Un sistema $\{x_\alpha\}$ de vectores del espacio euclídeo L, diferentes de cero:*

1. *Se llama ortogonal si y solo si $\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = 0$ para $\alpha \neq \beta$.*

2. *La norma de x_α, denotada por $\|x_\alpha\|$, está definida por $\|x_\alpha\| = \sqrt{\langle x_\alpha, x_\alpha\rangle}$.*

3. *El sistema $\{x_\alpha\}$ es ortonormal si y solo si $\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = 0$ para $\alpha \neq \beta$ y $\langle x_\alpha, x_\beta\rangle = 1$ para $\alpha = \beta$.*

Se ve, que si $\{x_\alpha\}$ es un sistema ortogonal, podemos transformarlo en un sistema ortonormal dividiéndolo por su norma, esto es $\left\{\frac{x_\alpha}{\|x_\alpha\|}\right\}$.

Proposición 1.1. *Sea $\{x_\alpha\}$ un sistema de vectores de L; si los vectores x_α forman un sistema ortogonal, entonces son linealmente independientes.*

Demostración. Sea $a_1x_{\alpha_1} + a_2x_{\alpha_2} + \cdots + a_nx_{\alpha_n} = 0$ y veamos que $a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 0$.
Por hipótesis, $\{x_\alpha\}$ es un sistema ortogonal; entonces $\langle x_{\alpha_i}, a_1x_{\alpha_1} + a_2x_{\alpha_2} + \cdots + a_nx_{\alpha_n}\rangle = 0$, para $i = 1, 2, \ldots, n$; por las condiciones 2. y 3. del producto interno, tenemos que
$\langle x_{\alpha_i}, a_1x_{\alpha_1} + a_2x_{\alpha_2} + \cdots + a_nx_{\alpha_n}\rangle = \langle x_{\alpha_i}, a_1x_{\alpha_1}\rangle + \langle x_{\alpha_i}, a_2x_{\alpha_2}\rangle + \cdots + \langle x_{\alpha_i}, a_nx_{\alpha_n}\rangle$
$= a_1\langle x_{\alpha_i}, x_{\alpha_1}\rangle + a_2\langle x_{\alpha_i}, x_{\alpha_2}\rangle + \cdots + a_n\langle x_{\alpha_i}, x_{\alpha_n}\rangle = 0$,
por lo tanto $\langle x_{\alpha_i}, a_1x_{\alpha_1} + a_2x_{\alpha_2} + \cdots + a_nx_{\alpha_n}\rangle = a_i\langle x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}\rangle = 0$,
ya que $\langle x_{\alpha_i}, x_{\alpha_i}\rangle \neq 0$, se tiene que $a_i = 0$ para $i = 1, 2, \ldots, n$, así, $\{x_\alpha\}$ es un conjunto linealmente independiente.■

Definición 1.5. *Se dice que un sistema ortogonal $\{x_\alpha\}$ en L es completo si y solo el menor subespacio cerrado que lo contiene es todo L. Además, si $\{x_\alpha\}$ es completo, entonces se llama base ortogonal; y si la norma de cada x_α es 1, la llamaremos base ortonormal.*

Ahora daremos algunas bases ortogonales de los ejemplos (1.2) y (1.3). Para el ejemplo (1.2) una de sus bases ortogonales entre tantas, es la que viene dada por los vectores

$$\begin{aligned} e_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0)\,, \\ e_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0)\,, \\ &\vdots \\ e_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1)\,. \end{aligned}$$

En el ejemplo (1.3), la más importante para nuestro trabajo es la base ortogonal dada por el sistema trigonométrico

$$\left\{ \frac{1}{2}, \cos n\frac{2\pi t}{b-a}, \sin n\frac{2\pi t}{b-a} \right\}.$$

1.2. Existencia de bases ortogonales

Presentaremos un teorema general, llamado proceso de ortogonalización, que permite mostrar la existencia de una base ortogonal en un espacio euclídeo de n dimensiones; se enuncia de la siguiente manera.

Teorema 1.1. *Sea*

$$f_1, f_2, \ldots, f_n \tag{1.1}$$

un sistema linealmente independiente de elementos de un espacio euclideo L. Existe en L un sistema de elementos

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n \tag{1.2}$$

que satisface las siguientes condiciones:

1. *El sistema (1.2) es ortogonal y normal.*
2. *Todo elemento φ_n es una combinación lineal de los elementos $f_1, f_2, \ldots, f_n$*

$$\varphi_n = a_{n1}f_1 + a_{n2}f_2 + \ldots + a_{nn}f_n \quad \textit{con} \quad a_{nn} \neq 0.$$

3. *Todo elemento f_n se representa en la forma*

$$f_n = b_{n1}\varphi_1 + b_{n2}\varphi_2 + \ldots + b_{nn}\varphi_n, \quad \textit{donde } b_{nn} \neq 0.$$

Todo elemento del sistema (1.2) queda determinado por las condiciones 1., 2. y 3. unívocamente, salvo un factor ± 1.

El paso del sistema (1.1) al (1.2) que satisface las condiciones enunciadas se llama proceso de ortogonalización.

1.3. Sistemas ortogonales cerrados

Anteriormente se encontró una base ortonormal $e_1, e_2, \ldots, e_n$ del espacio euclídeo $\mathbb{R}^n$, de n dimensiones. Con esta base todo vector $x \in \mathbb{R}^n$ puede representarse como

$$x = \sum_{k=1}^{n} c_k e_k, \tag{1.3}$$

donde

$$c_k = \langle x, e_k \rangle.$$

El desarrollo de (1.3) puede generalizarse al caso de un espacio euclídeo de dimensión infinita de la siguiente forma. Sea

$$\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$$

un sistema ortonormal del sistema euclídeo L, y sea $f \in L$; a cada f le asignaremos la sucesión

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle \quad \text{para} \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

que llamaremos coeficientes de fourier del elemento f según el sistema $\{\varphi_k\}$, y

$$\sum_k c_k \varphi_k,$$

la llamaremos serie de fourier del elemento f según el sistema ortogonal $\{\varphi_n\}$.

Proposición 1.2. *Si* $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ *es ortonormal, los coeficientes* α_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, *de manera que la distancia entre* f *y la suma*

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

sea minimal, coinciden con los coeficientes de fourier c_k, *esto es,* $\alpha_k = c_k$.

Demostración. Calculemos la distancia entre f y S_n.

$$\begin{aligned}\|f - S_n\|^2 &= \langle f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \rangle \\ &= \langle f, f \rangle - 2\langle f \ \ , \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \rangle + \langle \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \ , \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k \rangle\end{aligned}$$

por las propiedades del producto interno, y además, como $c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$ y $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ es ortonormal, se sigue que

$$\begin{aligned}\|f - S_n\|^2 &= \|f\|^2 - 2\sum \alpha_k \langle f, \varphi_k \rangle + \sum \alpha_k^2 \langle \varphi_k, \varphi_j \rangle \\ &= \|f\|^2 - 2\sum \alpha_k c_k + \sum \alpha_k^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} c_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} \alpha_k c_k + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k^2 \\ &= \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 + \sum_{k=1}^{n} (c_k - \alpha_k)^2 .\end{aligned}$$

Puesto que $\|f - S_n\|^2$ es minimal, este término alcanza su mínimo cuando $\sum_{k=1}^{n} (c_k - \alpha_k)^2 = 0$; por lo tanto, $c_k = \alpha_k$.■

Para el caso en que $c_k = \alpha_k$, se tiene que

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2; \tag{1.4}$$

puesto que $\|f - S_n\|^2$ siempre es mayor o igual a cero, se obtiene que

$$\|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \geq 0,$$

y por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 \leq \|f\|^2 .$$

En esta expresión la parte de la derecha no depende de n; por lo tanto, si tomamos el límite cuando $n \to \infty$, se tiene que

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 \leq \|f\|^2 .$$

Esta desigualdad recibe el nombre de *desigualdad de Bessel*. Escribamos ahora una definición que será útil para el desarrollo de este tema.

Definición 1.6. *El sistema ortonormal $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ se llama cerrado cuando para cualquier $f \in L$ se cumple la igualdad*

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 ,$$

llamada igualdad de Parseval.

Observemos que en la definicion anterior cada coeficiente de Fourier viene dado por

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle.$$

De esta definición, se desprende una proposición muy importante que enunciaremos a continuación.

Proposición 1.3. *El sistema ortonormal $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ se llama cerrado si, y solo si, para todo $f \in L$ las sumas parciales de la serie de fourier $\sum\limits_n c_n \varphi_n$ convergen a f.*

Demostración. Por hipótesis el sistema ortonormal $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ es cerrado; entonces para cualquier $f \in L$ se cumple que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \|f\|^2 ;$$

así, por (1.4), se obtiene que

$$lim_{n\to\infty} \left\| f - \sum_n c_n \varphi_n \right\|^2 = 0,$$

por lo que $\sum\limits_n c_n \varphi_n$ converge a f. Recíprocamente, sean $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ un sistema ortonormal y $f \in R$. Como $\sum\limits_n c_n \varphi_n$ converge a f, entonces

$$\sum_n c_n \varphi_n - f \to 0;$$

como

$$\left\| f - \sum_n c_n \varphi_n \right\|^2 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2,$$

se concluye que

$$0 = \|f\|^2 - \sum_{k=1}^{n} c_k^2,$$

por lo tanto

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \|f\|^2 ;$$

si a esta última expresión le tomamos el límite cuando $n \to \infty$, resulta que

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \|f\|^2 ,$$

es decir el sistema ortonormal $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ es cerrado.

Definición 1.7. *El sistema $\{\varphi_n\}$ es completo en L si y solo si todo elemento $f \in L$ se puede aproximar mediante combinaciones lineales*

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

de los elementos del sistema $\{\varphi_n\}$.

Teorema 1.2. *En un espacio euclídeo L todo sistema ortonormal es cerrado si y solo si es completo.*

Demostración. Sea el sistema $\{\varphi_n\}$ cerrado; entonces, para todo $f \in L$ se tiene que $\sum\limits_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$ convergen a f, esto es, que las combinaciones lineales de los elementos del sistema $\{\varphi_n\}$ son siempre densas en L, es decir, el sistema $\{\varphi_n\}$ es completo. Recíprocamente, sea el sistema $\{\varphi_n\}$ completo; entonces todo elemento $f \in L$ se puede aproximar mediante combinaciones lineales

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k$$

de los elementos del sistema $\{\varphi_n\}$; la suma parcial

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k$$

de la serie de fourier de f, da una buena aproximación; por consiguiente, la serie

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \to f \qquad \text{cuando } n \to \infty;$$

por lo tanto $\sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \|f\|^2$, de donde concluimos que $\{\varphi_n\}$ es cerrado.

En los conceptos de coeficientes de fourier, series de fourier, etcétera, enunciados anteriormente se suponía que los sistemas utilizados eran ortonormales; estos conceptos se pueden extender a cualquier sistema ortogonal arbitrario. Sea $\{\varphi_n\}$ un sistema ortogonal. En la seccion 1,1 afirmamos que a partir de este sistema podemos construir un sistema ortonormal compuesto por $\psi_n = \frac{\varphi_n}{\|\varphi_n\|}$; entonces para todo $f \in L$ se tiene que

$$c_n = \langle f, \psi_n \rangle = \frac{1}{\|\varphi_n\|} \langle f, \varphi_n \rangle,$$

y

$$\sum_n c_n \psi_n = \sum_n \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} \varphi_n = \sum_n a_n \varphi_n,$$

donde

$$a_n = \frac{c_n}{\|\varphi_n\|} = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2}. \tag{1.5}$$

Los coeficientes a_n definidos por (1.5) se llaman coeficientes de Fourier del elemento f según el sistema ortogonal (no-normal) $\{\psi_n\}$. De la desigualdad de Bessel podemos decir que

$$\sum_n c_n^2 = \sum_n a_n^2 \|\varphi_n\|^2 \leq \|f\|^2,$$

en donde

$$\sum_n a_n^2 \|\varphi_n\|^2 \leq \|f\|^2$$

representa la desigualdad de Bessel para cualquier sistema ortogonal.

1.4. Espacios euclideos completos

En esta sección vamos a suponer que los espacios euclídeos son completos, es decir, toda sucesión de Cauchy converge en él. En un espacio completo, para que los números $c_1, c_2, \ldots, c_n$ de la desigualdad de Bessel, representen los coeficientes de Fourier es suficiente que la serie $\sum_n c_n^2$ converja; anteriormente se demostró la necesidad de esta afirmación.

Teorema 1.3. *Sea $\{\varphi_n\}$ un sistema ortonormal cualesquiera en un espacio euclídeo completo L, y sean los números*

$$c_1, c_2, \ldots, c_n$$

tales que la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

converge. Entonces existe un elemento $f \in L$ tal que

$$c_k = \langle f, \varphi_k \rangle$$

y

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \langle f, f \rangle = \|f\|^2 .$$

Demostración. Sea

$$f_n = \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k;$$

entonces

$$\|f_{n+p} - f_n\|^2 = \|c_{n+1}\varphi_{n+1} + \ldots + c_{n+p}\varphi_{n+p}\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \varphi_k \right\|^2$$

$$= \langle \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \varphi_k, \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k \varphi_k \rangle = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2 \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle = \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k^2.$$

Como $\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$ converge y L es completo, se tiene que la sucesión $\{f_n\}$ converge a un elemento $f \in L$; además,

$$\langle f, \varphi_i \rangle = \langle f_n, \varphi_i \rangle + \langle f - f_n, \varphi_i \rangle,$$

y sabemos que

$$|\langle f - f_n, \varphi_i \rangle| \leq \|f - f_n\| \, \|\varphi_i\| \, ;$$

como $\{f_n\}$ converge a f, se tiene que

$$\|f - f_n\|^2 \to 0 \ \text{ cuando } n \to \infty,$$

y como

$$\langle f_n, \varphi_i \rangle = c_i, \qquad \text{para } n \geq i,$$

se concluye que

$$(f, \varphi_i) = c_i.$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\langle f - f_n, f - f_n \rangle &= \langle f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k, f - \sum_{k=1}^{n} c_k \varphi_k \rangle \\
&= \langle f, f \rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \langle \varphi_k, \varphi_k \rangle \\
&= \langle f, f \rangle - \sum_{k=1}^{n} c_k^2 \to 0 \text{ cuando } n \to \infty.
\end{aligned}$$

Es decir,

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 = \langle f, f \rangle = \|f\|^2 \, .$$

1.4.1. Caracterización de los sitemas completos

Teorema 1.4. *Para que un sistema ortogonal $\{\varphi_n\}$ de un espacio euclídeo sea completo es necesario y suficiente que en L no exista ningún elemento diferente de cero que sea ortogonal a todos los elementos del sistema $\{\varphi_n\}$.*

Demostración. NECESIDAD. Sea $\{\varphi_n\}$ un sistema completo, por tanto cerrado. Si existe f ortogonal a todos los elementos del sistema $\{\varphi_n\}$, entonces todos sus coeficientes de Fourier son cero, y de la identidad de Parseval tenemos que

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 = \langle f, f \rangle = 0,$$

es decir, $f = 0$.

SUFICIENCIA. Supongamos que $\{\varphi_n\}$ no es completo, y veamos que existe un elemento diferente de cero que es ortogonal a todos los elementos del sistema $\{\varphi_n\}$. Puesto que $\{\varphi_n\}$ no es completo, entonces no es cerrado, por lo que existe en L un elemento $g \neq 0$ tal que

$$\sum_{k=1}^{n} c_k^2 < \langle g, g \rangle,$$

donde

$$c_k = \langle g, \varphi_k \rangle,$$

es decir, la serie

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k^2$$

converge, y por el teorema anterior existe $f \in L$ tal que

$$\langle f, \varphi_k \rangle = c_k \quad \text{y} \quad \langle f, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2.$$

El elemento $f - g$ es ortogonal a todos los φ_i. Se deduce que

$$\langle f, f \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} c_k^2 < \langle g, g \rangle,$$

así que $f - g \neq 0$.

1.5. Espacios euclideos complejos

Al igual que en el espacio euclídeo real, se puede introducir el espacio euclídeo complejo, es decir, un espacio lineal complejo con un producto interno. Pero en este espacio hay que hacer modificaciones de los axiomas que definen el producto interno del espacio real.

Definición 1.8. *El producto interno de un espacio complejo es una función $\langle x, y\rangle$ numérica de valores complejos de dos vectores que verifiquen las siguientes condiciones:*

1. $\langle x, y\rangle = \overline{\langle y, x\rangle}$.
2. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$.
3. $\langle x + z, y\rangle = \langle x, y\rangle + \langle z, y\rangle$.
4. $\langle x, x\rangle \geq 0$ *y* $\langle x, x\rangle > 0$ *cuando* $x \neq 0$.

De 1. y 2. obtenemos que $\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle$. En efecto,

$$\langle x, \lambda y\rangle = \overline{\langle \lambda y, x\rangle} = \overline{\lambda}\overline{\langle y, x\rangle} = \overline{\lambda}\langle x, y\rangle.$$

Como también tenemos que

$$\langle x, z + y\rangle = \overline{\langle z + y, x\rangle} = \overline{\langle z, x\rangle} + \overline{\langle y, x\rangle} = \langle x, z\rangle + \langle x, y\rangle.$$

Ejemplo 1.4. *El espacio $\mathbb{C}^n$ de n dimensiones, con $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ dos vectores de $\mathbb{C}^n$, y definiendo el producto interno de la siguiente manera:*

$$\langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{n} x_k \overline{y_k},$$

forma un espacio euclídeo complejo de dimensión finita.

Un ejemplo de espacio euclídeo de dimensión infinita es el siguiente:

Ejemplo 1.5. *El espacio $C^2\,[a, b]$ de funciones de valores complejos contínuas sobre el segmento $[a, b]$ con el producto interno definido así:*

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx,$$

es un espacio euclídeo complejo de dimensión infinita.

Al igual que en el caso real, si $\{\varphi_n\}$ es un sistema ortogonal de un espacio euclideo complejo L y f es un elemento de L, entonces

$$a_n = \frac{\langle f, \varphi_n\rangle}{\|\varphi_n\|^2},$$

y

$$\sum_n a_n\varphi_n$$

representan los coeficientes de Fourier y la serie de Fourier respectivamente.

Capítulo 2

SERIES DE FOURIER

2.1. Definición y propiedades del espacio L_2

En este capítulo, muchas de las funciones que utilizaremos son funciones continuas que pertenecen al espacio L_2; por lo tanto, daremos lo necesario del espacio L_2 para desarrollar este capítulo, teniendo en cuenta que no se utilizará para nada teoría de la medida.

Definición 2.1. *Una función f se llama de cuadrado integrable en X, cuando la integral*

$$\int_X f^2(x)\,dx$$

existe, es decir, es finita.

El conjunto de todas las funciones de cuadrado integrable en X se denota por $L_2(X)$. Algunas de sus propiedades principales son:

1. El producto de dos funciones de cuadrado integrable es de cuadrado integrable.

   Demostración. Si f y g pertenecen a $L_2(X)$ entonces de la desigualdad

$$|f(x)\,g(x)| \leq \frac{1}{2}\left[f^2(x) + g^2(x)\right]$$

se obtiene que

$$\int |f(x)\, g(x)|\, dx \leq \frac{1}{2} \int \left[f^2(x) + g^2(x)\right] dx,$$

y como $f, g \in L_2(X)$, se cumple que

$$\int f^2(x)\, dx, \qquad \text{y,} \qquad \int g^2(x)\, dx$$

son finitas; así pues,

$$\int |f(x)\, g(x)|\, dx \in L_2(X).$$

Corolario 2.1. *Toda función de cuadrado integrable es integrable.*

2. La suma de dos funciones de L_2 es tambien L_2.

   Demostración. Sean $f, g \in L_2(X)$; si

   $$[f(x) + g(x)]^2 \leq f^2(x) + 2\,|f(x)\, g(x)| + g^2(x),$$

   entonces por la propiedad (1), y en vista que $f, g \in L_2(X)$, se sigue que

   $$\int [f(x) + g(x)]^2\, dx$$

   existe.

3. Si $f \in L_2(X)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha f \in L_2(X)$.

   Demostración. Si $f \in L_2(X)$ entonces

   $$\int (\alpha f(x))^2\, dx = \alpha^2 \int f^2(x)\, dx < \infty.$$

De la propiedades 2. y 3. se deduce que las combinaciones lineales de funciones de L_2 pertenecen a L_2. El producto interno en L_2, se da por medio de la fórmula

$$\langle f, g \rangle = \int f(x)\, g(x)\, dx.$$

Como vimos en el capítulo 1, este producto interno cumple con las propiedades mencionadas en la definición (1.1), por lo tanto el espacio L_2 es un espacio euclídeo y su norma esta dada por

$$\|f\|^2 = \int f^2(x)\,dx.$$

2.2. Sistema trigonométrico. Serie trigonométrica de Fourier

En el capítulo anterior vimos que podemos obtener sistemas completos ortogonales de funciones aplicando el proceso de ortogonalizacion descrito en la sección (1.2) a cualquier sistema completo. Si tomamos el sistema ortogonal completo $\{\varphi_n\}$ en L_2, y si $f \in L_2$, entonces

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n,$$

es decir, f es la suma de fourier de la función f con respecto al sistema ortogonal $\{\varphi_n\}$; además, los coeficientes de fourier c_n vienen dados por

$$c_n = \frac{\langle f, \varphi_n \rangle}{\|\varphi_n\|^2},$$

donde

$$\langle f, \varphi_n \rangle = \int f(x)\varphi_n(x)dx$$

y

$$\|\varphi_n\|^2 = \int \varphi_n^2(x)dx;$$

por lo tanto,

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int f(x)\varphi_n(x)dx.$$

Sea el espacio $L_2(0, 2\pi)$ de funciones de cuadrado integrable en el intervalo $[0, 2\pi]$. En L_2 las funciones

$$\{\cos nx, \sin nx\}\; n = 0, 1, 2, \ldots$$

forman un sistema ortogonal completo llamado sistema trigonométrico. La ortogonalidad del sistema se comprueba de la siguiente manera: para $n \neq m$ se tiene que

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \left(\cos \frac{n+m}{2}x + \cos \frac{n-m}{2}x\right) dx \\ &= \left(\frac{\sin(n+m)x}{n+m} + \frac{\sin(n-m)x}{n-m}\right)\Bigg]_0^{2\pi} \\ &= 0.\end{aligned}$$

De la misma forma,

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx dx &= \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} (\cos(n-m)x - \cos(n+m)x)\, dx \\ &= \frac{1}{2}\left(\frac{\sin(n-m)x}{n-m} - \frac{\sin(n+m)x}{n+m}\right)\Bigg]_0^{2\pi} \\ &= 0.\end{aligned}$$

Daremos ahora unas definiciones que son fundamentales para mostrar la completez del sistema trigonométrico.

Definición 2.2. *Sea $\{\varphi_n\}$ un sistema ortogonal en $[0, 2\pi]$. Decimos que la función f es ortogonal al sistema $\{\varphi_n\}$ si y solo si*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\varphi_n(x)dx = 0, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{2.1}$$

Si X es un conjunto tal que la unica función $f \in X$ que cumple(2.1) es la función $f = 0$, entonces se dice que $\{\varphi_n\}$ es completo.

Definición 2.3. *Sea X conjunto,$X \neq \emptyset$, diremos que el sistema $\{\varphi_n\}$ es completo en X si y solo si la única función que pertenece a X ortogonal a todas las $\varphi_n(x)$ es la función cero.*

Recordemos ahora el teorema de Weierstrass, que dice: "*Si f es continua en $[0, 2\pi]$, entonces existe una sucesión de polinomios trigonométricos $P_n(x)$, tales que $P_n(x) \to f(x)$ uniformemente*". Ahora demostraremos la completez del sistema trigonométrico que viene dado en el siguiente teorema.

Teorema 2.1. *El sistema trigonométrico* $\{\cos nx, \sin nx\}, n = 0, 1, 2, \ldots$ *es completo en el espacio de* L_2*-funciones.*

Demostración. Veamos que si f es continua en $[0, 2\pi]$ y si

$$\int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

y

$$\int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx = 0, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

entonces $f(x) = 0$ para todo $x \in [0, 2\pi]$. Por el teorema de Weierstrass, si f es continua en $[0, 2\pi]$, entonces existe un polinomio $P_n(x)$ que converge a $f(x)$ uniformemente. Un polinomio trigonométrico es de la forma

$$P(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx.$$

Escojamos los $P_n(x)$ de tal forma que $P_n(x) \to f(x)$ uniformemente en $[0, 2\pi]$. Tomemos $\alpha_0 = 0$; sabemos que

$$\begin{aligned}
\int_0^{2\pi} f(x) P(x)\, dx &= \int_0^{2\pi} f(x) \left[\sum_{k=1}^{n} (\alpha_k \cos kx + \beta_k \sin kx) \right] dx \\
&= \int_0^{2\pi} f(x) \left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cos kx \right) dx + \int_0^{2\pi} f(x) \left(\sum_{k=1}^{n} \beta_k \sin kx \right) dx \\
&= \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \left(\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \right) + \sum_{k=1}^{n} \beta_k \left(\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \right) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

De donde se sigue $\int_0^{2\pi} f(x) P_n(x)\, dx = 0$. Tomando el límite cuando $n \to \infty$, se tiene que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{2\pi} f(x) P_n(x)\, dx = \int_0^{2\pi} \lim_{n\to\infty} f(x) P_n(x)\, dx = \int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 0;$$

como f es continua, de $\int_0^{2\pi} f^2(x) dx = 0$ se concluye que $f = 0$. ■

El sistema trigonométrico $\{\cos nx, \sin nx\}$, $n = 0, 1, 2, \ldots$, no es normal; el sistema normal esta dado por las funciones

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\} \qquad para\ n = 1, 2, 3, \ldots,$$

ya que

$$\|1\|^2 = \int_0^{2\pi} dx = x|_0^{2\pi},$$

de donde

$$\|1\| = \sqrt{2\pi}.$$

También tenemos que

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2nx}{2} dx = \left(\frac{1}{2}x + \frac{\sin 2nx}{4n} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \pi = \|\cos nx\|^2.$$

De la misma forma,

$$\int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2nx}{2} dx = \left(\frac{1}{2}x - \frac{\sin 2nx}{4n} \right) \Bigg|_0^{2\pi} = \pi = \|\sin nx\|^2.$$

De lo anterior obtenemos

$$\|\sin nx\| = \|\cos nx\| = \sqrt{\pi}.$$

Proposición 2.1. *Sea $f \in L_2(0, 2\pi)$, los coeficientes de Fourier del sistema de funciones $\{1, \cos nx, \sin nx\}$ denotados por $\frac{a_0}{2}, a_n, b_n$ son:*

- $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x) dx.$
- $a_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx.$
- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx.$

Demostración. De acuerdo con la fórmula para los coeficientes de Fourier mencionadas al comienzo de esta sección,

$$c_n = \frac{1}{\|\varphi_n\|^2} \int f(x) \varphi_n(x) dx;$$

en este caso $\varphi_n(x) = \{1, \cos nx, \sin nx\}$, así que

- $\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\|1\|^2}\int_0^{2\pi} f(x)dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx,$

  por lo tanto

  $a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)dx.$

- $a_n = \frac{1}{\|\cos nx\|^2}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx.$

  Como se mostró anteriormente, $\|\cos nx\|^2 = \pi$, entonces

  $a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx.$

- $b_n = \frac{1}{\|\sin nx\|^2}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx.$

  Ya vimos que $\|\sin nx\|^2 = \pi$, entonces

  $b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx.$ ■.

Definición 2.4. *La serie trigonométrica*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx.$$

donde $\frac{a_0}{2}, a_n, b_n$ *son los coeficientes de Fourier de la función* f *se llama serie de Fourier de la función* f *respecto al sistema ortogonal completo* $\{1, \cos nx, \sin nx\}$.

Proposición 2.2. *Considérese el sistema trigonométrico ortogonal completo* $\{\sin nx, \cos nx\}$,
$n = 1, 2, \ldots$ *y la función* f *continua en* $[0, 2\pi]$ *tal que*

$$\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = 0 \qquad y \qquad \int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = 0.$$

Si la función F *dada por la fórmula*

$$F(x) = \int_0^t f(t)\,dt$$

es continua en $[0, 2\pi]$ *y* $F'(x) = f(x)$ *en los puntos donde* f *es continua, entonces* $f(x) = 0$.

Demostración. Supóngase que $\frac{\alpha_0}{2}, \alpha_n$ y β_n son los coeficientes de Fourier de la función $F(x)$; entonces, integrando por partes las fórmulas de los coeficientes α_n y β_n, se obtiene

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\left(F(x)\frac{\sin nx}{n}\right)\Big|_0^{2\pi} - \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = 0;$$
$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} F(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\left(-F(x)\frac{\cos nx}{n}\right)\Big|_0^{2\pi} + \frac{1}{n\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = 0.$$

Los coeficientes de Fourier de la función $F(x)$ son ceros, salvo el coeficiente $\frac{\alpha_0}{2}$. Haciendo

$$G(x) = F(x) - \frac{\alpha_0}{2},$$

y en vista de que el sistema trigonométrico es completo en $L_2(0, 2\pi)$, se sigue que $G(x) = 0$, y por lo tanto

$$F(x) = \frac{\alpha_0}{2} \qquad \text{para } x \in [0, 2\pi].$$

Tomando la derivada, en cualquier punto de $[0, 2\pi]$ que exista, resulta que $F'(x) = 0$, y como $F'(x) = f(x)$, se concluye que

$$f(x) = 0$$

en los puntos donde x es continua.■

2.3. Distancia y coeficientes de Fourier

Sea

$$S_n = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx$$

la suma parcial de la serie de Fourier. Entonces la distancia entre f y S_n se halla mediante

$$\|f - S_n\|^2 = \langle f - S_n, f - S_n\rangle = \langle f, f\rangle - 2\langle f, S_n\rangle + \langle S_n, S_n\rangle,$$

donde

$$\begin{aligned}
\langle f, S_n \rangle &= \int_0^{2\pi} f(x) S_n(x)\, dx = \int_0^{2\pi} f(x) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right] dx \\
&= \int_0^{2\pi} f(x) \frac{a_0}{2} dx + \int_0^{2\pi} f(x) \left[\sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx + b_k \sin kx \right] dx \\
&= \int_0^{2\pi} f(x) \frac{a_0}{2} dx + \sum_{k=1}^{n} a_k \left(\int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \right) + \sum_{k=1}^{n} b_k \left(\int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx \right) \\
&= \frac{\pi a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + \pi \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \\
&= \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 + b_k^2 \right],
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
\langle S_n, S_n \rangle &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right]^2 dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\left(\frac{a_0}{2} \right)^2 + 2 \frac{a_0}{2} \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)^2 \right] dx \\
&= \int_0^{2\pi} \left[\frac{a_0^2}{4} + a_0 \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \right] dx \\
&+ \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^{n} \left(a_k^2 \cos^2 kx + 2 a_k b_k \cos kx \sin kx + b_k^2 \sin^2 kx \right) \right] dx,
\end{aligned}$$

y puesto que

$$\int_0^{2\pi} \cos kx dx = \int_0^{2\pi} \sin kx dx = \int_0^{2\pi} \sin kx \cos kx dx = 0$$

y

$$\int_0^{2\pi} \cos^2 kx dx = \int_0^{2\pi} \sin^2 kx dx = \pi,$$

entonces se deduce que

$$\langle S_n, S_n\rangle = \int_0^{2\pi}\left[\frac{a_0^2}{4}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k^2\cos^2 kx + b_k^2\sin^2 kx\right)\right]dx = \frac{a_0^2}{2}\pi+\pi\left[\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2\right].$$

Por lo tanto,

$$\langle S_n, S_n\rangle = \pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2\right].$$

Así,

$$\begin{aligned}\|f-S_n\|^2 &= \|f\|^2 - 2\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2\right]+\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2\right]\\ &= \|f\|^2-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2\right].\end{aligned}$$

En vista de que $\|f-S_n\|^2 \geq 0$, tomando el límite cuando $n\to\infty$ se ve que

$$\|f\|^2-\pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2\right]\geq 0,$$

de tal suerte que

$$\int_0^{2\pi} f^2(x)dx \geq \pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{n}a_k^2+b_k^2\right].$$

Definición 2.5. *Si $f\in L_2(0,2\pi)$, para el sistema trigonométrico $\{\cos nx, \sin nx\}$, $n=0,1,2,\ldots$, la desigualdad de Bessel está dada por*

$$\int_0^{2\pi}\left[f(x)\right]^2 dx \geq \pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2+b_k^2\right].$$

Como vimos, el sistema trigonométrico es completo para cualquier $f\in L_2$; entonces la igualdad de Parseval se cumple, es decir,

$$\int_0^{2\pi}\left[f(x)\right]^2 dx = \pi\left[\frac{a_0^2}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^2+b_k^2\right].$$

Por lo tanto, la serie de cuadrados de los coficientes de f converge a $\frac{\|f\|^2}{\pi}$.

Ahora bien, si a_0 y a_n son ceros, entonces la suma parcial de la serie de Fourier es

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx,$$

y la distancia entre f y S_n, está dada por

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - 2\langle f, S_n\rangle + \langle S_n, S_n\rangle.$$

Claramente,

$$\langle f, S_n\rangle = \int_0^{2\pi} \left[f(x) \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx \right] dx = \sum_{k=1}^{n} b_k \int_0^{2\pi} f(x) \sin kx dx = \pi \sum_{k=1}^{n} b_k^2$$

y

$$\begin{aligned} \langle S_n, S_n\rangle &= \int_0^{2\pi} \left[\sum_{k=1}^{n} (b_k \sin kx)^2 \right] dx \\ &= \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 kx dx = \pi \sum_{k=1}^{n} b_k^2. \end{aligned}$$

Puesto que $\|f - S_n\|^2 \geq 0$, tenemos

$$\|f\|^2 - \pi \sum_{k=1}^{n} b_k^2 \geq 0,$$

así que

$$\frac{\|f\|^2}{\pi} \geq \sum_{k=1}^{n} b_k^2;$$

el valor de la izquierda no depende de n, así que tomando el límite cuando $n \to \infty$ se deduce que

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx \geq \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2.$$

En la sección (2.4) mostraremos que si f es impar entonces a_0 y a_n son ceros, así la desigualdad anterior se cumple para el caso en que f es impar. Veremos

en la sección 2.5 que si f es par, entonces $b_n = 0$.
Si f es par y

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_n \cos kx,$$

entonces

$$\|f - S_n\|^2 = \|f\|^2 - \langle f, S_n \rangle,$$

donde

$$\begin{aligned}
\langle f, S_n \rangle &= \int_0^{2\pi} f(x) S_n(x) dx = \int_0^{2\pi} f(x) \left[\frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_n \cos kx \right] dx \\
&= \frac{a_0}{2} \int_0^{2\pi} f(x) dx + \sum_{k=1}^{n} a_k \int_0^{2\pi} f(x) \cos kx dx \\
&= \pi \frac{a_0^2}{2} + \pi \sum_{k=1}^{n} a_k^2 = \pi \left[\frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{n} a_k^2 \right].
\end{aligned}$$

Como $\|f - S_n\|^2 \geq 0$, tomando el limite cuando $n \to \infty$ resulta que

$$\frac{\|f\|^2}{\pi} = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} [f(x)]^2 dx \geq \frac{a_0^2}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2.$$

Otra importante propiedad que tienen los coeficientes de Fourier viene dada en la siguiente proposición.

Proposición 2.3. *Dos funciones distintas no pueden tener los mismos coeficientes de Fourier.*

Demostración. Sea $\{\varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ un sistema ortonormal completo en $[0, 2\pi]$; los coeficientes de Fourier de una función h están expresados por

$$c_n = \langle h, \varphi_n \rangle = \int_0^{2\pi} h(x) \varphi_n(x) dx;$$

Así, basta ver que si f y g son funciones en $L_2(0, 2\pi)$ y $(f, \varphi_n) = (g, \varphi_n)$, entonces $f = g$. Si $(f, \varphi_n) = (g, \varphi_n)$, entonces

$$\int_0^{2\pi} f(x) \varphi_n(x) dx = \int_0^{2\pi} g(x) \varphi_n(x) dx,$$

luego

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,\varphi_n(x)dx - \int_0^{2\pi} g(x)\,\varphi_n(x)dx = 0;$$

por lo tanto,

$$\int_0^{2\pi} [f(x) - g(x)]\,\varphi_n(x)dx = 0;$$

como el sistema $\{\varphi_n\}$ es completo, se sigue que $f(x) - g(x) = 0$, así que

$$f = g.$$

2.4. Extensión de funciones a $[-l, l]$ y $[0, l]$

Lo que se expuso anteriormente fue solamente para funciones en el intervalo $[0, 2\pi]$; esto lo podemos extender a cualquier intervalo de longitud arbitraria; por ejemplo en $[-l, l]$, si $f \in [-l, l]$ entonces tomamos $x = \frac{(t+l)\pi}{l}$, de donde $t = \frac{xl}{\pi} - l$ convierte $f(t)$ en la función $f^*(x) = f(\frac{xl}{\pi} - l)$ en el intervalo $[0, 2\pi]$. Así,

$$a_n = \frac{1}{\left\|\cos\frac{n(t+l)\pi}{l}\right\|^2} \int_{-l}^{l} f(t)\cos\frac{n(t+l)\pi}{l}dt,$$

$$b_n = \frac{1}{\left\|\sin\frac{n(t+l)\pi}{l}\right\|^2} \int_{-l}^{l} f(t)\sin\frac{n(t+l)\pi}{l}dt,$$

pero

$$\left\|\cos\frac{n(t+l)\pi}{l}\right\|^2 = \int_{-l}^{l} \cos^2\frac{n(t+l)\pi}{l}dt = \int_{-l}^{l} \frac{1+\cos\frac{n(t+l)\pi}{l}}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}t + \frac{\sin\frac{2n(t+l)\pi}{l}}{4n\pi}\Bigg]_{-l}^{l} = \frac{l}{2} + \frac{l}{2} = l;$$

y

$$\left\|\sin\frac{n\left(t+l\right)\pi}{l}\right\|^2=\int_{-l}^{l}\sin^2\frac{n\left(t+l\right)\pi}{l}dt=\int_{-l}^{l}\frac{1-\cos\frac{2n(t+l)\pi}{l}}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}t-\frac{\sin\frac{2n(t+l)\pi}{l}}{4n\pi}\Bigg]_{-l}^{l}=\frac{l}{2}+\frac{l}{2}=l.$$

Por lo tanto,

$$a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(t\right)\cos\frac{n\left(t+l\right)\pi}{l}dt.$$

$$b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f\left(t\right)\sin\frac{n\left(t+l\right)\pi}{l}dt.$$

También las funciones podemos extenderlas en el intervalo $[0,l]$. Si $f\in L_2\left(0,l\right)$, tomamos $x=\frac{t\pi}{l}$; por lo tanto, $t=\frac{xl}{\pi}$ convierte $f(t)$ en la función $f^*(x)=f(\frac{xl}{\pi})$ en el intervalo $[0,2\pi]$. Así podemos decir que

$$a_n=\frac{1}{\left\|\cos\frac{nt\pi}{l}\right\|^2}\int_0^l f\left(t\right)\cos\frac{n\left(t\right)\pi}{l}dt,$$

$$b_n=\frac{1}{\left\|\sin\frac{nt\pi}{l}\right\|^2}\int_0^l f\left(t\right)\sin\frac{n\left(t\right)\pi}{l}dt,$$

donde

$$\left\|\cos\frac{nt\pi}{l}\right\|^2=\int_0^l\cos^2\frac{nt\pi}{l}dt=\int_0^l\frac{1+\cos\frac{2nt\pi}{l}}{2}dt$$

$$=\frac{1}{2}t+\frac{\sin\frac{2nt\pi}{l}}{4n\pi}\Bigg]_0^l=\frac{l}{2},$$

$$\left\|\sin\frac{nt\pi}{l}\right\|^2 = \int_0^l \sin^2\frac{nt\pi}{l}dt = \int_0^l \frac{1-\cos\frac{2nt\pi}{l}}{2}dt$$

$$= \frac{1}{2}t - \frac{\sin\frac{2nt\pi}{l}}{4n\pi}\Big]_0^l = \frac{l}{2}.$$

Luego

$$a_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\cos\frac{nt\pi}{l}dt,$$

$$b_n = \frac{2}{l}\int_0^l f(t)\sin\frac{nt\pi}{l}dt.$$

La serie de Fourier de una función f en un intervalo de longitud l es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n\cos\frac{n\pi t}{l} + b_n\sin\frac{n\pi t}{l}.$$

2.5. Serie de Fourier de senos

Sabemos que la serie de Fourier de una función $f \in L_2(0, 2\pi)$ es

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx + b_n\sin nx),$$

donde $\frac{a_0}{2}$, a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de la función f.
Pero si dicha función f es impar, es decir, $f(x) = -f(-x)$ entonces,

$$\begin{aligned}
a_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)\cos n(x+\pi)\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)\cos nx dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+\pi)\cos nx dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(-x-\pi)\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(-x-\pi)\cos nx dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(-x-\pi)\cos nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(-x-\pi)\cos nx dx \\
&= 0
\end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned}
a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+\pi)\,dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(-x-\pi)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(-x-\pi)\,dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(-x-\pi)\,dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(-x-\pi)\,dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Luego la serie de Fourier de la función $f \in L_2(0, 2\pi)$ se reduce a

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

siempre que la función f sea impar, donde

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx.$$

Definición 2.6. *Sea $f \in L_2(0, 2\pi)$, f función impar; la serie*

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

se denomina serie de Fourier de senos, donde b_n es el coeficiente de Fourier de la función f.

Ejemplo 2.1. *Calcular la serie de Fourier de la función $f(x) = x - \pi$ en $[0, 2\pi]$*

Para encontrar la serie de Fourier de esta función se calculan primero sus coeficientes:

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [x-\pi]\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^2}{2} - \pi x\right)\Big]_0^{2\pi} \\ &= \frac{1}{\pi}\left(\frac{4\pi^2}{2} - 2\pi^2\right) = 0, \end{aligned}$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [x-\pi]\cos nx dx.$$

Integrando por partes la expresión anterior tenemos

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\left([x-\pi]\frac{\sin nx}{n} + \frac{\cos nx}{n^2}\right)\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n^2}\right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [x-\pi]\sin nx dx.$$

Integrando por partes se sigue que

$$\begin{aligned} b_n &= \frac{1}{\pi}\left([x-\pi]\frac{\cos nx}{n} + \frac{\sin nx}{n^2}\right)\Big]_0^{2\pi} = \frac{1}{\pi}\left(-\frac{\pi}{n} - \frac{\pi}{n}\right) \\ &= -\frac{2}{n}. \end{aligned}$$

Puesto que $f(x) = x - \pi$ en $[0, 2\pi]$, se comprobó que $\frac{a_0}{2}$ y a_n son cero, y la serie resultante de Fourier de la función f es

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{-2}{n}\right)\sin nx.$$

2.6. Serie de Fourier de cosenos

Ahora bien, si la función $f \in L_2(0, 2\pi)$ es par, es decir, $f(x) = f(-x)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)\sin n(x+\pi)\,dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+\pi)\sin nx dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(x+\pi)\sin nx dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(x+\pi)\sin nx dx \\
&= -\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{0} f(-x-\pi)\sin nx dx - \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(-x-\pi)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(-x-\pi)\sin nx dx + \frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi} f(-x-\pi)\sin nx dx \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la serie de Fourier de una función f par queda reducida a

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx,$$

donde

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \qquad \text{y} \qquad a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx.$$

Definición 2.7. *Sea $f \in L_2(0, 2\pi)$, f función par, la serie*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

se denomina serie de Fourier de cosenos, donde $\frac{a_0}{2}$ y a_n son los coeficientes de Fourier de la función f.

Ejemplo 2.2. *Calculemos la serie de Fourier de la función $(x-\pi)^2$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.*

Calculemos sus coeficientes de Fourier:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (x-\pi)^2\,dx = \frac{1}{\pi}\left(\frac{x^3}{3} - \pi x^2 + \pi x\right)\Big]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{8\pi^3}{3} - 2\pi^3 + 2\pi^2\right) = \frac{2}{3}\pi^2 + 2\pi;$$

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} [x-\pi]^2 \cos nx dx.$$

Integrando por partes obtenemos

$$a_n = \frac{1}{\pi}\left[\left((x-\pi)^2\frac{\sin nx}{n}\right)\Big]_0^{2\pi} - \frac{2}{n}\int_0^{2\pi}[x-\pi]\sin nx dx\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left((x-\pi)^2\frac{\sin nx}{n} + 2(x-\pi)\frac{\cos nx}{n^2} - 2\frac{\sin nx}{n^3}\right)\Big]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left(\frac{2\pi}{n^2} + \frac{2\pi}{n^2}\right) = \frac{4}{n^2},$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(x-\pi)^2\sin nx dx.$$

Integrando por partes la expresión anterior,

$$b_n = \frac{1}{\pi}\left[-(x-\pi)^2\frac{\cos nx}{n}\Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{n}\int_0^{2\pi}(x-\pi)\cos nx dx\right]$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[-(x-\pi)^2\frac{\cos nx}{n} + 2x\frac{\sin nx}{n^2} + 2\frac{\cos nx}{n^3} - 2\pi\frac{\sin nx}{n^2}\right]_0^{2\pi}$$
$$= \frac{1}{\pi}\left[-\frac{\pi^2}{n} + \frac{2}{n^3} + \frac{\pi^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right]_0^{2\pi} = 0.$$

Como la función $f(x) = (x-\pi)^2$ es par, en el intervalo $[0, 2\pi]$ se obtuvo que $b_n = 0$, y la serie

$$\pi\left(\frac{2}{3}\pi + 2\right) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{n^2}\cos nx$$

es la serie de Fourier de la función $f(x) = (x-\pi)^2$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.

2.7. Convergencia de los coeficientes y series de Fourier

Si A_n y B_n $(n = 1, 2, \ldots)$ representan números reales, entonces la desigualdad cuadrática en x, esta dada por

$$\sum_{n=1}^{m} (A_n - xB_n)(A_n - xB_n) \geq 0;$$

por lo tanto,

$$\sum_{n=1}^{m} A_n^2 - x\sum_{n=1}^{m} A_n B_n - x\sum_{n=1}^{m} B_n A_n + x^2 \sum_{n=1}^{m} B_n^2 \geq 0,$$

es decir,

$$x^2 \sum_{n=1}^{m} B_n^2 - 2x\sum_{n=1}^{m} A_n B_n + \sum_{n=1}^{m} A_n^2 \geq 0;$$

el descriminante de esta desigualdad cuadrática es no positivo, por lo que

$$\left(2\sum_{n=1}^{m} A_n B_n\right)^2 - 4\left(\sum_{n=1}^{m} A_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{m} B_n^2\right) \leq 0,$$

así que

$$\left(\sum_{n=1}^{m} A_n B_n\right)^2 \leq \left(\sum_{n=1}^{m} A_n^2\right)\left(\sum_{n=1}^{m} B_n^2\right).$$

Esta desigualdad recibe el nombre de *desigualdad de Cauchy*, y será de gran ayuda para demostrar el teorema que enunciaremos a continuación.

Teorema 2.2. *Sea f una función continua en $[0, 2\pi]$, tal que $f(0) = f(2\pi)$ y cuya derivada f' es continua en $[0, 2\pi]$. Entonces converge la serie*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{a_n + b_n}, \tag{2.2}$$

en donde a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de la función f.

Demostración. Los coefientes de la función f' son

$$\alpha_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx dx, \tag{2.3}$$

$$\beta_n = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx dx. \tag{2.4}$$

Como $f(0) = f(2\pi)$, tenemos que

$$\alpha_0 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\,f(x)]_0^{2\pi} = 0.$$

Además, integrando por partes, para $n = 1, 2, \ldots$, tenemos

$$\begin{aligned}
\alpha_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\cos nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\,(f(x)\cos nx)]_0^{2\pi} + \frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin nx dx \\
&= 0 + nb_n \\
&= nb_n,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\beta_n &= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f'(x)\sin nx dx \\
&= \frac{1}{\pi}\,(f(x)\sin nx)]_0^{2\pi} - \frac{n}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos nx dx \\
&= 0 - na_n \\
&= -na_n.
\end{aligned}$$

Cabe notar, que la condicion $f(0) = f(2\pi)$ era necesaria para que las ecuaciones (2.3) y (2.4) se redujeran a $\alpha_n = nb_n$ y $\beta_n = -na_n$. Supóngase que

$$\sum_{n=1}^{m}\sqrt{a_n + b_n}$$

sea la suma parcial de la serie infinita (2.2); entonces de las relaciones obtenidas anteriormente se sigue que

$$S_m = \sum_{n=1}^{\infty}\sqrt{\left(\frac{\beta_n}{n}\right)^2 + \left(\frac{\alpha_n}{n}\right)^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2};$$

como $S_m \geq 0$, utilizando la desigualdad de Cauchy obtenemos

$$S_m \leq \left[\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n^2} \sum_{n=1}^{m} \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \right]^{1/2}. \tag{2.5}$$

La primera suma de la parte derecha está acotada para todo valor de m, por lo que la suma infinita de términos positivos $1/n^2$ converge. De la desigualdad de Bessel, y dado que $\alpha_0 = 0$, se sigue que

$$\sum_{n=1}^{m} \sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2} \leq \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[f'(x) \right]^2 dx.$$

Por lo tanto, el segundo miembro de la parte derecha de (2.5) está acotado para todos los valores de m, y la suma infinita de términos positivos $\sqrt{\alpha_n^2 + \beta_n^2}$ converge. Así, S_m es acotada no decreciente, y tomando el límite cuando $m \to \infty$ se prueba que S_m converge.

2.7.1. Teorema de Fourier

El teorema que presenta las condiciones para que una serie de Fourier converga hacia su función se conoce con el nombre de *teorema de Fourier*. Este teorema se presenta en el intervalo $[0, 2\pi]$, pero se puede extender a cualquier intervalo de longitud 2π. Antes de presentar el teorema mostraremos un lema y dos definiciones, que serán de gran utilidad en la demostración de dicho teorema.

Definición 2.8. *Una función f tiene un período T o es periódica con período T, si y solo si para todo t, $f(t) = f(t+T)$, donde T es la mínima constante real positiva que permite esa igualdad.*

Ejemplo 2.3. *La función $f(x) = \cos x$ tiene periodo 2π, puesto que* $\cos(x + 2\pi) = \cos x \cos 2\pi - \sin x \sin 2\pi = \cos x$.

Definición 2.9. *La identidad trigonométrica*

$$2 \sum_{n=1}^{N} \cos n\theta = -1 + \frac{\sin\left[(N + 1/2)\,\theta\right]}{\sin \frac{\theta}{2}},$$

donde $\sin \frac{\theta}{2} \neq 0$, *se denomina identidad trigonométrica de Lagrange.*

Lema 2.1. *Sea f una función continua en $[a,b]$, que sea derivable en x_0, donde $x_0 \in [a,b]$. Entonces*

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b f(x) \frac{\sin k(x-x_0)}{x-x_0} dx = \pi f(x).$$

Teorema 2.3. *Sea f una función continua en $[0,2\pi]$ y periódica de periodo 2π. Entonces su serie de Fourier*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx \tag{2.6}$$

converge al valor $f(x), x \in \mathbb{R}$, en todos los puntos x donde f tenga derivada.

Demostración. Dando lo valores correspondientes de los coeficientes de Fourier de la función f, la serie (2.6) se transforma en

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\, d\varepsilon + \sum_{n=1}^{\infty}\left\{\left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\cos n\varepsilon d\varepsilon\right]\cos nx + \left[\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\sin n\varepsilon d\varepsilon\right]\sin nx\right\}$$
$$= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\, d\varepsilon + \frac{1}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\cos n(\varepsilon - x)\, d\varepsilon.$$

Sea

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\left[\frac{1}{2} + \sum_{m=1}^{n}\cos m(\varepsilon - x)\, d\varepsilon\right] d\varepsilon \tag{2.7}$$

la suma parcial de la serie de Fourier. Ahora bien, si aplicamos la identidad trigonométrica de Lagrange a (2.7), obtenemos

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(\varepsilon)\frac{\sin[(n+1/2)(\varepsilon - x)]}{2\sin[1/2(\varepsilon - x)]} d\varepsilon.$$

Si multiplicamos numerador y denominador por $\varepsilon - x$, y dado que f es periódica de periodo 2π, la integral a lo largo de cualquier intervalo de longitud 2π es la misma; por lo tanto, integrando entre a y $a+2\pi$, donde $x \in [a, a+2\pi]$, y haciendo

$$F(\varepsilon) = f(\varepsilon)\frac{1/2(\varepsilon - x)}{\sin[1/2(\varepsilon - x)]}, \tag{2.8}$$

resulta que

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} F(\varepsilon)\,\frac{\sin\left[(n+1/2)(\varepsilon - x)\right]}{(\varepsilon - x)}d\varepsilon. \tag{2.9}$$

Los puntos ε y x pertenecen al intervalo $[a, a+2\pi]$, por lo tanto $|\varepsilon - x| \leq 2D \leq 2\pi$, es decir $1/2\,|\varepsilon - x| \leq D \leq \pi$, donde D depende de x. Definamos la función S, de la manera siguiente:

$$S(t) = \begin{cases} \dfrac{sint}{t} & \text{para } t \neq 0, \\ 1 & \text{para } t = 0. \end{cases}$$

S está definida para todos los valores de x, por la serie

$$S(x) = 1 - \frac{x^2}{3!} + \frac{x^4}{5!} - \frac{x^6}{7!} + \ldots \tag{2.10}$$

Por lo tanto, (2.8) puede escribirse como

$$F(\varepsilon) = f(\varepsilon)\left[S\left(\frac{\varepsilon - x}{2}\right)\right]^{-1}, \qquad 1/2\,|\varepsilon - x| \leq D \leq \pi. \tag{2.11}$$

Al cumplirse (2.10) resulta que $S'(x)$ existe para cualquier valor de x, y de aquí que $[S'(x)]^{-1}$ existe; por consiguiente,

$$\left[S\left(\frac{\varepsilon - x}{2}\right)\right]^{-1}$$

es derivable y continua con respecto a ε. De (2.11) se deduce que $F(\varepsilon)$ es continua en $[a, a+2\pi]$ y que debe existir su derivada en el punto $\varepsilon = x$, por ser producto de dos funciones que cumplen esa propiedad. Además, $F(x) = f(x)$, por lo tanto F satisface las condiciones enunciadas en el lema 2.1, en el intervalo $[a, a+2\pi]$. Si este lema se aplica a (2.9), donde $n + 1/2 = k$ y $x_0 = x$, vemos que:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} S_n(x) &= \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{\pi}\int_a^{a+2\pi} F(\varepsilon)\,\frac{\sin\left[(n+1/2)(\varepsilon - x)\right]}{(\varepsilon - x)}d\varepsilon\right] \\ &= \frac{1}{\pi}\cdot \pi F(x) = f(x). \end{aligned}$$

Luego con las condiciones mencionadas la serie (2.6) converge a $f(x)$.

2.8. Derivación de las series de Fourier

Por medio del teorema de Fourier vimos las condiciones necesarias para que una serie de Fourier converja a su función correspondiente, y en la seccion(2.5) se mostró que si $f(x) = x - \pi$ en $[0, 2\pi]$, entonces su serie de Fourier es

$$-2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \qquad x \in [0, 2\pi].$$

Esta serie converge a $x - \pi$ para todos los puntos del intervalo $[0, 2\pi]$; por lo tanto,

$$x - \pi = -2\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin nx}{n}, \qquad x \in [0, 2\pi],$$

pero esta serie no es derivable. La serie derivada

$$-2\sum_{n=1}^{\infty} \cos nx$$

no converge, ya que su n-simo término no se aproxima a cero cuando $n \to \infty$. La continuidad de las funciones periódicas es una condición importante para la derivabilidad de las series de Fourier. En el siguiente teorema mostraremos las condiciones para que una serie de Fourier sea derivable.

Teorema 2.4. *Sea f continua en $[0, 2\pi]$, tal que $f(0) = f(2\pi)$ y f' es continua en $[0, 2\pi]$; la serie de Fourier*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

donde $\frac{a_0}{2}$,a_n y b_n son los coeficientes de Fourier de dicha función, es derivable en todo punto donde exista $f''(x)$:

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin nx + b_n \cos nx). \tag{2.12}$$

Demostración. La función f' cumple con las condiciones mencionadas en el teorema de Fourier en todo punto x donde exista f''; en estos puntos f' es

continua, entonces

$$f'(x) = \frac{\alpha_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (\alpha_n \cos nx + \beta_n \sin nx), \tag{2.13}$$

donde α_n y β_n son los coeficientes de Fourier de la función f' descritos en la sección (2.7). Dado que $f(0) = f(2\pi)$, se deduce que $\alpha_0 = 0$ y

$$\alpha_n = nb_n, \qquad \beta_n = -na_n; \tag{2.14}$$

reemplazando estos valores en (2.13) se obtiene

$$\begin{aligned} f'(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} (nb_n \cos nx - na_n \sin nx) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} n(-a_n \sin nx + b_n \cos nx), \end{aligned}$$

llegando así, a lo que queríamos demostrar.

Capítulo 3

SERIE DE FOURIER COMPLEJA Y POLÍGONOS

3.1. Serie de Fourier compleja

En el capítulo anterior vimos que la serie trigonométrica de Fourier de una función $f \in L_2(0, 2\pi)$ está dada por

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx, \tag{3.1}$$

donde

$$\begin{aligned} \frac{a_0}{2} &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x)dx, \\ a_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \cos nx dx, \\ b_n &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(x) \sin nx dx. \end{aligned}$$

mediante la identidad de Euler

$$e^{inx} = \cos nx + i \sin nx$$

se obtiene que

$$\cos nx = \frac{e^{inx} + e^{-inx}}{2}, \qquad \sin nx = \frac{e^{inx} - e^{-inx}}{2i}.$$

Por lo tanto, la serie (3.1) podemos escribirla en la forma

$$\begin{aligned}
\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx &= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[a_n\left(\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}\right)+b_n\left(\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2i}\right)\right] \\
&= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\frac{e^{inx}+e^{-inx}}{2}-ib_n\frac{e^{inx}-e^{-inx}}{2}\right) \\
&= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n-ib_n}{2}\right)e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{a_n+ib_n}{2}\right)e^{-inx} \\
&= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} s_n e^{inx}+\sum_{n=1}^{\infty} t_n e^{-inx} \\
&= \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty} s_n e^{inx}+\sum_{n=-\infty}^{-1} t_{-n} e^{inx} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{inx},
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{cases} c_n(f)=\frac{a_0}{2}, & \text{para } n=0; \\ c_n(f)=s_n, & \text{para } n\geq 1; \\ c_n(f)=t_{-n}, & \text{para } n\leq -1. \end{cases}$$

De esto se deduce

$$\begin{cases} c_n(f)=\frac{a_0}{2}, & \text{para } n=0; \\ c_n(f)=\frac{a_n-ib_n}{2}, & \text{para } n\geq 1; \\ c_{-n}(f)=\frac{a_n+ib_n}{2}, & \text{para } n\geq 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Observemos que

$$c_{-n}=\overline{c_n},$$

donde $\overline{c_n}$ representa el conjugado de los coeficientes de Fourier. La expresión

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{inx}$$

se llama *serie de Fourier compleja*. Los coeficientes de Fourier vienen dados por (3.2), esto es, por medio de lo coeficientes a_n, b_n; sin embargo, podemos

encontrar una fórmula para calcularlos directamente sin necesidad de utilizar a_n y b_n. En efecto, si $n \neq m$, entonces

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx &= \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}dx = \int_0^{2\pi} \left[\cos(n-m)x + i\sin(n-m)x\right]dx \\ &= \frac{\sin(n-m)x}{n-m} - i\frac{\cos(n-m)x}{n-m}\Bigg|_0^{2\pi} = -i + i = 0.\end{aligned}$$

Si $n \neq m$, tenemos que

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \int_0^{2\pi} e^{i(n-m)x}dx = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi;$$

así, vemos que

$$\int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx = \begin{cases} 0, & \text{si } n \neq m \\ 2\pi, & \text{si } n = m. \end{cases}$$

Ahora bien, si multiplicamos la igualdad

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{inx}$$

por e^{-imx} $(m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$, integrándola en $[0, 2\pi]$ se obtiene

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-imx}dx &= \int_0^{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{inx}e^{-imx}dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f) \int_0^{2\pi} e^{inx}e^{-imx}dx \\ &= 2\pi c_m(f),\end{aligned}$$

es decir,

$$c_m(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-imx}dx, \qquad (m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots).$$

Ejemplo 3.1. *Calcular la serie de fourier de la función 2π-periódica, $f(x) = x - \pi$ en el intervalo $[0, 2\pi]$.*

Calculemos primero su coeficiente de Fourier:

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\, e^{-ikx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} [x - \pi]\, e^{-ikx}dx.$$

Integrando por partes tenemos

$$\begin{aligned}
c_k(f) &= \frac{1}{2\pi}\left[\left(-(x-\pi)\frac{e^{-ikx}}{ik}\right)\Bigg|_0^{2\pi} + \frac{1}{ik}\int_0^{2\pi} e^{-ikx}dx\right] \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{i}{k}(x-\pi)e^{-ikx} - \frac{e^{-ikx}}{(ik)^2}\right]_0^{2\pi} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{i}{k}(x-\pi)e^{-ikx} + \frac{e^{-ikx}}{k^2}\right]_0^{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{i\pi}{k}e^{-2\pi ik} + \frac{i\pi}{k} + \frac{e^{-2\pi ik}}{k^2} - \frac{1}{k^2}\right].
\end{aligned}$$

Recordando que

$$e^{-2\pi ik} = \cos(2\pi k) - i\sin(2\pi k) = 1, \qquad \text{para todo } k \in \mathbb{Z},$$

se concluye

$$c_k(f) = \frac{1}{2\pi}\left[\frac{2\pi i}{k}\right] = \frac{i}{k};$$

luego su serie de Fourier es

$$x - \pi = \sum_{k\neq 0} \frac{i}{k} e^{ikx}. \tag{3.3}$$

3.2. Algunos resultados sobre serie de Fourier compleja

Para la visualización de funciones periódicas de una función compleja, por lo general se tiende a separar la parte real y la imaginaria y dibujar separadamente las gráficas de estas funciones periódicas; pero la serie compleja de Fourier $\sum_{k\in\mathbb{Z}} c_k(f)\, e^{ikx}$ representa una función 2π-periódica

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$$

y al menos cuando esta función es continua, puede ser vista como una curva paramétrica cerrada, $t \mapsto f(t) \in \mathbb{C}$ en el plano complejo. En general, esta curva cerrada tiene múltiples puntos, es decir, f no es $1-1$.

Sea $C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ el espacio de funciones periódicas, de periodo 2π, continuas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Claramente se ve que $x \sim y$ si y solo si $x = y + 2\pi n$ para algún

$n \in \mathbb{N}$. Entonces la relación $\sim$ es una relación de equivalencia en $\mathbb{R}$. Ahora bien, si tomamos la partición $(\mathbb{R}/\sim)$, que notamos $(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ observamos que la clase de equivalencia del cero es igual a la de 2π y esta a la de 4π, es decir,

$$[0] = [2\pi] = [4\pi] = \ldots = [2n\pi], \qquad \text{para } n \in \mathbb{N}.$$

Así que trabajar en cualquier intervalo de longitud 2π es lo mismo que trabajar en el intervalo $[0, 2\pi]$ o en el intervalo $[t_0, t_0 + 2\pi]$ con $t_0 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 3.2. *El comportamiento de la función $f(x) = |senx|$ es el mismo en $[0, 2\pi]$, $[2\pi, 4\pi]$, $[4\pi, 6\pi]$,...*

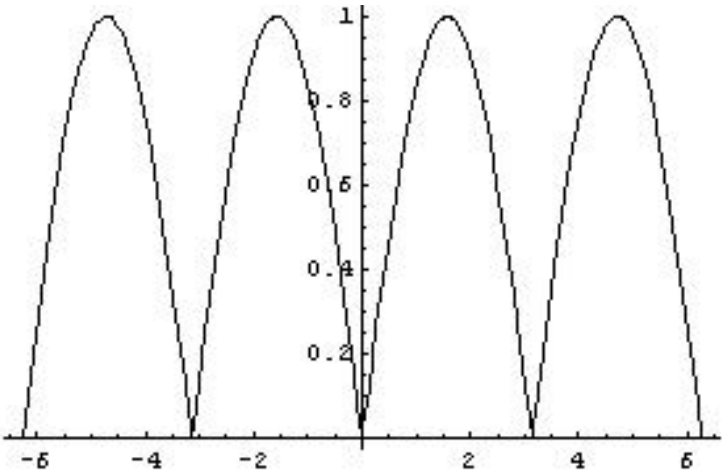

Figura 3.1: $|senx|$

Definición 3.1. *Diremos que una función $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$ es un polígono si hay una subdivisión finita*

$$0 \leq t_0 < \ldots < t_j < t_{j+1} < \ldots < t_{n-1} < t_n = t_0 + 2\pi$$

de $[t_0, t_0 + 2\pi]$ tal que f es linealmente afín en cada subintervalo $[t_j, t_{j+1}]$.

En este caso la imagen de f en $[t_j, t_{j+1}]$ es una línea poligonal en $\mathbb{C}$ con vértices $s_j = f(t_j)$ y f es una parametrización con velocidad constante sobre cada lado.

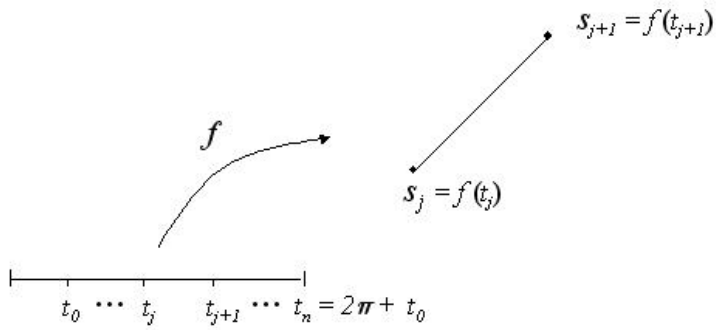

Figura 3.2: función linealmente afín

Ahora determinaremos la serie de Fourier de un poligono f. Con la notación anterior a esta sección, calcularemos los coeficientes de Fourier $c_k(f)$ dados por

$$2\pi c_k(f) = \int_0^{2\pi} f(t)\, e^{-ikt} dt = \sum_{0 \le j < n} \int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)\, e^{-ikt} dt.$$

Integrando por partes, cuando $k \neq 0$, se obtiene

$$\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(t)\, e^{-ikt} dt = \left[f(t) \frac{e^{-ikt}}{-ik} \right]_{t_j}^{t_{j+1}} - \int_{t_j}^{t_{j+1}} f'(t) \cdot \frac{e^{-ikt}}{-ik} dt;$$

haciendo $v_j = f'(t)$ y realizando la sumatoria sobre j, dado que f es continua y periódica, los términos integrados se cancelan dos a dos, luego

$$\begin{aligned} 2\pi c_k(f) &= \sum_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} v_j \cdot \frac{e^{-ikt}}{ik} dt = \frac{1}{ik} \sum_j v_j \int_{t_j}^{t_{j+1}} e^{-ikt} dt \\ &= k^{-2} \sum_j v_j \left[e^{-ikt} \right]_{t_j}^{t_{j+1}} = k^{-2} \sum_j (v_{j-1} - v_j)\, e^{-ikt_j}, \end{aligned}$$

con una velocidad de salto $\sigma_j = v_j - v_{j-1}$ en un tiempo t_j; la ecuación anterior podemos escribirla como

$$c_k(f) = -\left(\sum_j \sigma_j e^{-ikt_j} \right) \Big/ \left(2\pi k^2 \right).$$

Definición 3.2. *Sea $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$; diremos que una translación de la función f, denotado por τf, es una función de la forma*

$$(\tau f)(t) = f(t-a).$$

Si $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$, entonces la serie de Fourier de la translación $f(t-a)$ es

$$\begin{aligned} f(t-a) &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(f)\, e^{ik(t-a)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{-ika} c_k(f)\, e^{ikt} \\ &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k(\tau f)\, e^{ikt}. \end{aligned}$$

De aquí vemos que los coeficientes de Fourier de tal translación son

$$c_k(\tau f) = e^{-ika} c_k(f).$$

Definición 3.3. *Diremos que la serie básica de Fourier es la imagen de la función $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tal que*

$$f_1(t) = \sum_{k \neq 0} e^{ikt}/k^2.$$

Proposición 3.1. *Un polígono f es una combinación lineal de translaciones de la serie básica de Fourier*

$$f_1(t) = \sum_{k \neq 0} e^{ikt}/k^2$$

y un término constante $c_0 = c_0(f)$.

Demostración.

$$\begin{aligned} f(t) =& c_0(f) + \sum_{k \neq 0} c_k(f)\, e^{ikt} \\ &= c_0(f) + \sum_{k \neq 0} e^{ikt} \sum_j -\sigma_j e^{-ikt_j}/2\pi k^2 \\ &= c_0(f) + \sum_j \alpha_j \sum_{k \neq 0} e^{ikt} e^{-ikt_j}/k^2 \\ &= c_0(f) + \sum_j \alpha_j \sum_{k \neq 0} e^{ik(t-t_j)}/k^2 \\ &= c_0(f) + \sum_j \alpha_j f_1(t-t_j). \blacksquare \end{aligned}$$

De la proposición anterior vemos que

$$f \qquad \text{y} \qquad c_0(f) + \sum_j \alpha_j f_1(t - t_j)$$

tienen los mismos coeficientes de Fourier cuando $\alpha_j = -\sigma_j / 2\pi$. Sin embargo, si consideramos una combinación lineal de translaciones $\sum_j \alpha_j \tau_j(f_1)$ de f_1 donde $\sum_j \alpha_j = 0$, podemos construir un polígono parametrizado en $\mathbb{C}$ con esta serie de Fourier. Además, podemos relacionar el $\sigma_j = -2\pi\alpha_j$, el t_j, las velocidades v_j y el comienzo v_0, así:

$$v_1 = v_0 + \sigma_1, \qquad v_2 = v_1 + \sigma_2 = v_0 + (\sigma_1 + \sigma_2), \qquad \text{etc.},$$

ya que $\sum_j \alpha_j = -\sum_j \sigma_j / 2\pi = 0$; entonces obtenemos que
$v_n = v_0 + (\sigma_1 + \sigma_2 + \ldots + \sigma_n) = v_0$. Sin embargo, la línea poligonal será cerrada cuando

$$(t_1 - t_0) v_0 + (t_2 - t_1) v_1 + \ldots + (t_n - t_{n-1}) v_{n-1} = 0.$$

Es decir,

$$-t_0 v_0 + t_1 (v_0 - v_1) + t_2 (v_1 - v_2) + \ldots + t_{n-1} (v_{n-2} - v_{n-1}) + t_n v_{n-1} = 0,$$

pero $t_n = t_0 + 2\pi$, y reordenando términos resulta

$$2\pi v_{n-1} = t_1 (v_1 - v_0) + t_2 (v_2 - v_1) + \ldots = \sum_{0 \le j < n} t_j \sigma_j,$$

lo cual recomienda el valor de

$$v_0 = v_n = v_{n-1} + \sigma_n = v_{n-1} + \sigma_0 = \sigma_0 + \sum_{0 \le j < n} t_j \sigma_j / 2\pi.$$

De aquí en adelante todas las velocidades son determinadas únicamente en todos los subintervalos $[t_j, t_{j+1}]$, y el polígono mismo es determinado por una translación. Ahora bien, podemos restringirnos a los polígonos centrados, es decir, aquellos en $C_0 = \{f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}) : c_0(f) = 0\}$.

Teorema 3.1. *El espacio de polígonos centrados V consiste precisamente de las combinaciones lineales $\sum_j \alpha_j \tau_j(f_1)$ de translaciones de*

$$f_1(t) = \sum_{k \neq 0} e^{ikt} / k^2,$$

donde $\sum_j \alpha_j = 0$.

Demostración. El estudio de las series de Fourier puede basarse en la serie básica de Fourier

$$f_1(t) = \sum_{k\neq 0} \frac{e^{ikt}}{k^2}.$$

Pero

$$\sum_{k\neq 0} \frac{e^{ikt}}{k^2} = 2\sum_{k\geq 1} \frac{\cos kt}{k^2},$$

ya que

$$c_k = \frac{1}{k^2} = \frac{a_k - ib_k}{2}, \qquad k \geq 1,$$

$$c_{-k} = \frac{1}{k^2} = \frac{a_k + ib_k}{2}, \qquad k \geq 1,$$

donde

$$\frac{a_k - ib_k}{2} = \frac{a_k + ib_k}{2} = \frac{1}{k^2};$$

por lo tanto,

$$a_k = \frac{2}{k^2} \qquad \text{y} \qquad b_k = 0.$$

Si la serie de derivadas converge uniformemente sobre el intervalo $[0, 2\pi]$, entonces

$$f_1'(t) = \sum_{k\neq 0} i \cdot \frac{e^{ikt}}{k} = -2\sum_{k\geq 1} \frac{\sin kt}{k}, \qquad \text{para } 0 < t < 2\pi.$$

Como vimos en los ejemplos (2.1) y (3.1), esa es la serie de Fourier de la función 2π-periódica

$$t - \pi \qquad \text{para } 0 < t < 2\pi;$$

de esto resulta

$$f_1(t) = \frac{t^2}{2} - \pi t + f_1(0) \qquad \text{para } 0 < t < 2\pi;$$

a partir de la igualdad

$$\sum_{k\geq 1} \frac{1}{k^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

deducimos que

$$f_1(0) = \frac{\pi^2}{3}$$

y

$$f_1(t) = \frac{t^2}{2} - \pi t + \frac{\pi^2}{3} \qquad \text{para } 0 < t < 2\pi.$$

La gráfica de f_1 no es lineal por partes, esto es, no es un polígono, pero la segunda derivada de la combinación lineal de translaciones $\sum_j \alpha_j \tau_j (f_1)$ desaparece cuando $\sum_j \alpha_j = 0$, ya que $\tau_j (f_1)'' \equiv 1$, excepto en muchos puntos finitos de $(0, 2\pi)$. Esto prueba que $\sum_j \alpha_j \tau_j (f_1)$ es lineal por partes, es decir, es un polígono.

3.3. Serie de Fourier de los polígonos regulares de n-lados

Definición 3.4. *Se dice que una función 2π -periódica continua $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ presenta una simetría de orden $n \geq 2$ cuando hay una n-sima raíz ξ de la unidad tal que $|\varepsilon| = 1$ y*

$$f(t + 2\pi/n) = \xi f(t).$$

El valor de n en la anterior definición es mayor o igual a dos, ya que si $n = 1$ entonces $f(t + 2\pi) = f(t)$, por lo que f es 2π-periódica y $|\varepsilon| = 1$. En esta sección sólo nos interesa el caso en que $\xi = e^{2\pi i/n}$.

Teorema 3.2. *Sea $f \in C(\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z})$. La función 2π periódica continua presenta una simetría de orden $n \geq 2$ en el sentido $f(t + 2\pi/n) = e^{2\pi i/n} f(t)$. Entonces la sucesión de Fourier satisface:*

$$c_k(f) = 0, \qquad \textit{si } k-1 \textit{ no es múltiplo de } n.$$

$$c_k(f) = \frac{n}{2\pi} \int_0^{2\pi/n} f(t) e^{-ikt} dt, \qquad \textit{si } k-1 \textit{ es múltiplo de } n.$$

Demostración. La simetría de orden n-simo simplemente significa que la función

$$t \mapsto e^{-it} f(t)$$

es periódica de periodo $2\pi/n$. Esta función puede ser extendida en una serie de Fourier acordando el sistema $(e^{imnt})_{m\in\mathbb{Z}}$, y

$$f(t) = e^{it}\sum_{m\in\mathbb{Z}} c'_m e^{imnt} = \sum_{m\in\mathbb{Z}} c'_m e^{i(1+mn)t} = \sum_{k\equiv 1(n)} c_k e^{ikt};$$

en particular, $f \in C_0$. Sin embargo, cualquier exponencial donde $k \equiv 1\,(mod\ n)$ tiene la propiedad requerida de orden n-simo.■

Consideremos ahora más particularmente el caso del polígono regular en $\mathbb{C}$, con vértices en la n-sima raíz s_j de la unidad.

Proposición 3.2. *Si*

$$\xi = \xi_n = e^{2\pi i/n}$$

con

$$s_j = e^{2\pi i/n} = \xi_n^j \qquad (0 \le j < n)\,,$$

y si $\sum_{0\le j<n} \xi^j = 0$, *entonces la combinación lineal*

$$\sum_{0\le j<n} \xi^j f_1(t - j\cdot 2\pi/n)$$

representa un polígono.

Demostración.

$$\begin{aligned}\sum_{0\le j<n} \xi^j f_1(t - j\cdot 2\pi/n) &= \sum_{0\le j<n}\sum_{k\neq 0} \xi^j e^{ik(t-j\cdot 2\pi/n)}/k^2 \\ &= \sum_{0\le j<n}\sum_{k\neq 0} \xi^j e^{-2ikj\pi/n} e^{ikt}/k^2 \\ &= \sum_{0\le j<n}\sum_{k\neq 0} \xi^{j(1-k)} e^{ikt}/k^2 \\ &= n\sum_{k\equiv 1(n)} e^{ikt}/k^2 = nf_n(t)\,.\end{aligned}$$

Esto prueba que f_n representa un polígono (velocidad constante sobre cada lado) con una simetría de orden n, y por la combinación lineal de translaciones de f, tiene solo n vértices.■
La simetría

$$f(t + 2\pi/n) = \xi\cdot f(t)$$

lleva a

$$f'(t+2\pi/n) = \xi \cdot f'(t) \qquad \text{y} \qquad |f'(t+2\pi/n)| = |f'(t)|,$$

y siempre sabemos que la velocidad f_n' tiene solo n saltos; esto prueba que f_n es una parametrización con velocidad constante. Recordemos ahora la identidad de Parseval: si $f \in L_2(0, 2\pi)$, entonces

$$\sum |c_k(f)|^2 = \|f\|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|^2\, dt.$$

Utilizando esta identidad para f_n', y teniendo los coeficientes de Fourier

$$c_k(f_n') = i/n, \text{ si } k \equiv 1 \quad (\text{mód } n) \qquad \text{y} \qquad 0 \text{ en otra parte},$$

deducimos

$$f_n(0) = \sum_{k\equiv 1(n)} \frac{1}{k^2} = \|f_n'\|_2^2 = v_n^2.$$

La anterior igualdad se tiene si sabemos que $|f_n'| = v_n$ es constante. Esta velocidad puede ser evaluada por consideraciones geométricas:

$$2\pi v_n = L_n = 2n \cdot f_n(0)\frac{\sin\pi}{n};$$

aquí L_n representa el polígono regular de n lados. Todo polígono regular de n lados se puede dividir en n triángulos isósceles; los lados iguales de este triángulo tienen longitud $f_n(0)$, y s es el lado del polígono regular

$$x = f_n(0)\cos\frac{2\pi}{n},$$

$$y = f_n(0)\left[1-\cos\frac{2\pi}{n}\right],$$

$$s^2 = f_n(0)\left[1-\cos\frac{2\pi}{n}\right]^2 + f_n^2(0)\sin\frac{2\pi}{n},$$

$$s^2 = 2f_n^2(0)\left[1-\cos\frac{2\pi}{n}\right] = 4f_n^2(0)\sin^2\frac{\pi}{n};$$

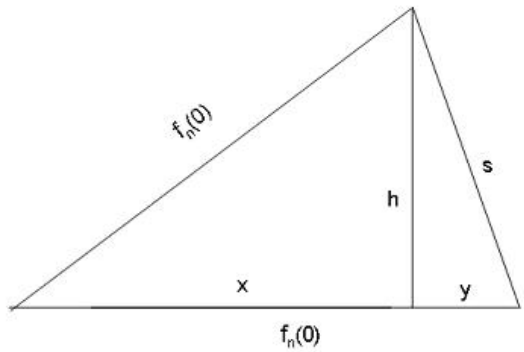

Figura 3.3: Triángulo isósceles.

por lo tanto,

$$s = 2f_n(0)\sin\frac{\pi}{n},$$

así que

$$L_n = 2n \cdot f_n(0)\sin\frac{\pi}{n},$$

de donde

$$v_n = f_n(0) \cdot \frac{\frac{\sin\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}};$$

por lo tanto,

$$f_n(0) = v_n^2 = f_n^2(0) \cdot \left[\frac{\frac{\sin\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right]^2,$$

y en consecuencia

$$f_n(0) = \left[\frac{\pi/n}{\sin\pi/n}\right]^2.$$

Hemos demostrado el siguiente resultado:

Teorema 3.3. *La serie de Fourier del polígono regular de n lados teniendo $s_j = e^{2\pi ij/n}$ como vértice uniformemente parametrizado es*

$$c_n f_n(t) = c_n \sum_{k\equiv 1(n)} \frac{e^{ikt}}{k^2} = c_n \sum_{m\in\mathbb{Z}} \frac{e^{i(1+mn)t}}{(1+mn)^2},$$

con constante $c_n = \left[\frac{\frac{\sin\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}}\right]^2$.

Corolario 3.1. *En las condiciones del teorema, se tiene que*

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} 1\diagup(1+mn)^2 = \left[\frac{\pi\diagup n}{\sin\pi\diagup n}\right]^2.$$

En particular, para $n=2$*, resulta que*

$$\sum_{k\ par\geq 1} 1\diagup k^2 = \frac{1}{2}\sum_{m\in\mathbb{Z}} 1\diagup(1+2m)^2 = \pi^2\diagup 8.$$

Observemos que c_n tiende monótonamente a 1 cuando $n\to\infty$ y $f_n \to f = e^{it}$(parametrización uniforme del círculo) uniformemente para $n\to\infty$.

3.4. Ejemplos

Sea el entero $n>1$ y elegimos otro entero $1\leq a<n$, entonces

$$\sum_{k\equiv a(n)} e^{ikt}\diagup k^2 = \frac{1}{n}\sum_{0\leq j<n} \xi^{aj} f_1\left(t - j\cdot 2\pi\diagup n\right)$$

es un polígono en forma de estrella con $n\diagup(n,a)$ lados (con n lados cuando a es relativamente primo a n). El primer lado une $s_0=1$ con $s_1=\xi^a$, el segundo une ξ^a con ξ^{2a},... Esta parametrización f tiene una simetría de orden n-simo del tipo

$$f\left(t+2\pi\diagup n\right) = \xi^a f\left(t\right).$$

Aquí hay ejemplos tratados en $MATHEMATICA^{TM}$. A continuación mostraremos el programa y la gráfica de la función (Vease figura (3.4))

$$f\left(t\right) = \sum_{k=-4}^{4} e^{(2+5k)It}\diagup(2+5k)^2:$$

```
f[t_]:=Sum[Exp[(2+5k) I t] / (2+5k) ^ 2, {k,-4,4}]
u[t_]:=Re[f[t]]
v[t_]:=Im[f[t]]
ParametricPlot[{u[t],v[t]},{t,1,1+2 pi}].
```

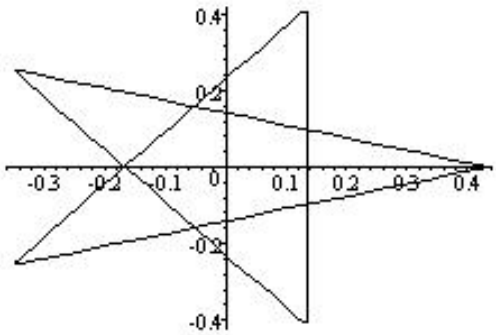

Figura 3.4: Estrella de doble punto.

Otros tipos de estrella se obtienen como sigue. Para dos constantes A y B consideramos

$$A \sum_{k\equiv 1(2n)} e^{ikt}\big/k^2 + B \sum_{k\equiv n+1(2n)} e^{ikt}\big/k^2.$$

Esta es una estrella con n vértices. Escogiendo

$$A = n - \sqrt{n} \qquad\qquad B = n + \sqrt{n}$$

obtenemos la estrella clásica donde los lados $[s_j, s_{j+1}]$ y $[s_{j+3}, s_{j+4}]$ están sobre la misma línea cuando j es par.
Un ejemplo de esto es la función

$$h\left(t\right) = \sum_{k=-4}^{4} e^{(1+20k)It}\big/\left(1+20k\right)^2 - 6\sum_{k=-4}^{4} e^{(11+20k)It}\big/\left(11+20k\right)^2 :$$

```
f[t_]:=Sum[Exp[(1+20k) I t] / (1+20k) ^ 2, {k,-4,4}]
g[t_]:=Sum[Exp[(11+20k) I t] / (11+20k) ^ 2, {k,-4,4}]
h[t_]:=f[t]-6g[t]
u[t_]:=Re[h[t]]
v[t_]:=Im[h[t]]
ParametricPlot[{u[t],v[t]},{t,1,1+2 pi}].
```

Otro ejemplo de polígonos centrados se muestra a continuación :

$$h\left(t\right) = \sum_{k=-2}^{2} e^{(1+16k)It}\big/\left(1+16k\right)^2 - 3\sum_{k=-2}^{2} e^{(9+16k)It}\big/\left(9+16k\right)^2 :$$

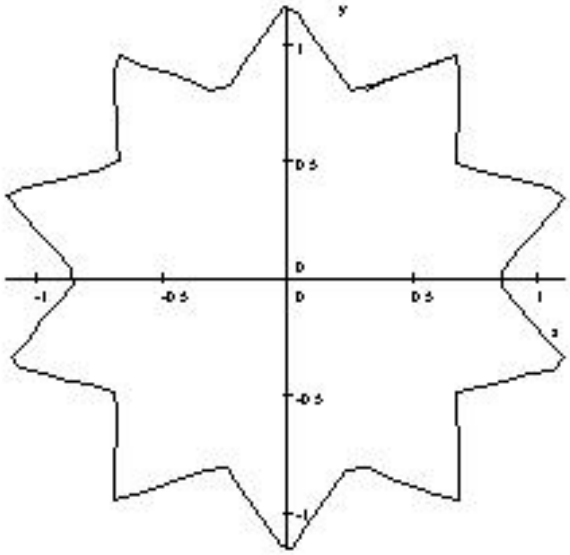

Figura 3.5: Polígono estrellado de 10 puntas

```
f[t_]:=Sum[Exp[(1+16k) I t] / (1+16k) ^ 2, {k,-2,2}]
g[t_]:=Sum[Exp[(9+16k) I t] / (9+16k) ^ 2, {k,-2,2}]
h[t_]:=f[t]-3g[t]
u[t_]:=Re[h[t]]
v[t_]:=Im[h[t]]
ParametricPlot[{u[t],v[t]},{t,1,1+2 pi}].
```

El resultado de este programa es un polígono estrellado regular de ocho puntas con centro en el origen, la gráfica de esta función se presenta en la siguiente página.

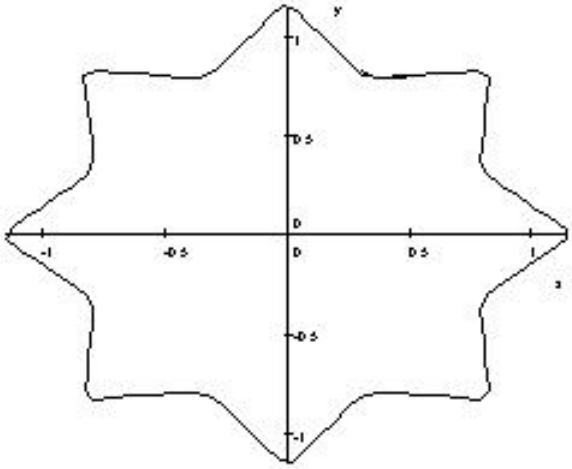

Figura 3.6: Polígono estrellado de 8 puntas

Bibliografia

- ROBERT Alain. "Fourier Series of Polygons". *American Mathematical Monthly*, vol.101, n.5 (1994), 420-428.
- KOLMOGÓROV A. *Elementos de la teoría de funciones y del análisis funcional*. Mir, Moscú, 1975.
- APOSTOL T. *Análisis matemático*. Segunda edición, Editorial Reverté, Barcelona, 1985.
- BUSTOS J. "Series de Fourier". *Boletin de matemática*, Bogotá, 1976.