

EFFECTOS DE ARRASTRE DE MARCOS EN TEORÍAS MODIFICADAS DE LA  
GRAVEDAD CON VIOLACIÓN DE PARIDAD

WILLIAM ANDRÉS JAIMES ESPÍNDOLA

B.Sc. Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE FÍSICA

BUCARAMANGA

2023

EFFECTOS DE ARRASTRE DE MARCOS EN TEORÍAS MODIFICADAS DE LA  
GRAVEDAD CON VIOLACIÓN DE PARIDAD

WILLIAM ANDRÉS JAIMES ESPÍNDOLA  
B.Sc. Física

Trabajo de investigación para optar al título de  
Magister en Física

Director  
Yeinzon Rodríguez García  
Ph.D. Física  
Codirector  
Carlos Mauricio Nieto Guerrero  
Ph.D. Física

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS  
ESCUELA DE FÍSICA  
BUCARAMANGA  
2023

## CONTENIDO

	pág.
<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>14</b>
<b>1. TEORÍAS MODIFICADAS DE LA GRAVEDAD CON GRADOS DE LIBERTAD NO GEOMÉTRICOS</b>	<b>24</b>
1.1. Preliminares	25
1.1.1. Teorema (e inestabilidad) de Ostrogradsky	25
1.1.2. Teorema de Lovelock	26
1.2. Teoría de Horndeski	28
1.3. Teoría generalizada de Proca	31
1.4. Teoría Generalizada de Proca SU(2)	35
<b>2. ARRASTRE DE MARCOS</b>	<b>40</b>
2.1. Método de Hartle	43
2.1.1. Solución angular	45
2.1.2. Solución radial	46
2.2. Método de Hartle para la teoría de Horndeski	49
2.2.1. Solución radial	51
2.3. Método de Hartle para la teoría GP	52
2.3.1. Solución radial	55
2.4. Método de Hartle para la teoría GSU2P	56
2.5. Observaciones sobre arrastre de marcos	59
<b>3. SOLUCIONES</b>	<b>65</b>
3.1. Ecuación de estado para estrellas de neutrones	67

3.2. Soluciones analíticas alrededor del origen	69
3.3. Soluciones numéricas de estrellas de neutrones	75
3.3.1. Estrellas de neutrones en la teoría GP	75
3.3.2. Estrellas de neutrones en la teoría GSU2P	82
3.4. Soluciones tipo partícula	94
<b>4. CONCLUSIONES</b>	<b>99</b>
<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>106</b>
<b>ANEXOS</b>	<b>118</b>

## LISTA DE FIGURAS

	pág.
Figura 1. Perfiles de presión para soluciones obtenidas con diferentes conjuntos de parámetros en la teoría GP.	76
Figura 2. Distribución de masa para diferentes conjuntos de parámetros en la teoría GP.	78
Figura 3. Perfil del campo vectorial para diferentes conjuntos de parámetros en la teoría GP.	79
Figura 4. Arrastre de marcos para diferentes conjuntos de parámetros en la teoría GP.	81
Figura 5. Perfil de $\phi_2$ para diferentes valores de acoplamiento en la teoría GSU2P. Las curvas de color azul corresponden a soluciones para acoplamientos positivos, las rojas a soluciones para acoplamientos negativos y las negras para EYM como caso base. Las líneas continuas corresponden a soluciones de 1-nodo, mientras las líneas discontinuas a soluciones de 2-nodos. Los valores de $b_2$ para cada solución se encuentran en el Apéndice 4.	83
Figura 6. $\phi_{2EYM} - \phi_{2SU(2)}$ para acoplamientos de orden $10^{-1}$ . El panel (1) corresponde al modelo sólo incluyendo la pieza lagrangiana $\mathcal{L}_{4,2}^1$ , el panel (2) corresponde al modelo sólo incluyendo la pieza $\mathcal{L}_{4,2}^2$ y el panel (3) corresponde al modelo con la combinación lineal $\mathcal{L}_{4,2}^4 - \mathcal{L}_{4,2}^1$ .	85

- Figura 7. Perfiles de presión de materia para las soluciones encontradas. Las curvas de línea continua corresponde los perfiles para las soluciones de 1-nodo, mientras que las curvas de línea discontinua corresponden a los perfiles para las soluciones de 2-nodos. Los páneles están agrupados por columnas para los modelos con las mismas piezas lagrangianas y por filas para los modelos con parámetros de acoplamiento del mismo orden. 86
- Figura 8.  $P_{MEYM} - P_{MSU(2)}$ : desviaciones entre los perfiles de presión de EYM y los obtenidos para el modelo en donde sólo se incluye  $\mathcal{L}_{4,2}^4$  con  $\alpha_4 = \pm 10^{-2}$ . 87
- Figura 9. Perfiles de  $\rho_M$  y  $\rho_B$  para las soluciones obtenidas. Las líneas continuas corresponden a  $\rho_M$ , mientras que las líneas discontinuas corresponden a  $\rho_B$ . Los páneles están agrupados por columnas para soluciones con igual densidad lagrangiana. La primera y tercera fila corresponden a soluciones de 1-nodo, mientras la segunda fila corresponde a soluciones de 2-nodos. Los valores del parámetro de acoplamiento se presentan en cada pánel. 89
- Figura 10. Distribución de masa para las soluciones obtenidas. Las líneas continuas corresponden a las soluciones de 1-nodo, mientras las líneas discontinuas corresponden a las soluciones de 2-nodos. Los páneles están agrupados por columnas para modelos con la misma densidad lagrangiana y por filas para modelos con el mismo orden en los parámetros de acoplamiento. 90
- Figura 11. Densidad de energía efectiva para las soluciones de 1-nodo obtenidas. Para las curvas rojas (acoplamientos negativos) se observa una región en la que se alcanzan valores negativos. Esto da cuenta del decrecimiento en la distribución de masa. 91

Figura 12. Arrastre de marcos para las soluciones obtenidas. Las líneas continuas corresponden al arrastre de las soluciones de 1-nodo, mientras las líneas discontinuas al arrastre de las soluciones de 2-nodos. Los paneles están agrupados por columnas para modelos con las mismas piezas lagrangianas y por filas para modelos con parámetros de acoplamiento del mismo orden.

93

## LISTA DE TABLAS

	pág.
Tabla 1. Radio de la estrella normalizado con $l_{\odot}$ para cada una de las soluciones encontradas. Las casillas en donde figura un guion (-) es porque tal combinación de parámetros conduce a perfiles de presión inconsistentes con posibles soluciones admisibles.	77
Tabla 2. Modelos con soluciones asintóticamente planas. El símbolo ( $\checkmark$ ) significa la existencia de solución asintóticamente plana para ese modelo. Por el contrario, el símbolo ( $\times$ ) significa la no existencia.	84
Tabla 3. $\mathcal{R}/l_{\odot}$ para las soluciones obtenidas. Las casillas marcadas con guión corresponde a configuraciones que no poseen solución asintóticamente plana. El valor de $\mathcal{R}/l_{\odot}$ para el caso de EYM es 1.007 para la solución de 1-nodo y 0.674 para la solución de 2-nodos.	85
Tabla 4. Diferencia de masas entre la estrella de neutrones (NS por sus siglas en inglés) y el objeto tipo partícula (PL por sus siglas en inglés).	97
Tabla 5. Valores de $b_2$ para las diferentes soluciones con materia bariónica en la teoría GSU2P.	128
Tabla 6. Valores de $b_2$ para las diferentes soluciones tipo partícula obtenidas en la teoría GSU2P.	129



## LISTA DE ANEXOS

	<b>pág.</b>
Anexo A. Contribución del tensor energía momento a primer orden en $\Omega$	118
Anexo B. Ecuaciones de campo tensoriales	121
Anexo C. Coeficientes de las ecuaciones de campo	123
Anexo D. Valores de $b_2$ para las soluciones en la teoría GSU2P	128

## RESUMEN

**TÍTULO:** EFECTOS DE ARRASTRE DE MARCOS EN TEORÍAS MODIFICADAS DE LA GRAVEDAD CON VIOLACIÓN DE PARIDAD \*

**AUTOR:** William Andrés Jaimes Espíndola, B.Sc. Física \*\*

**PALABRAS CLAVE:** Teoría de Horndeski, teoría generalizada de Proca, teoría generalizada de Proca SU(2), objetos compactos, estrellas de neutrones, arrastre de marcos.

### DESCRIPCIÓN:

Los recientes desarrollos en astronomía de multimensajeros han abierto la posibilidad de evaluar diversos fenómenos gravitacionales y sus predicciones provenientes tanto de Relatividad General (RG) como de teorías modificadas de la gravedad. Adicionalmente, en el contexto astrofísico, los objetos compactos siempre han sido sujetos de interés por ser laboratorios ideales para medir la gravitación en el régimen de campo fuerte. Por tal motivo, en este trabajo se estudia el fenómeno de arrastre de marcos producido por objetos compactos en las teorías de Horndeski, la teoría generalizada de Proca y la teoría generalizada de Proca SU(2). Éste es un efecto puramente relativista en el que el objeto compacto rotante distoriona el espaciotiempo ocasionando que observadores inerciales en caída libre se vean arrastrados, experimentando la aparición de una rapidez angular. Para encontrar las soluciones para este efecto se implementa el método de Hartle, un proceso que permite encontrar el arrastre de marcos generado por objetos compactos lentamente rotantes haciendo uso de las soluciones en el caso estático y esféricamente simétrico para los mismos objetos. El análisis de los resultados numéricos permite extraer información física relevante sobre el rol de los campos en la interacción gravitacional. De manera general, los resultados obtenidos muestran la existencia de características particulares para cada una de las teorías que las hace absolutamente distinguibles en caso de, a futuro, poder acceder a resultados observacionales del arrastre de marcos. Adicionalmente, el proceso llevado a cabo revela la necesidad de imponer restricciones en los parámetros libres de las teorías GP y GSU2P. Si bien en la literatura se han reportado cotas para los parámetros libres de

---

\* Tesis de maestría

\*\* Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Yeinzon Rodríguez García, Ph.D. Física. Codirector: Carlos Mauricio Nieto Guerrero, Ph.D. Física.

las teorías a través de la admisibilidad física de soluciones estáticas y esféricamente simétricas, las aquí estimadas, usando las soluciones de arrastre de marcos, son más restrictivas, lo que muestra la necesidad de implementar este tipo de estudios en las diferentes teorías de gravedad. Finalmente, para la teoría GSU2P, se encontró la existencia de soluciones de objetos compactos constituidos únicamente de campos bosónicos vectoriales. Estos objetos, conocidos en la literatura como solitones, son de interés teórico por ser considerados imitadores de agujeros negros. Se encontró que este tipo de objetos no produce arrastre de marcos, lo que es un elemento muy distintivo de cara a resultados observacionales.

## ABSTRACT

**TITLE:** FRAME DRAGGING EFFECTS IN PARITY VIOLATING MODIFIED GRAVITY THEORIES \*

**AUTHOR:** William Andrés Jaimes Espíndola \*\*

**KEYWORDS:** Horndeski theory, generalized Proca theory, generalized SU(2) Proca theory, compact objects, neutron stars, frame dragging.

### DESCRIPTION:

Recent developments in multi-messenger astronomy have opened up the possibility of evaluating several gravitational phenomena and their predictions from both General Relativity (GR) and modified gravity theories. Additionally, in the astrophysical scenario, compact objects have always been subjects of interest given that they are ideal laboratories for testing gravitation in the strong field regime. For this reason, in this work we study the frame dragging effect produced by compact objects in the Horndeski theory, the generalized Proca theory and the generalized SU(2) Proca theory. This is a purely relativistic effect in which the rotating compact object distorts spacetime such that free falling inertial observers are dragged along, experiencing the appearance of an angular speed. To find solutions to this effect, we used the Hartle method, a process that allows to calculate the frame dragging generated by slowly rotating compact objects by making use of the solutions in the static and spherically symmetric case for the same objects. The numerical results analysis allows to extract relevant physical information about the role of the fields in the gravitational interaction. In general, the obtained results show the existence of particular characteristics for each one of the theories that makes them absolutely distinguishable in the face of future observational frame dragging results. Additionally, the carried out process reveals the need of imposing constrains in the free parameters of the GP and the GSU2P theories. Although several works had reported constrains for the free parameters of these theories through the physical admissibility of static and spherically symmetric solutions, the constrains that we estimated using frame dragging solutions, are more much restrictive that former ones. This shows the need to implement this kind of study in different theories of gravity. Finally, for the GSU2P

---

\* Master Thesis

\*\* Escuela de Física, Facultad de Ciencias, Universidad Industrial de Santander. Director: Yeinzon Rodríguez García, Ph.D. Física. Codirector: Carlos Mauricio Nieto Guerrero, Ph.D. Física.

theory, we found the existence of solutions of compact objects composed solely of bosonic vector fields. These objects are known in the literature as solitons and they are of theoretical interest because they are considered as black holes mimickers. It was found that this kind of objects do not produce frame dragging, which is a very distinctive signal in the face of observational results.

## INTRODUCCIÓN

La Relatividad General (RG) es, indiscutiblemente, la teoría de gravedad más exitosa con la que se cuenta hasta el momento para dar una explicación a diversos fenómenos astrofísicos y cosmológicos en diferentes escalas. Esta teoría ha demostrado tener un gran poder predictivo y explicativo de las observaciones disponibles, que van desde pruebas a escalas del sistema solar (*e.g.* la precesión del perihelio de Mercurio, deflexión de rayos de luz, etc), escalas astrofísicas (*e.g.* lentes y ondas gravitacionales, observaciones de agujeros negros y púlsares binarios, etc.) y escalas cosmológicas, en donde la RG es la base del modelo estándar de la cosmología ( $\Lambda$ CDM) <sup>12</sup>.

Sin embargo, no existe una demostración que avale a la RG como una teoría fundamental que describa los fenómenos gravitacionales en todas las escalas. Por el contrario, diversos resultados teóricos y observacionales como la ineludible aparición de singularidades espaciotemporales <sup>3</sup>, el hecho de ser una teoría no renormalizable <sup>4</sup>, la necesidad de introducir fluidos exóticos como la materia oscura para explicar las

---

<sup>1</sup> W. CLIFFORD. "The Confrontation between General Relativity and Experiment". En: *Living Rev. Relativ.* 17 (2014).

<sup>2</sup> W. CLIFFORD. *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press, 2018.

<sup>3</sup> PENROSE. R. "Gravitational Collapse and Space-Time Singularities". En: *Phys. Rev. Lett.* 14 (1965).

<sup>4</sup> J. DOBOSZEWSKI y N. LINNEMANN. "How not to establish the non-renormalizability of gravity". En: *Found. Phys.* 48 (2018).

anomalías en curvas de rotación de galaxias <sup>56</sup> y la energía oscura como componente fundamental del modelo  $\Lambda$ CDM para explicar la tasa de expansión acelerada actual del universo <sup>7</sup>, entre otros, apuntan a que no lo es.

Por lo anterior, es plausible adoptar la visión de la RG como una teoría efectiva, lo que permite considerar la existencia de teorías *más robustas* que contengan la RG como caso particular, reproduzcan sus éxitos observacionales y, a su vez, logren resolver y explicar los problemas abiertos asociados a la gravedad. Entre el gran panorama de posibilidades para modificar la gravedad está considerar grados de libertad no geométricos acoplados a la curvatura. En esta dirección los pasos se han dado, por simplicidad, primero adicionando un campo escalar, luego un campo vectorial sin simetrías internas y posteriormente un campo vectorial con simetría SU(2). Estas teorías corresponden respectivamente, a la teoría de Horndeski <sup>891011</sup>,

- 
- <sup>5</sup> F. ZWICKY. “Die rotverschiebung von extragalaktischen nebeln”. En: *Helv. Phys. Acta, Suppl.* 6 (1933).
- <sup>6</sup> V. RUBIN y W. FORD. “Rotation of the Andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions”. En: *Astrophys. J.* 159 (1970).
- <sup>7</sup> D. HUTERER y D. L. SHAFER. “Dark energy two decades after: Observables, probes, consistency tests”. En: *Rept. Prog. Phys.* 81 (2017).
- <sup>8</sup> G. W. HORNDESKI. “Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space”. En: *Int. J. Theor. Phys.* 10 (1974).
- <sup>9</sup> A. NICOLIS, R. RATAZZI y E. TRINCHERINI. “The Galileon as a local modification of gravity”. En: *Phys. Rev. D* 79 (2009).
- <sup>10</sup> C. DEFFAYET y col. “From k-essence to generalised Galileons”. En: *Phys. Rev. D.* 84 (2011).
- <sup>11</sup> T. KOBAYASHI, M. YAMAGUCHI y J. YOKOYAMA. “Generalized G-Inflation: Inflation with the Most General Second-Order Field Equations”. En: *Prog. Theor. Phys.* 126 (2011).

generalizada de Proca (GP)<sup>121314151617</sup> y generalizada de Proca SU(2) (GSU2P)<sup>1819</sup><sup>202122</sup>. Ahora bien, cada teoría propuesta puede traer consigo patologías o inestabilidades que deben ser identificadas y removidas de la teoría para que ésta logre ser una verdadera candidata a teoría de gravedad. Para profundizar en estos frentes se han realizado múltiples trabajos para las tres teorías en donde se explora tanto su consistencia teórica, como sus efectos en escenarios cosmológicos y astrofísicos

- 
- <sup>12</sup> G. W. HORNDESKI. “Conservation of Charge and the Einstein-Maxwell Field Equations”. En: *J. Math. Phys.* 17 (1976).
- <sup>13</sup> L. HEISENBERG. “Generalization of the Proca Action”. En: *JCAP* 1405 (2014).
- <sup>14</sup> G. TASINATO. “Cosmic Acceleration from Abelian Symmetry Breaking”. En: *JHEP* 1404 (2014).
- <sup>15</sup> E. ALLYS, P. PETER e Y. RODRIGUEZ. “Generalized Proca action for an Abelian vector field”. En: *JCAP* 1602 (2016).
- <sup>16</sup> E. ALLYS y col. “On the 4D generalized Proca action for an Abelian vector field”. En: *JCAP* 1609 (2016).
- <sup>17</sup> J. BELTRAN JIMENEZ y L. HEISENBERG. “Derivative self-interactions for a massive vector field”. En: *Phys. Lett. B.* 757 (2016).
- <sup>18</sup> Esta estrategia se ha extendido a diferentes combinaciones de campos escalares, vectoriales, y tensoriales, como teorías de multigalileones (más de un campo escalar) (A. PADILLA y V. SIVANESAN. “Covariant multi-galileons and their generalisation”. En: *JHEP* 1304 [2013]) (V.SIVANESAN. “Generalized multiple-scalar field theory in Minkowski space-time free of Ostrogradski ghosts”. En: *Phys. Rev. D* 90 [2014]), escalar-vector-tensor (L. HEISENBERG. “Scalar-Vector-Tensor Gravity Theories”. En: *JCAP* 1810 [2018]), etc.
- <sup>19</sup> La conocida familia de teorías tipo  $f(R)$  corresponde a un caso particular de teorías escalar-tensor en el marco de Einstein (A. DE FELICE y S. TSUJIKAWA. “ $f(R)$  theories”. En: *Living Rev. Rel.* 13 [2010]).
- <sup>20</sup> E. ALLYS, P. PETER e Y. RODRIGUEZ. “Generalized SU(2) Proca Theory”. En: *Phys. Rev. D* 94 (2016).
- <sup>21</sup> J. BELTRAN JIMENEZ y L. HEISENBERG. “Generalized multi-Proca fields”. En: *Phys. Lett. B* 770 (2017).
- <sup>22</sup> A. GALLEGO CADAVID, Y. RODRIGUEZ y L. G. GOMEZ. “Generalized SU(2) Proca theory reconstructed and beyond”. En: *Phys. Rev. D* 102 (2020).



en diferentes escalas (ver por ejemplo <sup>23242526272829303132333435</sup>).

Es importante destacar que si bien hay resultados observacionales que típicamente se han usado para contrastar estas teorías modificadas como lo son pruebas a escalas del sistema solar o la descripción de la historia térmica del universo, el crecimiento de nuevas técnicas observacionales como la astronomía de multimensajeros sugieren poner especial atención en escalas astrofísicas intermedias en donde los

- 
- <sup>23</sup> A. GALLEGO CADAVID e Y. RODRIGUEZ. “A systematic procedure to build the beyond generalized Proca field theory”. En: *Phys. Lett. B.* 798 (2019).
- <sup>24</sup> R. GSPONER y J. NOLLER. “Tachyonic stability priors for dark energy”. En: *Phys. Rev. D* 105 (2022).
- <sup>25</sup> M. ISHAK. “Testing General Relativity in Cosmology”. En: *Living Rev. Relativ* 22 (2019).
- <sup>26</sup> A. DAVIS y S. MELVILLE. “Scalar fields near compact objects: resummation versus UV completion”. En: *JCAP* 2111 (2021).
- <sup>27</sup> J. BARRANCO y col. “Horndeski stars”. En: *JCAP* 2110 (2021).
- <sup>28</sup> A. DE FELICE, L. HEISENBERG y S. TSUJIKAWA. “Observational constraints on generalized Proca theories”. En: *Phys. Rev. D* 95 (2017).
- <sup>29</sup> A. De Felice y col. “Cosmology in generalized Proca theories”. En: *JCAP* 1606 (2016).
- <sup>30</sup> C. DE RHAM y col. “Quantum stability of a new Proca theory”. En: *Phys. Rev. D* 105 (2022).
- <sup>31</sup> R. KASE, M. MINAMITSUJI y S. TSUJIKAWA. “Relativistic stars in vector-tensor theories”. En: *Phys. Rev. D.* 97 (2018).
- <sup>32</sup> J. C. GARNICA y col. “Constant-Roll Inflation in the Generalized SU(2) Proca Theory”. En: *Annalen Phys.* 534 (2022).
- <sup>33</sup> L. G. GOMEZ e Y. RODRIGUEZ. “Stability Conditions in the Generalized SU(2) Proca Theory”. En: *Phys. Rev. D* 100 (2019).
- <sup>34</sup> Y. RODRIGUEZ y A. NAVARRO. “Non-Abelian  $S$ -term dark energy and inflation”. En: *Phys. Dark Univ.* 19 (2018).
- <sup>35</sup> J. N. MARTINEZ y col. “Particle-like solutions in the generalized SU(2) Proca theory”. En: *JCAP* 04 (2023), pág. 032.

objetos compactos como enanas blancas, estrellas de neutrones y agujeros negros se vuelven protagonistas <sup>363738</sup>. Además de las mediciones directas, recientemente se ha visto una gran cantidad de propuestas que buscan extraer información relevante de forma indirecta, no sólo de los resultados actuales, sino también de los posibles resultados futuros de proyectos que están en camino <sup>39404142</sup>. Esto amplía enormemente el panorama de datos al que se puede acceder para poner a prueba las teorías modificadas de la gravedad, restringir los parámetros libres y buscar desviaciones respecto a RG.

Una de las propuestas más exploradas es el estudio de soluciones, tanto internas como externas, de objetos compactos en un espaciotiempo estático y esféricamente simétrico. En particular, los trabajos de Babichev *et.al.* <sup>43</sup> y L. Heisenberg *et. al.* <sup>44</sup>, entre otros, han mostrado que, en general, las soluciones exteriores en las teorías

---

<sup>36</sup> B. P. ABBOTT y col. "GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral". En: *Phys. Rev. Lett.* 119 (2017).

<sup>37</sup> B. P. ABBOTT y col. "Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger". En: *Astrophys. J. Lett.* 848 (2017).

<sup>38</sup> B. P. ABBOTT y col. "Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A". En: *Astrophys. J. Lett.* 848 (2017).

<sup>39</sup> L. AMENDOLA y col. "Cosmology and fundamental physics with the Euclid satellite". En: *Living Rev. Rel.* 21 (2018).

<sup>40</sup> J. AASI y col. "Advanced LIGO". En: *Class. Quant. Grav.* 32 (2015).

<sup>41</sup> K. SOMIYA. "Detector configuration of KAGRA: The Japanese cryogenic gravitational-wave detector". En: *Class. Quant. Grav.* 29 (2012).

<sup>42</sup> D. PSALTIS y col. "Gravitational Test Beyond the First Post-Newtonian Order with the Shadow of the M87 Black Hole". En: *Phys. Rev. Lett.* 125 (2020).

<sup>43</sup> E. BABICHEV, C. CHARMOUSIS y A. LEHEBEL. "Asymptotically flat black holes in Horndeski theory and beyond". En: 1704 (2017).

<sup>44</sup> L. HEISENBERG y col. "Black holes in vector-tensor theories". En: *JCAP* 1708 (2017).

de Horndeski y GP se reducen a la solución de Schwarzschild y Reissner-Norsdröm con carga efectiva, respectivamente. El responsable de estos resultados es el mecanismo de Vainshtein: un proceso natural de apantallamiento en el que, en una región determinada con frontera definida por el *radio de Vainshtein*  $r_v$ , las contribuciones del término cinético del campo son lo suficientemente grandes como para suprimir los efectos de los acoplamientos, es decir, los resultados conducen a los mismos de RG <sup>45</sup>. La situación cambia para soluciones interiores, pues no hay apantallamiento natural, por lo que los resultados muestran desviaciones parciales con respecto a RG. Este resultado se destaca porque, para ecuaciones de estado típicas de estrellas de neutrones, pueden alcanzarse estrellas con masa por encima del límite de Tolman propio de estrellas de neutrones en RG<sup>46</sup> <sup>47</sup>. Recientemente este resultado se ha vuelto atractivo para explicar el problema de identificación relacionado con la binaria de masa  $2.59^{+0.08}_{-0.09}M_{\odot}$  del evento GW190814 <sup>48</sup>, la cual es muy masiva para ser una estrella de neutrones y muy ligera para ser un agujero negro, por lo que se considera que cae en una brecha de no identificación. Se ha visto que con teorías modificadas es posible cerrar dicha brecha, lo que da la oportunidad de clasificar el objeto.

Las teorías de Horndeski y la GP han sido estudiadas en escenarios astrofísicos en

---

<sup>45</sup> A. I. VAINSHTEIN. “To the problem of nonvanishing gravitation mass”. En: *Phys. Lett. B* 39 (1972).

<sup>46</sup> Dicho límite es de  $2.17M_{\odot}$  para estrellas estáticas y puede extenderse a alrededor de 18 % – 20 % si se considera rotación (B. MARGALIT y B. METZGER. “Constraining the Maximum Mass of Neutron Stars From Multi-Messenger Observations of GW170817”. En: *Astrophys. J. Lett.* 850 [2017]) (M. RUIZ, S. SHAPIRO y A. TSOKAROS. “GW170817, General Relativistic Magnetohydrodynamic Simulations, and the Neutron Star Maximum Mass”. En: *Phys. Rev. D* 97 [2018]).

<sup>47</sup> R. NUNES, J. COELHO y J. DE ARAUJO. “Weighing massive neutron star with screening gravity: a look on PSR J0740 + 6620 and GW190814 secondary component”. En: *Eur. Phys. J. C* 80 (2020).

<sup>48</sup> R. ABBOTT y col. “GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 Solar Mass Black Hole with a 2.6 Solar Mass Compact Object”. En: *Astrophys. J. Lett.* 896 (2020).

el régimen de campo fuerte para una geometría esféricamente simétrica, conduciendo no sólo a resultados coherentes con datos observacionales, sino que también ha permitido restringir los parámetros libres de la teoría. No obstante, las teorías GP y GSU2P poseen ciertos términos que violan paridad que se hacen cero en una configuración esféricamente simétrica y que, por lo tanto, han quedado excluidos de los trabajos en mención. Otras configuraciones geométricas, como la axialmente simétrica, no anulan estos términos, por lo que sus efectos pueden llegar a ser visibles en este tipo de escenarios. El escenario más explorado en esta geometría usando teorías modificadas es el de objetos compactos lentamente rotantes, el cual es particularmente interesante porque allí ya se manifiesta el efecto de arrastre de marcos, el cual puede ser usado para estimar desviaciones respecto a RG. Sin embargo, el efecto de arrastre de marcos sólo ha sido estudiado para la teoría de Horndeski y la GP y limitándose a ciertos términos, entre los que se han excluido aquellos que violan paridad <sup>495051</sup>.

Por otra parte, la teoría GSU2P es más joven que las anteriores, por lo que, en contextos astrofísicos, la literatura es escasa. No obstante, en 1988, Bartnik y McKinnon publican la primera solución numérica para objetos compactos regulares, estáticos, esféricamente simétricos y asintóticamente planos en la teoría Einstein-Yang-Mills (EYM), la cual tiene la presencia de un campo vectorial con simetría interna SU(2), en donde se considera que posee únicamente parte magnética <sup>52</sup>. Este trabajo se

---

<sup>49</sup> C. CHARMOUSIS y col. “Astrophysical constraints on compact objects in 4D Einstein-Gauss-Bonnet gravity”. En: *arXiv preprint arXiv:2109.01149* (2021).

<sup>50</sup> J. CHAGOYA y G. TASINATO. “Stealth configurations in vector-tensor theories of gravity”. En: *JCAP* 1801 (2018).

<sup>51</sup> M. MINAMITSUJI. “Solutions in the generalized Proca theory with the nonminimal coupling to the Einstein tensor”. En: *Phys. Rev. D* 94 (2016).

<sup>52</sup> R. BARTNIK y J. MCKINNON. “Particlelike Solutions of the Einstein-Yang-Mills Equations”. En: *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988).

trae a colación porque tal teoría es un caso particular de la teoría GSU2P. Estas soluciones están dotadas de un ingrediente que las hace especiales: no se considera la presencia de un fluido de materia bariónica, es decir, el objeto está constituido únicamente de campos vectoriales. A estas soluciones se les llamó soluciones *tipo partícula* y posteriormente se les dió el nombre de “solitones-BK”, en honor a los autores <sup>53</sup>. Posteriormente, varios trabajos presentaron soluciones para agujeros negros con la misma configuración geométrica <sup>5455</sup>. No obstante, los trabajos de Straumann y Zhou mostraron que tanto los solitones-BK como los agujeros negros encontrados eran inestables <sup>565758</sup>. Finalmente, B. Kleihaus *et. al.* estudian agujeros negros rotantes para esta misma teoría y encuentran soluciones tipo Kerr para las que la rapidez angular que experimenta un marco inercial (lo que posteriormente se definirá como el arrastre de marcos) tiene un valor máximo de aproximadamente  $0.07507 \Omega$ , en donde  $\Omega$  es la rapidez angular del agujero negro <sup>59</sup>.

Recientemente, J. N. Martinez *et. al.* presentaron soluciones tipo partícula, esféricamente simétricas, asintóticamente planas y en donde consideraron únicamente la

---

<sup>53</sup> M. S. VOLKOV y D. V. GAL'TSOV. “Gravitating nonAbelian solitons and black holes with Yang-Mills fields”. En: *Phys. Rept.* 319 (1999).

<sup>54</sup> M. S. VOLKOV y D. V. GAL'TSOV. “Non-Abelian Einstein-Yang-Mills black holes”. En: *JETP* 50 (1989).

<sup>55</sup> P. BIZON. “Colored black holes”. En: *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990).

<sup>56</sup> N. STRAUMANN y Z. ZHOU. “Instability of the Bartnik-Mckinnon Solution of the Einstein Yang-Mills Equations”. En: *Phys. Lett. B* 237 (1990).

<sup>57</sup> N. STRAUMANN y Z. ZHOU. “Instability of a colored black hole solution”. En: *Phys. Lett. B* 243 (1990).

<sup>58</sup> Z. ZHOU. “Instability of SU(2) Einstein-Yang-Mills solitons and non-abelian black holes.” En: *Helv. Phys. Acta.* 65 (1992).

<sup>59</sup> B. KLEIHAUS, J. KUNZ y F. NAVARRO-LERIDA. “Rotating Einstein-Yang-Mills black holes”. En: *Phys. Rev. D* 66 (2002).

parte magnética del campo vectorial pero para una densidad lagrangiana de la teoría GSU2P que respetara que la rapidez de propagación de las ondas gravitacionales fuera lumínica <sup>35</sup>. En el mismo trabajo también mostraron que para ciertos valores de los parámetros de acoplamiento las soluciones encontradas eran estables. Sin embargo, en la literatura no hay evidencia de soluciones para objetos compactos rotantes en la teoría GSU2P.

Motivado en los hechos expuestos, el presente trabajo estudia el arrastre de marcos en estrellas de neutrones lentamente rotantes en las teorías de Horndeski, GP y GSU2P. En ese sentido, el capítulo 1 presenta las teorías estudiadas, así como un breve repaso de su construcción. Esto con el objetivo de ver las similitudes que las conectan entre sí y las diferencias que permitirán encontrar elementos distintivos para cada una de ellas.

En el capítulo 2 se presenta el fenómeno de arrastre de marcos y el método de Hartle, desarrollado para encontrar el arrastre producido por objetos lentamente rotantes en el contexto de RG. Adicionalmente, se aplica éste método a las teorías consideradas de Horndeski, GP y GSU2P y se obtienen las ecuaciones diferenciales que describen su comportamiento, así como soluciones analíticas en ciertas regiones de interés. Por último, se presenta una sección con las principales observaciones y propuestas para medir el arrastre de marcos producido por la tierra, así como el producido por agujeros negros y estrellas de neutrones. Esta perspectiva observacional muestra un panorama positivo para poner a prueba las predicciones de arrastre de marcos hechas tanto en RG, como en teorías modificadas.

Finalmente, los capítulos 3 y 4 presentan las soluciones encontradas para cada una de las teorías su análisis y las conclusiones a las que conducen. Ya que el método de Hartle responde a una aproximación perturbativa, se presentan primero las soluciones estáticas y esféricamente simétricas, las cuales sirven para entender el rol del campo vectorial y, posteriormente, identificar las razones de las modificaciones

encontradas para el arrastre de marcos. Adicionalmente, un elemento importante de los resultados es la serie de restricciones que deben imponerse en los parámetros de acoplamiento de las teorías para garantizar que los resultados sean físicamente viables.

A lo largo del documento se usan unidades geometrizadas  $G = c = 1$ , en donde  $G = 6.674 \times 10^{-11} \text{ N m}^2 \text{ kg}^{-2}$  (en SI) es la constante de gravitación universal y  $c = 3 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  (en SI) es la rapidez de la luz en el vacío. Los operadores  $\nabla$  y  $\square$  denotan la derivada covariante y el operador D'Alambertiano ( $\nabla^\mu \nabla_\mu$ ), respectivamente. Para el tensor métrico se considera una signatura mayormente positiva (3, 1). Por su parte, el tensor de Riemman y el tensor de Ricci se definen como

$$R^\mu{}_{\nu\rho\sigma} = \nabla_\rho \Gamma^\mu_{\nu\sigma} - \nabla_\sigma \Gamma^\mu_{\nu\rho} + \Gamma^\mu_{\lambda\rho} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\mu_{\lambda\sigma} \Gamma^\lambda_{\nu\rho},$$

$$+R_{\mu\nu} = R^\alpha{}_{\mu\alpha\nu}.$$

Finalmente, el escalar de Ricci se obtiene de la contracción  $R = R^\mu{}_\mu$ .

## 1. TEORÍAS MODIFICADAS DE LA GRAVEDAD CON GRADOS DE LIBERTAD NO GEOMÉTRICOS

El propósito del presente capítulo es presentar las teorías modificadas de la gravedad que se consideraron en este trabajo: la teoría de Horndeski, la teoría generalizada de Proca (GP) y la teoría generalizada de Proca  $SU(2)$  (GSU2P).

Existen múltiples formas de construir teorías modificadas de la gravedad y todas son, *a priori*, igualmente válidas, siempre que no existan patologías asociadas a su acción. La investigación ha revelado ciertas condiciones necesarias para determinar si una teoría de gravedad puede llegar a describir la realidad. Por ello, la primera sección de este capítulo presenta dos teoremas que son de gran utilidad para reducir el número de teorías disponibles: los teoremas de Lovelock y Ostrogradsky. En las secciones subsecuentes se presentan las teorías consideradas, las cuales no sólo cumplen con los teoremas descritos, sino que, además, tienen consideraciones físicas adicionales que motivan su construcción y estudio. Algunas de estas consideraciones también se presentan.

Es pertinente hacer dos aclaraciones: la primera, es que aquí se presentan las ideas fundamentales sobre las que se sostienen cada una de las teorías, pero no se pretende profundizar en los argumentos físico matemáticos, ni en los pormenores detrás de la construcción de las mismas. Para ahondar en los detalles de la construcción de las teorías, se recomienda revisar las respectivas referencias. La segunda es que las tres teorías estudiadas fueron escogidas porque comparten características que motivan su estudio en conjunto. No obstante, existen muchas otras teorías con características físicas interesantes y que merecen ser estudiadas en escenarios astrofísicos como el de objetos compactos rotantes, pero que no fueron consideradas porque se salen de los propósitos de este trabajo.



## 1.1. Preliminares

**1.1.1. Teorema (e inestabilidad) de Ostrogradsky** Las teorías físicas que brindan la mejor descripción de las interacciones fundamentales tienen ecuaciones de campo de segundo orden en sus derivadas espaciotemporales. La gravitación no es la excepción; la ecuación de Poisson que describe la gravedad newtoniana y las ecuaciones de campo de Einstein, las cuales describen la RG, son ecuaciones diferenciales de segundo orden en las derivadas espaciotemporales del campo gravitacional y del tensor métrico, respectivamente. Sin embargo, ¿por qué debe ser así? ¿Puede una teoría de la gravedad (y en general una teoría física) tener ecuaciones de campo de orden superior a dos en las derivadas espaciotemporales? Alrededor de 1850, M. Ostrogradsky formula un teorema en donde brinda respuestas a estas preguntas <sup>60</sup>:

**Teorema:** *Un lagrangiano con dependencia de una coordenada generalizada  $q$  y sus primeras  $N$  derivadas respecto al tiempo  $L = L(q, \dot{q}, \dots, q^{(N)})$ , que satisface la condición de no degeneración  $\partial L / \partial q^{(N)} \neq 0$  y que conduce a ecuaciones de Euler-Lagrange de orden  $2N$  en las derivadas respecto al tiempo, tiene un Hamiltoniano de la forma*

$$H = P_1 Q_2 + P_2 Q_3 + \dots + P_{N-1} Q_N + P_N g(Q, Q_1, \dots, Q_N, P_N) \quad (1)$$
$$- L[Q_1, Q_2, \dots, g(Q_1, \dots, Q_N, P_N)],$$

*es decir, éste posee dependencia lineal de los primeros  $N - 1$  momentos canónicos.* Es importante recordar que, salvo transformaciones canónicas, el Hamiltoniano es la energía del sistema. Ya que *a priori* no se conoce la forma funcional de  $g$ , no

---

<sup>60</sup> M. OSTROGRADSKY. "Memoires sur les equations differentielles, relatives au probleme des isoperimetres". En: *Mem. Acad. St. Petersbourg* 6 (1850).

se puede concluir nada sobre el comportamiento del Hamiltoniano respecto del  $N$ -ésimo momento canónico ( $P_N$ ). Sin embargo, la dependencia lineal respecto a los primeros  $N - 1$  momentos canónicos generalizados ( $P_i, i = 1, \dots, N - 1$ ) implica que la energía barrerá un espacio de valores entre menos infinito e infinito, es decir, no posee estado base, lo cual trae graves problemas tanto a nivel clásico como cuántico <sup>616263</sup>. Esto es conocido como *inestabilidad de Ostrogradsky*, y una condición necesaria para evitarla es exigir que las ecuaciones de evolución sean, a lo sumo, de segundo orden. Si bien la formulación original de Ostrogradsky está hecha en términos de variables discretas  $q$ , este teorema puede ser demostrado en el contexto de teoría de campos para densidades lagrangianas  $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\phi, \dot{\phi}, \dots, \phi^{(N)})$ , con consecuencias completamente idénticas.

**1.1.2. Teorema de Lovelock** La densidad lagrangiana de Einstein-Hilbert ( $\mathcal{L} = R/16\pi$ ) tiene dependencia de las primeras y segundas derivadas del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  <sup>64</sup>. No obstante, las ecuaciones de campo obtenidas son de segundo orden en las derivadas de  $g$ . Esto satisface la condición necesaria para evadir la inestabilidad de Ostrogradsky presentada. Sin ánimo de desconocer el gran éxito de la RG explicando los fenómenos gravitacionales, se puede hacer un primer intento (un tanto tímido) de ir más allá de la RG formulando la pregunta: ¿existe alguna otra posibilidad de ecuaciones de campo gravitacional que dependan únicamente de la métrica en 4 dimensiones? De ser afirmativa ¿Por qué no se considera como teoría

---

<sup>61</sup> R. P. WOODARD. "Avoiding dark energy with  $1/r$  modifications of gravity". En: *Lect. Notes Phys.* 720 (2007).

<sup>62</sup> R. P. WOODARD. "Ostrogradsky's theorem on Hamiltonian instability". En: *Scholarpedia* 10 (2015).

<sup>63</sup> F. SBISA. "Classical and quantum ghosts". En: *Eur. J. Phys* 6 (2015).

<sup>64</sup>  $R = R(\partial\Gamma(\partial g))$  por definición de la conexión de Levi-Civita.

de gravedad? Para responder esta pregunta se hace uso del teorema de Lovelock<sup>6566</sup>.

**Teorema:** *En un espaciotiempo 4-dimensional, cualquier tensor  $A^{\mu\nu}$  simétrico, que dependa únicamente del tensor métrico y sus primeras y segundas derivadas espaciotemporales, que esté libre de divergencia  $A^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$  y que describa las ecuaciones de campo en el vacío  $A^{\mu\nu} = 0$ , está dado por*

$$A^{\mu\nu} = aG^{\mu\nu} + bg^{\mu\nu}, \quad (2)$$

en donde  $a$  y  $b$  son constantes arbitrarias y  $G^{\mu\nu}$  es el tensor de Einstein.

El teorema muestra que, bajo las condiciones del mismo, no hay posibilidad de modificar las ecuaciones de campo de Einstein salvo por la inclusión de la constante cosmológica. Por lo tanto, si se quiere formular una teoría más allá de la RG, hay que violar algunas de las condiciones del teorema para así evadir su resultado. En ese sentido, las posibilidades que se abren son: elevar el número de dimensiones espaciotemporales, considerar grados de libertad geométricos diferentes a la curvatura (concretamente la torsión y la no metricidad) o considerar nuevos grados de libertad gravitacionales diferentes a los geométricos. En este trabajo se considera únicamente la última posibilidad. Las teorías a estudiar incluyen grados de libertad diferentes a los geométricos: la teoría de Horndeski introduce un campo escalar, la GP un campo vectorial sin simetrías internas y la GSU2P un campo vectorial con simetría global SU(2).

---

<sup>65</sup> D. LOVELOCK. "The Einstein tensor and its generalizations". En: *J. Math. Phys.* 12 (1971).

<sup>66</sup> D. LOVELOCK. "The four-dimensionality of space and the Einstein tensor". En: *J. Math. Phys.* 13 (1972).

## 1.2. Teoría de Horndeski

G. W. Horndeski propone en el año 1974 una teoría en la que su acción comprende un campo escalar acoplado a la gravedad que lleva a las ecuaciones de Euler-Lagrange más generales en un espaciotiempo 4-dimensional que evaden posibles inestabilidades de Ostrogradsky limitando la acción a ser cuando mucho de segundo orden en las derivadas del campo <sup>8</sup>. Esta teoría es conocida como la *teoría de Horndeski*. Más de treinta años después, los trabajos de A. Nicolis *et. al.*, <sup>9</sup> y C. Deffayet *et. al.*, <sup>10</sup> presentan la acción más general posible que incluya todos los términos que contengan un campo escalar y hasta su segunda derivada espaciotemporal y que, a su vez, las ecuaciones de movimiento sean, cuando mucho, de segundo orden en las derivadas del campo la cual fue denominada teoría de Galileones escalares. Sin embargo, T. Kobayashi *et. al.*, mostraron que la teoría de Galileones escalares es equivalente a la presentada por Horndeski décadas atrás <sup>11</sup>. Para entender los elementos fundamentales de esta teoría es útil revisar la lógica de su construcción. De acuerdo a la metodología presentada en la ref. <sup>67</sup> se considera un campo escalar  $\pi$  en espaciotiempo plano; la acción más general que contiene el campo escalar y hasta segundas derivadas del mismo se construye mediante la siguiente estrategia:

- Se identifican todos los posibles términos invariantes de Lorentz. Esto se hace buscando todas las formas posibles de contraer  $\partial_\mu\pi$  y  $\partial_\mu\partial_\nu\pi$  con tensores métricos  $\eta_{\mu\nu}$ .
- Todos los términos obtenidos se agrupan en combinaciones lineales generales.

---

<sup>67</sup> Y. RODRIGUEZ y A. NAVARRO. "Scalar and vector Galileons". En: *J. Phys. Conf. Ser.* 831 (2017).

- Se aplican las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \pi} - \partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \pi)} + \partial_\mu \partial_\nu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \partial_\nu \pi)} = 0, \quad (3)$$

y se establecen relaciones entre los coeficientes de las combinaciones lineales tal que se anulen todos los términos de orden superior a dos en las ecuaciones diferenciales.

- Finalmente, para llevar al caso más general, se multiplican cada una de las relaciones obtenidas por funciones generales de  $\pi$  y  $X \equiv -\partial_\lambda \pi \partial^\lambda \pi / 2$ .

Tras estos pasos, la acción obtenida es

$$S = \int \sum_{N=2}^5 \mathcal{L}_{N,\pi}^{Gal} d^4x, \quad (4)$$

en donde

$$\mathcal{L}_{2,\pi}^{Gal} \equiv f_2(\pi, X), \quad (5)$$

$$\mathcal{L}_{3,\pi}^{Gal} \equiv f_3(\pi, X) \square \pi, \quad (6)$$

$$\mathcal{L}_{4,\pi}^{Gal} \equiv f_4(\pi, X) [(\square \pi)^2 - (\partial_\mu \partial_\nu \pi)(\partial^\mu \partial^\nu \pi)], \quad (7)$$

$$\mathcal{L}_{5,\pi}^{Gal} \equiv f_5(\pi, X) [(\square \pi)^3 - 3(\square \pi)(\partial_\mu \partial_\nu \pi)(\partial^\mu \partial^\nu \pi) + 2(\partial_\mu \partial^\nu \pi \partial_\nu \partial^\rho \pi \partial_\rho \partial^\mu \pi)]. \quad (8)$$

Para llevar la teoría a espaciotiempo curvo, las derivadas parciales se reemplazan por derivadas covariantes. No obstante, debido a la no conmutatividad de éstas, ciertos términos que *a priori* conducen a derivadas de orden superior a dos no se anulan de forma natural, por lo que se hace necesario introducir contratérminos apropiados que garanticen ecuaciones diferenciales de hasta segundo orden. Una

vez realizado este proceso, las piezas lagrangianas  $\mathcal{L}_{N,\pi}^{Gal}$  toman la forma

$$\mathcal{L}_{2,\pi}^{Gal} \equiv G_2(\pi, X), \quad (9)$$

$$\mathcal{L}_{3,\pi}^{Gal} \equiv G_3(\pi, X)\square\pi, \quad (10)$$

$$\mathcal{L}_{4,\pi}^{Gal} \equiv G_4(\pi, X)R + G_{4,X}[(\square\pi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\pi)], \quad (11)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{5,\pi}^{Gal} \equiv & G_5(\pi, X)G_{\mu\nu}(\nabla^\mu\nabla^\nu\pi) \\ & - \frac{1}{6}G_{5,X}[(\square\pi)^3 - 3(\square\pi)(\nabla_\mu\nabla_\nu\pi)(\nabla^\mu\nabla^\nu\pi) + 2(\nabla_\mu\nabla^\nu\pi\nabla_\nu\nabla^\rho\pi\nabla_\rho\nabla^\mu\pi)], \end{aligned} \quad (12)$$

en donde  $g$  es el determinante del tensor métrico  $g_{\mu\nu}$ ,  $R$  es el escalar de Ricci,  $G_{\mu\nu}$  el tensor de Einstein,  $\nabla$  denota el operador derivada covariante y  $G_{N,X} \equiv \partial G_N/\partial X$ . En la ref <sup>10</sup> se muestra que no existen términos adicionales para esta teoría si se consideran contracciones con un mayor número de primeras o segundas derivadas covariantes. No obstante, J. Gleyzes, *et. al.*, presentan en la ref. <sup>68</sup> nuevos términos que extienden  $\mathcal{L}_{4,\pi}^{Gal}$  y  $\mathcal{L}_{5,\pi}^{Gal}$ , que si bien llevan a ecuaciones de campo de orden superior a dos en las derivadas espaciotemporales del campo escalar, no conducen a la inestabilidad de Ostrogradsky por ser piezas lagrangianas degeneradas. Estos términos son

$$\mathcal{L}_{4,\pi}^{GLPV} = F_4(\pi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\lambda\omega\chi\eta}\nabla_\mu\pi\nabla_\lambda\pi\nabla_\nu\nabla_\omega\pi\nabla_\rho\nabla_\chi\pi, \quad (13)$$

$$\mathcal{L}_{5,\pi}^{GLPV} = F_5(\pi, X)\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}\epsilon^{\lambda\omega\chi\eta}\nabla_\mu\pi\nabla_\lambda\pi\nabla_\nu\nabla_\omega\pi\nabla_\rho\nabla_\chi\pi\nabla_\sigma\nabla_\eta\pi, \quad (14)$$

en donde  $F_4$  y  $F_5$  son funciones arbitrarias de  $X$  y  $\epsilon^{\mu\nu\rho\sigma}$  corresponde al tensor de Levi-Civita; estas nuevas piezas son conocidas como *términos más allá de Horndeski*. Vale la pena destacar que esta teoría contiene acoplamientos mínimos (en  $\mathcal{L}_2$  y  $\mathcal{L}_3$ ) y no mínimos (en  $\mathcal{L}_4$  y  $\mathcal{L}_5$ ) entre el campo escalar y la curvatura. Por otra parte,

---

<sup>68</sup> J. GLEYZES. y col. "Healthy theories beyond Horndeski". En: *Phys. Rev. Lett.* 114 (2015).

en esta teoría no se encuentran términos que conduzcan a violación de paridad.

### 1.3. Teoría generalizada de Proca

Siguiendo con la idea de considerar nuevos grados de libertad gravitacionales mediante la inclusión de campos adicionales, el paso natural subsecuente al campo escalar se da en dirección de campos vectoriales. El primer caso corresponde a campos sin simetría interna. El trabajo de L. Heisenberg y G. Tasinato presentado en las refs. <sup>1314</sup> muestra la acción construida con un campo vectorial más el tensor métrico que generaliza las interacciones del campo vectorial sin cambiar el número de grados de libertad que se propagan. Esta es la acción de Galileones vectoriales, la cual, con el desarrollo de importantes trabajos posteriores, se completó y consolidó como una generalización de la teoría de Proca, llevando a la teoría generalizada de Proca <sup>151617</sup>. Su metodología inicial de construcción es completamente análoga a la teoría de Horndeski y se presenta en detalle en la ref <sup>67</sup>. De hecho, debido a la descomposición de Helmholtz, todo campo vectorial espaciotemporal puede ser separado en dos piezas:

$$B_\mu = \mathcal{B}_\mu + \partial_\mu \pi, \quad (15)$$

en donde  $\mathcal{B}_\mu$  es un campo vectorial sin divergencia y  $\partial_\mu \pi$ , por ser el gradiente de un campo escalar, corresponde al grado de libertad longitudinal del campo  $B_\mu$ . Así, al llevar la teoría de Proca al límite longitudinal  $B_\mu \rightarrow \partial_\mu \pi$ , se debe obtener la teoría escalar de Horndeski.

Tiempo después, L. Heisenberg propone en la ref. <sup>69</sup> nuevas piezas de lagrangiano cuyo límite escalar corresponde a los términos más allá de Horndeski. Sin embargo, no presenta una construcción formal de estos términos. Este resultado llevó a con-

---

<sup>69</sup> L. HEISENBERG, R. KASE y S. TSUJIKAWA. "Beyond generalized Proca theories". En: *Phys. Lett.* B760 (2016).

cluir que la GP estaba aún incompleta. A. Gallego Cadavid y Y. Rodríguez muestran en la ref. <sup>23</sup> la respuesta a este problema. El procedimiento usual, heredado de la construcción de la teoría de Horndeski, considera la construcción en espaciotiempo plano para luego promover la acción final a espaciotiempo curvo mediante el cambio de derivadas parciales por derivadas covariantes. Si bien en este proceso se añaden los contratérminos requeridos para evadir grados de libertad indeseados, debido a la no conmutatividad de las derivadas covariantes, se ha dejado de lado información relevante al ser construida inicialmente en espaciotiempo plano, removiendo así términos que son redundantes en espaciotiempo plano pero no en espaciotiempo curvo.

Por lo tanto, A. Gallego Cadavid y Y. Rodríguez modifican el procedimiento ciñéndose a los siguientes pasos:

- Se construyen todos los posibles términos invariantes ante transformaciones de Lorentz, obtenidos mediante contracciones del campo vectorial  $B_\mu$  y su primera derivada parcial  $\partial_\mu B_\nu$ , el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  y el tensor de Levi-Civita  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$ .
- Se multiplica cada uno de los términos por funciones arbitrarias de  $X = -B^\mu B_\mu/2$  y se agrupan en combinaciones lineales generales.
- Se establecen relaciones entre las funciones de manera que no se propaguen más de tres grados de libertad; esto se garantiza mediante la *condición Hessiana*  $\mathcal{H}^{0\omega} = 0$  <sup>13</sup>, en donde la matriz Hessiana primaria del lagrangiano se define como

$$\mathcal{H}^{\varepsilon\omega} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{B}_\varepsilon \partial \dot{B}_\omega}, \quad (16)$$

en donde  $\dot{B}_\varepsilon = \partial_0 B_\varepsilon$  denota derivada respecto al tiempo del campo vectorial.

- Se lleva la teoría a espaciotiempo curvo promoviendo las derivadas parciales a derivadas covariantes.



- Se identifican términos redundantes entre diferentes piezas de lagrangiano y otros que se relacionan en forma de divergencias de corrientes  $\nabla_\mu J^\mu$  y se eliminan de la acción general. Esto último se justifica porque dichos términos no aportan información nueva a las ecuaciones de movimiento finales.
- Se lleva la teoría al límite escalar, haciendo  $B_\mu \rightarrow \nabla_\mu \pi$ , y se agregan los contratérminos necesarios para verificar que se obtiene la teoría de Horndeski.

La acción final después de esta metodología se reduce a

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left[ F + \sum_{i=2}^6 \mathcal{L}_i + \mathcal{L}^N + \mathcal{L}_m \right], \quad (17)$$

en donde  $g$ , de nuevo, corresponde al determinante del tensor métrico,  $\mathcal{L}_m$  corresponde al lagrangiano de materia,  $F_{\mu\nu} = \nabla_\mu B_\nu - \nabla_\nu B_\mu$  es el tensor de Faraday,  $S_{\mu\nu} = \nabla_\mu B_\nu + \nabla_\nu B_\mu$  su versión simétrica y

$$\mathcal{L}_2 = G_2(X, F, \tilde{F}, Y), \quad (18)$$

$$\mathcal{L}_3 = G_3(X) S^\mu{}_\mu, \quad (19)$$

$$\mathcal{L}_4 = G_4(X) R + \frac{1}{4} G_{4,X} [(S^\mu{}_\mu)^2 - S_{\mu\nu} S^{\mu\nu}], \quad (20)$$

$$\mathcal{L}_5 = G_5(X) G_{\mu\nu} S^{\mu\nu} + \frac{3}{4} G_{5,X} [(S^\mu{}_\mu)^3 - 3(S^\mu{}_\mu) S_{\rho\sigma} S^{\sigma\rho} + 2S_{\rho\sigma} S^{\nu\rho} S^{\sigma\nu}] \quad (21)$$

$$- g_5(X) \tilde{F}^{\alpha\mu} \tilde{F}^\beta{}_\mu S_{\alpha\beta},$$

$$\mathcal{L}_6 = G_6(X) L^{\mu\nu\alpha\beta} F^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} + G_{6,X}(X) \tilde{F}^{\alpha\beta} \tilde{F}^{\mu\nu} S_{\alpha\mu} S_{\beta\nu}, \quad (22)$$

con

$$\begin{aligned} F &= -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, & Y &= B^\mu B^\nu F_\mu{}^\alpha F_{\nu\alpha}, \\ \tilde{F}^{\mu\nu} &= \frac{1}{2} \epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\alpha\beta}, & L^{\mu\nu\alpha\beta} &= \epsilon^{\mu\nu\rho\sigma} \epsilon^{\alpha\beta\gamma\delta} R_{\rho\sigma\gamma\delta}, \end{aligned} \quad (23)$$

en donde  $\tilde{F}$  y  $L$  corresponden al dual de Hodge de  $F$  y al doble dual de Riemann, respectivamente. Cada  $G_i$  es una función arbitraria de  $X$  y  $G_{i,X}$  corresponde a su derivada respecto a  $X$ . Los términos  $\mathcal{L}_2$  a  $\mathcal{L}_6$  componen la GP y el término adicional

$$\mathcal{L}^N = \mathcal{L}_4^N + \mathcal{L}_5^N + \tilde{\mathcal{L}}_5^N + \mathcal{L}_6^N, \quad (24)$$

está compuesto por las nuevas piezas lagrangianas<sup>70</sup>

$$\mathcal{L}_4^N = f_4^N(X) \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \gamma_4}^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \gamma_4} B^{\alpha_1} B_{\beta_1} \nabla^{\alpha_2} B_{\beta_2} \nabla^{\alpha_3} B_{\beta_3}, \quad (25)$$

$$\mathcal{L}_5^N = f_5^N(X) \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4} B^{\alpha_1} B_{\beta_1} \nabla^{\alpha_2} B_{\beta_2} \nabla^{\alpha_3} B_{\beta_3} \nabla^{\alpha_4} B_{\beta_4}, \quad (26)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_5^N = \tilde{f}_5^N(X) \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4} B^{\alpha_1} B_{\beta_1} \nabla^{\alpha_2} B^{\alpha_3} \nabla_{\beta_2} B_{\beta_3} \nabla^{\alpha_4} B_{\beta_4}, \quad (27)$$

$$\mathcal{L}_6^N = f_6^N(X) \delta_{\alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 \alpha_4}^{\beta_1 \beta_2 \beta_3 \beta_4} \nabla_{\beta_1} B_{\beta_2} \nabla^{\alpha_1} B_{\alpha_2} \nabla^{\beta_3} B_{\alpha_3} \nabla_{\beta_4} B^{\alpha_4}, \quad (28)$$

denominados términos *más allá de Proca*, los cuales se reducen a los términos más allá de Horndeski en el límite escalar. De forma análoga al caso de la teoría de Horndeski, en las referencias <sup>1621</sup> se muestra que no existen términos adicionales para la teoría GP cuando se considera un mayor número de primeras derivadas espacio-temporales del campo contraídas con el tensor métrico o el tensor de Levi-Civita, pues estos términos serán casos particulares de los ya presentados o no aportarán a las ecuaciones de movimiento por ser derivadas totales. Adicionalmente, en contraste con los trabajos de L. Heisenberg y G. Tasinato, el método de construcción presentado muestra que algunas piezas lagrangianas se construyen con sólo una contracción con el tensor de Levi-Civita, por lo que inevitablemente se tiene la presencia de términos que violan paridad, incluidos en  $\mathcal{L}_2$  por ser una función arbitraria de  $\tilde{F}$ , pero que se hacen cero en el límite escalar como es de esperarse.

---

<sup>70</sup> Se ha implementado el delta de Kronecker generalizado definido como  $\delta_{\nu_1 \dots \nu_\alpha}^{\mu_1 \dots \mu_\alpha} \equiv \alpha! \delta_{\nu_1}^{[\mu_1} \dots \delta_{\nu_\alpha}^{\mu_\alpha]}$ .

#### 1.4. Teoría Generalizada de Proca SU(2)

Finalmente se tiene la teoría GSU2P, en la que se considera un campo vectorial con una acción invariante bajo transformaciones del grupo SU(2) acoplado con la curvatura. Esta teoría fue presentada por primera vez por E. Allys *et. al.*, en la ref. <sup>20</sup>. No obstante, en los trabajos de V. Errasti Diez *et. al.* <sup>7172</sup>, se demuestra la necesidad de introducir una nueva ligadura en la acción, conocida como *condición Hessiana secundaria* que, junto con la *condición Hessiana primaria* (aplicada desde la construcción inicial de la teoría), son condiciones necesarias y suficientes para evadir inestabilidades de Ostrogradsky en espaciotiempo plano. La inclusión de esta nueva ligadura dio lugar a una reconstrucción completa de la teoría, la cual fue presentada por A. Gallego Cadavid *et. al.*, en la ref. <sup>22</sup> en la que se tienen nuevos términos encontrados al aplicar los siguientes pasos:

- Se identifican todos los posibles términos invariantes de Lorentz contruidos mediante contracciones de un campo vectorial  $B_\mu$  con los primitivos invariantes del grupo de Lorentz (SO(3,1)): el tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  y el tensor de Levi-Civita  $\epsilon_{\mu\nu\alpha\beta}$ .
- A estos términos se le añaden índices del grupo SU(2) y se contraen con los primitivos invariantes del grupo: la métrica de grupo  $\delta_{ab}$  y las constantes de estructura  $\epsilon_{abc}$ . Con esto se garantiza que la acción sea invariante ante transformaciones SU(2).
- Se agrupan todos los términos invariantes ante transformaciones de Lorentz-

---

<sup>71</sup> V. ERRASTI DIEZ y col. "Maxwell-Proca theory: Definition and construction". En: *Phys. Rev. D* 101 (2020).

<sup>72</sup> V. ERRASTI DIEZ y col. "Complete theory of Maxwell and Proca fields". En: *Phys. Rev. D* 101 (2020).

SU(2) en combinaciones lineales generales.

- Se establecen relaciones entre los coeficientes de las combinaciones lineales, tal que no propaguen grados de libertad indeseados. Para ello se establecen relaciones dadas por la condición Hessiana primaria  $\mathcal{H}_{ab}^{0\nu} = 0$ , en donde

$$\mathcal{H}_{ab}^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{B}_\mu^a \partial \dot{B}_\nu^b}, \quad (29)$$

y se establecen las relaciones dadas por la condición Hessiana secundaria  $\tilde{\mathcal{H}}_{ab}^{00} = 0$ , en donde

$$\tilde{\mathcal{H}}_{ab}^{\mu\nu} \equiv \frac{\partial^2 \mathcal{L}}{\partial \dot{B}_\mu^{[a} \partial B_\nu^{b]}}. \quad (30)$$

- Se lleva la teoría a espaciotiempo curvo reemplazando las derivadas parciales por derivadas covariantes.
- Se identifican términos redundantes, i.e, relacionados con otros a través de divergencias de corrientes  $\nabla_\mu J^\mu$ , y se eliminan de la acción.
- Finalmente, se lleva la teoría al límite de desacoplamiento y se garantiza que esta última esté libre de inestabilidades de Ostrogradsky. Esto implica que el límite escalar de la teoría debe pertenecer a la extensión no Abelianas de la teoría de multigalileones<sup>737415</sup>.

Este procedimiento conduce a la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \mathcal{L}_{E-H} + \mathcal{L}_2 + \alpha_{4,0} \mathcal{L}_{4,0} + \mathcal{L}_{4,2} + \frac{\alpha_{5,0}}{16\pi} \tilde{\mathcal{L}}_{5,0} + \mathcal{L}_m \right), \quad (31)$$

---

<sup>73</sup> A. PADILLA y V. SIVANESAN. "Covariant multi-galileons and their generalisation". En: *JHEP* 1304 (2013).

<sup>74</sup> V.SIVANESAN. "Generalized multiple-scalar field theory in Minkowski space-time free of Ostrogradski ghosts". En: *Phys. Rev. D* 90 (2014).

en donde

$$\mathcal{L}_{E-H} = \frac{1}{16\pi} R, \quad (32)$$

$$\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_2(A_{\mu\nu}^a, B_\mu^a), \quad (33)$$

$$\mathcal{L}_{4,0} = G_{\mu\nu} B^{\mu a} B_a^\nu, \quad (34)$$

$$\mathcal{L}_{4,2} = \sum_{i=1}^6 \frac{\alpha_i}{16\pi} \mathcal{L}_{4,2}^i + \sum_{i=1}^4 \frac{\tilde{\alpha}_i}{16\pi} \tilde{\mathcal{L}}_{4,2}^i, \quad (35)$$

$$\tilde{\mathcal{L}}_{5,0} = B^{\nu a} R^\sigma{}_{\nu\rho\mu} B_\sigma^b \tilde{A}^{\mu\rho c} \epsilon_{abc}, \quad (36)$$

y

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{4,2}^1 &= (B_b \cdot B^b) [S_\mu^{\mu a} S_{\nu a}^\nu - S_\nu^{\mu a} S_{\mu a}^\nu] + 2(B_a \cdot B_b) [S_\mu^{\mu a} S_\nu^{\nu b} - S_\nu^{\mu a} S_\mu^{\nu b}], \\ \mathcal{L}_{4,2}^2 &= A_{\mu\nu}^a S_\sigma^{\mu b} B_a^\nu B_b^\sigma - A_{\mu\nu}^a S_\sigma^{\mu b} B_b^\nu B_a^\sigma + A_{\mu\nu}^a S_\rho^{\rho b} B_a^\mu B_b^\nu, \\ \mathcal{L}_{4,2}^3 &= B^{\mu a} R^\alpha{}_{\sigma\rho\mu} B_{\alpha a} B^{\rho b} B_b^\sigma + \frac{3}{4} (B_b \cdot B^b) (B^a \cdot B_a) R, \\ \mathcal{L}_{4,2}^4 &= [(B_b \cdot B^b) (B^a \cdot B_a) + 2(B_a \cdot B_b) (B^a \cdot B^b)] R, \\ \mathcal{L}_{4,2}^5 &= G_{\mu\nu} B^{\mu a} B_a^\nu (B^b \cdot B_b), \\ \mathcal{L}_{4,2}^6 &= G_{\mu\nu} B^{\mu a} B^{\nu b} (B_a \cdot B_b), \end{aligned} \quad (37)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\mathcal{L}}_{4,2}^1 &= -2A_{\mu\nu}^a S_\sigma^{\mu b} B_{\alpha a} B_{\beta b} \epsilon^{\nu\sigma\alpha\beta} + S_{\mu\nu}^a S_\sigma^{\nu b} B_{\alpha a} B_{\beta b} \epsilon^{\mu\sigma\alpha\beta}, \\ \tilde{\mathcal{L}}_{4,2}^2 &= A_{\mu\nu}^a S_\sigma^{\mu b} B_{\alpha a} B_{\beta b} \epsilon^{\nu\sigma\alpha\beta} - \tilde{A}_a^{\alpha\beta} S_{\rho\alpha}^b B^{\rho a} B_{\beta b} + \tilde{A}_a^{\alpha\beta} S_{\rho b}^\rho B_\alpha^a B_\beta^b, \\ \tilde{\mathcal{L}}_{4,2}^3 &= B_\beta^b R^\alpha{}_{\sigma\rho\mu} B_\alpha^a (B_a \cdot B_b) \epsilon^{\mu\rho\sigma\beta}, \\ \tilde{\mathcal{L}}_{4,2}^4 &= B_{\beta a} R^\alpha{}_{\sigma\rho\mu} B_\alpha^a (B^b \cdot B_b) \epsilon^{\mu\rho\sigma\beta}. \end{aligned} \quad (38)$$

en donde se tiene el tensor simétrico

$$S_{\mu\nu}^a \equiv \nabla_\mu B_\nu^a + \nabla_\nu B_\mu^a, \quad (39)$$

y su versión antisimétrica

$$A_{\mu\nu}^a \equiv \nabla_\mu B_\nu^a - \nabla_\nu B_\mu^a. \quad (40)$$

Adicionalmente,  $\tilde{A}$  corresponde al dual de Hodge de  $A$ . Vale la pena destacar varios puntos: en esta teoría se tienen términos que conducen a violación de paridad, los cuales son  $\tilde{\mathcal{L}}_{4,2}^i$  y  $\tilde{\mathcal{L}}_{5,0}$  así como algunos que están contenidos en  $\mathcal{L}_2$ . Así como en la teoría GP, ante una transformación de paridad  $(t, x, y, z) \rightarrow (t, -x, -y, -z)$  el tensor de Faraday transforma como sigue:

$$\begin{aligned} F_{0i} &= \partial_0 B_i - \partial_i B_0, \\ F_{ij} &= \partial_i B_j - \partial_j B_i, \\ F_{0i} &\rightarrow F'_{0i} = -(\partial_0 B_i - \partial_i B_0) = -F_{0i}, \\ F_{ij} &\rightarrow F'_{ij} = \partial_i B_j - \partial_j B_i = F_{ij}, \end{aligned}$$

entonces

$$F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} \rightarrow F'^{\mu\nu} F'_{\mu\nu} = 2F^{0i} F_{0i} + F^{ij} F_{ij} = F^{\mu\nu} F_{\mu\nu}. \quad (41)$$

En tanto que

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} = 4\epsilon^{0ijk} F_{0i} F_{jk},$$

entonces

$$\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} \rightarrow \epsilon'^{\mu\nu\alpha\beta} F'_{\mu\nu} F'_{\alpha\beta} = -4\epsilon^{0ijk} F_{0i} F_{jk} = -\epsilon^{\mu\nu\alpha\beta} F_{\mu\nu} F_{\alpha\beta}. \quad (42)$$

Esto muestra que las piezas lagrangianas que incluyan un tensor de Levi-Civita  $\epsilon_{\mu\nu\rho\sigma}$  violan paridad ya que introducen un signo negativo en la acción ( $\mathcal{L} \rightarrow -\mathcal{L}$ ) y, por lo tanto en las ecuaciones de campo. La teoría así construida incluye los

correspondientes *términos más allá de Proca SU(2)*.

Además, por su forma de construcción,  $\mathcal{L}_2$  contiene el término cinético canónico de Yang-Mills

$$\mathcal{L}_{YM} \equiv -\frac{1}{4} F_{\mu\nu}^a F_a^{\mu\nu}, \quad (43)$$

en donde  $F_{\mu\nu}^a \equiv \nabla_\mu B_\nu^a - \nabla_\nu B_\mu^a + e\epsilon^a{}_{bc} B_\mu^b B_\nu^c$ , siendo  $e$  la constante de acoplamiento del grupo SU(2), es el tensor de esfuerzos de gauge no abeliano.

## 2. ARRASTRE DE MARCOS

En el año 1918 J. Lense y H. Thirring mostraron que la rotación de un objeto masivo distorsiona el espaciotiempo <sup>7576</sup> ya que los marcos inerciales distantes a éste, inicialmente en reposo, se ven arrastrados cuando van en caída libre desde el infinito, adquiriendo así una velocidad angular diferente de cero. En otras palabras, estos marcos no están en reposo respecto a los marcos locales inerciales al fluido en rotación. En este trabajo se considera el límite de rotación lenta en el que la solución rotante se trata como una perturbación a la solución estática y esféricamente simétrica. Para ello se tienen en cuenta las siguientes consideraciones:

- Se considera que la materia que compone el objeto satisface una ecuación de estado (EOS, por sus siglas en inglés) uniparamétrica,  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\varepsilon)$ , en donde  $\mathcal{P}$  es la presión y  $\varepsilon$  la densidad total de masa-energía. Además, se considera la materia como un fluido perfecto con tensor energía momento

$$T_{\mu\nu} = (\varepsilon + \mathcal{P})u_{\mu}u_{\nu} + \mathcal{P}g_{\mu\nu}, \quad (44)$$

en donde  $u$  es la cuadrivelocidad del fluido.

- Se considera que el objeto rota con una rapidez angular constante  $\Omega$  lo suficientemente pequeña como para que los cambios fraccionales en la presión, la densidad de energía y el campo gravitacional debidos a la rotación sean mucho más pequeños que la unidad y que así el problema pueda ser tratado

---

<sup>75</sup> J. LENSE. "Über Relativitätseinflüsse in den Mondsystemen". En: *Astron. Nachrichten* 206 (1918).

<sup>76</sup> H. THIRRING. "Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie". En: *Z Phys Chem (NF)* 19 (1918).



bajo un análisis perturbativo. Esta rapidez angular satisface

$$\Omega^2 \ll \left(\frac{c}{\mathcal{R}}\right) \frac{GM}{\mathcal{R}c^2}, \quad (45)$$

en donde  $M$  es la masa del objeto y  $\mathcal{R}$  el radio, calculados en el límite no rotante,  $G$  es la constante de gravitación universal y  $c$  la rapidez de la luz en el vacío. Es decir, cada partícula que conforme el fluido debe moverse a velocidades no relativistas.

- Se considera una configuración estacionaria y axialmente simétrica. Esta configuración, con vectores de Killing  $\partial_t$  y  $\partial_\phi$ , conduce a la conservación de la energía y del momento angular total. Adicionalmente, la estacionariedad garantiza que no se considera la presencia de radiación gravitacional debido a la ausencia de momentos dependientes del tiempo en la distribución de masa. El elemento de línea que describe esta geometría está dado por

$$ds^2 = -H^2 dt^2 + Q^2 dr^2 + r^2 K^2 [d\theta^2 + \sin^2 \theta (d\phi - L dt)^2], \quad (46)$$

en donde  $H, Q, K$  y  $L$  son funciones de  $r$  y  $\theta$ .

La cantidad  $L(r, \theta)$  corresponde a la rapidez angular ( $d\phi/dt$ ), por lo tanto ésta es considerada como la tasa de rotación del marco inercial en el punto  $(r, \theta)$  relativo a las estrellas distantes. Considerando la rotación lenta del objeto, las funciones en cuestión pueden ser expandidas en potencias de la rapidez angular  $\Omega$ . Ya que el tensor métrico es simétrico, el elemento de línea debe ser invariante ante transformaciones de  $\phi \rightarrow -\phi$ , por lo que al considerar la expansión para  $L$  en potencias de  $\Omega$ , éste debe transformar de la forma  $L \rightarrow -L$ , que implica que se deben anular todas las dependencias de potencias pares. Así, se obtiene

$$L(r, \theta) = \omega(r, \theta) + \mathcal{O}(\Omega^3), \quad (47)$$

en donde el orden cero corresponde al límite no rotante, por lo que tal término es nulo y  $\omega$  corresponde al término a orden uno de  $L$ .

Siguiendo la lógica del tratamiento perturbativo, a orden cero el elemento de línea se reduce al caso esféricamente simétrico dado por la solución general

$$ds^2 = -e^{\nu(r)} dt^2 + e^{\lambda(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (48)$$

Por lo tanto, las funciones anteriormente descritas toman la forma

$$H^2 = e^{\nu(r)}, \quad Q^2 = e^{\lambda(r)}, \quad K = 1, \quad L = 0. \quad (49)$$

Obteniendo la contribución a primer orden en  $\Omega$  de la ecuación de campo mixta ( $t\phi$ ) se llega a la ecuación diferencial que describe el comportamiento de  $\omega(r, \theta)$  para todo  $r$  y  $\theta$ . En el contexto de RG esta derivación fue presentada por primera vez por J. Hartle.

En la sección 2.1 se presentan los detalles en el cálculo desarrollado por Hartle y el sistema de ecuaciones diferenciales para el objeto considerado. Posteriormente, en las secciones 2.2, 2.3 y 2.4 se aplica este mismo método para las teorías de Horndeski, GP y GSU2P. Naturalmente, en el lado derecho de las ecuaciones de campo está el contenido material, el cual está descrito por el tensor energía momento  $\mathbb{T}$  del fluido. El método de Hartle implementa la contribución a primer orden de la componente mixta ( $t\phi$ ) de  $\mathbb{T}$ , la cual es calculada explícitamente en el Apéndice 1. Finalmente, la sección 2.5 presenta ciertas medidas observacionales de arrastre de marcos hechas en las últimas décadas que muestran la relevancia del estudio del arrastre de marcos de cara a actuales y futuras observaciones astronómicas.

## 2.1. Método de Hartle

Se parte de las ecuaciones de campo de Einstein en unidades geometrizadas

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R = 8\pi T_{\mu\nu}. \quad (50)$$

Reemplazando las expansiones de cada una de las funciones métricas en las ecuaciones de campo, se tiene a primer orden en  $\Omega$  la ecuación diferencial

$$\begin{aligned} & \left[ \frac{4}{r} - \frac{1}{2}(\nu' + \lambda') \right] e^{-(\lambda+\nu)/2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial r} + e^{-(\lambda+\nu)/2} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial r^2} \\ & + \frac{3 \cot \theta}{r^2} e^{(\lambda-\nu)/2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \theta} + \frac{1}{r^2} e^{(\lambda-\nu)/2} \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial \theta^2} = 16\pi(\rho + P)e^{(\lambda-\nu)/2} \tilde{\omega}, \end{aligned} \quad (51)$$

en donde se definió  $\tilde{\omega} = \Omega - \omega$ . Debido a la relación entre el tensor de Einstein y el tensor energía momento se tiene

$$G_1^1 - G_0^0 = 8\pi(T_1^1 - T_0^0) = 8\pi(\rho + P).$$

De acuerdo a la ecuación (50), la anterior relación conduce a

$$16\pi(\rho + P)e^{(\lambda-\nu)/2} = -\frac{4}{r} \frac{dj}{dr}, \quad (52)$$

en donde se ha definido  $j(r) = e^{-(\lambda+\nu)/2}$ .

De esta manera, la ecuación (51) se reduce a

$$\frac{1}{r^4} \frac{\partial}{\partial r} \left( r^4 j(r) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial r} \right) + \frac{e^{(\lambda-\nu)/2}}{r^2} \frac{1}{\sin^3 \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \left( \sin^3 \theta \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \theta} \right) = 0, \quad (53)$$

en donde se satisfacen las condiciones

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \lambda = \lim_{r \rightarrow \infty} \nu = 0, \quad (54)$$

que garantizan que el espaciotiempo sea asintóticamente plano y

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \omega = 0, \quad (55)$$

que exige que un observador en el infinito no vea afectada su rapidez angular. Además, debido a las soluciones del caso sin rotación se satisface

$$j(r) = 1 \text{ para } r > \mathcal{R}. \quad (56)$$

Por supuesto, las soluciones de  $\lambda(r)$  y  $\nu(r)$  se encuentran resolviendo las ecuaciones de campo para la configuración estática y esféricamente simétrica

$$e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) + \frac{1}{r^2} = 8\pi\rho, \quad (57)$$

$$e^{-\lambda} \left( \frac{1}{r} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1}{r^2} \right) - \frac{1}{r^2} = 8\pi P, \quad (58)$$

$$\frac{1}{2} e^{-\lambda} \left[ \frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1}{2} \left( \frac{d\nu}{dr} - \frac{d\lambda}{dr} \right) \left( \frac{d\nu}{dr} + \frac{2}{r} \right) \right] = 8\pi P. \quad (59)$$

Adicionalmente, como consecuencia de las identidades de Bianchi, las ecuaciones de campo admiten la conservación local  $T_{\mu}{}^{\nu}{}_{;\nu} = 0$ . En la configuración estática y esféricamente simétrica, la componente  $r$  (la cual es la única diferente de cero) de esta conservación es

$$\frac{dP}{dr} + \frac{1}{2} (P + \rho) \frac{d\nu}{dr} = 0. \quad (60)$$

Esta última ecuación también puede ser obtenida combinando apropiadamente las ecuaciones (57)-(59). Las ecuaciones (57), (58) y (60) junto con la EOS constituyen el sistema cerrado de ecuaciones de estructura de la estrella. Las ecuaciones se integran garantizando que no sean singulares en el origen y que en el borde de la estrella (entendido como la coordenada  $r = \mathcal{R}$  en la que  $P(\mathcal{R}) = 0$ ) se acople con la

solución exterior de Schwarzschild

$$P = \rho = 0, \quad (61)$$

$$e^\nu = e^{-\lambda} = 1 - \frac{2M}{r}, \quad (62)$$

para todo  $r > \mathcal{R}^{77}$ . Lo anterior implica que la estructura de la estrella es dependiente de la EOS escogida.

Por otro lado, para resolver la ecuación (53) para  $\tilde{\omega}$ , se hace uso del método de separación de variables para ecuaciones diferenciales parciales. Para ello, se propone una solución de la forma

$$\tilde{\omega}(r, \theta) = \tilde{W}(r)T(\theta), \quad (63)$$

esta elección permite desacoplar las ecuaciones radial y angular en dos ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left( r^4 j \frac{d\tilde{W}}{dr} \right) + \frac{4}{r} \frac{dj}{dr} \tilde{W} - \frac{k^2}{r^2} e^{(\lambda-\nu)/2} \tilde{W} = 0, \quad (64)$$

$$\frac{d}{d\theta} \left( \sin^3 \theta \frac{dT}{d\theta} \right) + k^2 \sin^3 \theta T = 0, \quad (65)$$

en donde  $k$  es la constante de acoplamiento.

**2.1.1. Solución angular** En primer lugar, se propone una sustitución de la forma

$$T(\theta) = -\frac{1}{\sin \theta} u(\cos \theta), \quad (66)$$

---

<sup>77</sup> En el contexto de RG, el teorema de Birkhoff demuestra que cualquier solución exterior para un objeto estático y esféricamente simétrico corresponde a la solución de Schwarzschild (G. D. BIRKHOFF y R. E. LANGER. *Relativity and modern physics*. Harvard University Press, 1923) (S. WEINBERG. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley New York, 1972).

se reemplazan las derivadas correspondientes y se despejan apropiadamente para obtener

$$(1 - x^2) \frac{d^2}{dx^2} - 2x \frac{du}{dx} + \left[ l(l+1) - \frac{1}{1-x^2} \right] u = 0, \quad (67)$$

en donde  $x = \cos \theta$  y  $k^2 = l(l+1) - 2$  y  $l$  ha de ser un entero  $|l| \geq 1$  para que las soluciones de la ecuación (67) sean distintas de cero no singulares. La solución a esta ecuación diferencial es la función asociada de Legendre  $P_l^1(x)$ , de manera que la solución general ha de ser de la forma

$$\tilde{\omega}(r, \theta) = \sum_{l=0}^{\infty} -\frac{1}{\sin \theta} \tilde{W}_l(r) P_l^1(\cos \theta). \quad (68)$$

**2.1.2. Solución radial** Naturalmente,  $\tilde{\omega}(r, \theta)$  depende de la configuración específica de la estrella, es decir, de la EOS escogida, de manera que no es posible generalizar su comportamiento para toda EOS. Sin embargo, pueden encontrarse comportamientos comunes de  $\tilde{\omega}(r, \theta)$  para cualquier elección de la EOS en los límites  $r \ll \mathcal{R}$  y  $r \gg \mathcal{R}$ .

**Para  $r \gg \mathcal{R}$**

En este límite se tiende asintóticamente a una geometría plana  $e^\nu = e^\lambda = 1$ , lo que implica  $j = 1$  y  $j' = 0$ . Bajo estas condiciones, la ecuación diferencial radial reduce a

$$\frac{1}{r^4} \frac{d}{dr} \left( r^4 \frac{d\tilde{W}_l}{dr} \right) - \frac{l(l+1) - 2}{r^2} \tilde{W}_l = 0, \quad (69)$$

que corresponde a la ecuación diferencial de Cauchy-Euler

$$r^2 \tilde{W}_l'' + 4r \tilde{W}_l' - [l(l+1) - 2] \tilde{W}_l = 0. \quad (70)$$

Para ella se propone una solución de la forma  $\tilde{W}_l = r^m$  que conduce a la solución

general

$$\tilde{W}_l = Ar^{l-1} + Br^{-(l+2)}. \quad (71)$$

Las condiciones (54) y (55), que garantizan el comportamiento asintóticamente plano, exigen que  $\omega(r, \theta)$  decrezca más rápido que  $1/r^3$ , de manera que  $\tilde{\omega}(r) = \Omega - \omega(r, \theta)$  tienda a  $\Omega$ . La única  $\tilde{W}_l$  que satisface esto es para  $l = 1$ , de manera que para  $l \neq 1$ ,  $\tilde{W}_l$  es cero, incluso para todo  $r$ . Esto se traduce en

$$\tilde{W}_l(r) = \begin{cases} A + Br^{-3} & \text{si } l = 1, \\ 0 & \text{si } l \neq 1. \end{cases} \quad (72)$$

Por lo tanto, la solución general para  $\tilde{\omega}$  es este límite es

$$\tilde{\omega}(r) = \Omega - \frac{2J}{r^3}, \quad (73)$$

en donde  $J$  es entendida como el momento angular total de la estrella <sup>78</sup>. Ya que todas las contribuciones para  $l \neq 1$  son nulas, la solución general para todo  $r$  será  $\tilde{\omega}(r) = \tilde{W}_1(r)$ <sup>79</sup>.

---

<sup>78</sup> A. PAPAPETROU. "Einstein's Theory of Gravitation and Flat Space". En: *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences* 52 (1948).

<sup>79</sup> Dado que  $P_1^1(\cos \theta) = -\sin \theta$ , se tiene que  $T(\theta) = 1$ , lo cual elimina la dependencia angular en la solución general.

Para  $r \ll \mathcal{R}$

En este límite se exige regularidad en el origen mediante:  $\lambda'(0) = \nu'(0) = \rho'(0) = P'(0) = 0$ , además  $j(0) = j_0$ . Con estas condiciones se tiene la ecuación radial

$$\frac{j_0}{r^4} \frac{d}{dr} \left( r^4 \frac{d\tilde{W}_l}{dr} \right) - \frac{l(l+1) - 2}{r^2} \tilde{W}_l = 0, \quad (74)$$

que también reduce a la ecuación diferencial de Cauchy

$$r^2 \tilde{W}_l'' + 4r \tilde{W}_l' - \frac{l(l+1) - 2}{j_0} \tilde{W}_l = 0. \quad (75)$$

Proponiendo una solución de la forma  $\tilde{W}_l = r^m$  se obtienen posibles valores

$$m_{\pm} = -\frac{3}{2} \pm \left[ \frac{9}{4} + \frac{l(l+1) - 2}{j_0} \right]^{\frac{1}{2}}, \quad (76)$$

la inclusión de la conclusión previa  $l = 1$  (la cual debe ser válida para todo valor de  $r$ ) conduce a

$$m_+ = 0, \quad m_- = -3. \quad (77)$$

Adicionalmente, la condición de regularidad en el origen exige que  $\tilde{\omega}'(0) = 0$ , lo que implica que la única rama posible sea  $m_+$ . Esto lleva a la conclusión

$$\tilde{\omega}_l(r) = \begin{cases} \text{constante} & \text{si } l = 1, \\ 0 & \text{si } l \neq 1, \end{cases} \quad (78)$$

de manera que la solución general será

$$\tilde{\omega}(r) = \tilde{\omega}_0, \quad (79)$$

en donde  $\tilde{\omega}(0) = \tilde{\omega}_0$  corresponde al valor central.



Por su forma de construcción,  $\tilde{\omega}$  es la diferencia entre la rapidez angular que presenta el objeto en rotación y la rapidez angular que adquiere el marco inercial localizado en un punto  $r$ , por lo tanto,  $\tilde{\omega}$  es una medida del arrastre que experimenta dicho marco. La solución (73) es un ejemplo de este arrastre, pues muestra la forma funcional de  $\tilde{\omega}$  para marcos inerciales lejanos a la fuente de campo gravitacional y revela que depende esencialmente del momento angular del objeto. Por su parte, si se quiere hacer un análisis del arrastre que experimenta un marco localizado en cualquier punto  $r > \mathcal{R}$ , de acuerdo a RG, es necesario resolver la ecuación (64).

## 2.2. Método de Hartle para la teoría de Horndeski

Se considera la acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} \left( \frac{1}{8\pi} X + \mathcal{L}_{4,\varphi}^{Gal} + \mathcal{L}_m \right), \quad (80)$$

en donde  $\mathcal{L}_{4,\varphi}^{Gal}$  es el definido en la ecuación (11),  $X$  es el término cinético del campo escalar y  $\mathcal{L}_m$  es el lagrangiano de materia. Su variación con extremos fijos respecto al tensor métrico conduce a las ecuaciones de campo gravitacional, mientras que su variación respecto al campo escalar conduce a la ecuación de Euler-Lagrange (las ecuaciones de campo gravitacional y de Euler-Lagrange pueden ser consultadas en el apéndice 2).

La configuración de campo escalar en el límite esférico corresponde a  $\varphi = \varphi(r)$  y se escoge la función de acoplamiento de la forma  $G_4 = (1 + \alpha X^2)/16\pi$ . Reemplazando esta configuración en las ecuaciones tensoriales de campo gravitacional se

encuentran las ecuaciones diferenciales

$$e^{-\lambda} \left( \frac{1 - 15 \alpha F_1^1}{r} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1 - 3 \alpha F_1^1}{r^2} \right) + \frac{1 + \alpha F_1^1}{r^2} + \frac{2 \alpha F_2^1}{r} - \frac{1}{2} e^{-\lambda} \varphi'^2 = 8\pi\rho, \quad (81)$$

$$e^{-\lambda} \left( \frac{1 - 15 \alpha F_1^1}{r} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1 - 15 \alpha F_1^1}{r^2} \right) - \frac{1 - 3 \alpha F_1^1}{r^2} - \frac{1}{2} e^{-\lambda} \varphi'^2 = 8\pi P, \quad (82)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left[ (1 - 3 \alpha F_1^1) \frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1 - 3 \alpha F_1^1}{2} \left( \frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1 - 3 \alpha F_1^1 - \alpha F_2^1}{r} \frac{d\nu}{dr} \right. \\ \left. - \frac{1 - 15 \alpha F_1^1}{2} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1 - 15 \alpha F_1^1}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right] - \frac{\alpha F_2^1}{r} + \frac{1}{2} e^{-\lambda} \varphi'^2 = 8\pi P, \end{aligned} \quad (83)$$

y la de Euler-Lagrange para el campo escalar

$$\frac{\alpha F_3^1}{r^2} + \frac{\alpha F_4^1}{r} + \frac{4e^{-\lambda} \varphi'}{r} + e^{-\lambda} (\nu' - \lambda') \varphi' + 2e^{-\lambda} \varphi'' = 0. \quad (84)$$

Por su parte, la componente  $(t\phi)$  de las ecuaciones de campo gravitacional, a orden uno en  $\Omega$ , es

$$\begin{aligned} \left[ \frac{4(1 - 3 \alpha F_1^1)}{r} - \frac{1}{2} (\nu' + \lambda') - \frac{3}{2} \alpha F_1^1 + \alpha F_2^1 \right] e^{-(\lambda+\nu)/2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial r} + e^{-(\lambda+\nu)/2} (1 - 3 \alpha F_1^1) \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial r^2} \\ + \frac{3 \cot \theta e^{(\lambda-\nu)/2}}{r^2} (1 + \alpha F_1^1) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \theta} + \frac{e^{(\lambda-\nu)/2}}{r^2} (1 + \alpha F_1^1) \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial \theta^2} = F_5^1 e^{(\lambda-\nu)/2} \tilde{\omega}. \end{aligned} \quad (85)$$

Los coeficientes  $F_i^1$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) permiten identificar las modificaciones introducidas por la pieza lagrangiana  $\mathcal{L}_{4,\varphi}^{Gal}$  respecto a RG presentados en las ecuaciones (57)-(59) y (51) y se encuentran definidas en el apéndice 3. Adicionalmente, se han incluido las modificaciones en las ecuaciones de campo (81) y (82) a través de los aportes del contenido material mediante  $F_5^1 = 16\pi(\rho + P)$ , y se garantiza el cumplimiento de las condiciones (54) y (55) que conducen a un espaciotiempo asintóticamente plano y que el marco inercial en el infinito no presente arrastre.

Para resolver la ecuación (85) se propone nuevamente la solución (63) que permite

separarla en dos ecuaciones diferenciales ordinarias independientes para la parte radial y la parte angular. La ecuación diferencial para la parte radial es

$$\left[ \frac{4(1 - 3\alpha F_1^1)}{r} - \frac{1}{2}(\nu' + \lambda') - \frac{3}{2}\alpha F_1^1 + \alpha F_2^1 \right] e^{-(\lambda+\nu)/2} \frac{\partial \tilde{W}}{\partial r} + e^{-(\lambda+\nu)/2} (1 - 3\alpha F_1^1) \frac{\partial^2 \tilde{W}}{\partial r^2} - \left[ F_5^1 + k^2 \frac{1 + \alpha F_1^1}{r^2} \right] e^{(\lambda-\nu)/2} \tilde{W} = 0, \quad (86)$$

mientras que la ecuación diferencial para la parte angular es idéntica la ecuación (65).

Ya que la ecuación angular es la misma que para el caso de RG, se concluye entonces que las modificaciones al arrastre de marcos son exclusivas de la parte radial. Esto significa que la solución general es de la forma (68). El paso siguiente es encontrar la solución de la parte radial  $\tilde{W}_l$ .

### 2.2.1. Solución radial

**Para  $r \gg \mathcal{R}$**  En este límite se garantiza una geometría plana exigiendo  $e^\nu = e^\lambda = 1$  y  $\varphi = \text{constante}$ , lo que conduce a una ecuación diferencial idéntica a la ecuación (70) para el caso de RG, es decir, no presenta dependencia del valor del campo escalar. Esto implica que la solución será de forma idéntica a aquella de RG dada en la ecuación (72) para  $l=1$  y se heredan las mismas conclusiones. Esto implica que para valores de  $l \neq 1$  las funciones  $\tilde{W}_l = 0$  para todo  $r$ , es decir, se reproduce la solución (73) con  $\tilde{\omega}(r) = \tilde{W}_1(r)$ .

**Para  $r \ll \mathcal{R}$**  Las condiciones de regularidad en el origen  $\lambda'(0) = \nu'(0) = \rho'(0) = P'(0) = \varphi'(0) = 0$  conducen a una ecuación diferencial idéntica a la de RG en este límite (75). Al exigir la condición de regularidad en el origen  $\tilde{\omega}'(0) = 0$ , se tiene que la única solución posible sea la misma de RG (79)

### 2.3. Método de Hartle para la teoría GP

Se considera la acción

$$S = \int d^4 \sqrt{-g} \left( \frac{1}{4\pi} F + \mathcal{L}_2 + \mathcal{L}_4 + \mathcal{L}_m \right), \quad (87)$$

en donde  $\mathcal{L}_2$  y  $\mathcal{L}_4$  son los definidos en las ecuaciones (18) y (20). Su variación con extremos fijos respecto al tensor métrico conduce a la ecuación de campo gravitacional, mientras que su variación respecto al campo vectorial conduce a las ecuación de Euler-Lagrange (Las ecuaciones de campo gravitacional y de Euler-Lagrange pueden ser consultadas en el apéndice 2).

Para establecer la configuración del campo vectorial se le considera de la forma más general

$$B_\mu = (B_0, B_i), \quad (88)$$

en donde  $i = 1, 2, 3$ . El teorema de descomposición de Helmholtz permite descomponer cada  $B_i$  en sus modos transversal y longitudinal como

$$B_i = B_i^{(T)} + \nabla_i \zeta, \quad (89)$$

en donde  $\zeta$  es un campo escalar longitudinal y  $B_i^{(T)}$  un campo vectorial con divergencia nula ( $\nabla^i B_i^{(T)} = 0$ ). La configuración que es compatible con un espaciotiempo estático y esféricamente simétrico es aquella cuyas componentes angulares  $\theta$  y  $\phi$  sean cero. De esta manera, la nulidad de su divergencia conduce a la ecuación diferencial

$$B_1^{(T)'} + \frac{2}{r} B_1^{(T)} - B_0' B_1^{(T)} = 0, \quad (90)$$

cuya solución está dada por

$$B_1^{(T)} = C \frac{e^{B_0}}{r^2}, \quad (91)$$

en donde la constante de integración  $C$  debe ser cero para garantizar regularidad en el origen, lo cual anula el modo transversal del campo vectorial para todo  $r$ . Por lo tanto, la configuración del campo vectorial resulta ser

$$B_\mu = (B_0(r), B_1(r), 0, 0), \quad (92)$$

en donde  $B_1(r)$  es la derivada respecto a  $r$  de un campo escalar longitudinal.

Una vez establecida la configuración del límite esférico y haciendo  $G_2 = F_{\mu\nu}\tilde{F}^{\mu\nu}$  y  $G_4 = (1 + \alpha X^2)/16\pi$ , se encuentran las ecuaciones de campo gravitacional

$$e^{-\lambda} \left[ \frac{1 + \alpha F_1^2}{r} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1 + \alpha F_2^2}{r^2} \right] + \frac{1 + \alpha F_3^2}{r^2} + \alpha \frac{F_4^2}{r} + \alpha F_5^2 - e^{-(\lambda+\nu)} B_0'^2 = 8\pi\rho, \quad (93)$$

$$e^{-\lambda} \left[ \frac{1 - \alpha F_1^2}{r} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1 + \alpha F_6^2}{r^2} \right] - \frac{1 + \alpha F_7^2}{r^2} + \alpha \frac{F_8^2}{r} + \alpha F_9^2 - e^{-(\lambda+\nu)} B_0'^2 = 8\pi P, \quad (94)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} e^{-\lambda} \left[ (1 + \alpha F_{10}^2) \frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1 - 3\alpha F_3^2}{2} \left( \frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1 + \alpha(F_{11}^2 + rF_{12}^2)}{r} \frac{d\nu}{dr} \right. \\ \left. - \frac{(1 + \alpha F_1^2)}{2} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1 + \alpha(F_6^2 - 4re^\lambda B_0 F_9^2)}{r} \frac{d\lambda}{dr} \right] + \alpha \frac{F_{13}^2}{r} + \alpha F_{14}^2 + e^{-(\lambda+\nu)} B_0'^2 = 8\pi P, \end{aligned} \quad (95)$$

y las de Euler-Lagrange para el campo vectorial

$$\alpha \frac{F_{15}^2}{r^2} + \alpha \frac{F_{16}^2}{r} + \alpha F_{17}^2 - \frac{4e^{-\lambda} B_0'}{r} + e^{-\lambda} [B_0'(\nu' + \lambda') - 2B_0''] = 0, \quad (96)$$

$$\alpha \frac{F_{18}^2}{r^2} + \alpha \frac{F_{19}^2}{r} + \alpha F_{20}^2 = 0. \quad (97)$$

Por su parte, la componente  $(t\phi)$  de las ecuaciones de campo gravitacional a primer orden en  $\Omega$  es

$$\begin{aligned} \left[ \frac{4(1 + \alpha F_{11}^2)}{r} - \frac{1}{2}(\nu' + \lambda') + \alpha F_{21}^2 \right] e^{-(\lambda+\nu)/2} \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial r} + e^{-(\lambda+\nu)/2} (1 + \alpha F_{10}^2) \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial r^2} \\ + \frac{3 \cot \theta e^{(\lambda-\nu)/2}}{r^2} (1 + \alpha F_{11}^2) \frac{\partial \tilde{\omega}}{\partial \theta} + \frac{e^{(\lambda-\nu)/2}}{r^2} (1 + \alpha F_{11}^2) \frac{\partial^2 \tilde{\omega}}{\partial \theta^2} = F_{22}^2 e^{(\lambda-\nu)/2} \tilde{\omega}, \end{aligned} \quad (98)$$

en donde los coeficientes  $F_i^2$  ( $i = 1, \dots, 21$ ) se encuentran definidos en el apéndice 3 y permiten identificar las modificaciones respecto a RG presentados en las ecuaciones (57)-(59) y (51). Adicionalmente, se han incluido las modificaciones en las ecuaciones de campo (93) y (94) a través de los aportes del contenido material mediante la relación  $F_{22}^2 = 16\pi(\rho + P)$ , y se garantiza el cumplimiento de las condiciones (54) y (55) que conducen a un espaciotiempo asintóticamente plano y que el marco inercial en el infinito no presente arrastre.

La escogencia de  $G_2$  se hizo con el propósito de incluir un término con violación de paridad en la acción. La configuración esférica conlleva a que, por simetría, este término se anule, por lo tanto es entendible que  $\mathcal{L}_2$  no conduzca a modificaciones en las ecuaciones (93)-(97). Sin embargo, *a priori* se podría pensar que, a orden uno, este término revele modificaciones en la ecuación (98). Se encontró que en esta ecuación, la única cantidad de orden uno que contribuye es  $\omega$ . Una revisión de las ecuaciones de campo en ordenes superiores reveló que las contribuciones de  $\mathcal{L}_2$  y, en general, cualquier término con violación de paridad serán apreciables por primera vez hasta el orden tres en la ecuación de campo ( $t\phi$ ). En el límite de rotación lenta, estos aportes son despreciables.

La ecuación (97) admite las soluciones

$$B_1(r) = 0, \quad (99)$$

$$B_1(r) = \pm e^{-\frac{1}{2}(\nu+\lambda)r} \sqrt{\frac{8rB_0B_0' + r^2B_0'^2 + 2B_0^2(-1 + e^\lambda - 3r\nu')}{2e^{2\lambda}(-3 + e^\lambda - 3r\nu')}}}, \quad (100)$$

que al incluirlas en las ecuaciones (93), (95), (96) y junto con la ecuación (60) y la EOS se obtiene el sistema cerrado de ecuaciones de estructura de la estrella. Al igual que en RG, el sistema se integra garantizando regularidad en el origen y definiendo el borde de la estrella en aquel  $r = \mathcal{R}$  tal que  $P(\mathcal{R}) = 0$ .

Para resolver la ecuación (98) se propone nuevamente la solución (63) que permite

separarla en dos ecuaciones diferenciales ordinarias independientes para la parte radial y la parte angular. La ecuación diferencial para la parte radial es

$$\left[ \frac{4(1 + \alpha F_{21})}{r} - \frac{1}{2}(\nu' + \lambda') + \alpha F_{22} \right] e^{-(\lambda+\nu)/2} \frac{d\tilde{W}}{dr} + e^{-(\lambda+\nu)/2} (1 + \alpha F_{23}) \frac{d^2\tilde{W}}{dr^2} - \left[ F_{25} + k^2 \frac{(1 + \alpha F_{24})}{r^2} \right] e^{(\lambda-\nu)/2} \tilde{W} = 0, \quad (101)$$

mientras que la ecuación diferencial para la parte angular es idéntica a la ecuación (65).

Al igual que en la teoría de Horndeski, la ecuación angular es la misma que para el caso de RG lo que implica que cualquier modificación al arrastre de marcos será exclusivamente sobre la parte radial de la ecuación diferencial. Una vez más, esto significa que la solución general es de la forma (68). El paso siguiente es encontrar la solución de la parte radial  $\tilde{W}_l(r)$ .

### 2.3.1. Solución radial

**Para  $r \gg \mathcal{R}$**  En este límite se garantiza una geometría plana exigiendo  $e^\nu = e^\lambda = 1$  y  $B_0 = \text{constante}$ , lo que conduce a una ecuación diferencial idéntica a la ecuación (70) para el caso de RG, es decir, no presenta dependencia del valor del campo. Esto implica que la solución será idéntica a aquella de RG (72) para  $l = 1$  y se heredan las mismas conclusiones, que implica que para valores de  $l \neq 1$  las funciones  $\tilde{W}_l = 0$  para todo  $r$ . Es decir, se reproduce la solución (73) con  $\tilde{\omega}(r) = \tilde{W}_1(r)$ .

**Para  $r \ll \mathcal{R}$**  Nuevamente, las condiciones de regularidad  $\lambda'(0) = \nu'(0) = \rho'(0) = P'(0) = B'_0(0) = 0$  conducen a la misma ecuación diferencial (75). Al exigir la condición de regularidad en el origen  $\tilde{\omega}'(0) = 0$ , implica que la única solución posible sea la misma de RG para este límite (79).

En los dos límites considerados el campo vectorial es constante, de manera que todas las modificaciones en la ecuación diferencial se anulan. Esto explica que la estructura de la solución radial sea idéntica a la de RG. Sin embargo, en regiones intermedias el campo tiene comportamientos no triviales y, por ende, se manifestarán desviaciones respecto a la solución general de  $\tilde{\omega}(r)$  en RG.

#### 2.4. Método de Hartle para la teoría GSU2P

Se considera la acción

$$S = \frac{1}{16\pi} \int d^4x \sqrt{-g} (R + \mathcal{L}_2 + \alpha_1 \mathcal{L}_{4,2}^1 + \alpha_2 \mathcal{L}_{4,2}^2 + \alpha_4 \mathcal{L}_{4,2}^4 + \mathcal{L}_m), \quad (102)$$

en donde  $\mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_{YM}$ ,  $\mathcal{L}_{4,2}^1$ ,  $\mathcal{L}_{4,2}^2$  y  $\mathcal{L}_{4,2}^4$  son los definidos en la ecuación (37). La escogencia de los lagrangianos presentes en la acción responde varios puntos: a) Al hacer  $\alpha_1 = -\alpha_4$  y remover los índices de grupo, el lagrangiano reduce a  $\mathcal{L}_4$  de GP. b)  $\mathcal{L}_{4,2}^2$  es de naturaleza puramente no abeliana, así que no tiene contrapartida en GP. Esta escogencia permite construir el modelo más simple posible que contenga acoplamientos no mínimos a la gravedad y que permita encontrar elementos distintivos entre las teorías GP y GSU2P.

La variación con extremos fijos de la acción (102) respecto al tensor métrico conduce a las ecuación de campo gravitacional, mientras que su variación respecto al campo vectorial conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange (las ecuaciones de campo gravitacional y de Euler-Lagrange pueden ser consultadas en el apéndice 2).

La configuración de los campos vectoriales se establece mediante el *ansatz* de Wit-



ten <sup>80</sup>, el cual es el más general considerando simetría esférica, éste es

$$\mathbf{B} = \frac{\tau^a}{e} \left[ A_0 \frac{x_a}{r} dt + A_1 \frac{x_a x_j}{r^2} dx^j + \frac{\phi_1}{r} \left( \delta_{aj} - \frac{x_a x_j}{r^2} \right) dx^j - \epsilon_{ajk} x^j \frac{1 + \phi_2}{r^2} dx^k \right], \quad (103)$$

en donde  $\tau_i = -i\sigma_i/2$  es una base para el álgebra del grupo SU(2), siendo  $\sigma_i$  las matrices de Pauli. Adicionalmente,  $A_0$ ,  $A_1$ ,  $\phi_1$  y  $\phi_2$  son funciones de  $(t, r)$ , los  $x_j$  son las coordenadas cartesianas espaciotemporales,  $\delta_{aj}$  corresponde al delta de Kronecker y  $e$  es la constante de acoplamiento del grupo SU(2).

Como se puede ver, la configuración (103) presenta cuatro grados de libertad. Dejarlos activos simultáneamente, junto con los parámetros propios de la teoría, representa un número muy alto de grados de libertad que complica mucho las ecuaciones y deja una gran libertad de ajustes. Para tener un análisis controlado y sistemático, se puede considerar de a un grado de libertad y revisar sus implicaciones. Dejando activo únicamente cada uno de los grados de libertad (en su orden  $A_0$ ,  $A_1$  y  $\phi_1$ ), la ecuación de Euler-Lagrange conduce a

$$e^{-\nu} A_0^2 = 0, \quad (104)$$

$$e^{-\lambda} A_1^2 = 0, \quad (105)$$

$$\frac{\phi_1^2}{r^2} = 0. \quad (106)$$

Las soluciones a cada una de estas ecuaciones son las triviales  $A_0 = A_1 = \phi_1 = 0$ , mientras que esto no sucede para  $\phi_2$ . Si se usan estas conclusiones para fijar la configuración del campo  $\mathbf{B}$  considerando a  $\phi_2$  como único grado de libertad se reduce al monopolo magnético de t'Hooft-Polyakov. La forma explícita de cada uno

---

<sup>80</sup> E. WITTEN. "Some Exact Multipseudoparticle Solutions of Classical Yang-Mills Theory". En: *Phys. Rev. Lett.* 38 (1977).

de los campos vectoriales en esta configuración es

$$\begin{aligned}
eB_\mu^1 &= (\phi_2 + 1)[0, 0, \sin \phi, \sin \theta \cos \theta \cos \phi], \\
eB_\mu^2 &= (\phi_2 + 1)[0, 0, -\cos \phi, \sin \theta \cos \theta \sin \phi], \\
eB_\mu^3 &= (\phi_2 + 1)[0, 0, 0, -\sin^2 \theta],
\end{aligned} \tag{107}$$

en donde las coordenadas cartesianas  $x_j$  fueron reescritas en términos de coordenadas esféricas  $(r, \theta, \phi)$ . Una vez establecida la configuración del límite esférico se encuentran las ecuaciones de campo gravitacional

$$e^{-\lambda} \left( \frac{1 + F_1^3}{r} \frac{d\lambda}{dr} - \frac{1 + 2\phi_2'^2/e^2}{r^2} + \frac{F_2^3}{r^4} + \frac{F_3^3}{r^5} + \frac{F_4^3}{r^6} \right) + \frac{1}{r^2} + \frac{(2\phi_2^2 - \phi_2^4 - 1)/e^2}{r^4} + \frac{F_5^3}{r^6} = 8\pi\rho, \tag{108}$$

$$e^{-\lambda} \left( \frac{1 + F_6^3}{r} \frac{d\nu}{dr} + \frac{1 - 2\phi_2'^2/e^2}{r^2} + \frac{F_7^3}{r^4} + \frac{F_8^3}{r^5} + \frac{F_9^3}{r^6} \right) - \frac{1}{r^2} + \frac{(1 - 2\phi_2^2 + \phi_2^4)/e^2}{r^4} + \frac{F_{10}^3}{r^6} = 8\pi P, \tag{109}$$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}e^{-\lambda} \left[ (1 + F_{11}^3) \frac{d^2\nu}{dr^2} + \frac{1 + F_{11}^3}{2} \left( \frac{d\nu}{dr} \right)^2 + \frac{1 + F_{12}^3}{r} \frac{d\nu}{dr} - \frac{1 + F_{13}^3}{2} \frac{d\nu}{dr} \frac{d\lambda}{dr} \right. \\
\left. - \frac{1 + F_{14}^3}{r} \frac{d\lambda}{dr} + \frac{F_{15}^3}{r^4} + \frac{F_{16}^3}{r^5} + \frac{F_{17}^3}{r^6} \right] - \frac{(1 - \phi_2^4)/e^4}{r^4} + \frac{F_{18}^3}{r^6} = 8\pi P,
\end{aligned} \tag{110}$$

y la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{2e^2\phi_2 + F_{19}^3}{r^4} + \frac{F_{20}^3}{r^3} + \frac{2e^2\phi_2(1 - \phi_2^2) + F_{21}^3}{r^2} + e^2e^{-\lambda}(\nu' - \lambda')\phi_2' + 2e^2e^{-\lambda}\phi_2'' = 0. \tag{111}$$

Por su parte, la componente  $t\phi$  de las ecuaciones de campo gravitacional a primer

orden en  $\Omega$  es

$$\begin{aligned}
& - \left[ \frac{4}{r} - \frac{1}{2}(\nu' + \lambda') + F_{22}^3 \right] e^{-(\lambda+\nu)/2} \frac{\partial \omega}{\partial r} - e^{-(\lambda+\nu)/2} (1 + F_{23}^3) \frac{\partial \omega}{\partial r^2} \\
& - \frac{3 \cot \theta (1 + F_{24}^3) e^{(\lambda-\nu)/2}}{r^2} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} - \frac{e^{(\lambda-\nu)/2} (1 + F_{24}^3)}{r^2} \frac{\partial^2 \omega}{\partial \theta^2} + F_{25}^3 \omega = F_{26}^3 e^{(\lambda-\nu)/2} (\Omega - \omega),
\end{aligned} \tag{112}$$

en donde los coeficientes  $F_i$  ( $i = 1, \dots, 25$ ) se encuentran definidos en el apéndice 3 y permiten identificar las modificaciones respecto a RG presentados en las ecuaciones (57)-(59) y (51). Adicionalmente, se han incluido las modificaciones en las ecuaciones de campo (108) y (109) a través de los aportes del contenido material mediante  $F_{26}^1 = 16\pi(\rho + P)$ , y se ha de garantizar el cumplimiento de las condiciones (54) y (55) que conducen a un espaciotiempo asintóticamente plano y que el marco inercial en el infinito no presente arrastre.

Esta ecuación presenta un comportamiento diferente frente a sus análogas en las teorías presentadas anteriormente: la presencia de términos multiplicados por  $\omega$  y no por alguna de sus derivadas, junto con el aporte de la materia, hacen que esta ecuación diferencial parcial no sea separable en dos ecuaciones diferenciales ordinarias. Esto imposibilita encontrar soluciones radiales o angulares de forma analítica. No obstante, las soluciones para las teorías de RG, Horndeski y GP, motivan la implementación de un *ansatz* que permite simplificar esta última ecuación y generar soluciones analíticas. Esto será explorado en el siguiente capítulo.

## 2.5. Observaciones sobre arrastre de marcos

Las primeras propuestas para medir el efecto de arrastre de marcos datan de 1916 cuando de Sitter propone estudiar las desviaciones en la precesión del perihelio de Mercurio considerando la rotación del sol <sup>81</sup>. Estas desviaciones son del orden de

---

<sup>81</sup> P. M. FITZPATRICK. *Principles of Celestial Mechanics*. Academic Press, 1970.

0.002"/siglo, es decir, unas  $5 \times 10^{-5}$  veces más pequeño que la propia precesión (aproximadamente de 43"/siglo considerando un espaciotiempo de Schwarzschild), lo cual resulta ser muy pequeño como para ser detectado con las mediciones disponibles.

En 1918, Lense y Thirring calculan las perturbaciones en las órbitas de las lunas de varios planetas del sistema solar, incluyendo el efecto del momento angular de estos<sup>82</sup>. El caso más destacable era la quinta luna de Júpiter. Sin embargo, una vez más, las desviaciones encontradas eran muy pequeñas como para ser medidas.

En 1976, Van Patten y Everitt proponen medir el arrastre de marcos producido por la rotación de la tierra usando dos satélites contrarrotantes en órbita alrededor de la tierra sobre el mismo plano polar<sup>83</sup>. Esta posibilidad, aunque plausible por la posibilidad de discernir entre el arrastre de marcos y otros efectos relativistas, resultaba ser muy costosa para ser puesta en marcha.

En 1986, I. Ciufolini propone el experimento LAGEOS III: un arreglo de satélites en los que se usara la misión LAGEOS I (LAsER GEODynamics Satellite)<sup>84</sup>, junto con un nuevo satélite LAGEOS III en órbita suplementaria al primero, que permitiera *cancelar* las enormes perturbaciones debido a la no esfericidad del campo gravitacional de la tierra y así medir el arrastre orbital de LAGEOS I, y viceversa, en el régimen

---

<sup>82</sup> B. MASHHOON, F. W. HEHL y D. S. THEISS. "On the gravitational effects of rotating masses: the Thirring-Lense papers". En: *Gen. Relativ. Gravit.* 16 (1984).

<sup>83</sup> R. A. VAN PATTEN y C. W. F. EVERITT. "Possible Experiment wit, Two Counter-Orbiting Drag-Free Satellites to Obtain a New Test of Einstein's General Theory of Relativity and Improved Measurements in Geodesy". En: *Phys. Rev. Lett.* 36 (1976).

<sup>84</sup> La misión LAGEOS I fue lanzada previamente en 1976 con el objetivo de recolectar datos de alta precisión para proporcionar medidas exactas del satélite respecto a tierra, determinar con exactitud la forma del planeta y determinar los movimientos de las placas tectónicas asociados a la deriva continental (M. TORRENCE. *Lageos-1,-2*. <https://shorturl.at/mnqER>. Accedido 24-05-2023. 2012).

*campo débil*<sup>8586878889</sup>. En 1992 fue lanzada LAGEOS II, el cual no está en órbita suplementaria respecto a LAGEOS I, pero que aún permite encontrar el efecto de arrastre orbital<sup>9091</sup>. Se encontró un arrastre de  $\omega_I \cong 32$  [mas/año], (mas $\equiv$  mili arco segundo) para LAGEOS I y  $\omega_{II} \cong -57$  [mas/año] para LAGEOS II, con una precisión del orden de 20 %<sup>92</sup>. Pese a las diferencias con el valor esperado ( $\omega_I \cong 31$  [mas/año] y  $\omega_{II} \cong 31.5$  [mas/año]), teniendo en cuenta las múltiples fuentes de error que se pueden encontrar para este experimento, las principales conclusiones de esta misión han sido que el arrastre de marcos efectivamente existe y que los resultados obtenidos son coherentes con las predicciones de RG.

En el año 2012 se lanzó la misión LARES I (LAsEr RElativity Satellite). Un nuevo satélite pasivo, de la agencia espacial italiana el cual, junto con las misiones LAGEOS y los datos del experimento GRACE (Gravity Recovery and Climate Experiment), per-

- 
- <sup>85</sup> I. CIUFOLINI. "Measurement of Lense-Thirring drag on high altitude laser ranged artificial satellites". En: *Bull. Am. Phys. Soc.* 6 (1985).
- <sup>86</sup> I. CIUFOLINI. "Mach principle, Lense-Thirring effect and gyrogravitation via two laser ranged satellites". En: *Bull. Am. Phys. Soc.* 6 (1985).
- <sup>87</sup> I. CIUFOLINI. "Measurement of the Lense-Thirring drag on high-altitude, laser-ranged artificial satellites". En: *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986).
- <sup>88</sup> I. CIUFOLINI. "The LAGEOS Lense-Thirring Precession and the LAGEOS Non-Gravitational Nodal Perturbations - Part One". En: *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 40 (1987).
- <sup>89</sup> I. CIUFOLINI. "A comprehensive introduction to the lageos gravitomagnetic experiment: from the importance of the gravitomagnetic field in physics to preliminary error analysis and error budget". En: *Int J Mod Phys A* . 04 (1989).
- <sup>90</sup> I. CIUFOLINI y col. "Measurement of dragging of inertial frames and gravitomagnetic field using laser-ranged satellites." En: *Nuovo cimento. A* 109A (1996).
- <sup>91</sup> I. CIUFOLINI. "On a new method to measure the gravitomagnetic field using two orbiting satellites". En: *Nuovo cimento. A* 109A (1996).
- <sup>92</sup> I. CIUFOLINI. "Test of general relativity: 1995 - 2002 measurement of frame dragging". En: *eConf C020620* (2002).

mitirían reducir la precisión a un 1 %<sup>93</sup>. No obstante, análisis de datos posteriores revelaron que la precisión alcanzada es de alrededor del 4 %<sup>94</sup>. Más recientemente se lanzó un segundo satélite: el LARES 2 con el que se pretende alcanzar una precisión del 0.2 %<sup>95</sup>. Desde luego, la misión aún sigue en recolección de datos.

En el mismo sentido, en 2004 se lanza la misión Gravity Probe-B con la intención de medir el arrastre de marcos de giroscopios en órbita terrestre con una precisión de 1 %<sup>96,97</sup>. En el año 2011 se publicaron los resultados del análisis de datos, reportando una medida coherente con RG, pero con un margen de incertidumbre de alrededor de 19 %<sup>98</sup>.

En otros escenarios astrofísicos, en 1998, R. Iping, usando datos de rayos  $X$  provenientes de Hercules  $X - 1$  (también conocido como 4U1656+35), una binaria la cual funge como fuente de rayos  $X$  observada por el satélite Uhuru, muestra evidencia del efecto de arrastre de marcos a través de las huellas que éste deja en el disco

---

<sup>93</sup> I. CIUFOLINI y col. "Towards a One Percent Measurement of Frame Dragging by Spin with Satellite Laser Ranging to LAGEOS, LAGEOS 2 and LARES and GRACE Gravity Models". En: *ssr* 148 (2009).

<sup>94</sup> I. CIUFOLINI y col. "A test of general relativity using the LARES and LAGEOS satellites and a GRACE Earth gravity model. Measurement of Earth's dragging of inertial frames". En: *Eur. Phys. J. C* 76 (2016).

<sup>95</sup> I. CIUFOLINI y col. "A new laser-ranged satellite for General Relativity and space geodesy: I. An introduction to the LARES2 space experiment". En: *Eur. Phys. J. Plus* 132 (2017).

<sup>96</sup> C. W. F. EVERITT. *The Gyroscope Experiment I: General Description and Analysis of Gyroscope Performance*. New Academic Press, 1974.

<sup>97</sup> J. A. LIPA, W. M. FAIRBANK y C. W. F. EVERITT. "The gyroscope experiment-II: Development of the London-moment gyroscope and of cryogenic technology for space, in *Experimental Gravitation*". En: ed. B. Bertotti Academic Press, New York, 1974.

<sup>98</sup> C. W. F. EVERITT y col. "Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity". En: *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011).

de acreción a su alrededor <sup>99</sup>. Iping argumenta que en las regiones más interiores del disco, éste se aplana más que para regiones exteriores. Esta explicación, afirma el autor, sólo es consistente considerando el arrastre de marcos generado por la fuente rotante. Sin embargo, no da medidas precisas del arrastre generado.

Adicionalmente, se ha mostrado que para aquellas estrellas que rotan alrededor de un agujero negro supermasivo se produce una precesión del plano orbital alrededor del eje de rotación del agujero debido al arrastre de marcos producido por éste. Se ha propuesto, para el futuro cercano, medir este efecto usando monitoreo astrométrico de estrellas en el centro de la vía lactea <sup>100</sup>.

Otras propuestas consisten en usar rayos  $X$ , rayos  $\gamma$  y tasas de producción de pares  $e^- - e^+$  en jets relativistas emitidos por cuásares y núcleos activos de galaxias, los cuales se ven modificados al incluir el efecto de arrastre de marcos debido a su rotación <sup>101 102</sup>.

Por último, V. Venkatraman *et. al.* reportan en la referencia <sup>103</sup> mediciones de arrastre de marcos en el sistema PSR J1141-6545, ésta es una binaria compuesta por una enana blanca masiva orbitando un púlsar. Los autores observan una evolución de la inclinación orbital del púlsar que es consecuencia del momento cuadrupolar y el arrastre de marcos debido a la rápida rotación de la enana blanca. Los autores

---

<sup>99</sup> R. C. IPING. "General Relativistic Frame-Dragging in Neutron Stars and Black Holes". En: *Bull. Am. Astron. Soc.* Vol. 191. 1998.

<sup>100</sup> D. MERRITT y col. "Testing properties of the Galactic center black hole using stellar orbits". En: *prd* 81 (2010).

<sup>101</sup> R. K. WILLIAMS. "Extracting X-rays,  $\gamma$ -rays, and relativistic  $e^- e^+$  pairs from supermassive Kerr black holes using the Penrose mechanism". En: *Phys. Rev. D* 51 (1995).

<sup>102</sup> R. K. WILLIAMS. "Collimated Escaping Vortical Polar  $e^- e^+$  Jets Intrinsically Produced by Rotating Black Holes and Penrose Processes". En: *Astrophys. J.* 611 (2004), pág. 952.

<sup>103</sup> V. VENKATRAMAN K. y col. "Lense-Thirring frame dragging induced by a fast-rotating white dwarf in a binary pulsar system". En: *Science* 367 (2020).

concluyen que los resultados son completamente coherentes con las predicciones de RG. Sin embargo, ellos mismos proponen estudiar el sistema PSR J0737-3039A el cual es un sistema doble de estrellas de neutrones el cual, por sus efectos gravitacionales más intensos, permitirá ser más precisos en sus mediciones.



### 3. SOLUCIONES

En este capítulo se presentan las soluciones numéricas para el arrastre de marcos producido por objetos compactos en las teorías de Horndeski, GP y GSU2P, así como en RG para evaluar desviaciones respecto a esta última. Al referirse a un objeto compacto en el contexto astrofísico se habla de dichos cuerpos que resultan del remanente de un proceso tardío de evolución estelar. Aunque este proceso depende de factores específicos del tipo de estrella como la masa, metalicidad, velocidad de rotación, entre otros; en general, las estrellas agotan su combustible nuclear entrando en un proceso de desequilibrio entre la fuerza gravitacional y la presión generada por dicho combustible, generando la muerte de ellas en forma de nebulosas, supernovas, brotes de rayos gamma, etc.<sup>104</sup>. Ahora bien, aunque toda la materia de la estrella puede invertirse en estos fenómenos, en algunos casos no lo hace y este remanente puede convertirse en un objeto autogravitante que, de acuerdo a su estructura, puede ser una enana blanca, una estrella de neutrones o un agujero negro. Las enanas blancas y las estrellas de neutrones comparten el mecanismo que permite contrarrestar la compresión gravitacional, éste es la repulsión entre sus componentes elementales. Sin embargo, se diferencian en sus componentes: átomos en estado de plasma y neutrones, respectivamente. Por su parte, los agujeros negros presentan características tan extremas que no encuentran tal mecanismo y colapsan en una singularidad<sup>105</sup>.

Lo anterior ocasiona que estos objetos sean muy pequeños comparados con una

---

<sup>104</sup> T. M. TAURIS y E. P. J. VAN DEN HEUVEL. *Formation and evolution of compact stellar X-ray sources*. Vol. 39. Cambridge University Press, 2006.

<sup>105</sup> S. L. SHAPIRO y S. A. TEUKOLSKY. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. John Wiley & Sons, 2008.

estrella de la secuencia principal de masa comparable. Esto suele parametrizarse por medio de la *compacidad*, dado por la fracción  $MG/Rc^2$ . Tanto enanas blancas como estrellas de neutrones típicas presentan masas del orden de una masa solar ( $M_{\odot}$ ), en tanto que los radios son del orden de  $10^3$  km para las primeras y 10 km para las segundas <sup>106</sup>. En consecuencia, las compacidades son del orden de  $10^{-4}$  y 0.2, respectivamente. Por su parte, los agujeros negros presentan una compacidad de 0,5 tomando como  $\mathcal{R}$  el radio de Schwarzschild.

Este aspecto es de gran relevancia, no sólo en RG, sino también en teorías modificadas de la gravedad, ya que muestra que las enanas blancas y los agujeros negros son los grandes laboratorios gravitacionales en el régimen de campo fuerte. El capítulo anterior mostró que el arrastre de marcos para objetos lentamente rotantes, por ser de orden uno en la expansión en potencias de  $\Omega$ , es un fenómeno de baja intensidad, lo cual ha sido corroborado con medidas observacionales. Por lo tanto, para lograr identificar desviaciones entre el arrastre de marcos predicho por la RG y el predicho por teorías modificadas, tanto al interior como el exterior del objeto lentamente rotante, se hace necesario ir al límite de campo fuerte. En ese sentido, este trabajo se enfoca en soluciones para estrellas de neutrones.

Por lo anterior, la primera sección presenta en detalle la EOS polítropa (como se considera en el método de Hartle), así como sus principales características físicas. La sección 3.2 presenta soluciones analíticas alrededor del centro de la estrella en el límite esférico. Estas soluciones si bien están restringidas a valores pequeños de  $r$  permiten crear condiciones iniciales de cara a poder obtener soluciones numéricas. Como se vio, la inclusión de esta EOS cierra el sistema de ecuaciones que permite resolver las ecuaciones de estructura de la estrella en todo el dominio. Por lo tanto, la sección 3.3 muestra las soluciones numéricas tanto para la estructura de las es-

---

<sup>106</sup> P. HAENSEL, A. Y. POTEKHIN y D. G. YAKOVLEV. “Neutron stars 1: Equation of state and structure”. En: *Astrophys. Space Sci. Libr.* 326 (2007).

trellas de neutrones para el arrastre de marcos generado por estas. Adicionalmente, a lo largo del trabajo se encontró que, para la teoría GSU2P, se podía prescindir de la materia bariónica y aún así construir soluciones no triviales de objetos compactos esféricamente simétricos y estáticos. Éstas son denominadas en la literatura como soluciones tipo partícula y describen la existencia de estrellas de bosones vectoriales. Por lo tanto, en el final del capítulo se presenta una sección para este tipo de objetos, así como el arrastre de marcos que genera, los cuales son muy útiles para concluir sobre el rol de los campos acoplados a la gravedad en las desviaciones del arrastre de marcos.

### 3.1. Ecuación de estado para estrellas de neutrones

Determinar la ecuación de estado para estrellas de neutrones no es tarea sencilla pues no se entiende bien la naturaleza de interacciones fuertes en materia con densidad superior a la de equilibrio nuclear  $\rho_s \cong 2.7 \times 10^{14} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  <sup>107</sup>. Por esto, se han propuesto diferentes aproximaciones para construir ecuaciones de estado consideradas *realistas*: modelos que utilizan potenciales no relativistas, que usan hamiltonianos con potenciales de interacción efectivos tipo Skyrme o Gogny, modelos relativistas con lagrangianos efectivos con bariones y mesones y modelos relativistas basados en el método de Dirac-Brueckner-Hartree-Fock o el método variacional implementando interacciones neutrón-neutrón junto con datos experimentales de dispersión de neutrones <sup>108</sup><sup>109</sup>. Adicionalmente, los resultados obtenidos con estas

---

<sup>107</sup> J. M. LATTIMER y M. PRAKASH. "Neutron Star Structure and the Equation of State". En: *Astrophys. J.* 550 (2001).

<sup>108</sup> P. RING y P. SCHUCK. *The Nuclear Many-Body Problem*. Springer-Verlag, 1980.

<sup>109</sup> J. M. LATTIMER y col. "Rapidly Rotating Pulsars and the Equation of State". En: *Astrophys. J.* 355 (1990).

EOS son sometidos al cumplimiento de criterios de admisibilidad, así como restricciones debido a resultados observacionales. Aunque este proceso permite descartar algunas de ellas, otras tantas superan estos filtros y quedan como candidatas a describir la estructura de estrellas de neutrones <sup>110</sup>.

Con base en lo anterior, es razonable pensar que si la EOS que puede describir el comportamiento del contenido material de una estrella de neutrones presenta tal complejidad, ¿la aproximación de Hartle en donde se usa una EOS polítropa  $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\varepsilon)$  es una buena metodología para estudiar la estructura de una estrella de neutrones? En la referencia <sup>111</sup> se demuestra que usando ecuaciones de estado de tipo polítropa se puede reproducir con bastante precisión los resultados dados por las EOS realistas si se ajustan adecuadamente los parámetros libres. De manera que el uso de una EOS polítropa en la metodología de Hartle es una buena aproximación para estudiar la estructura y el arrastre de estrellas de neutrones sin entrar en detalle en particularidades del contenido material, sino concentrándose en las propiedades gravitacionales.

La EOS polítropa satisface

$$P = K\rho^{1+(1/n)}, \quad (113)$$

en donde  $K$  y  $n$  son constantes. A la constante  $n$  se le conoce como índice politrópico y  $K$  responde a las características propias del fluido y se determina sabiendo la relación entre densidad y presión en un punto específico. En ese sentido resulta útil definir el parámetro  $\sigma$  como

$$\sigma \equiv \frac{P_c}{\rho_c}, \quad (114)$$

---

<sup>110</sup> B. V. IVANOV. “Analytical study of anisotropic compact star models”. En: *Eur. Phys. J. C* 77 (2017).

<sup>111</sup> L. FERRARI, P. C. R. ROSSI y M. MALHEIRO. “A polytropic approach to neutron stars”. En: *Int. J. Mod. Phys. D*. 19 (2010).

en donde  $P_c$  y  $\rho_c$  son la presión y densidad de energía de materia en el centro del objeto  $r = 0$ . Para valores de  $\sigma \ll 1$  se considera que la presión de las partículas es muy pequeña comparada con la energía en reposo de las mismas, por lo que se dice que las partículas están en el régimen no relativista. Por el contrario, si  $\sigma \sim 1$ , la energía cinética de las partículas es tal que la presión es comparable a la energía en reposo de las mismas, por lo que éstas están en un régimen relativista. En el presente trabajo se consideró un valor fijo de  $\sigma = 0.25$ . Adicionalmente, para una estrella de neutrones, se considera su densidad central en el rango de  $2 \times 10^{15} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$  y  $9 \times 10^{15} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . De manera que para hacer una descripción apropiada, se consideró un valor de densidad central  $\rho_c = 5 \times 10^{15} \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$ . Con esto ya es posible fijar un valor de  $K$  de la forma

$$K = \frac{\sigma}{\rho_c^{1/n}}. \quad (115)$$

Por último, se fijó  $n = 1$  como índice politrópico.

### 3.2. Soluciones analíticas alrededor del origen

Al momento de realizar las soluciones numéricas, se encontró que para valores pequeños de  $r$ , la función  $e^\lambda$  conducía a errores numéricos apreciables que afectaban la interpretación de los resultados. De manera que por propósitos numéricos se usó la sustitución

$$\lambda(r) = -\ln \left( 1 - \frac{2M(r)}{r} \right). \quad (116)$$

Si bien *a priori*, la función  $M(r)$  es una función arbitraria de  $r$ , para el caso de RG la ecuación (57) reduce a

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi\rho r^2, \quad (117)$$

lo que permite identificar esta función como la distribución de masa del objeto.

Es importante destacar que las ecuaciones de campo para las teorías modificadas

de la gravedad pueden ser vistas de la forma

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}^M + 8\pi T_{\mu\nu}^C, \quad (118)$$

en donde  $\mathbf{T}^M$  es el tensor energía-momento de materia ya definido y  $\mathbf{T}^C$  se considera el tensor energía-momento efectivo del campo vectorial. Es decir, las contribuciones de los campos escalares y vectoriales, según sea el caso, pueden ser entendidas como la manifestación de un fluido. Esto permite generalizar la definición de masa del objeto en el contexto de las teorías modificadas

$$\frac{dM}{dr} = 4\pi(\rho_M + \rho_C)r^2, \quad (119)$$

en donde  $\rho_C$  es la densidad de energía aportada por el campo escalar o vectorial y  $\rho_M$  es la densidad de energía de la materia bariónica. Esta ecuación es una muestra clara que la contribución del campo acoplado a la gravedad modifica la cantidad de masa gravitacional del objeto.

Para encontrar las versiones adimensionales de las ecuaciones de estructura en las teorías de RG, Horndeski y GP, se proponen las siguientes sustituciones

$$x = \frac{r}{l_\odot}, \quad m = \frac{M}{l_\odot}, \quad p_M = \frac{P_M}{\beta}, \quad y_M = \frac{\rho_M}{\beta}, \quad (120)$$

en donde se ha definido

$$\beta \equiv 4\pi l_\odot^2 \rho_c, \quad (121)$$

y la longitud equivalente a una masa solar en unidades geometrizadas  $l_\odot$ , que en el sistema internacional es

$$l_\odot = \frac{GM_\odot}{c^2} \cong 1.47 \text{ [km]}. \quad (122)$$

Para la teoría de Horndeski el parámetro de acoplamiento no es adimensional, de manera que se considera

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{l_{\odot}^4}. \quad (123)$$

Con esto, se proponen las siguientes expansiones alrededor del centro de la estrella

$$\begin{aligned} m(x) &= \sum_{i=0} m_i x^i, & \nu(x) &= \sum_{i=0} \nu_i x^i, \\ p_M(x) &= \sum_{i=0} p_i x^i, & \tilde{W}(x) &= \sum_{i=0} \tilde{W}_i x^i. \end{aligned} \quad (124)$$

Para la teoría de Horndeski se considera la expansión en serie del campo escalar

$$\varphi(x) = \sum_{i=0} \varphi_i x^i. \quad (125)$$

Para la teoría GP se considera la expansión en serie de la componente temporal del campo vectorial

$$B_0(x) = \sum_{i=0} B_{0,i} x^i, \quad (126)$$

y para la GSU2P se considera la expansión

$$\phi_2(x) = \sum_{i=0} \phi_{2,i} x^i. \quad (127)$$

**Soluciones analíticas en la teoría de Horndeski** Al reemplazar las series (124) y (125) en las ecuaciones de campo (81), (82), (84) y (60) y truncando a orden cuatro

se tiene

$$m(x) = \frac{y_c \beta}{3} x^3 + \mathcal{O}(x^4), \quad (128)$$

$$\nu(x) = \nu_0 + \frac{\beta}{12} (3p_0 + y_0) x^2 + \mathcal{O}(x^4), \quad (129)$$

$$p(x) = p_0 - \frac{\beta}{6} (p_0 + y_0) (3p_0 + y_0) x^2 + \mathcal{O}(x^4), \quad (130)$$

$$\varphi(x) = \varphi_0 + \mathcal{O}(x^4). \quad (131)$$

Las soluciones para  $m, \nu$  y  $p$  son exactamente las mismas que para RG. Esto es entendible en la medida en que las ecuaciones de campo para la teoría de Honrdeski no dependen del campo  $\phi$  sino de sus derivadas y la solución para  $\phi$  es constante en este límite. Por consiguiente, todo lo que se puede extraer de estas ecuaciones es que en esta región no se ve modificada la RG.

**Soluciones analíticas en la teoría GP** Al reemplazar las series (124) y (126) en las ecuaciones de campo (93), (94), (96) y (60) y truncando a orden cuatro se tiene

$$m(x) = \left( \frac{y_c \beta}{3} + \frac{3\beta B_c^4 p_c \alpha}{4e^{4\nu_0} + 3B_c^4 \alpha} - \frac{\alpha \beta B_c^4 (3p_c + y_c) (20e^{2\nu_0} + 3B_c^2 \alpha)}{-16e^{6\nu_0} + 60B_c^4 e^{2\nu_0} \alpha + 36B_c^2 e^{4\nu_0} \alpha + 9B_c^6 \alpha^2} \right) x^3 + \mathcal{O}(x^4), \quad (132)$$

$$\nu(x) = \nu_0 + \frac{2e^{4\nu_0} (3p_c + y_c) (4e^{2\nu_0} - 9B_c^2 \alpha) \beta}{6(16e^{6\nu_0} - 60B_c^4 e^{2\nu_0} \alpha - 36B_c^2 e^{4\nu_0} \alpha - 9B_c^6 \alpha^2)} x^2 + \mathcal{O}(x^4), \quad (133)$$

$$p(x) = p_c - \frac{2e^{4\nu_0} (3p_c + y_c) (4e^{2\nu_0} - 9B_c^2 \alpha) \beta}{6(16e^{6\nu_0} - 60B_c^4 e^{2\nu_0} \alpha - 36B_c^2 e^{4\nu_0} \alpha - 9B_c^6 \alpha^2)} x^2 + \mathcal{O}(x^4), \quad (134)$$

$$B_0(x) = B_c - \frac{8B_c^3 e^{4\nu_0} (3p_c + y_c) \alpha \beta}{16e^{6\nu_0} - 60B_c^4 e^{2\nu_0} \alpha - 36B_c^2 e^{4\nu_0} \alpha - 9B_c^6 \alpha^2} x^2 + \mathcal{O}(x^4), \quad (135)$$

$$\tilde{W}(x) = \tilde{W}_0 + \frac{8e^{4\nu_0} \tilde{W}_0 (p_c + y_c) \beta}{5(4e^{4\nu_0} - 3B_c^4 \alpha)} x^2 + \mathcal{O}(x^4). \quad (136)$$

Para este caso sí se ven diferencias apreciables respecto al caso de RG. Adicionalmente, es claro que una vez se haga  $\alpha = 0$  se recuperan las soluciones de RG



como era de esperarse.

**Soluciones analíticas en la teoría GSU2P** Al reemplazar las series (124) y (127) en las ecuaciones de campo (108), (109), (110) y (60) y truncando a orden ocho se tiene

$$m(x) = m_3x^3 + m_5x^5 + m_7x^7 + \mathcal{O}(x^8), \quad (137)$$

$$\nu(x) = \nu_0 + \nu_2x^2 + \nu_4x^4 + \nu_6x^6 + \mathcal{O}(x^8), \quad (138)$$

$$p(x) = \sigma + p_2x^2 + p_4x^4 + p_6x^6 + \mathcal{O}(x^8), \quad (139)$$

$$\phi_2(x) = -1 + b_2x^4 + b_4x^4 + b_6x^6 + \mathcal{O}(x^8), \quad (140)$$

en donde, las constantes se definen como

$$m_3 = \frac{\beta}{3} + \frac{2b_2^2}{e^2},$$

$$m_5 = (-\beta^2e^4(1 + \sigma)(1 + 3\sigma)) + 4b_2^2(24b_2(10\alpha_4b_2 - e^2)\sigma + e^2\beta(-3 + \sigma - 12\sigma^2))/60e^4\sigma,$$

$$\begin{aligned} m_7 = & (5\beta^3e^6(1 + \sigma)(1 + 3\sigma)(3 + \sigma(-2 + 45\sigma)) + 12b_2^2(\beta^2(15 + \sigma(-90 \\ & + \sigma(547 + 12\sigma(-17 + 126\sigma)))) + 12b_2\sigma(4e^4\beta(5 + \sigma(-47 + 72\sigma))) \\ & + b_2(8b_2(4(18 - 70\alpha_1 + 315\alpha_4)b_2 + 21(-4 + 5\alpha_1 - 60\alpha_4)e^2)\sigma + e^2(336e^2\sigma) \\ & + \beta(-55 + \sigma(273 + 560\alpha_1(-1 + \sigma) + 72\sigma) + 20\alpha_4(5 + 3(47 - 92\sigma)\sigma))))/50400e^6\sigma^2, \end{aligned}$$

$$\nu_2 = (\beta + (12b_2^2 - 3b_2e^2 - 2\beta e^2(-1 + \sigma)))/10e^2,$$

$$\begin{aligned} \nu_4 = & (-\beta^2e^4(3 + \sigma(1 + 9\sigma + 90\sigma^2))) + 36b_2(-16b_2((-3 + 5\alpha_4)b_2 + e^2)\sigma \\ & - e^2(\beta - 9\beta\sigma + 6\beta\sigma^2))720e^4\sigma, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_6 = & (5\beta^3 e^6 (1 + 3\sigma)(9 + \sigma(-333 + \sigma(661 + 3\sigma(-319 + 840\sigma)))) + \beta^2(5 - \sigma(360 \\
& + \sigma(-1473 + 2\sigma(42 + 66\sigma(-5 + \sigma(-269 + 54\sigma)))) + b_2(16b_2((752 - 840\alpha_1 + 420\alpha_4)b_2 \\
& + 3(-148 + 105\alpha_1 + 210\alpha_4)e^2)\sigma + e^2(672e^2\sigma) + \beta(-485 + 3(1637 + 1120\alpha_1(-1 + \sigma) \\
& - 612\sigma)\sigma) + 20\alpha_4(5 + \sigma(-281 + 906\sigma))))))907200e^6\sigma^2,
\end{aligned}$$

$$p_2 = (-2b_2^2(1 + \sigma))/e^2 - (\beta(1 + \sigma)(1 + 3\sigma))/6,$$

$$\begin{aligned}
p_4 = & ((1 + \sigma)(\beta^2 e^4 (1 + 3\sigma)(4 + 9\sigma + 30\sigma^2) + 6b_2^2(12b_2(4e^2\sigma + b_2(5 + (-2 + 20\alpha_4)\sigma)) \\
& + e^2\beta(12 + \sigma(23 + 78\sigma)))))/360e^4\sigma,
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
p_6 = & -((1 + \sigma)(5\beta^3 e^6 (1 + 3\sigma)(6 + \sigma(-5 + 2\sigma(71 + 3\sigma(43 + 105\sigma)))) + 3b_2^2(e^4\beta^3(225 \\
& + \sigma(-695 + 3\sigma(1753 + 3309\sigma + 5328\sigma^2))) + 12b_2(8e^4\sigma\beta(20 + \sigma(-47 + 132\sigma))) \\
& + b_2(12b_2\sigma(4e^2(35 + 3(-26\alpha_1 + 70\alpha_4)\sigma) + b_2(-245 + 4(99 - 280\alpha_1)\sigma + 140\alpha_4(5 + 14\sigma))) \\
& + \beta(105 + \sigma(-1115 + 2(1913 + 1680\alpha_1(-1 + \sigma) - 498\sigma)\sigma + 40\alpha_4(20 \\
& + \sigma(-53 + 558\sigma)))))))/75600e^6\sigma^2,
\end{aligned}$$

$$b_4 = (b_2(8b_2^2 - 3b_2e^2 - 2e^2\beta(-1 + \sigma)))/10e^2,$$

$$\begin{aligned}
b_6 = & (b_2(e^4\beta^3(-5 + \sigma(46 + \sigma(-55 + 54\sigma))) + b_2(24e^4\sigma\beta(-5 + \sigma) + 4b_2(6b_2(8(8 - 7\alpha_1 + 35\alpha_4)b_2 \\
& + (-40 + 21\alpha_1)e^2)\sigma + e^2(21(e^2\sigma + \beta(-15 + \sigma(167 - 60\alpha_4 + 84\alpha_1(-1 + \sigma) \\
& + 90(-1 + 2\alpha_4)\sigma)))))))/840e^4\sigma.
\end{aligned}$$

Para este caso también se identifican claramente los aportes de las piezas lagrangianas consideradas. Adicionalmente, al hacer  $\alpha_1 = \alpha_4 = 0$  se reduce a las soluciones para el caso de EYM.

### 3.3. Soluciones numéricas de estrellas de neutrones

Para la teoría de Horndeski se obtuvieron soluciones para diversos valores del parámetro de acoplamiento  $\tilde{\alpha}$ . Las desviaciones obtenidas en los perfiles de presión y densidad de masa respecto a RG resultan ser del orden de  $10^{-6}$  y el campo escalar se mantiene constante. Esto significa que los resultados son esencialmente los mismos que para el caso de RG, los cuales se presentan junto con los resultados para la teoría GP. Por esta razón, no se hace una presentación explícita de los resultados para la teoría de Horndeski.

#### 3.3.1. Estrellas de neutrones en la teoría GP

**Presión y densidad de materia** En la figura 1 se presenta el perfil de presión para diferentes combinaciones de los parámetros libres  $(\alpha, B_{0c})$ , así como las dos posibles ramas  $B_1 = 0$  y  $B_1 \neq 0$ . De allí se pueden extraer varios elementos: en primer lugar, el efecto del signo del acoplamiento revela el rol del campo vectorial en el equilibrio hidrostático de la estrella. Valores positivos de  $\alpha$  conducen a un decrecimiento más rápido del perfil de presión, lo que significa que la presencia del campo vectorial favorece a la compresión gravitacional, de manera que la estrella será más pequeña que aquella de RG. Por el contrario, con valores negativos, el perfil de presión decrece más lentamente, es decir, el campo se opone a la compresión gravitacional generando estrellas más grandes.

Para hacer un análisis cuantitativo y poder comparar con el radio de la estrella en RG:  $\mathcal{R}/l_{\odot} = 4.73$  se sintetizan los resultados en la tabla 1. En primer lugar, para el caso  $B_1 = 0$  se corrobora el comportamiento descrito anteriormente. El acoplamiento positivo genera radios más pequeños que en RG, aunque para  $\alpha = +10^{-2}$  las desviaciones no son apreciables, mientras el acoplamiento negativo genera radios más grandes que en RG. Además, es evidente que las desviaciones  $|\mathcal{R}_{RG} - \mathcal{R}_{Proca}|$

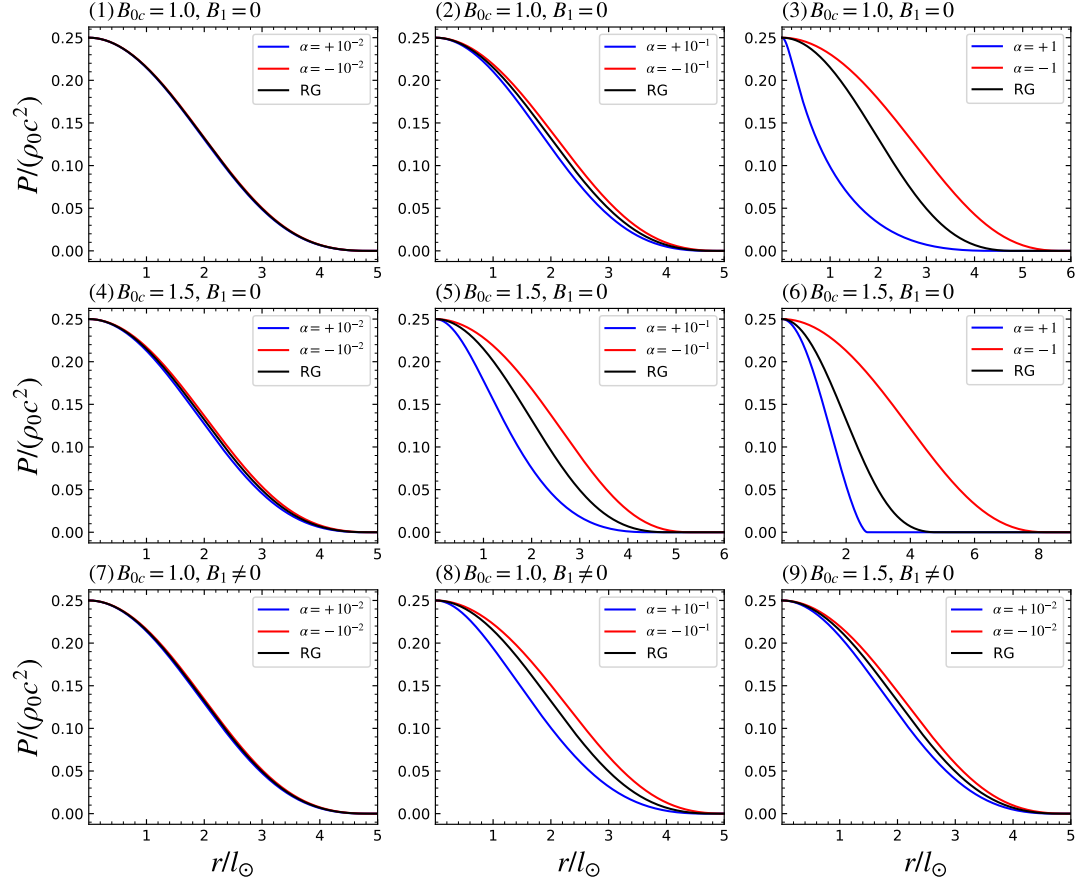


Figura 1. Perfiles de presión para soluciones obtenidas con diferentes conjuntos de parámetros en la teoría GP.

crecen con el valor absoluto de  $\alpha$  y de  $B_{0c}$ . Cabe resaltar que se generaron soluciones con valores negativos de  $B_{0c}$ , pero no presentan diferencias respecto a su contraparte positiva. Para valores de  $\alpha$  de órdenes de magnitud superiores a los mostrados, se encuentran comportamientos anómalos en el perfil de presión, como que no es monótonamente decreciente o que no se alcanza una presión igual a cero en ningún punto del dominio, de manera que no corresponden a soluciones

$\alpha$	Radio de la estrella $\mathcal{R}/l_{\odot}$			
	$B_1 = 0$		$B_1 \neq 0$	
	$B_{0c} = 1.0$	$B_{0c} = 1.5$	$B_{0c} = 1.0$	$B_{0c} = 1.5$
+0.01	4.73	4.73	4.78	4.71
-0.01	4.80	4.80	4.83	4.88
+0.1	4.67	4.42	4.66	—
-0.1	4.87	5.22	4.98	—
+1	4.36	2.65	—	—
-1	5.75	8.12	—	—

Tabla 1. Radio de la estrella normalizado con  $l_{\odot}$  para cada una de las soluciones encontradas. Las casillas en donde figura un guion (-) es porque tal combinación de parámetros conduce a perfiles de presión inconsistentes con posibles soluciones admisibles.

físicamente admisibles. Todo el análisis anterior se repite en el caso  $B_1 \neq 0$ . Aquí, la desviación en el radio respecto a RG es mayor que en el primer caso, para el mismo valor de  $\alpha$ . Esto también implica que se alcanzan más rápidamente comportamientos anómalos en los perfiles de presión. Por lo tanto, los resultados exigen establecer restricciones en el parámetro de acoplamiento para cada caso.

Por su parte, el perfil de densidad de energía  $\rho_M$  es cualitativamente idéntico al perfil de presión. Esto está claramente relacionado con la EOS, de manera que, cuantitativamente, los resultados dependen de los parámetros  $\sigma$  y  $n$  escogidos.

**Masa** La figura 2 presenta las distribuciones de masa para las soluciones obtenidas. De allí se observa que, en general, la masa total de la estrella será menor si  $\alpha$  es positivo y mayor si es negativo. Esto es consecuencia del decrecimiento más lento en el perfil de densidad, pues permite la acumulación de mayor cantidad de masa. Esta función muestra la cantidad de masa acumulada en un determinado radio, por supuesto, para valores de  $r > \mathcal{R}$  ésta debería ser constante. Los paneles (3), (6) y (8) revelan problemas de convergencia de la masa cuando se va creciendo en  $\alpha$  y  $B_{0c}$ , tanto para  $B_1 = 0$ , como para  $B_1 \neq 0$ . Esto muestra la necesidad de incluir

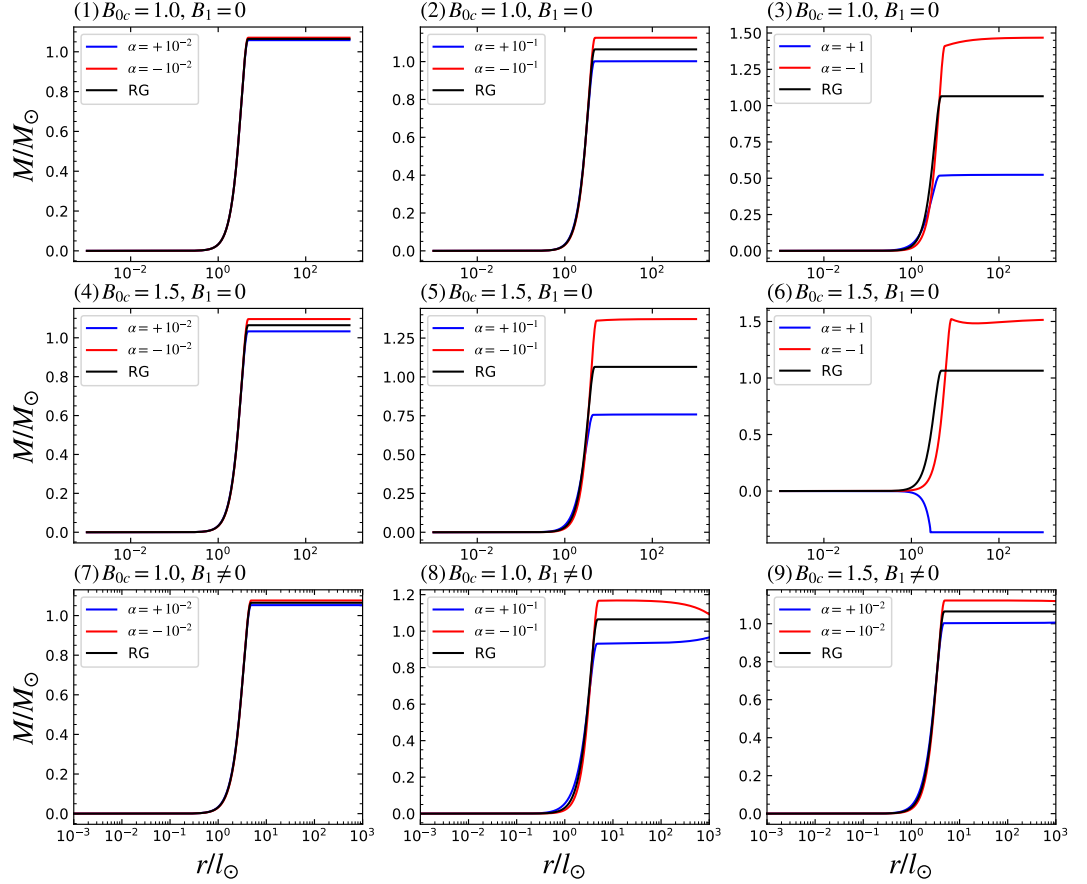


Figura 2. Distribución de masa para diferentes conjuntos de parámetros en la teoría GP.

restricciones adicionales sobre  $\alpha$ , que no son visibles en los perfiles de presión.

Este resultado muestra la posibilidad de encontrar en la teoría GP una alternativa para explicar, por ejemplo, la masa del objeto compacto no identificado en la binaria del evento GW190814 <sup>48</sup>. Es posible que estudiando ecuaciones de estado realistas en objetos compactos para la teoría GP pueda superarse el límite de masa para

estrellas de neutrones calculada en el contexto de RG <sup>112</sup>.

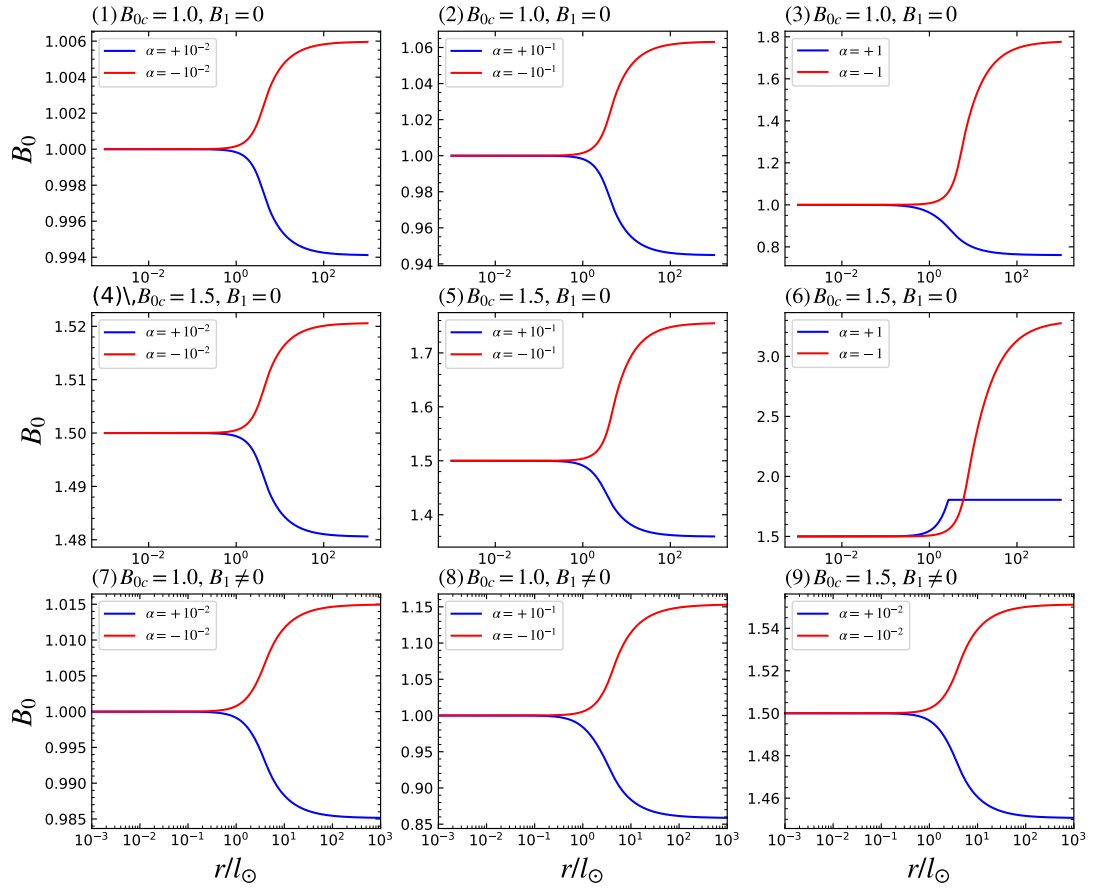


Figura 3. Perfil del campo vectorial para diferentes conjuntos de parámetros en la teoría GP.

**Perfil del campo vectorial** La figura 3 presenta los perfiles de  $B_0$  para las soluciones estudiadas. De ésta se puede ver que el campo vectorial es constante cerca

<sup>112</sup> B. MARGALIT y B. METZGER. “Constraining the Maximum Mass of Neutron Stars From Multi-Messenger Observations of GW170817”. En: *Astrophys. J. Lett.* 850 (2017).

al origen, lo cual era de esperarse de acuerdo a la condición de regularidad alrededor del centro de estrella. Para valores de  $r \gg \mathcal{R}$ , el campo vectorial ha de ser constante para garantizar que el espaciotiempo sea atípicamente plano, lo cual se satisface para todas las soluciones encontradas. No obstante, en el panel (6) se tiene un comportamiento que difiere mucho de los demás casos para acoplamientos positivos. Esto, sin embargo, pierde relevancia al considerar que la distribución de masa ya había revelado problemas de consistencia para los valores de parámetros considerados en dicho panel.

Para los demás casos se tiene que el acoplamiento positivo conduce a valores de  $B_0 \leq B_{0c}$  en todo el dominio, alcanzando un valor mínimo constante en la región  $r \gg \mathcal{R}$ , mientras que para valores negativos de  $\alpha$  se tiene  $B_0 \geq B_{0c}$ , alcanzando su valor máximo constante, nuevamente en la región  $r \gg \mathcal{R}$ . Finalmente, aunque para algunos casos las diferencias entre valores positivos y negativos de  $\alpha$  parecen ser simétricos, los paneles (3), (5) y (8) muestran que no es así, ya que la diferencia  $|B_{0\infty} - B_{0c}|$  es mayor para acoplamientos negativos.

**Arrastre de marcos** La figura 4 presenta la rapidez angular  $\omega(r)$  medida por un observador inercial, la cual es la medida de arrastre de marcos. En términos generales, acoplamientos positivos conducen a que  $\omega_{Proca} < \omega_{RG}$ , mientras que acoplamientos negativos conducen a  $\omega_{Proca} > \omega_{RG}$ . Esto muestra una relación directa entre la extensión de la estrella y el arrastre que ésta genera.

El análisis de los perfiles de masa y campo vectorial mostró que los resultados de los paneles (3), (6) y (8) presentan inconsistencias físicas que exigen imponer restricciones en los parámetros libres. Adicionalmente, al exigir un espaciotiempo asintóticamente plano se debe garantizar que un observador inercial en el infinito no experimente rapidez angular. Los paneles (3), (6) y (8), muestran inconsistencias también para esta función pues se ven problemas de convergencia a cero para regiones de  $r \gg \mathcal{R}$ . De igual forma, el panel (5) también muestra problemas de



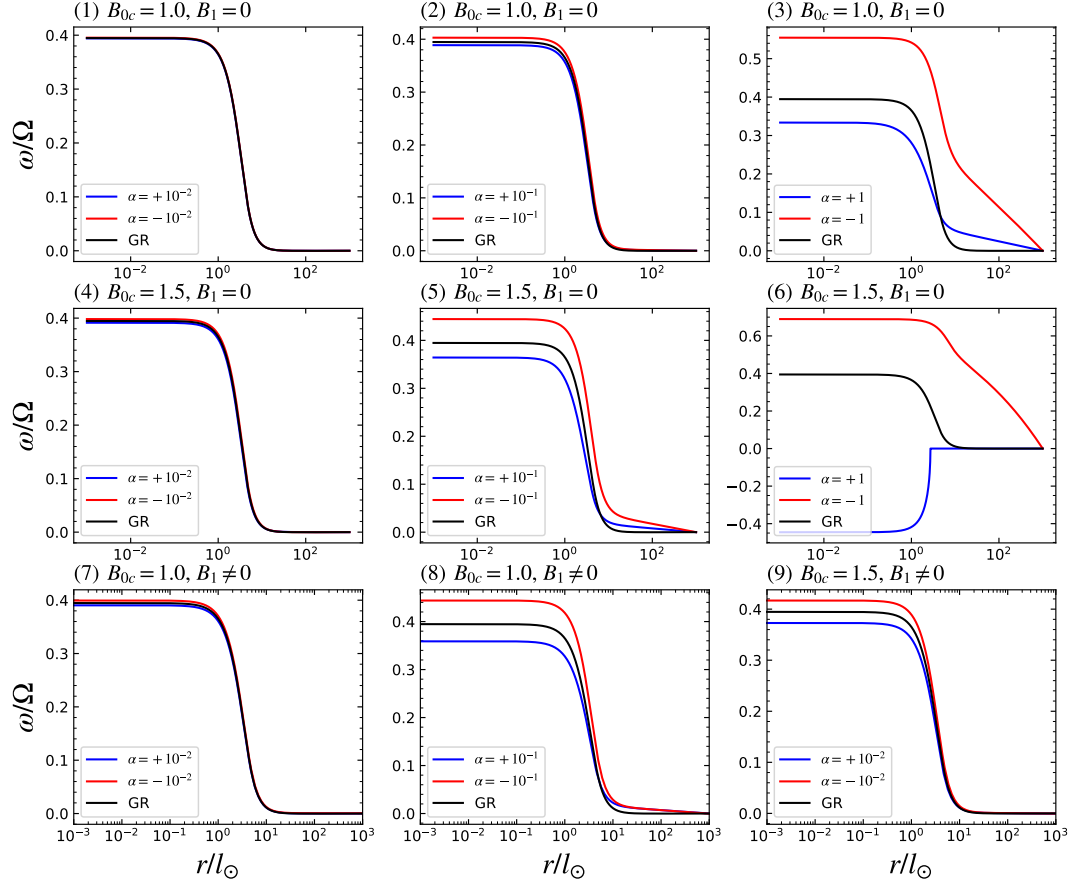


Figura 4. Arrastre de marcos para diferentes conjuntos de parámetros en la teoría GP.

convergencia a cero para  $\omega$ , lo que extiende las restricciones que se han de poner sobre el sistema.

En síntesis, cuando  $B_1 = 0$  y  $B_{0c} = 1.0$  se tienen restricciones en  $\alpha$  hasta el orden de  $10^{-1}$ . Para los demás casos estudiados ( $(B_1 = 0, B_{0c} = 1.5)$ ,  $(B_1 \neq 0, B_{0c} = 1.0)$  y  $(B_1 \neq 0, B_{0c} = 1.5)$ ), se tiene que  $\alpha$  sólo puede alcanzar valores del orden de  $10^{-2}$ . Para estos rangos de  $\alpha$ , las diferencias entre  $\omega_{RG}$  y  $\omega_{Proca}$  son pequeñas, siendo

prácticamente despreciables para valores positivos de  $\alpha$  y sólo levemente más notorias para valores negativos. Esto implica que, de cara a resultados observacionales, difícilmente se podrá discernir entre la teoría GP y RG de acuerdo a los resultados del modelo estudiado, puesto que las desviaciones quedan perfectamente cubiertas en la degeneración de la EOS. El caso más destacable es  $B_1 \neq 0, B_{0c} = 0.5$ , que con  $\alpha = 10^{-2}$  ya presenta desviaciones apreciables en las funciones estudiadas, sin mostrar inconsistencias en ninguna de ellas.

**3.3.2. Estrellas de neutrones en la teoría GSU2P** A continuación se presentan las soluciones encontradas para la teoría descrita por la acción (102) contenida en la teoría GSU2P. Para todos los casos considerados se encontró que cualquier solución asintóticamente plana exige que  $\phi_2$  converja a  $\pm 1$  en la región  $r \gg \mathcal{R}$ , lo cual sucede para valores concretos de  $b_2$ . No obstante, para la misma solución pueden existir diferentes valores de  $b_2$  que conduzcan a los mismos valores  $\phi_2$ : 1 ó  $-1$ ; lo que cambia es la cantidad de veces que la curva cruza el eje  $x$  a lo largo del dominio. Cuando para una solución específica,  $\phi_2$  cruza  $N$  veces el eje  $x$ , se dice que es una solución de  $N$ -nodos. En este trabajo se consideraron soluciones de 1 y 2-nodos, teniendo en mente que para soluciones de más nodos se puede hacer una extrapolación de los resultados obtenidos, al menos a nivel cualitativo. Para encontrar los valores de  $b_2$  apropiados para cada solución, se implementó un método de *Shooting*. El análisis se realizó de forma sistemática, primero revisando el efecto de cada pieza lagrangiana de forma independiente y, posteriormente, una combinación lineal de ellas. Para la pieza lagrangiana  $\mathcal{L}_{4,2}^2$  se encontró que no hay desviaciones apreciables ni de forma individual ni de forma conjunta con las demás piezas lagrangianas, por este motivo no se presentan resultados de ella.

**Perfil de  $\phi_2$**  En la figura 5 se presentan los perfiles de  $\phi_2$  para los diferentes modelos estudiados con varios parámetros de acoplamiento. Para todos los casos, en

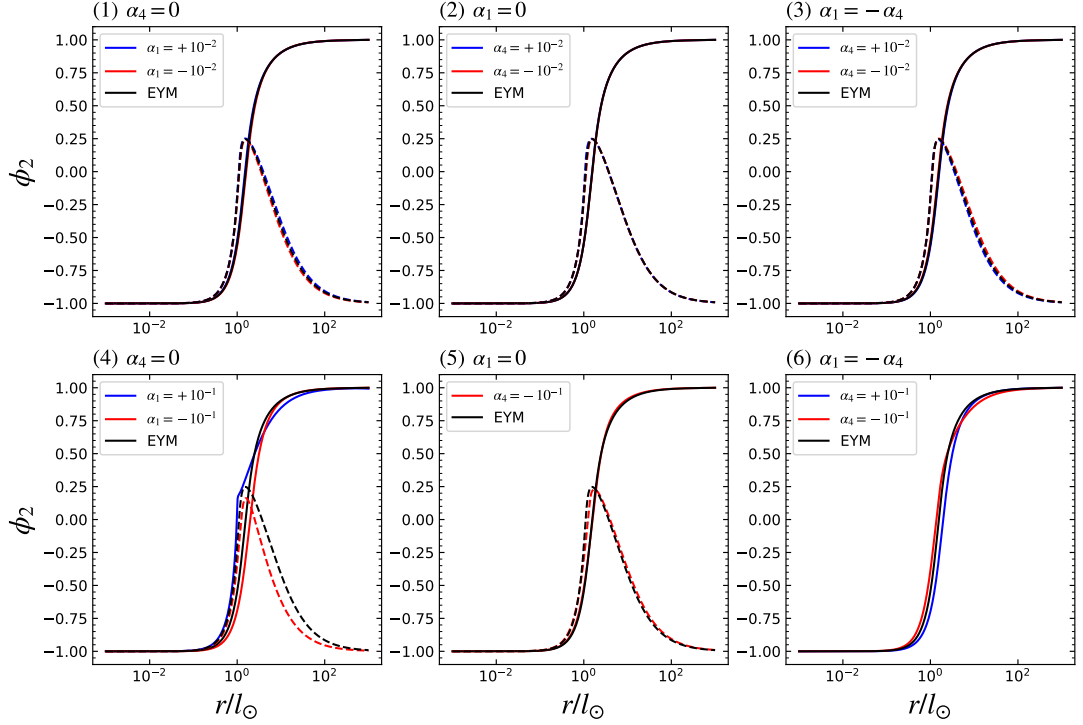


Figura 5. Perfil de  $\phi_2$  para diferentes valores de acoplamiento en la teoría GSU2P. Las curvas de color azul corresponden a soluciones para acoplamientos positivos, las rojas a soluciones para acoplamientos negativos y las negras para EYM como caso base. Las líneas continuas corresponden a soluciones de 1-nodo, mientras las líneas discontinuas a soluciones de 2-nodos. Los valores de  $b_2$  para cada solución se encuentran en el Apéndice 4.

las regiones  $r \gg \mathcal{R}$  y  $r \ll \mathcal{R}$ ,  $\phi_2$  toma valores constantes idénticos al caso de EYM. Esto es garantía tanto de la regularidad de las soluciones alrededor del origen, así como de conducir a un espaciotiempo asintóticamente plano en el límite esférico. Para todos los casos se encontró que no existen soluciones asintóticamente planas para valores de acoplamiento del orden de  $10^0$  o superiores, puesto que  $\phi_2$  diverge. Esto también sucede para valores menores de los acoplamientos para algunos modelos, en la tabla 2 se muestran los parámetros de acoplamiento que conducen a

soluciones asintóticamente planas en los diferentes modelos.

$\alpha_i$	$\mathcal{L}_{4,2}^1$		$\mathcal{L}_{4,2}^4$		$\mathcal{L}_{4,2}^4 - \mathcal{L}_{4,2}^1$	
	1-nodo	2-nodos	1-nodo	2-nodos	1-nodo	2-nodos
$-10^{-2}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$+10^{-2}$	✓	✓	✓	✓	✓	✓
$-10^{-1}$	✓	✓	✓	✓	✓	×
$+10^{-1}$	✓	×	×	×	✓	×

Tabla 2. Modelos con soluciones asintóticamente planas. El símbolo (✓) significa la existencia de solución asintóticamente plana para ese modelo. Por el contrario, el símbolo (×) significa la no existencia.

Resultan interesantes los resultados de la pieza  $\mathcal{L}_{4,2}^4$ . De forma independiente no admite soluciones de 1-nodo para  $\alpha_4 = 10^{-1}$ , mientras que cuando se combina con  $\mathcal{L}_{4,2}^1$  sí lo hace. Debido a la no linealidad de las ecuaciones de campo, no es posible describir la solución del modelo mixto como una superposición de las soluciones de los modelos de forma independiente. Sin embargo, la figura 5 muestra que en el modelo en el que se considera sólo la pieza  $\mathcal{L}_{4,2}^1$ , las desviaciones respecto al caso de EYM son mayores que las del modelo en el que se considera sólo la pieza  $\mathcal{L}_{4,2}^4$ . Tiene sentido entonces que la contribución de la primera pieza sea dominante sobre la segunda, de manera que regule los problemas de divergencia que ésta presenta, aumentando la estabilidad del modelo mixto y eliminando tales problemas de divergencia en el perfil de  $\phi_2$ . Esto se evidencia en la figura 6, en donde logra verse que las contribuciones a las desviaciones respecto a EYM del modelo con  $\mathcal{L}_{4,2}^1$  son un orden de magnitud mayores que las introducidas por el modelo sólo con  $\mathcal{L}_{4,2}^4$ . Lo anterior repercute en el modelo mixto en donde, evidentemente, las desviaciones son en gran medida atribuibles a la contribución de la primera pieza lagrangiana. Lo anterior abre la posibilidad a considerar modelos con combinaciones lineales de un mayor número de piezas lagrangianas que, garantizando un espaciotiempo asintóticamente plano, permitan aumentar los diferentes parámetros de acoplamiento, tal que las desviaciones respecto a EYM sean más evidentes y, por lo tanto, dis-

cernibles de cara a resultados observacionales. En la referencia <sup>35</sup> se estudió un modelo con una combinación lineal que permite elevar en varios órdenes de magnitud el valor absoluto del parámetro de acoplamiento, lo cual es consecuente con los resultados obtenidos.

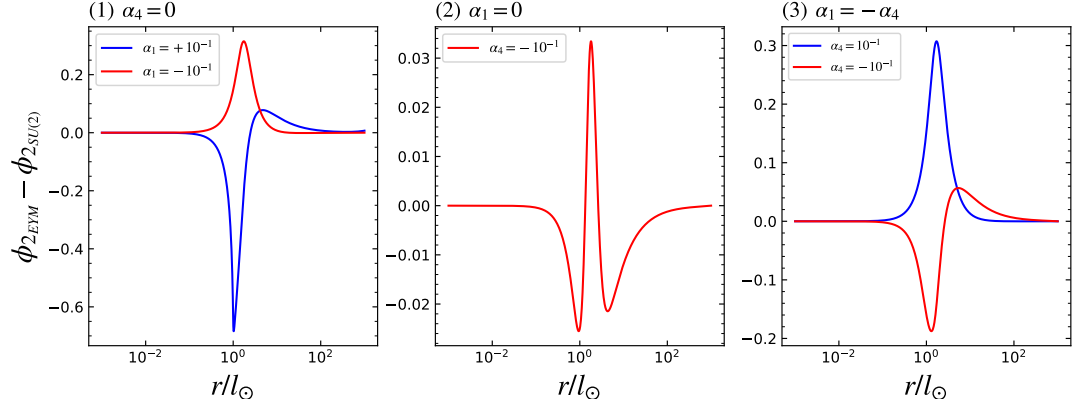


Figura 6.  $\phi_{2EYM} - \phi_{2SU(2)}$  para acoplamientos de orden  $10^{-1}$ . El panel (1) corresponde al modelo sólo incluyendo la pieza lagrangiana  $\mathcal{L}_{4,2}^1$ , el panel (2) corresponde al modelo sólo incluyendo la pieza  $\mathcal{L}_{4,2}^2$  y el panel (3) corresponde al modelo con la combinación lineal  $\mathcal{L}_{4,2}^4 - \mathcal{L}_{4,2}^1$ .

	$\mathcal{R}/l_{\odot}$					
	$\mathcal{L}_{4,2}^1$		$\mathcal{L}_{4,2}^4$		$\mathcal{L}_{4,2}^4 - \mathcal{L}_{4,2}^1$	
$\alpha_i$	1-nodo	2-nodos	1-nodo	2-nodos	1-nodo	2-nodos
+0.01	0.966	0.665	1.007	0.674	1.049	0.684
-0.01	1.049	0.684	1.007	0.674	0.966	0.665
+0.1	0.612	—	—	—	1.524	—
-0.1	1.463	0.753	0.926	0.629	0.612	—

Tabla 3.  $\mathcal{R}/l_{\odot}$  para las soluciones obtenidas. Las casillas marcadas con guión corresponde a configuraciones que no poseen solución asintóticamente plana. El valor de  $\mathcal{R}/l_{\odot}$  para el caso de EYM es 1.007 para la solución de 1-nodo y 0.674 para la solución de 2-nodos.

**Presión, densidad de materia y densidad efectiva de campo** La figura 7 presenta el perfil de  $P_M$  para las soluciones construidas. Nuevamente, estas gráficas

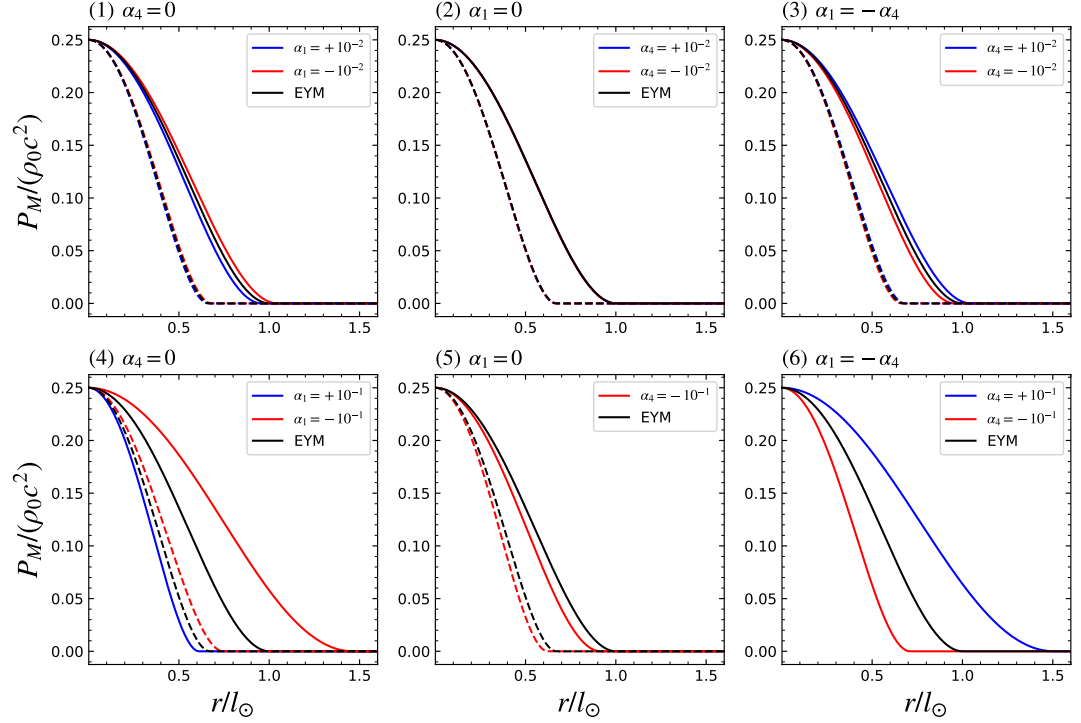


Figura 7. Perfiles de presión de materia para las soluciones encontradas. Las curvas de línea continua corresponde los perfiles para las soluciones de 1-nodo, mientras que las curvas de línea discontinua corresponden a los perfiles para las soluciones de 2-nodos. Los páneles están agrupados por columnas para los modelos con las mismas piezas lagrangianas y por filas para los modelos con parámetros de acoplamiento del mismo orden.

revelan el rol de cada una de las piezas lagrangianas en el equilibrio hidrostático de la estrella. Para el modelo con sólo  $\mathcal{L}_{4,2}^1$ , valores positivos de  $\alpha_1$  aceleran el decrecimiento del perfil de presión, lo que indica que los campos vectoriales favorecen la compresión gravitacional, lo lleva a que el radio de la estrella sea más pequeño que aquella de EYM. Por el contrario, valores negativos ralentizan el decrecimiento de la función de presión, lo que indica que los campos vectoriales se oponen a la compresión gravitacional permitiendo obtener estrellas con radios más grandes que las

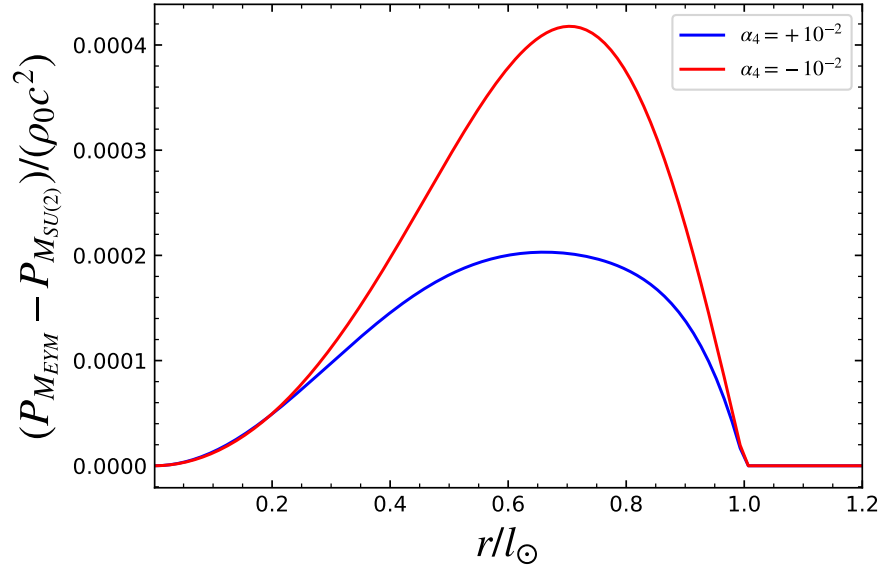


Figura 8.  $P_{M_{EYM}} - P_{M_{SU(2)}}$ : desviaciones entre los perfiles de presión de EYM y los obtenidos para el modelo en donde sólo se incluye  $\mathcal{L}_{4,2}^4$  con  $\alpha_4 = \pm 10^{-2}$ .

de EYM. Este análisis es igualmente válido tanto para soluciones de 1-nodo, como las de 2-nodos.

Para el modelo con  $\mathcal{L}_{4,2}^4$  el pánel (5) muestra que los valores negativos de  $\alpha_4$  aceleran el decrecimiento de la presión, es decir, los campos vectoriales favorecen la compresión gravitacional, lo que conduce a radios de las estrellas más pequeños que para el caso de EYM. Por su parte, para determinar el efecto para valores positivos de  $\alpha_4$ , la gráfica 7 resulta insuficiente pues para  $\alpha_4 = 10^{-2}$  no muestra desviación aparente y para  $\alpha_4 = 10^{-1}$  no existe solución asintóticamente plana. De manera que la figura 8 presenta la diferencia entre  $P_{M_{EYM}} - P_{M_{SU(2)}}$  para los mismos perfiles del pánel (2) de la figura 7. De allí se ve que tanto el signo positivo en  $\alpha_4$  como el signo negativo favorecen la compresión gravitacional, lo cual es un comportamiento diferencial respecto al primer caso. No obstante, las desviaciones son máximo del 0.04%, lo que indica que el término de Yang-Mills est  siendo absolutamente dominante.

Finalmente, el modelo mixto muestra las contribuciones de las dos piezas, valores

positivos de  $\alpha_4$  (que implica  $\alpha_1$  negativo) llevan a estrellas más grandes que en EYM, y valores negativos de  $\alpha_4$  (que implica  $\alpha_1$  positivo) llevan a estrellas más pequeñas que en EYM. Más aún, para valores negativos se observa la doble contribución en el aumento de  $\mathcal{R}/l_\odot$ .

Ahora bien, en la figura 1 se puede ver que en RG se tiene  $\mathcal{R}/l_\odot = 4.7$ , que es alrededor de cuatro veces mayor que para el modelo de EYM. Esto muestra que los campos vectoriales presentan contribuciones muy importantes a la compresión gravitacional y los términos adicionales tan sólo apoyan o contrarrestan este mismo efecto pero en menor medida. La figura 9 muestra la evolución de las densidades de energía tanto de la materia como del campo para cada una de las soluciones encontradas. Es evidente que, para todos los casos, la densidad de energía del campo es dominante sobre la de la materia. Adicionalmente, si se considera un radio para el campo de la forma  $\rho_B(\mathcal{R}') = 0$ , se ve que  $\mathcal{R}'$  será casi tres veces mayor que  $\mathcal{R}$  para todos los casos. Esto correspondería a una estrella compuesta por un pequeño núcleo ultra compacto de materia bariónica recubierta por un halo de campos vectoriales unas tres veces más grande que no interactúa electromagnéticamente. Este objeto, aunque interesante, no deja de ser un caso extraño y desconocido desde el punto de vista observacional.

**Masa** La figura 10 muestra las distribuciones de masa para cada una de las soluciones generadas. En general, las soluciones de 1-nodo presentan masas menores que las de las soluciones de 2-nodos, es decir, los últimos son objetos más compactos que los primeros. Las soluciones son coherentes con las densidades de energía presentadas previamente: aquellas estrellas que son más grandes se permiten acumular más masa que en el caso de EYM, mientras que las más pequeñas acumulan menos masa. En términos generales, la masa total para todos los casos es menor que las masas obtenidas tanto en RG como en la teoría GP. Sin embargo, por la diferencia entre radios obtenidos dan cuenta de objetos mucho más compactos, lo



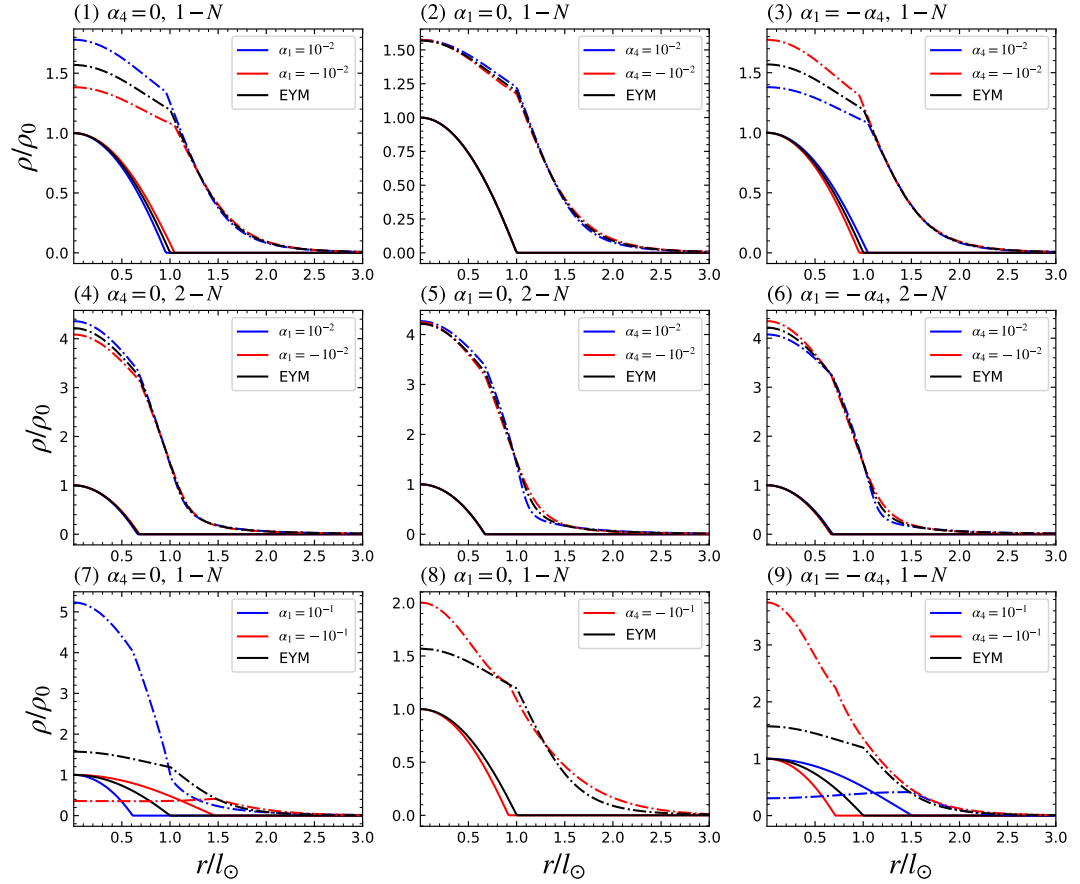


Figura 9. Perfiles de  $\rho_M$  y  $\rho_B$  para las soluciones obtenidas. Las líneas continuas corresponden a  $\rho_M$ , mientras que las líneas discontinuas corresponden a  $\rho_B$ . Los paneles están agrupados por columnas para soluciones con igual densidad lagrangiana. La primera y tercera fila corresponden a soluciones de 1-nodo, mientras la segunda fila corresponde a soluciones de 2-nodos. Los valores del parámetro de acoplamiento se presentan en cada panel.

que representa un elemento muy distintivo para esta teoría.

Es destacable el decrecimiento que se observa en los paneles (4), (5) y (6), justo antes de alcanzar el valor constante. La densidad de materia bariónica es siempre positiva, de manera que la única explicación posible es que la densidad de energía

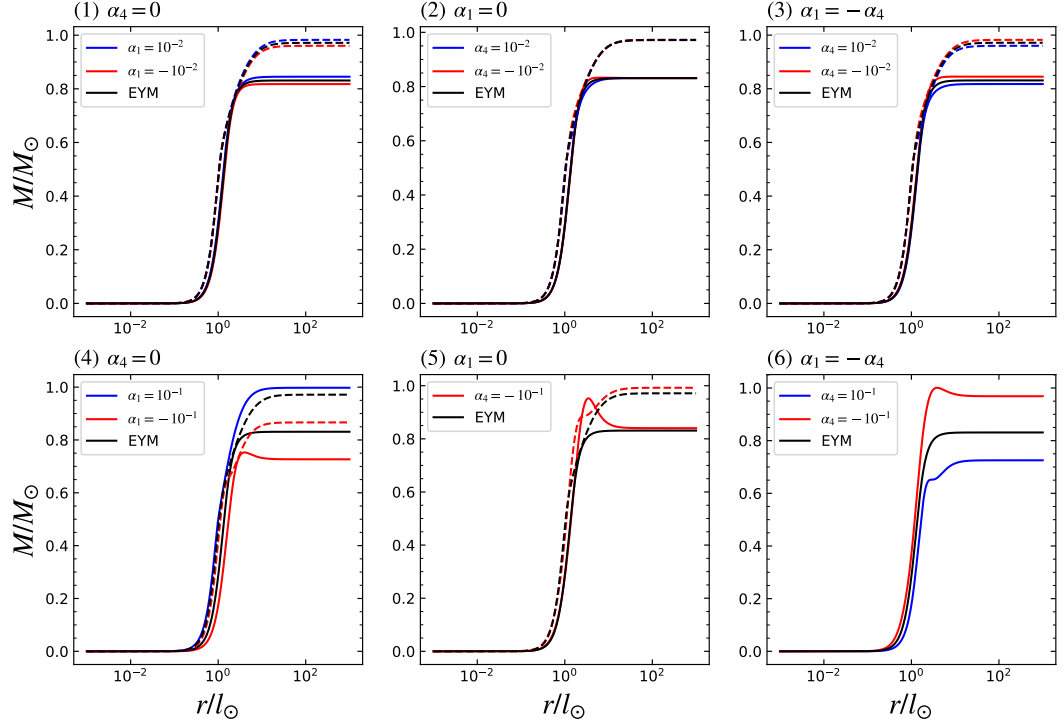


Figura 10. Distribución de masa para las soluciones obtenidas. Las líneas continuas corresponden a las soluciones de 1-nodo, mientras las líneas discontinuas corresponden a las soluciones de 2-nodos. Los paneles están agrupados por columnas para modelos con la misma densidad lagrangiana y por filas para modelos con el mismo orden en los parámetros de acoplamiento.

del campo se torne negativa en estas regiones. Esto se evidencia en la figura 11, en donde se tiene una región con densidad de energía efectiva negativa alrededor de  $4l_\odot$ , aproximadamente, para los tres casos considerados. Además, nótese que esto es visible debido a que la densidad de energía del campo es dominante sobre la materia.

Por último, las desviaciones respecto al caso de EYM encontradas en el modelo mixto son atribuibles, mayoritariamente, a los aportes de la pieza  $\mathcal{L}_{4,2}^1$ , la cual es dominante. Por su parte, los aportes de la pieza  $\mathcal{L}_{4,2}^4$  son subdominantes pero no

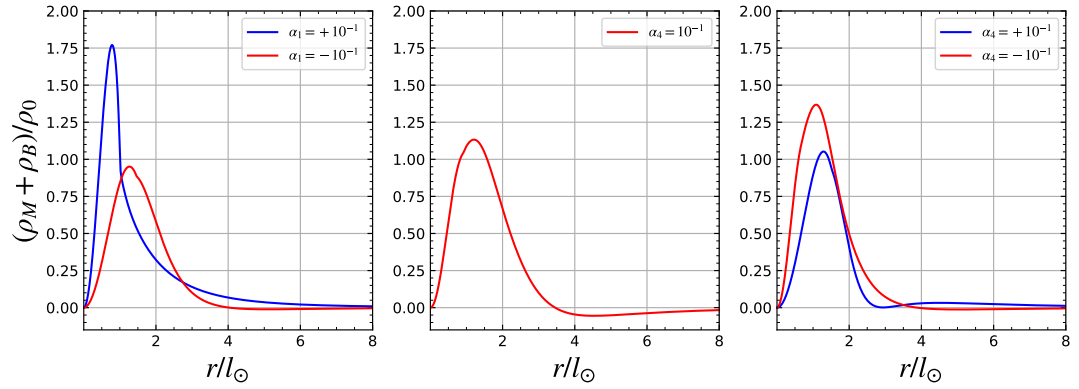


Figura 11. Densidad de energía efectiva para las soluciones de 1-nodo obtenidas. Para las curvas rojas (acoplamiento negativos) se observa una región en la que se alcanzan valores negativos. Esto da cuenta del decrecimiento en la distribución de masa.

nulas, ya que logran introducir pequeñas desviaciones respecto del primer modelo. Este comportamiento es similar a los de las funciones anteriormente analizadas.

**Arrastre de marcos** Para los casos de RG, Horndeski y GP, se aprendió que la ecuación diferencial de arrastre de marcos era separable y se concluyó que, para estas teorías, la solución angular conduce a que la solución general sea independiente de la coordenada  $\theta$ . Para la teoría GSU2P se obtiene la ecuación (112) la cual no es separable. Con base en lo aprendido, se propone el *ansatz*:  $\omega(r, \theta) = \omega(r)$ , lo que lleva a la ecuación diferencial ordinaria

$$-\left[\frac{4}{r} - \frac{1}{2}(\nu' + \lambda') + F_{22}^3\right] e^{-(\lambda+\nu)/2} \frac{d\omega}{dr} - e^{-(\lambda+\nu)/2} (1 + F_{23}^3) \frac{d\omega}{dr^2} + F_{25}^3 \omega = F_{26}^3 (\rho + P) e^{(\lambda-\nu)/2}. \quad (141)$$

Se propone una solución en series alrededor del origen de la estrella para esta nueva ecuación diferencial y se encuentra la solución analítica

$$\omega(r) = \omega_c + \omega_2 r^2 + \omega_4 r^4 + \omega_6 r^6 + \mathcal{O}(r^8), \quad (142)$$

en donde  $\omega_c = \omega(r = 0)$  es el valor central del arrastre de marcos y

$$\omega_2 = (4(4b_2^2 + m_3(-1 + \omega_c) + 2\nu_2(-1 + \omega_c))/5,$$

$$\begin{aligned} \omega_4 = & (4(60\alpha_4 b_2^4 + 40b_2 b_4 + 24b_2^2 \nu_2 - 12\nu^2 - 10\nu_4 + 8m_3^2(-1 + \omega_c) + 5m_5(-1 + \omega_c) - 5b_2^3 \omega_c \\ & - 30\alpha_1 b_2^4 \omega_c - 60\alpha_4 b_2^4 \omega_c - 10b_2 b_4 \omega_c + 12\nu_2^2 \omega_c + 10\nu_4 \omega_c + 2m_3(6\nu_2(-1 + \omega_c) \\ & + b_2^2(6 + 5\omega_c))))/35, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_6 = & (2(8(27m_3^2 + 21m_5 - 14b_2^3 - 336\alpha_1 b_2^4 - 294\alpha_4 b_2^4 - 28b_2 b_4 + 24\nu_2^2 + 4m_3(7b_2^2 + 6\nu_2) + 42\nu_4) \\ & (4b_2^2 + m_3(-1 + \omega_c) + 2\nu_2(-1 + \omega_c)) + 80(m_3 + 2\nu_2)(12\alpha_4 b_2^4 + 8b_2 b_4 - 2\nu_4 + m_3^2(-1 + \omega_c) \\ & + m_5(-1 + \omega_c) + 2m_3 b_2^2 \omega_c - b_2^3 \omega_c - 6\alpha_1 b_2^4 \omega_c - 12\alpha_4 b_2^4 \omega_c - 2b_2 b_4 \omega_c + 2\nu_4 \omega_c) \\ & + 35(480\alpha_4 b_2^3 b_4 + 32b_4^2 + 48b_2 b_6 - 96\alpha_4 b_2^4 \nu_2 - 12\nu_6 + 8m_3^3(-1 + \omega_c) + 6m_7(-1 + \omega_c) \\ & + 16m_3^2 b_2^2 \omega_c + 8m_5 b_2^2 \omega_c + b_2^4 \omega_c - 12b_2^2 b_4 \omega_c - 272\alpha_1 b_2^3 b_4 \omega_c - 480\alpha_4 b_2^3 b_4 \omega_c - 12b_4^3 \omega_c \\ & - 16b_2 b_6 \omega_c + 192\alpha_1 b_2^4 \nu_2 \omega_c + 192\alpha_4 b_2^4 \nu_2 \omega_c + 12\nu_6 \omega_c + 4m_3(3m_5(-1 + \omega_c) \\ & - 2b_2(6\alpha_4 b_2^3 + (b_2^2 - 6\alpha_1 b_2^3 - 2b_4)\omega_c)))))/945. \end{aligned}$$

La solución numérica para el arrastre de marcos generado en las soluciones estudiadas se muestra en la figura 12.

El primer resultado notable son las soluciones para EYM. Éstas presentan arrastre máximo ( $\omega_c$ ) de  $0.033\Omega$  para soluciones de 1-nodo y  $0.015$  para soluciones de 2-nodos. Estos son valores muy inferiores a los encontrados para las teorías de RG, Horndeski y GP (alrededor de un orden de magnitud). Esto refuerza la conjetura hecha con los resultados de arrastre de marcos en la teoría GP. Allí se infirió una relación directa entre la extensión de la estrella ( $\mathcal{R}$ ) y el arrastre que ésta genera. Para el caso de EYM el valor de  $\mathcal{R}$  es muy inferior comparado con el obtenido en RG, así mismo el arrastre máximo calculado en el caso de EYM es muy inferior al obtenido con RG.

Los resultados para los demás modelos son coherentes con lo ya analizado: las ma-

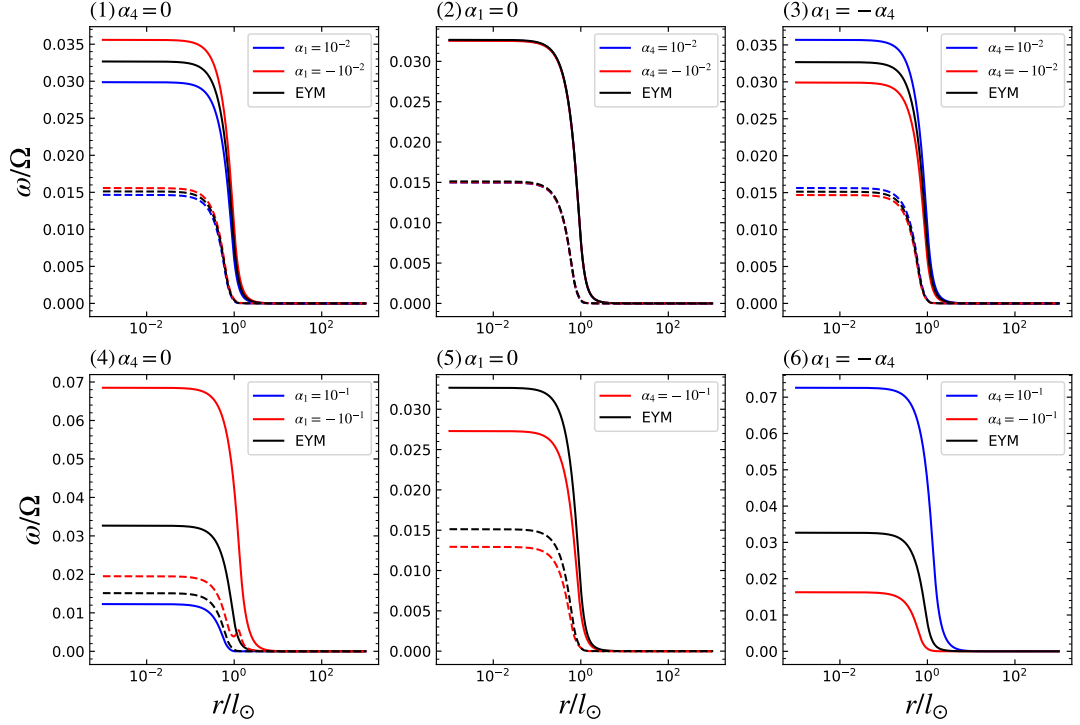


Figura 12. Arrastre de marcos para las soluciones obtenidas. Las líneas continuas corresponden al arrastre de las soluciones de 1-nodo, mientras las líneas discontinuas al arrastre de las soluciones de 2-nodos. Los paneles están agrupados por columnas para modelos con las mismas piezas lagrangianas y por filas para modelos con parámetros de acoplamiento del mismo orden.

yores desviaciones se presentan para el modelo que incluye sólo  $\mathcal{L}_{4,2}^1$  las cuales no sólo son apreciables, sino que para un valor de acoplamiento  $\alpha_1 = -10^{-1}$  se obtiene arrastre máximo de 0.068, el cual duplica el arrastre máximo del modelo EYM. Por su parte, el modelo que incluye sólo  $\mathcal{L}_{4,2}^4$  presenta desviaciones considerablemente más pequeñas. Para  $\alpha_4 = \pm 10^{-2}$  las soluciones son prácticamente iguales a las de EYM y para  $\alpha_4 = -10^{-2}$  la reducción es apreciable pero no muy distante de la solución de EYM. Por lo anterior, el modelo mixto revela la gran contribución de la pieza  $\mathcal{L}_{4,2}^1$  y la contribución de  $\mathcal{L}_{4,2}^4$  que, aunque de bajo monto, modifica los resultados

respecto al primer modelo.

Es destacable entonces que  $\mathcal{R}$  para el modelo mixto con  $\alpha_4 = 10^{-1}$  es alrededor de 1.4 veces el valor de  $\mathcal{R}$  en EYM, pero el arrastre máximo es unas 2.2 veces mayor que para EYM. Esto, una vez más refuerza la conjetura mencionada y, además, muestra que esta relación no es lineal.

Por otro lado, la solución de 2-nodos del panel (4) para  $\alpha_1$  negativo exhibe un comportamiento que no es monótonamente decreciente pues muestra la aparición de un crecimiento de  $\omega$  que alcanza un máximo local y vuelve a un decrecimiento hasta alcanzar su valor asintótico de cero. Este comportamiento es exclusivo de esa solución, y por su forma contraintuitiva resultar ser una característica diferencial. No obstante, posibles mediciones de este efecto son, indudablemente, muy difíciles de lograr. Adicionalmente, no se descarta que este comportamiento sea atribuible a propagación de errores numéricos. Este resultado requiere más estudio.

### **3.4. Soluciones tipo partícula**

Las ecuaciones (118) y (119), muestran que el campo acoplado se puede ver como un fluido con tensor energía momento propio. Esta forma de visualizar el campo permitió interpretar los resultados para estrellas de neutrones en las secciones anteriores a través del rol que cumplen en el equilibrio hidrostático de la estrella y, por lo tanto, en su estructura, en el límite esféricamente simétrico.

Sin embargo, se puede ir un poco más lejos y preguntarse si las ecuaciones de estructura admiten soluciones sin materia bariónica, es decir, estrellas únicamente constituidas por el campo escalar o vectorial acoplado. En este sentido, las referen-

cias <sup>113114</sup> muestran que no existen soluciones no triviales, globalmente regulares<sup>115</sup>, estáticas y asintóticamente planas para el caso de la teoría de Einstein-Maxwell (en adelante todas estas características se darán por hechas al hablar de soluciones). Sin embargo, en la referencia <sup>52</sup> encuentran que sí existen este tipo de soluciones para la teoría de Einstein-Yang-Mills.

Adicionalmente, en la referencia <sup>35</sup> los autores encontraron que este tipo de soluciones también existen para el caso de la teoría generalizada de Proca SU(2) para un sector de la teoría en la que la elección de las piezas lagrangianas fuera tal que llevaran a una propagación lumínica de ondas gravitacionales.

Con base en lo anterior se generan dos cuestiones: a) ¿las teorías de Horndeski y GP pueden exhibir soluciones tipo partícula? b) ¿cómo queda el arrastre de marcos debido a este tipo de soluciones?

Para responder esta pregunta se integraron las ecuaciones de estructura para cada teoría garantizando que en todo momento  $\rho_M = P_M = 0$ , desde un paso inicial  $x_0 = 10^{-3}$  para las teorías de Horndeski y GP y  $x_0 = 10^{-5}$  para la teoría GSU2P. Las condiciones iniciales fueron establecidas con las soluciones en series reemplazando el  $x_0$  dado y haciendo  $p_c = y_c = 0$ . Para las teorías de Horndeski y GP se encontró que la única solución posible es la trivial ( $M = \nu = \omega = 0$  y  $\phi = \phi_c = constante$ ) para la teorías de Horndeski y GP ( $M = \nu = \omega = 0$  y  $B_0 = B_c = constante$ ). Para la teoría GP esto representa una generalización de los resultados de la referencia <sup>113114</sup> para la teoría de Einstein-Maxwell. Por su parte, no se encontraron trabajos análogos para la teoría de Horndeski en la literatura.

---

<sup>113</sup> W. ISRAEL. "Event horizons in static electrovac space-times". En: *Commun. Math. Phys.* 8 (1968).

<sup>114</sup> D. C. Robinson. "A simple proof of the generalization of Israel's theorem." En: *Gen. Relativ. Gravit.* 8 (1977).

<sup>115</sup> Se dice que una solución es regular en un punto si allí los invariantes de curvatura, densidad de energía y presión son finitos

Por su parte, la teoría GSU2P sí admite soluciones tipo partícula no triviales. No obstante, al igual que en la sección anterior, la función  $\phi_2$  siempre tiene valor central igual a  $-1$  y converge asintóticamente a  $\pm 1$  para ciertos valores específicos de  $b_2$ , los cuales fueron encontrados, nuevamente, implementando el método de Shooting. Para hacer un ejercicio comparativo con las soluciones de la sección anterior se encontraron soluciones de 1 y 2-nodos, para tres modelos: sólo incluyendo  $\mathcal{L}_{4,2}^1$ , sólo incluyendo  $\mathcal{L}_{4,2}^4$  y el modelo mixto incluyendo la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}_{4,2}^4 - \mathcal{L}_{4,2}^1$ . Una vez más, se encontraron soluciones para la pieza  $\mathcal{L}_{4,2}^2$ , pero no genera desviaciones apreciables respecto al caso de EYM ni de forma individual ni actuando en conjunto con las demás piezas lagrangianas.

**Perfil de  $\phi_2$**  Se encontró que para este tipo de soluciones, los perfiles de  $\phi_2$  son cualitativamente idénticos a los presentados en la figura 5. La diferencia radica esencialmente en el valor de  $b_2$  que debe tomarse para garantizar la convergencia a  $\pm 1$  dependiendo del número de nodos de la solución. Incluso, al igual que para el caso con materia bariónica, no se encontraron soluciones asintóticamente planas para el modelo sólo con  $\mathcal{L}_{4,2}^4$  con  $\alpha = +10^{-1}$ . Esto muestra que si bien la presencia de materia bariónica modifica cuantitativamente  $\phi_2$ , tales modificaciones son lo suficientemente pequeñas como para no afectar cualitativamente los resultados. Por lo anterior, todas las conclusiones obtenidas para este perfil en las soluciones anteriores se heredan para este tipo de objetos.

**Masa** Como se vió en las soluciones con materia bariónica, la densidad de energía del campo era dominante sobre la densidad de energía de la materia. Para el caso de EYM, se encontró que la masa de las estrellas de neutrones es tan sólo  $0.002 M_\odot$  mayor que la masa para estos objetos tipo partícula. Lo que demuestra que, al menos para el caso de EYM, la materia bariónica tiene aportes muy pequeños a la masa total del objeto, es decir, casi toda la masa la aporta el campo. En



la tabla 4 se presentan las diferencias entre la masa de la estrella de neutrones y la masa del objeto tipo partícula para todas las soluciones. Ya que la mayor diferencia entre todos los modelos es de  $0,0160 M_{\odot}$ , es claro que la mayor cantidad de masa en las estrellas de neutrones es aportada por el campo. Para las soluciones de 2-nodos se ve que el campo es tan dominante que los aportes de la materia son prácticamente nulos. De igual manera, los perfiles de densidad de energía del campo son prácticamente iguales a los presentados en la figura 9. Por su parte, se verificó que la densidad  $\rho_M$  y  $P_M$  son siempre cero, como debe ser.

$\alpha$	$(M_{NS} - M_{PL})/M_{\odot}$					
	$\mathcal{L}_{4,2}^1$		$\mathcal{L}_{4,2}^4$		$\mathcal{L}_{4,2}^4 - \mathcal{L}_{4,2}^1$	
	1-nodo	2-nodos	1-nodo	2-nodos	1-nodo	2-nodos
+0.01	0.0018	0.0001	0.0024	0.0001	0.0032	0.0002
-0.01	0.0032	0.0002	0.0024	0.0001	0.0018	0.0001
+0.1	0.0000	–	–	–	0.0159	–
-0.1	0.0160	0.0007	0.0014	0.0000	0.0002	–

Tabla 4. Diferencia de masas entre la estrella de neutrones (NS por sus siglas en inglés) y el objeto tipo partícula (PL por sus siglas en inglés).

**Arrastre de marcos** Para todos los modelos, se encontró que el arrastre de marcos para soluciones tipo partícula es trivial  $\omega(r) = 0$ . Una vez más, este resultado es coherente con la relación conjeturada entre la extensión de la materia bariónica presente en el objeto compacto y el arrastre que éste genera. Aquí, al no haber materia bariónica en absoluto, tampoco se tiene arrastre de marcos. A su vez, este resultado es útil para complementar el análisis para el arrastre de marcos generado por estrellas de neutrones en la teoría GSU2P. En esta teoría tiene que los campos vectoriales son muy dominantes sobre la materia bariónica, por lo que las estrellas encontradas están compuestas por un núcleo de materia muy pequeño, rodeado por un halo de campo bosónico que puede ser entre 2 y 3 veces más grande. Ya se había mostrado que este resultado es coherente con la conjetura presentada y

explica los valores tan bajos obtenidos para el arrastre de marcos. Sin embargo, es interesante que al analizar los resultados con y sin materia bariónica en simultáneo se puede inferir que el arrastre de marcos no se ve afectado directamente por los campos vectoriales sino por la estructura de la materia bariónica. Por lo tanto se tiene que los campos vectoriales modifican la estructura de la materia bariónica y ésta modifica el arrastre de marcos que se genera.

## 4. CONCLUSIONES

La razón para escoger las densidades lagrangianas estudiadas fue la relación existente entre ellas: en la teoría GSU2P, si los parámetros de acoplamiento para las piezas  $\mathcal{L}_{4,2}^1$  y  $\mathcal{L}_{4,2}^4$  toman valores  $\alpha_1 = -\alpha_4$  y se remueven los índices de grupo, se obtiene una acción igual a  $\mathcal{L}_4$  de la teoría GP. A su vez, si esta última se lleva al límite de desacoplamiento del campo vectorial  $B_\mu \rightarrow \nabla_\mu \pi$ , siendo  $\pi$  un campo escalar, se obtiene la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}_{4,\pi}^{Gal}$  de la teoría de Horndeski. Por lo tanto, a lo largo del trabajo se perseguían dos objetivos: *i)* encontrar desviaciones del arrastre de marcos para cada una de las teorías respecto al resultado de RG. *ii)* Encontrar desviaciones entre los resultados de las tres teorías y así determinar elementos distintivos de cada una, aún cuando las piezas lagrangianas consideradas están íntimamente relacionadas.

Para estudiar el arrastre generado por objetos compactos rotantes en cada una de las teorías se implementó el método de Hartle: una aproximación al problema como perturbación de las soluciones estáticas y esféricamente simétricas (la aproximación más simple y más ampliamente estudiada para objetos compactos en teorías modificadas de la gravedad). Este método exige que el objeto sea lentamente rotante, de manera que las perturbaciones a la solución de fondo se manifiesten en la aparición de arrastre de marcos, pero que sean esencialmente despreciables en la presión y densidad de energía (que el objeto no pierda su forma esférica). Por lo tanto, este proceso exige, en primer lugar, el análisis de las soluciones esféricas, las cuales alimentan la evolución del arrastre de marcos y son de gran ayuda para entender el rol del campo (escalar o vectorial) en la interacción gravitacional.

Las soluciones esféricas para la teoría de Horndeski arrojaron desviaciones máximas del orden de  $10^{-6}$  en el perfil de presión y la distribución de masa respecto a la solución de RG. Esto significa que tanto el radio, como la masa del objeto (prin-

cipales observables) presentan desviaciones tan pequeñas que resulta imposible discernir entre esta teoría y RG con la precisión de las observaciones actuales.

Por el contrario, la teoría GP sí arroja desviaciones respecto a RG. Los perfiles de presión para los diferentes casos considerados muestran el rol del campo vectorial de acuerdo al signo del acoplamiento escogido. Los signos positivos conducen a una interacción gravitacional del campo vectorial de tipo atractiva, mientras que el signo negativo conduce a una interacción repulsiva. Esto significa que se tendrán estrellas más pequeñas si el acoplamiento es positivo y más grandes si es negativo. Adicionalmente, la EOS relaciona los comportamientos de la densidad de energía y la presión, de manera que las estrellas serán menos masivas que en RG si el acoplamiento es positivo y más masivas si es negativo. Este resultado es coherente con los presentados por R. Kase *et. al.* en la referencia <sup>31</sup>. Allí encuentran soluciones de estrellas de neutrones estáticas y esféricamente simétricas pero para una versión diferente de la densidad lagrangiana  $\mathcal{L}_4$ .

No obstante, se encontró que deben buscarse e implementarse cotas para tal parámetro de acoplamiento pues, para valores lo suficientemente grandes, el perfil de presión muestra inconsistencias como lo pueden ser crecimientos, cambios de concavidad o divergencias, los cuales son físicamente inconsistentes. Estas cotas dependen de factores como la configuración de campo escogida, la EOS considerada o la densidad central de la estrella. Para los propósitos del trabajo bastó con hacer uso sólo de una EOS y un valor de densidad central. Por lo anterior, en este trabajo no se pretendió determinar el valor exacto de las cotas en cuestión, puesto que no gozarían de generalidad, aunque sí se estimó el orden en el que deben imponerse. No obstante, estas cotas limitan las desviaciones que se pueden alcanzar respecto a RG, esto implica que, debido a la degeneración de la EOS para estrellas de neutrones, al comparar con datos observacionales, sea difícil discernir entre los resultados de la teoría GP y RG. Sin embargo, se vio que la configuración con

$B_1 \neq 0$  conduce a desviaciones apreciables, aún con parámetros de acoplamiento pequeños. Esta configuración puede conducir a desviaciones identificables de cara a resultados observacionales o pueden llegarse a obtener objetos ultramasivos como la binaria de GW190814 <sup>48</sup>. Por supuesto, esto es una conjetura que requiere más estudio incluyendo EOS realistas.

Finalmente, los resultados de estrellas de neutrones esféricamente simétricas para la teoría GSU2P son los que más se distancian de RG. Esto debido a que al apagar los parámetros de acoplamiento no se reduce al lagrangiano de Einstein-Hilbert sino al de Einstein-Yang-Mills. Para este caso ya se tiene la presencia de campos vectoriales con simetría SU(2), los cuales muestran ser muy dominantes sobre la materia bariónica comprimiéndola a un radio alrededor de 4 veces menor que el obtenido para RG. Adicionalmente, alrededor de este núcleo de materia se distribuye un halo compuesto sólo por los campos vectoriales que es el responsable de aportar prácticamente toda la masa del objeto compacto. Ahora bien, al estudiar el papel de las piezas lagrangianas consideradas de la teoría GSU2P se ve que para  $\mathcal{L}_{4,2}^1$  los acoplamientos positivos implican una interacción gravitacional atractiva de los campos vectoriales, mientras que los acoplamientos negativos conducen a una interacción repulsiva (similar al caso de la teoría GP). Para la pieza lagrangiana  $\mathcal{L}_{4,2}^4$  se encontró un comportamiento muy particular, pues ambos signos conducen a una interacción atractiva de los campos vectoriales, aunque es más fuerte si el acoplamiento es negativo. Sin embargo, estas desviaciones son pequeñas comparadas con la pieza anterior, lo que implica que cuando se consideran actuando simultáneamente, la pieza  $\mathcal{L}_{4,2}^1$  sea dominante sobre  $\mathcal{L}_{4,2}^4$ , tal que es la responsable de prácticamente todas las desviaciones. Aunque en algunos casos se encontró densidad de energía efectiva negativa, esto no resulta ser un problema pues rápidamente converge a cero, lo que implica que un observador en el infinito observa una masa constante. Para los diferentes modelos de esta teoría también se encontraron inconsistencias

físicas para ciertos rangos de valores de los parámetros de acoplamiento  $\alpha_i$ . Al exigir que las soluciones fueran asintóticamente planas, se requiere que la función  $\phi_2$  converja a un valor constante en el infinito. Se encontró que para valores suficientemente grandes de  $\alpha_i$  no existen valores del parámetro de Shooting  $b_2$  que garantice la convergencia de  $\phi_2$ . Una vez más, esto da cuenta de la necesidad de imponer cotas a los parámetros de acoplamiento estudiados. Al igual que para la teoría GP, estas cotas dependen de factores como la EOS, la densidad central, etc., así que sólo se determinaron órdenes de magnitud para éstas y no su valor exacto. Sin embargo, algunos de los parámetros escogidos condujeron a soluciones regulares y asintóticamente planas que pueden ser discernibles respecto a EYM si se contrastan los resultados con datos observaciones. No obstante, ya que el halo que rodea estos objetos sólo interactúa gravitacionalmente y no electromagnéticamente, dar cuenta observacional de este tipo de objetos puede resultar bastante complicado y no han sido reportados en la literatura. Adicionalmente, debe estudiarse la estabilidad de este tipo de objetos, pues al no distanciarse mucho de las soluciones de EYM, puede que hereden la inestabilidad de los objetos en esta teoría.

Ahora bien, la teoría GSU2P admite soluciones tipo partícula no triviales. Estas soluciones fueron encontradas para las piezas lagrangianas  $\mathcal{L}_{4,2}^1$  y  $\mathcal{L}_{4,2}^4$ . Estas soluciones son importantes por dos motivos: en primer lugar, las diferencias de resultados para observables como masa y radio entre las soluciones con y sin materia bariónica son pequeños. Esto muestra que los campos vectoriales son los grandes responsables de la estructura de la estrella y en mucha menor medida la presencia de materia bariónica. En segundo lugar, estas soluciones tipo partícula (también conocidos en la literatura como *solitones*) se han postulado como imitadores de agujeros negros y como candidatos a conformar una porción de la materia oscura del universo.

En cuanto al arrastre de marcos se observó que la existencia de éste sólo se da en presencia de la materia bariónica y depende de la extensión de ésta. Tanto para

la teoría GP como para la teoría GSU2P se observó que el arrastre de marcos aumenta (disminuye) con el crecimiento (disminución) del radio de la estrella  $\mathcal{R}$ . No obstante, para todos los casos de la teoría GSU2P, el núcleo de materia bariónica era mucho más pequeño que para las soluciones en RG o la teoría GP. Así mismo el arrastre de marcos mostró ser al menos un orden de magnitud más pequeño en esta teoría. Las soluciones tipo partícula permitieron reforzar esta hipótesis puesto que no presentan arrastre lo que permite relacionarlo con la ausencia de materia bariónica en estas soluciones.

Vale la pena destacar que para la teoría GSU2P también se estudió el término  $\mathcal{L}_{4,2}^2$  tanto de forma individual como acompañado de otras piezas lagrangianas. De forma general, no presenta desviaciones apreciables respecto al caso de EYM si se considera independientemente y no aporta significativamente a las desviaciones cuando actúa en compañía de las demás piezas lagrangianas. La importancia de este resultado radica en que esta pieza lagrangiana es de naturaleza puramente no abeliana, es decir, se anula al remover los índices de grupo, lo que significa que no tiene contrapartida en la teoría GP. Se esperaba que esta pieza aportara elementos particulares en las soluciones que dieran cuenta inequívocamente de la presencia de piezas lagrangianas de naturaleza puramente no abeliana en la acción asociada a la teoría de gravedad, pero los resultados muestran que sus aportes son despreciables. Es importante estudiar otras piezas lagrangianas de la misma naturaleza para así determinar si se reproducen los mismos resultados.

Adicionalmente, la imposición de que, en el infinito, un observador inercial no presente arrastre de marcos permite restringir aún más el rango de valores que pueden tomar los parámetros de acoplamiento. Tanto para la teoría GP, como para la teoría GSU2P se consideraron piezas lagrangianas que conducen a violación de paridad. En la configuración esféricamente simétrica, todos los aportes de estas piezas a las ecuaciones de campo gravitacional y de Euler-Lagrange se anulan. Sin embargo, es-

to no sucede en la configuración axialmente simétrica. Parte del trabajo consistía en encontrar señales distintivas de piezas con violación de paridad en la modificación del arrastre de marcos para las teorías GP y GSU2P. No obstante, la aproximación perturbativa implementada en el método de Hartle implica que la ecuación diferencial que gobierna el comportamiento del arrastre de marcos  $\omega$  es de orden uno en  $\Omega$  y dependerá sólo de las contribuciones a orden cero en  $\Omega$  de las funciones métricas. Como se vió, la expansión de las funciones métricas se hace en potencias de  $\Omega^2$ , en donde las cantidades de orden cero son las soluciones del caso esférico. Esto implica que cualquier aporte de las piezas lagrangianas con violación de paridad sobre las funciones métricas será mínimo de orden  $\Omega^2$  y se manifestarán en el arrastre de marcos hasta el orden  $\Omega^3$ . Al considerar el límite de rotación lenta se desprecian todas las contribuciones que sean de orden superior a  $\Omega^1$ , de manera que no es posible encontrar aportes de estas piezas para este tipo de objetos siguiendo el método de Hartle. Cabe la posibilidad que estudiando soluciones rotantes para un parámetro de rotación arbitrario puedan llegarse a ver los aportes al arrastre de marcos de piezas con violación de paridad.

Una vez más, se hace énfasis en que los modelos aquí estudiados son sólo una parte de las teorías expuestas, pero se han dejado de lado piezas lagrangianas que se escapaban de los propósitos del trabajo. En la literatura existen trabajos para la teoría GP en los que se han estudiado estrellas esféricamente simétricas para las piezas lagrangianas  $\mathcal{L}_2$ ,  $\mathcal{L}_3$  y  $\mathcal{L}_4$ , pero el arrastre de marcos se ha limitado esencialmente a la pieza  $\mathcal{L}_2$ . Por su parte, para la teoría GSU2P, se tiene únicamente el trabajo <sup>35</sup>, en el que usan una combinación lineal de diferentes piezas lagrangianas de la teoría tal que se respeta la propagación lumínica de ondas gravitacionales y encuentran soluciones tipo partícula limitándose al caso esféricamente simétrico y estático. Sin embargo, de acuerdo a los resultados aquí obtenidos, por ser soluciones tipo partícula, se esperararía que el caso rotante no genere arrastre de marcos.



Es importante ampliar el número de lagrangianos estudiados, así como diferentes combinaciones de ellos en todas las teorías para así generar modelos que puedan conducir a resultados más satisfactorios tanto en el caso esféricamente simétrico (con y sin materia bariónica), como en objetos rotantes.

## BIBLIOGRAFÍA

- AASI, J. y col. “Advanced LIGO”. En: *Class. Quant. Grav.* 32 (2015) (vid. pág. 18).
- ABBOTT, B. P. y col. “Gravitational Waves and Gamma-Rays from a Binary Neutron Star Merger: GW170817 and GRB 170817A”. En: *Astrophys. J. Lett.* 848 (2017) (vid. pág. 18).
- “GW170817: Observation of Gravitational Waves from a Binary Neutron Star Inspiral”. En: *Phys. Rev. Lett.* 119 (2017) (vid. pág. 18).
- “Multi-messenger Observations of a Binary Neutron Star Merger”. En: *Astrophys. J. Lett.* 848 (2017) (vid. pág. 18).
- ABBOTT, R. y col. “GW190814: Gravitational Waves from the Coalescence of a 23 Solar Mass Black Hole with a 2.6 Solar Mass Compact Object”. En: *Astrophys. J. Lett.* 896 (2020) (vid. págs. 19, 78, 101).
- ALLYS, E., P. PETER e Y. RODRIGUEZ. “Generalized Proca action for an Abelian vector field”. En: *JCAP* 1602 (2016) (vid. págs. 16, 31, 36).
- “Generalized SU(2) Proca Theory”. En: *Phys. Rev. D* 94 (2016) (vid. págs. 16, 35).
- ALLYS, E. y col. “On the 4D generalized Proca action for an Abelian vector field”. En: *JCAP* 1609 (2016) (vid. págs. 16, 31, 34).
- AMENDOLA, L. y col. “Cosmology and fundamental physics with the Euclid satellite”. En: *Living Rev. Rel.* 21 (2018) (vid. pág. 18).

- BABICHEV, E., C. CHARMOUSIS y A. LEHEBEL. “Asymptotically flat black holes in Horndeski theory and beyond”. En: 1704 (2017) (vid. pág. 18).
- BARRANCO, J. y col. “Horndeski stars”. En: *JCAP* 2110 (2021) (vid. pág. 17).
- BARTNIK, R. y J. MCKINNON. “Particlelike Solutions of the Einstein-Yang-Mills Equations”. En: *Phys. Rev. Lett.* 61 (1988) (vid. págs. 20, 95).
- BIRKHOFF, G. D. y R. E. LANGER. *Relativity and modern physics*. Harvard University Press, 1923 (vid. pág. 45).
- BIZON, P. “Colored black holes”. En: *Phys. Rev. Lett.* 64 (1990) (vid. pág. 21).
- CADAVID, A. GALLEGO e Y. RODRIGUEZ. “A systematic procedure to build the beyond generalized Proca field theory”. En: *Phys. Lett. B.* 798 (2019) (vid. págs. 17, 32).
- CADAVID, A. GALLEGO, Y. RODRIGUEZ y L. G. GOMEZ. “Generalized SU(2) Proca theory reconstructed and beyond”. En: *Phys. Rev. D* 102 (2020) (vid. págs. 16, 35).
- CHAGOYA, J. y G. TASINATO. “Stealth configurations in vector-tensor theories of gravity”. En: *JCAP* 1801 (2018) (vid. pág. 20).
- CHARMOUSIS, C. y col. “Astrophysical constraints on compact objects in 4D Einstein-Gauss-Bonnet gravity”. En: *arXiv preprint arXiv:2109.01149* (2021) (vid. pág. 20).
- CIUFOLINI, I. “A comprehensive introduction to the Lageos gravitomagnetic experiment: from the importance of the gravitomagnetic field in physics to preliminary error analysis and error budget”. En: *Int J Mod Phys A* . 04 (1989) (vid. pág. 61).

CIUFOLINI, I. “Mach principle, Lense-Thirring effect and gyrogravitation via two laser ranged satellites”. En: *Bull. Am. Phys. Soc.* 6 (1985) (vid. pág. 61).

— “Measurement of Lense-Thirring drag on high altitude laser ranged artificial satellites”. En: *Bull. Am. Phys. Soc.* 6 (1985) (vid. pág. 61).

— “Measurement of the Lense-Thirring drag on high-altitude, laser-ranged artificial satellites”. En: *Phys. Rev. Lett.* 56 (1986) (vid. pág. 61).

— “On a new method to measure the gravitomagnetic field using two orbiting satellites”. En: *Nuovo cimento. A* 109A (1996) (vid. pág. 61).

— “Test of general relativity: 1995 - 2002 measurement of frame dragging”. En: *eConf C020620* (2002) (vid. pág. 61).

— “The LAGEOS Lense-Thirring Precession and the LAGEOS Non-Gravitational Nodal Perturbations - Part One”. En: *Celest. Mech. Dyn. Astron.* 40 (1987) (vid. pág. 61).

CIUFOLINI, I. y col. “A new laser-ranged satellite for General Relativity and space geodesy: I. An introduction to the LARES2 space experiment”. En: *Eur. Phys. J. Plus* 132 (2017) (vid. pág. 62).

— “A test of general relativity using the LARES and LAGEOS satellites and a GRA-CE Earth gravity model. Measurement of Earth’s dragging of inertial frames”. En: *Eur. Phys. J. C* 76 (2016) (vid. pág. 62).

— “Measurement of dragging of inertial frames and gravitomagnetic field using laser-ranged satellites.” En: *Nuovo cimento. A* 109A (1996) (vid. pág. 61).

- CIUFOLINI, I. y col. “Towards a One Percent Measurement of Frame Dragging by Spin with Satellite Laser Ranging to LAGEOS, LAGEOS 2 and LARES and GRA-CE Gravity Models”. En: *ssr* 148 (2009) (vid. pág. 62).
- CLIFFORD, W. “The Confrontation between General Relativity and Experiment”. En: *Living Rev. Relativ.* 17 (2014) (vid. pág. 14).
- *Theory and experiment in gravitational physics*. Cambridge University Press, 2018 (vid. pág. 14).
- DAVIS, A. y S. MELVILLE. “Scalar fields near compact objects: resummation versus UV completion”. En: *JCAP* 2111 (2021) (vid. pág. 17).
- De Felice, A. y col. “Cosmology in generalized Proca theories”. En: *JCAP* 1606 (2016) (vid. pág. 17).
- DEFFAYET, C. y col. “From k-essence to generalised Galileons”. En: *Phys. Rev. D.* 84 (2011) (vid. págs. 15, 28, 30).
- DIEZ, V. ERRASTI y col. “Complete theory of Maxwell and Proca fields”. En: *Phys. Rev. D* 101 (2020) (vid. pág. 35).
- “Maxwell-Proca theory: Definition and construction”. En: *Phys. Rev. D* 101 (2020) (vid. pág. 35).
- DOBOSZEWSKI, J. y N. LINNEMANN. “How not to establish the non-renormalizability of gravity”. En: *Found. Phys.* 48 (2018) (vid. pág. 14).
- EVERITT, C. W. F. *The Gyroscope Experiment I: General Description and Analysis of Gyroscope Performance*. New Academic Press, 1974 (vid. pág. 62).

- EVERITT, C. W. F. y col. "Gravity Probe B: Final Results of a Space Experiment to Test General Relativity". En: *Phys. Rev. Lett.* 106 (2011) (vid. pág. 62).
- FELICE, A. DE, L. HEISENBERG y S. TSUJIKAWA. "Observational constraints on generalized Proca theories". En: *Phys. Rev. D* 95 (2017) (vid. pág. 17).
- FELICE, A. DE y S. TSUJIKAWA. "f(R) theories". En: *Living Rev. Rel.* 13 (2010) (vid. pág. 16).
- FERRARI, L., P. C. R. ROSSI y M. MALHEIRO. "A polytropic approach to neutron stars". En: *Int. J. Mod. Phys. D.* 19 (2010) (vid. pág. 68).
- FITZPATRICK, P. M. *Principles of Celestial Mechanics*. Academic Press, 1970 (vid. pág. 59).
- GARNICA, J. C. y col. "Constant-Roll Inflation in the Generalized SU(2) Proca Theory". En: *Annalen Phys.* 534 (2022) (vid. pág. 17).
- GLEYZES., J. y col. "Healthy theories beyond Horndeski". En: *Phys. Rev. Lett.* 114 (2015) (vid. pág. 30).
- GOMEZ, L. G. e Y. RODRIGUEZ. "Stability Conditions in the Generalized SU(2) Proca Theory". En: *Phys. Rev. D* 100 (2019) (vid. pág. 17).
- GSPONER, R. y J. NOLLER. "Tachyonic stability priors for dark energy". En: *Phys. Rev. D* 105 (2022) (vid. pág. 17).
- HAENSEL, P., A. Y. POTEKHIN y D. G. YAKOVLEV. "Neutron stars 1: Equation of state and structure". En: *Astrophys. Space Sci. Libr.* 326 (2007) (vid. pág. 66).

- HEISENBERG, L. “Generalization of the Proca Action”. En: *JCAP* 1405 (2014) (vid. págs. 16, 31, 32).
- HEISENBERG, L. “Scalar-Vector-Tensor Gravity Theories”. En: *JCAP* 1810 (2018) (vid. pág. 16).
- HEISENBERG, L., R. KASE y S. TSUJIKAWA. “Beyond generalized Proca theories”. En: *Phys. Lett. B* 760 (2016) (vid. pág. 31).
- HEISENBERG, L. y col. “Black holes in vector-tensor theories”. En: *JCAP* 1708 (2017) (vid. pág. 18).
- HORNDESKI, G. W. “Conservation of Charge and the Einstein-Maxwell Field Equations”. En: *J. Math. Phys.* 17 (1976) (vid. pág. 16).
- “Second-order scalar-tensor field equations in a four-dimensional space”. En: *Int. J. Theor. Phys.* 10 (1974) (vid. págs. 15, 28).
- HUTERER, D. y D. L. SHAFER. “Dark energy two decades after: Observables, probes, consistency tests”. En: *Rept. Prog. Phys.* 81 (2017) (vid. pág. 15).
- IPING, R. C. “General Relativistic Frame-Dragging in Neutron Stars and Black Holes”. En: *Bull. Am. Astron. Soc.* Vol. 191. 1998 (vid. pág. 63).
- ISHAK, M. “Testing General Relativity in Cosmology”. En: *Living Rev. Relativ* 22 (2019) (vid. pág. 17).
- ISRAEL, W. “Event horizons in static electrovac space-times”. En: *Commun. Math. Phys.* 8 (1968) (vid. pág. 95).

- IVANOV, B. V. “Analytical study of anisotropic compact star models”. En: *Eur. Phys. J. C* 77 (2017) (vid. pág. 68).
- JIMENEZ, J. BELTRAN y L. HEISENBERG. “Derivative self-interactions for a massive vector field”. En: *Phys. Lett. B* 757 (2016) (vid. págs. 16, 31).
- “Generalized multi-Proca fields”. En: *Phys. Lett. B* 770 (2017) (vid. págs. 16, 34).
- K., V. VENKATRAMAN y col. “Lense-Thirring frame dragging induced by a fast-rotating white dwarf in a binary pulsar system”. En: *Science* 367 (2020) (vid. pág. 63).
- KASE, R., M. MINAMITSUJI y S. TSUJIKAWA. “Relativistic stars in vector-tensor theories”. En: *Phys. Rev. D* 97 (2018) (vid. págs. 17, 100).
- KLEIHAUS, B., J. KUNZ y F. NAVARRO-LERIDA. “Rotating Einstein-Yang-Mills black holes”. En: *Phys. Rev. D* 66 (2002) (vid. pág. 21).
- KOBAYASHI, T., M. YAMAGUCHI y J. YOKOYAMA. “Generalized G-Inflation: Inflation with the Most General Second-Order Field Equations”. En: *Prog. Theor. Phys.* 126 (2011) (vid. págs. 15, 28).
- LATTIMER, J. M. y M. PRAKASH. “Neutron Star Structure and the Equation of State”. En: *Astrophys. J.* 550 (2001) (vid. pág. 67).
- LATTIMER, J. M. y col. “Rapidly Rotating Pulsars and the Equation of State”. En: *Astrophys. J.* 355 (1990) (vid. pág. 67).
- LENSE, J. “Uber Relativitatseinflusse in den Mondsystemen”. En: *Astron. Nachrichten* 206 (1918) (vid. pág. 40).



- LIPA, J. A., W. M. FAIRBANK y C. W. F. EVERITT. “The gyroscope experiment-II: Development of the London-moment gyroscope and of cryogenic technology for space, in Experimental Gravitation”. En: ed. B. Bertotti Academic Press, New York, 1974 (vid. pág. 62).
- LOVELOCK, D. “The Einstein tensor and its generalizations”. En: *J. Math. Phys.* 12 (1971) (vid. pág. 27).
- “The four-dimensionality of space and the Einstein tensor”. En: *J. Math. Phys.* 13 (1972) (vid. pág. 27).
- MARGALIT, B. y B. METZGER. “Constraining the Maximum Mass of Neutron Stars From Multi-Messenger Observations of GW170817”. En: *Astrophys. J. Lett.* 850 (2017) (vid. págs. 19, 79).
- MARTINEZ, J. N. y col. “Particle-like solutions in the generalized SU(2) Proca theory”. En: *JCAP* 04 (2023), pág. 032 (vid. págs. 17, 22, 85, 95, 104).
- MASHHOON, B., F. W. HEHL y D. S. THEISS. “On the gravitational effects of rotating masses: the Thirring-Lense papers”. En: *Gen. Relativ. Gravit.* 16 (1984) (vid. pág. 60).
- MERRITT, D. y col. “Testing properties of the Galactic center black hole using stellar orbits”. En: *prd* 81 (2010) (vid. pág. 63).
- MINAMITSUJI, M. “Solutions in the generalized Proca theory with the nonminimal coupling to the Einstein tensor”. En: *Phys. Rev. D* 94 (2016) (vid. pág. 20).
- NICOLIS, A., R. RATTAZZI y E. TRINCHERINI. “The Galileon as a local modification of gravity”. En: *Phys. Rev. D* 79 (2009) (vid. págs. 15, 28).

- NUNES, R., J. COELHO y J. DE ARAUJO. "Weighing massive neutron star with screening gravity: a look on PSR J0740 + 6620 and GW190814 secondary component". En: *Eur. Phys. J. C* 80 (2020) (vid. pág. 19).
- OSTROGRADSKY, M. "Memoires sur les equations differentielles, relatives au probleme des isoperimetres". En: *Mem. Acad. St. Petersburg* 6 (1850) (vid. pág. 25).
- PADILLA, A. y V. SIVANESAN. "Covariant multi-galileons and their generalisation". En: *JHEP* 1304 (2013) (vid. págs. 16, 36).
- PAPAPETROU, A. "Einstein's Theory of Gravitation and Flat Space". En: *Proceedings of the Royal Irish Academy. Section A: Mathematical and Physical Sciences* 52 (1948) (vid. pág. 47).
- PSALTIS, D. y col. "Gravitational Test Beyond the First Post-Newtonian Order with the Shadow of the M87 Black Hole". En: *Phys. Rev. Lett.* 125 (2020) (vid. pág. 18).
- R., PENROSE. "Gravitational Collapse and Space-Time Singularities". En: *Phys. Rev. Lett.* 14 (1965) (vid. pág. 14).
- RHAM, C. DE y col. "Quantum stability of a new Proca theory". En: *Phys. Rev. D* 105 (2022) (vid. pág. 17).
- RING, P. y P. SCHUCK. *The Nuclear Many-Body Problem*. Springer-Verlag, 1980 (vid. pág. 67).
- Robinson, D. C. "A simple proof of the generalization of Israel's theorem." En: *Gen. Relativ. Gravit.* 8 (1977) (vid. pág. 95).

- RODRIGUEZ, Y. y A. NAVARRO. “Non-Abelian  $S$ -term dark energy and inflation”. En: *Phys. Dark Univ.* 19 (2018) (vid. pág. 17).
- “Scalar and vector Galileons”. En: *J. Phys. Conf. Ser.* 831 (2017) (vid. págs. 28, 31).
- RUBIN, V. y W. FORD. “Rotation of the Andromeda nebula from a spectroscopic survey of emission regions”. En: *Astrophys. J.* 159 (1970) (vid. pág. 15).
- RUIZ, M., S. SHAPIRO y A. TSOKAROS. “GW170817, General Relativistic Magnetohydrodynamic Simulations, and the Neutron Star Maximum Mass”. En: *Phys. Rev. D* 97 (2018) (vid. pág. 19).
- SBISA, F. “Classical and quantum ghosts”. En: *Eur. J. Phys* 6 (2015) (vid. pág. 26).
- SHAPIRO, S. L. y S. A. TEUKOLSKY. *Black holes, white dwarfs, and neutron stars: The physics of compact objects*. John Wiley & Sons, 2008 (vid. pág. 65).
- SOMIYA, K. “Detector configuration of KAGRA: The Japanese cryogenic gravitational-wave detector”. En: *Class. Quant. Grav* 29 (2012) (vid. pág. 18).
- STRAUMANN, N. y Z. ZHOU. “Instability of a colored black hole solution”. En: *Phys. Lett. B* 243 (1990) (vid. pág. 21).
- “Instability of the Bartnik-Mckinnon Solution of the Einstein Yang-Mills Equations”. En: *Phys. Lett. B* 237 (1990) (vid. pág. 21).
- TASINATO, G. “Cosmic Acceleration from Abelian Symmetry Breaking”. En: *JHEP* 1404 (2014) (vid. págs. 16, 31).

- TAURIS, T. M. y E. P. J. VAN DEN HEUVEL. *Formation and evolution of compact stellar X-ray sources*. Vol. 39. Cambridge University Press, 2006 (vid. pág. 65).
- THIRRING, H. “Über die Wirkung rotierender ferner Massen in der Einsteinschen Gravitationstheorie”. En: *Z Phys Chem (N F)* 19 (1918) (vid. pág. 40).
- TORRENCE, M. *Lageos-1,-2*. <https://shorturl.at/mnqER>. Accedido 24-05-2023. 2012 (vid. pág. 60).
- VAINSHTEIN, A. I. “To the problem of nonvanishing gravitation mass”. En: *Phys. Lett. B* 39 (1972) (vid. pág. 19).
- VAN PATTEN, R. A. y C. W. F. EVERITT. “Possible Experiment wit, Two Counter-Orbiting Drag-Free Satellites to Obtain a New Test of Einstein’s General Theory of Relativity and Improved Measurements in Geodesy”. En: *Phys. Rev. Lett.* 36 (1976) (vid. pág. 60).
- VOLKOV, M. S. y D. V. GAL'TSOV. “Gravitating nonAbelian solitons and black holes with Yang-Mills fields”. En: *Phys. Rept.* 319 (1999) (vid. pág. 21).
- VOLKOV, M. S. y D. V. GAL'TSOV. “Non-Abelian Einstein-Yang-Mills black holes”. En: *JETP* 50 (1989) (vid. pág. 21).
- V.SIVANESAN. “Generalized multiple-scalar field theory in Minkowski space-time free of Ostrogradski ghosts”. En: *Phys. Rev. D* 90 (2014) (vid. págs. 16, 36).
- WEINBERG, S. *Gravitation and cosmology: principles and applications of the general theory of relativity*. Wiley New York, 1972 (vid. pág. 45).

- WILLIAMS, R. K. “Collimated Escaping Vortical Polar  $e^-e^+$  Jets Intrinsically Produced by Rotating Black Holes and Penrose Processes”. En: *Astrophys. J.* 611 (2004), pág. 952 (vid. pág. 63).
- “Extracting X-rays,  $\gamma$ -rays, and relativistic  $e^-e^+$  pairs from supermassive Kerr black holes using the Penrose mechanism”. En: *Phys. Rev. D* 51 (1995) (vid. pág. 63).
- WITTEN, E. “Some Exact Multipseudoparticle Solutions of Classical Yang-Mills Theory”. En: *Phys. Rev. Lett.* 38 (1977) (vid. pág. 57).
- WOODARD, R. P. “Avoiding dark energy with  $1/r$  modifications of gravity”. En: *Lect. Notes Phys.* 720 (2007) (vid. pág. 26).
- “Ostrogradsky’s theorem on Hamiltonian instability”. En: *Scholarpedia* 10 (2015) (vid. pág. 26).
- ZHOU, Z. “Instability of SU(2) Einstein-Yang-Mills solitons and non-abelian black holes.” En: *Helv. Phys. Acta.* 65 (1992) (vid. pág. 21).
- ZWICKY, F. “Die rotverschiebung von extragalaktischen nebeln”. En: *Helv. Phys. Acta, Suppl.* 6 (1933) (vid. pág. 15).

## ANEXOS

### **Anexo A. Contribución del tensor energía momento a primer orden en $\Omega$**

A continuación se calculará la contribución a primer orden de la componente  $(t\phi)$  del tensor energía momento  $\mathbf{T}$ . Considerando un fluido perfecto, su tensor energía-momento está dado de acuerdo a la expresión (44), de manera que es necesario determinar la forma explícita de la cuadrivelocidad  $\mathbf{u}$ . Para este propósito resulta útil invocar el siguiente teorema:

***Teorema generalizado de Papapetrou:*** *Un espaciotiempo estacionario (vector de Killing  $\xi = \partial_t$ ) y axialmente simétrico (vector de Killing  $\chi = \partial_\phi$ ) regido por las ecuaciones de campo de Einstein es circular si y sólo si el tensor energía momento  $\mathbf{T}$  obedece*

$$\xi^\mu T_\mu^{[\alpha \xi^\beta \chi^\gamma]} = 0, \quad (143)$$

$$\chi^\mu T_\mu^{[\alpha \xi^\beta \chi^\gamma]} = 0, \quad (144)$$

en donde los corchetes cuadrados denotan antisimetrización.

Esto es equivalente a que existen vectores  $\mathbf{V}, \mathbf{W} \in \text{Span}(\xi, \chi)$ <sup>116</sup> con componentes  $V^\alpha = \xi^\mu T_\mu^\alpha$  y  $W^\alpha = \chi^\mu T_\mu^\alpha$ . Para el caso del tensor energía momento de un fluido perfecto

$$\begin{aligned} \xi^\mu T_\mu^{[\alpha \xi^\beta \chi^\gamma]} &= (\varepsilon + \mathcal{P}) \xi^\mu u_\mu u^{[\alpha \xi^\beta \chi^\gamma]} + \mathcal{P} \xi^\mu \delta_\mu^{[\alpha \xi^\beta \chi^\gamma]}, \\ &= (\varepsilon + \mathcal{P}) \xi^\mu u_\mu u^{[\alpha \xi^\beta \chi^\gamma]} = 0, \end{aligned} \quad (145)$$

---

<sup>116</sup> El espacio vectorial  $\text{Span}(\xi, \chi)$  es el plano generado por los vectores  $\xi$  y  $\chi$ .

en donde se usó  $\xi^\mu \delta_\mu^{[\alpha \xi^\beta \chi^\gamma]} = \xi^{[\alpha \xi^\beta \chi^\gamma]} = 0$  por ortogonalidad. Similarmente,

$$\chi^\mu T_\mu^{[\alpha \xi^\beta \chi^\gamma]} = (\varepsilon + \mathcal{P}) \chi^\mu u_\mu u^{[\alpha \xi^\beta \chi^\gamma]} = 0. \quad (146)$$

Ya que los vectores  $\xi$  y  $\mathbf{u}$  son tipo tiempo, es claro que  $\xi^\mu u_\mu \neq 0$ . Por lo tanto

$$u^{[\alpha \xi^\beta \chi^\gamma]} = 0, \quad (147)$$

lo que implica que  $\mathbf{u} \in \text{Span}(\xi, \chi)$ , entonces

$$\mathbf{u} = u^t (\xi + \Omega \chi) = (u^0, 0, 0, u^3), \quad (148)$$

en donde  $\Omega = u^\phi / u^t = d\phi/dt$  del fluido y con  $u^3 = \Omega u^0$ . En virtud del principio de equivalencia  $g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = -1$ , por lo que sumando y despejando para  $u^0$  se obtiene

$$u^0 = [-(g_{00} + 2\Omega g_{03} + \Omega^2 g_{33})]^{-1/2}. \quad (149)$$

Reemplazando en la componente  $(t\phi)$  del tensor energía momento

$$T_3^0 = (\varepsilon + \mathcal{P}) u_3 u^0, \quad (150)$$

en donde  $u_3 = g_{3\mu} u^\mu$ , se obtiene

$$T_3^0 = (\varepsilon + \mathcal{P})(g_{30} + \Omega g_{33})(u_0)^2, \quad (151)$$

de manera que al incluir la Ec.(149) y expandiendo en potencias de  $\Omega$  se encuentra

$$T_3^0 = (\rho + P)(\Omega - \omega)r^2 \sin^2 \theta e^{-\nu} + \mathcal{O}(\Omega^3), \quad (152)$$

en donde  $\rho$  y  $P$  son las contribuciones a orden cero de la densidad de energía y la

presión, respectivamente.



## Anexo B. Ecuaciones de campo tensoriales

A continuación se presentan las ecuaciones de campo gravitacional y de Euler-Lagrange para las acciones consideradas en cada una de las teorías. El cálculo de éstas se hizo con la ayuda de la paquetería xAct del software Wolfram Mathematica.

### Ecuaciones de campo para la teoría de Horndeski

#### Ecuación de campo gravitacional

$$\begin{aligned} G_4(X)G_{\alpha\beta} + G_{4,X}(X) & \left[ -\frac{1}{2}R\nabla_\alpha\varphi\nabla_\beta\varphi + 2R_{\lambda(\alpha}\nabla_{\beta)}\varphi\nabla^\lambda\varphi - \nabla_{(\alpha}\nabla_{\beta)}\varphi\nabla_\gamma\nabla^\gamma\varphi \right. \\ & - R_{\gamma(\alpha\beta)\lambda}\nabla^\gamma\varphi\nabla^\lambda\varphi + \nabla^\gamma\nabla_{(\alpha}\varphi\nabla_{\beta)}\nabla_\gamma\varphi + \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}(-2R_{\lambda\gamma}\nabla^\lambda\varphi\nabla^\gamma\varphi + \nabla_\gamma\nabla^\gamma\varphi\nabla_\lambda\nabla^\lambda\varphi \\ & \left. - \nabla_\lambda\nabla_\gamma\varphi\nabla^\lambda\nabla^\gamma\varphi) \right] + G_{4,XX}(X) [\nabla_{(\alpha}\varphi\nabla_{\beta)}\nabla_\gamma\varphi(2\nabla^\gamma\varphi\nabla_\lambda\nabla^\lambda\varphi - \nabla^\lambda\varphi\nabla^\gamma\nabla_\lambda\varphi) \\ & + \nabla_{(\alpha}\nabla_{\beta)}\varphi\nabla^\lambda\varphi\nabla^\gamma\varphi\nabla_\lambda\nabla_\gamma\varphi + \nabla_{(\alpha}\varphi\nabla_{\beta)}\varphi(\nabla_\lambda\nabla_\gamma\varphi\nabla^\lambda\nabla^\gamma\varphi - \nabla_\gamma\nabla^\gamma\varphi\nabla_\lambda\nabla^\lambda\varphi) \\ & - \nabla^\lambda\nabla_{(\alpha}\varphi\nabla_{\beta)}\varphi\nabla^\gamma\varphi\nabla_\lambda\nabla_\gamma\varphi - 2\nabla_{(\alpha}\nabla^\gamma\varphi\nabla_{\beta)}\nabla_\lambda\varphi\nabla_\gamma\varphi\nabla^\lambda\varphi + g_{\alpha\beta}(\nabla_\eta\nabla_\lambda\varphi\nabla^\lambda\varphi\nabla^\eta\nabla^\gamma\varphi\nabla_\gamma\varphi \\ & - \nabla^\lambda\varphi\nabla^\gamma\varphi\nabla_\lambda\nabla_\gamma\varphi\nabla_\eta\nabla^\eta\varphi) - \frac{1}{2}\nabla_{\alpha\beta}\varphi + \frac{1}{4}g_{\alpha\beta}\nabla_\lambda\varphi\nabla^\lambda\varphi = \frac{1}{2}T_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

#### Ecuación de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} G_{4,X}R\nabla_\alpha\nabla^\alpha\varphi + G_{4,XX} & [-R\nabla^\alpha\varphi\nabla^\beta\varphi\nabla_\alpha\nabla_\beta\varphi - 2R_{\lambda\alpha}\nabla^\lambda\nabla^\alpha\nabla_\beta\nabla^\beta\varphi + 4R_{\lambda\beta}\nabla^\alpha\varphi\nabla^\lambda\varphi\nabla^\beta\nabla_\alpha\varphi \\ & + 2R_{\gamma\lambda\beta\alpha}\nabla^\alpha\varphi\nabla^\lambda\varphi\nabla^\gamma\nabla^\beta\varphi + \nabla^\alpha\nabla_\alpha\varphi\nabla^\beta\nabla_\beta\varphi\nabla^\gamma\nabla_\gamma\varphi - 3\nabla^\alpha\nabla_\alpha\varphi\nabla^\gamma\nabla^\beta\varphi\nabla_\gamma\nabla_\beta\varphi \\ & + 2\nabla^\alpha\nabla^\beta\varphi\nabla_\gamma\nabla_\alpha\varphi\nabla^\gamma\nabla_\beta\varphi] + G_{4,XXX}[2\nabla^\alpha\varphi\nabla^\beta\varphi\nabla_\alpha\nabla_\beta\varphi\nabla^\lambda\nabla_{[\gamma}\varphi\nabla_{\lambda]}\nabla^\gamma\varphi \\ & + 4\nabla^\alpha\varphi\nabla^\beta\varphi\nabla^\gamma\nabla_\alpha\varphi\nabla_\gamma\nabla_{[\beta}\varphi\nabla_{\lambda]}\nabla^\lambda\varphi] + \nabla^\alpha\nabla_\alpha\varphi = 0. \end{aligned}$$

## Para la teoría generalizada de Proca

### Ecuación de campo gravitacional

$$\begin{aligned} G_4(X)G_{\alpha\beta} + G_{4,X}(X) & \left[ -\frac{1}{2}RB_{\alpha}B_{\beta} - 2B_{(\alpha}\nabla_{\beta)}\nabla_{\gamma}B^{\gamma} - \nabla_{(\alpha}B_{\beta)}\nabla_{\gamma}B^{\gamma} + 2\nabla_{(\alpha}B^{\gamma}\nabla_{\beta)}B_{\gamma} \right. \\ & - \nabla^{\gamma}B_{(\alpha}\nabla_{\beta)}B_{\gamma} + B_{(\alpha}\nabla^{\gamma}\nabla_{\beta)}B^{\gamma} + \nabla_{\gamma}\nabla^{\gamma}B_{(\alpha}B_{\beta)} + B^{\gamma}(\nabla_{(\alpha}\nabla_{\beta)}B_{\gamma} - \nabla_{\gamma}\nabla_{(\alpha}B_{\beta)}) \\ & \left. + g_{\alpha\beta} \left( \frac{1}{2}\nabla_{\gamma}B^{\gamma}\nabla_{\lambda}B^{\lambda} + \frac{1}{2}\nabla_{\gamma}B_{\lambda}\nabla^{\lambda}B^{\gamma} - \nabla_{\lambda}B_{\gamma}\nabla^{\lambda}B^{\gamma} + B^{\gamma}\nabla_{\gamma}\nabla_{\lambda}B^{\lambda} - B^{\gamma}\nabla_{\lambda}\nabla^{\lambda}B_{\gamma} \right) \right] \\ & + G_{4,XX}(X) \left[ \frac{1}{2}B_{\alpha}B_{\beta}(\nabla_{\gamma}B_{\lambda}\nabla^{\lambda}B^{\gamma} - \nabla_{\gamma}B^{\gamma}\nabla_{\lambda}B^{\lambda}) + B_{(\alpha}\nabla_{\beta)}B_{\gamma}(2B^{\gamma}\nabla_{\lambda}B^{\lambda} - B^{\lambda}\nabla_{\gamma}B_{\lambda}) \right. \\ & - B^{\gamma}B_{(\alpha}\nabla^{\lambda}B_{\beta)}\nabla_{\lambda}B_{\gamma} + B^{\gamma}B^{\lambda}((\nabla_{(\alpha}B_{\beta)}\nabla_{\lambda}B_{\gamma} - \nabla_{\alpha}B_{\gamma}\nabla_{\beta}B_{\lambda}) + g_{\alpha\beta}(\nabla_{\eta}B_{\lambda}\nabla^{\eta}B_{\gamma} \\ & - \nabla_{\lambda}B_{\gamma}\nabla_{\eta}B^{\eta})) \left. \right] \frac{1}{2}(-\nabla_{\alpha}B^{\gamma}\nabla_{\beta}B_{\gamma} - \nabla^{\gamma}B_{\alpha}\nabla_{\beta}B_{\gamma} + \nabla^{\gamma}B_{\alpha}\nabla_{\gamma}B_{\beta} - \nabla_{\alpha}B_{\gamma}\nabla^{\gamma}B_{\beta} \\ & - g_{\alpha\beta}(\nabla_{\lambda}B_{\gamma}\nabla^{\lambda}B^{\gamma} - \nabla_{\gamma}B_{\lambda}\nabla^{\lambda}B^{\gamma})) - \frac{1}{4}(2\nabla_{\alpha}B^{\gamma}\nabla_{\beta}B_{\gamma} + 2(\nabla_{\gamma}B_{\beta} - \nabla_{\beta}B_{\gamma})\nabla^{\gamma}B_{\alpha} \\ & - 2\nabla_{\alpha}B_{\gamma}\nabla^{\gamma}B_{\beta} + g_{\alpha\beta}(\nabla_{\gamma}B_{\rho} - \nabla_{\rho}B_{\gamma}\nabla^{\rho}B^{\gamma}) = \frac{1}{2}T_{\alpha\beta}. \end{aligned}$$

### Ecuación de Euler-Lagrange

$$\begin{aligned} 2G_{4,X}(\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}B^{\alpha}) + 2G_{4,XX}B^{\alpha}(\nabla_{\beta}B_{\alpha}\nabla_{\gamma}A^{\gamma} - \nabla_{\beta}B^{\gamma}\nabla_{\gamma}B_{\alpha}) - B_{\beta}(G_{4,X}R \\ + G_{4,XX}\nabla_{\alpha}B^{\alpha}\nabla_{\gamma}B^{\gamma} - G_{4,XX}\nabla_{\alpha}B_{\gamma}\nabla^{\gamma}B^{\alpha}) - \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}B^{\alpha} + \nabla_{\alpha}\nabla^{\beta}B_{\beta} = 0. \end{aligned}$$

### Ecuaciones de campo para la teoría generalizada de Proca SU(2)

Las ecuaciones de campo tensoriales resultan ser muy extensas como para ser aquí consignadas. El lector interesado puede encontrar el archivo de mathematica en el siguiente enlace: <https://github.com/WJaimés1/Field-Equations-GSU2P>.

### Anexo C. Coeficientes de las ecuaciones de campo

A continuación se presentan los coeficientes usados en las ecuaciones diferenciales para cada una de las teorías.

#### Coeficientes para la teoría de Horndeski

$$\begin{aligned}F_1^1 &= \frac{1}{4}e^{-2\lambda}\varphi'^4, \\F_2^1 &= 3e^{-3\lambda}\varphi'^3\varphi'', \\F_3^1 &= e^{-2\lambda}\varphi'^2[e^{-\lambda}\varphi'(9\nu' - 15\lambda') - \varphi'(\nu' - 3\lambda') + 6(3e^{-\lambda} - 1)\varphi''], \\F_4^1 &= 3e^{-3\lambda}\varphi'^2[\phi'\nu'^2 - 5\phi'\nu'\lambda' + 2\phi'\nu'' + 3\nu'\phi''],\end{aligned}$$

#### Coeficientes para la teoría GP

Primero se definen las cantidades

$$X_0 = \frac{e^{-\nu}B_0^2}{2}, \quad X_1 = \frac{e^{-\lambda}B_1^2}{2}$$

Los coeficientes quedan

$$\begin{aligned}F_1^2 &= -3X_0^2 + 18X_0X_1 - 15X_1^2, \\F_2^2 &= -3X_0^2 + 14X_0X_1 - 3X_1^2, \\F_3^2 &= -3X_0^2 + 2X_0X_1 + X_1^2, \\F_4^2 &= -8e^{-(\nu+\lambda)}B_0B_0'X_1 - 12e^{-2\lambda}B_1B_1'X_0 + 12e^{-2\lambda}B_1B_1'X_1, \\F_5^2 &= -\frac{3}{2}e^{-(\nu+\lambda)}B_0'^2X_0 + \frac{1}{2}e^{-(\nu+\lambda)}B_0'^2X_1, \\F_6^2 &= -X_0^2 - 6X_0X_1 + 15X_1^2,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_7^2 &= -X_0^2 - 2X_0X_1 + 3X_1^2, \\
F_8^2 &= -4e^{-(\nu+\lambda)}B'_0X_0 + 12e^{-(\nu+\lambda)}B'_0X_1, \\
F_9^2 &= -\frac{1}{2}e^{-(\nu+\lambda)}B_0'^2X_0 + \frac{3}{2}e^{-(\nu+\lambda)}B_0'^2X_1, \\
F_{10}^2 &= -3X_0^2 + 6X_0X_1 - 3X_1^2, \\
F_{11}^2 &= -3X_0^2 - 2X_0X_1 - 3X_1^2, \\
F_{12}^2 &= -12e^{-\nu}B'_0B_0X_0 + 8e^{-\nu}B_0B'_0X_1 + 6e^{-\lambda}B_1B'_1X_0 - 3e^{-\lambda}B_1B'_1X_1, \\
F_{13}^2 &= 2e^{-(\nu+\lambda)}B_0B'_0X_0 + 2e^{-(\nu+\lambda)}B_0B'_0X_1 + 2e^{-2\lambda}B_1B'_1X_0 - 6e^{-2\lambda}B_1B'_1X_1, \\
F_{14}^2 &= \frac{11}{2}e^{-(\nu+\lambda)}B_0'^2X_0 - \frac{3}{2}e^{-(\nu+\lambda)}B_0B_0'^2X_1 - 2e^{-(\nu+2\lambda)}B_0B'_0B_1B'_1, \\
F_{15}^2 &= -2B_0X_0 + 2e^{-\lambda}B_0X_0 - 6e^{-\lambda}B_0X_1 + 2B_0X_1, \\
F_{16}^2 &= 2e^{-\lambda}B'_0(X_0 - X_1) - 4e^{-2\lambda}B_0B_1B'_1 - 2e^{-\lambda}B_0(2X_1\nu' + X_0\lambda') + 6e^{-\lambda}B_0X_1\lambda', \\
F_{17}^2 &= \frac{1}{2}e^{-(\nu+\lambda)}B_0B_0'^2 - e^{-2\lambda}B_1B'_1B'_0 + \frac{3}{2}e^{-\lambda}B'_0(X_1\lambda' - X_0\nu') \\
&\quad + \frac{1}{2}e^{-\lambda}B'_0(X_1\nu' - X_0\lambda') + e^{-\lambda}(X_0 - X_1)B''_0, \\
F_{18}^2 &= -2B_1X_0 + 2e^{-\lambda}B_1X_0 - 6e^{-\lambda}B_1X_1 + 2e^{-\lambda}B_1X_1, \\
F_{19}^2 &= -4e^{-(\nu+\lambda)}B_0B'_0B_1 + 6e^{-\lambda}B_1X_0\nu' - 6e^{-\lambda}B_1X_1\nu', \\
F_{20}^2 &= -\frac{1}{2}e^{-(\nu+\lambda)}B_1B_0'^2, \\
F_{21}^2 &= -6[e^{-\nu}B_0B'_0 + e^{-\lambda}B_1B'_1](X_0 - X_1) + \left(\frac{15}{2}X_0^2 - 9X_0X_1 + \frac{3}{2}X_1^2\right)\nu' \\
&\quad + \left(\frac{3}{2}X_0^2 - 9X_0X_1 - \frac{15}{2}X_1^2\right)\lambda'.
\end{aligned}$$

## Coeficientes para la teoría GSU2P

$$\begin{aligned}
 F_1^3 &= -\frac{8\alpha_4(1+\phi_2)^4}{e^4 r^4} + \frac{192\alpha_4(1+\phi_2)^3\phi'}{e^4 r^4} + \frac{16\alpha_4(1+\phi_2)^3\phi'}{e^4 r^3}, \\
 F_2^3 &= \frac{-8\alpha_1(1+\phi_2)^2\phi_2'^2 + \alpha_2(1+\phi_2)\phi_2'^2 - 96\alpha_4(1+\phi_2)^2\phi'^2 - 32\alpha_4(1+\phi_2)^3\phi''}{e^4}, \\
 F_3^3 &= \frac{2(16\alpha_1 - \alpha_2 + 96\alpha_4)(1+\phi_2)^3\phi_2'}{e^4}, \\
 F_4^3 &= \frac{-(32\alpha_1 + 104\alpha_4)(1+\phi_2)^3}{e^4}, \\
 F_5^3 &= \frac{8\alpha_4(1+\phi_2)^3}{e^4}, \\
 F_6^3 &= \frac{8\alpha_4[2(1+\phi_2)^3\phi' - (1+\phi_2)^4]}{e^4}, \\
 F_7^3 &= \frac{(-8\alpha_1 + \alpha_2)(1+\phi_2)^2\phi_2'^2}{e^4}, \\
 F_8^3 &= \frac{(32\alpha_1 - 2\alpha_2 + 64\alpha_4)(1+\phi_2)^3\phi_2'^2}{e^4}, \\
 F_9^3 &= \frac{-(32\alpha_1 + 56\alpha_4)(1+\phi_2)^4}{e^4}, \\
 F_{10}^3 &= \frac{-8\alpha_4(1+\phi_2)^4}{e^4}, \\
 F_{11}^3 &= \frac{-8\alpha_4(1+\phi_2)^4}{e^4 r^4}, \\
 F_{12}^3 &= \frac{(-32\alpha_1 + 16\alpha_1\phi_2' - \alpha_2\phi_2' + 32\alpha_4\phi_2')(1+\phi_2)^3}{e^4 r^4} - \frac{56\alpha_4(1+\phi_2)^4}{e^4 r^4}, \\
 F_{13}^3 &= \frac{8\alpha_4(1+\phi_2)^4}{e^4 r^4}, \\
 F_{14}^3 &= \frac{(64\alpha_1 + 112\alpha_4)(1+\phi_2)^4}{e^4 r^4} + \frac{(-32\alpha_1 + 2\alpha_2 - 64\alpha_4)(1+\phi_2)^3\phi_2'}{e^4 r^3}, \\
 F_{15}^3 &= \frac{(80\alpha_1 - 4\alpha_2)(1+\phi_2)^2\phi_2'^2}{e^4} + \frac{(32\alpha_1 - 2\alpha_2 + 64\alpha_4)\phi_2''}{e^4}, \\
 F_{16}^3 &= \frac{-(256\alpha_1 + 448\alpha_4)(1+\phi_2)^3\phi'}{e^4}, \\
 F_{17}^3 &= \frac{128(1+\phi_2)^3}{e^4} + \frac{224(1+\phi_2)^4}{e^4}, \\
 F_{18}^3 &= \frac{32(1+\phi_2)^4}{e^4}, \\
 F_{19}^3 &= [-(16\alpha_1 + 3\alpha_2)e^{-\lambda} - 16\alpha_4(1 - \frac{1}{25})](1+\phi_2)^3,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
F_{20}^3 &= \left[ (8\alpha_1 - \frac{1}{2}\alpha_2 + 16\alpha_4)(\lambda' - \nu')(1 + \phi_2)^3 - 32\alpha_1\phi_2\phi_2' + (-14\alpha_1 + 2\alpha_2)(1 + \phi_2)^2\phi_2' \right] e^{-\lambda}, \\
F_{21}^3 &= \left[ \left( -4\alpha_1 + \frac{1}{2}\alpha_2 \right) (\lambda' - \nu')(1 + \phi_2)\phi_2' + (8\alpha_1 - \alpha_2)\phi_2'^2 \right. \\
&\quad \left. + (8\alpha_1 - \alpha_2)\phi_2''(1 + \phi_2) + 4(\lambda'\nu' - \nu'^2 - 2\nu'')(1 + \phi_2)^2 \right] (1 + \phi_2), \\
F_{22}^3 &= -\frac{4(2\alpha_1 + \alpha_4)(1 + \phi_2)^3 ((1 + \phi_2)\lambda' + (1 + \phi_2)\nu' - 8\phi_2')}{e^{4r^4}}, \\
F_{23}^3 &= \frac{8(2\alpha_1 + \alpha_4)(1 + \phi_2)^4}{e^{4r^4}}, \\
F_{24}^3 &= \frac{8(4\alpha_1 + \alpha_4)(1 + \phi_2)^4}{e^{4r^4}}, \\
F_{25}^3 &= \frac{8e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1(\nu')^2\phi_2^4}{e^{4r^4}} + \frac{8e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4(\nu')^2\phi_2^4}{e^{4r^4}} + \frac{64e^{\lambda+\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2^4}{e^{4r^6}} + \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2^4}{e^{4r^6}} \\
&\quad + \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\phi_2^4}{e^{4r^6}} + \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\nu'\phi_2^4}{e^{4r^5}} + \frac{16e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\nu''\phi_2^4}{e^{4r^4}} + \frac{16e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\nu''\phi_2^4}{e^{4r^4}} \\
&\quad + \frac{4e^{\lambda+\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\phi_2^4}{e^{2r^4}} - \frac{8e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\lambda'\nu'\phi_2^4}{e^{4r^4}} - \frac{8e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\lambda'\nu'\phi_2^4}{e^{4r^4}} - \frac{16e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\lambda'\phi_2^4}{e^{4r^5}} \\
&\quad - \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\lambda'\phi_2^4}{e^{4r^5}} - \frac{16e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\nu'\phi_2^4}{e^{4r^5}} - \frac{32e^{\lambda+\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\phi_2^4}{e^{4r^6}} + \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1(\nu')^2\phi_2^3}{e^{4r^4}} \\
&\quad + \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4(\nu')^2\phi_2^3}{e^{4r^4}} + \frac{256e^{\lambda+\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2^3}{e^{4r^6}} + \frac{128e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2^3}{e^{4r^6}} + \frac{128e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\phi_2^3}{e^{4r^6}} \\
&\quad + \frac{128e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\nu'\phi_2^3}{e^{4r^5}} + \frac{64e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2'\phi_2^3}{e^{4r^5}} + \frac{4e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\phi_2'\phi_2^3}{e^{4r^5}} + \frac{16e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\lambda'\phi_2'\phi_2^3}{e^{4r^4}} \\
&\quad + \frac{48e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\nu'\phi_2'\phi_2^3}{e^{4r^4}} + \frac{e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\nu'\phi_2'\phi_2^3}{e^{4r^4}} + \frac{64e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\nu''\phi_2^3}{e^{4r^4}} + \frac{64e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\nu''\phi_2^3}{e^{4r^4}} \\
&\quad + \frac{2e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\phi_2''\phi_2^3}{e^{4r^4}} - \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\lambda'\nu'\phi_2^3}{e^{4r^4}} - \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\lambda'\nu'\phi_2^3}{e^{4r^4}} - \frac{e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\lambda'\phi_2'\phi_2^3}{e^{4r^4}} \\
&\quad - \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2''\phi_2^3}{e^{4r^4}} - \frac{64e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\lambda'\phi_2^3}{e^{4r^5}} - \frac{128e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\lambda'\phi_2^3}{e^{4r^5}} - \frac{64e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\nu'\phi_2^3}{e^{4r^5}} \\
&\quad - \frac{128e^{\lambda+\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\phi_2^3}{e^{4r^6}} + \frac{48e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1(\nu')^2\phi_2^2}{e^{4r^4}} + \frac{48e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4(\nu')^2\phi_2^2}{e^{4r^4}} + \frac{2e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2(\phi_2')^2\phi_2^2}{e^{4r^4}} \\
&\quad + \frac{384e^{\lambda+\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2^2}{e^{4r^6}} + \frac{192e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2^2}{e^{4r^6}} + \frac{192e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\phi_2^2}{e^{4r^6}} + \frac{192e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\nu'\phi_2^2}{e^{4r^5}} \\
&\quad + \frac{192e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2'\phi_2^2}{e^{4r^5}} + \frac{12e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\phi_2'\phi_2^2}{e^{4r^5}} + \frac{48e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\lambda'\phi_2'\phi_2^2}{e^{4r^4}} + \frac{144e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\nu'\phi_2'\phi_2^2}{e^{4r^4}} \\
&\quad + \frac{3e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\nu'\phi_2'\phi_2^2}{e^{4r^4}} + \frac{96e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\nu''\phi_2^2}{e^{4r^4}} + \frac{96e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\nu''\phi_2^2}{e^{4r^4}} + \frac{6e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\phi_2''\phi_2^2}{e^{4r^4}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& - \frac{8e^{\lambda+\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\phi_2^2}{e^{2r^4}} - \frac{64e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1(\phi_2')^2\phi_2^2}{e^{4r^4}} - \frac{48e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\lambda'\nu'\phi_2^2}{e^{4r^4}} - \frac{48e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\lambda'\nu'\phi_2^2}{e^{4r^4}} \\
& - \frac{3e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\lambda'\phi_2'\phi_2^2}{e^{4r^4}} - \frac{96e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2''\phi_2^2}{e^{4r^4}} - \frac{96e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\lambda'\phi_2^2}{e^{4r^5}} - \frac{192e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\lambda'\phi_2^2}{e^{4r^5}} \\
& - \frac{96e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\nu'\phi_2^2}{e^{4r^5}} - \frac{192e^{\lambda+\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\phi_2^2}{e^{4r^6}} + \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1(\nu')^2\phi_2}{e^{4r^4}} + \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4(\nu')^2\phi_2}{e^{4r^4}} \\
& + \frac{4e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2(\phi_2')^2\phi_2}{e^{4r^4}} + \frac{256e^{\lambda+\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2}{e^{4r^6}} + \frac{128e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2}{e^{4r^6}} + \frac{128e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\phi_2}{e^{4r^6}} \\
& + \frac{128e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\nu'\phi_2}{e^{4r^5}} + \frac{192e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2'\phi_2}{e^{4r^5}} + \frac{12e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\phi_2'\phi_2}{e^{4r^5}} + \frac{48e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\lambda'\phi_2'\phi_2}{e^{4r^4}} \\
& + \frac{144e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\nu'\phi_2'\phi_2}{e^{4r^4}} + \frac{3e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\nu'\phi_2'\phi_2}{e^{4r^4}} + \frac{64e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\nu''\phi_2}{e^{4r^4}} + \frac{64e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\nu''\phi_2}{e^{4r^4}} \\
& + \frac{6e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\phi_2''\phi_2}{e^{4r^4}} - \frac{128e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1(\phi_2')^2\phi_2}{e^{4r^4}} - \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\lambda'\nu'\phi_2}{e^{4r^4}} - \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\lambda'\nu'\phi_2}{e^{4r^4}} \\
& + \frac{3e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\lambda'\phi_2'\phi_2}{e^{4r^4}} - \frac{96e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2''\phi_2}{e^{4r^4}} - \frac{64e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\lambda'\phi_2}{e^{4r^5}} - \frac{128e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\lambda'\phi_2}{e^{4r^5}} \\
& - \frac{64e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\nu'\phi_2}{e^{4r^5}} - \frac{128e^{\lambda+\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\phi_2}{e^{4r^6}} + \frac{8e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1(\nu')^2}{e^{4r^4}} + \frac{8e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4(\nu')^2}{e^{4r^4}} \\
& + \frac{2e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2(\phi_2')^2}{e^{4r^4}} + \frac{4e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}(\phi_2')^2}{e^{2r^2}} + \frac{64e^{\lambda+\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1}{e^{4r^6}} + \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1}{e^{4r^6}} \\
& + \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4}{e^{4r^6}} + \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\nu'}{e^{4r^5}} + \frac{64e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2'}{e^{4r^5}} + \frac{4e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\phi_2'}{e^{4r^5}} \\
& + \frac{16e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\lambda'\phi_2'}{e^{4r^4}} + \frac{48e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\nu'\phi_2'}{e^{4r^4}} + \frac{e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\nu'\phi_2'}{e^{4r^4}} + \frac{16e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\nu''}{e^{4r^4}} \\
& + \frac{16e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\nu''}{e^{4r^4}} + \frac{2e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\phi_2''}{e^{4r^4}} + \frac{4e^{\lambda+\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}}{e^{2r^4}} - \frac{64e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1(\phi_2')^2}{e^{4r^4}} \\
& - \frac{8e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\lambda'\nu'}{e^{4r^4}} - \frac{8e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\lambda'\nu'}{e^{4r^4}} - \frac{e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_2\lambda'\phi_2'}{e^{4r^4}} - \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\phi_2''}{e^{4r^4}} \\
& - \frac{16e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\lambda'}{e^{4r^5}} - \frac{32e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4\lambda'}{e^{4r^5}} - \frac{16e^{\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_1\nu'}{e^{4r^5}} - \frac{32e^{\lambda+\frac{1}{2}(-\lambda-\nu)}\alpha_4}{e^{4r^6}}
\end{aligned}$$

### Anexo D. Valores de $b_2$ para las soluciones en la teoría GSU2P

A continuación se presentan los valores de  $b_2$  que garantizan soluciones asintóticamente planas en la teoría GSU2P. Para el modelo en que se usa sólo la pieza lagrangiana  $\mathcal{L}_{4,2}^1$  se tiene  $\alpha_i = \alpha_1$ , para el modelo sólo con  $\mathcal{L}_{4,2}^4$  se tiene  $\alpha_i = \alpha_4$  y para el modelo mixto se tiene  $\alpha_i = \alpha_1$ , haciendo la salvedad que en este modelo  $\alpha_4 = -\alpha_1$ .

	$\alpha_i$	$b_2$	
		1- $N$	2- $N$
EYM	0	0.44408243776716	0.646356707101336
$\mathcal{L}_{4,2}^1$	+10 <sup>-2</sup>	0.46344034471124	0.655603279486118
	-10 <sup>-2</sup>	0.42626916607492	0.637861432458844
	+10 <sup>-1</sup>	0.70877015379778	-
	-10 <sup>-1</sup>	0.3102668921230	0.584201771152455
$\mathcal{L}_{4,2}^4$	+10 <sup>-2</sup>	0.44469444165917	0.649777649183397
	-10 <sup>-2</sup>	0.44462990435575	0.648253178081592
	+10 <sup>-1</sup>	-	-
	-10 <sup>-1</sup>	0.48312334944699	0.69520112896784
$\mathcal{L}_{4,2}^1 - \mathcal{L}_{4,2}^4$	+10 <sup>-2</sup>	0.42594225163616	0.637309709801706
	-10 <sup>-2</sup>	0.46297755817678	0.654903362366799
	+10 <sup>-1</sup>	0.30306855027842	-
	-10 <sup>-1</sup>	0.61538829437823	-

Tabla 5. Valores de  $b_2$  para las diferentes soluciones con materia bariónica en la teoría GSU2P.



	$\alpha_i$	$b_2$	
		1- $N$	2- $N$
EYM	0	0.45371626319690	0.651725525522
$\mathcal{L}_{4,2}^1$	+10 <sup>-2</sup>	0.47250672151494	0.660866567206950
	-10 <sup>-2</sup>	0.43649110265109	0.64333916488523
	+10 <sup>-1</sup>	0.71355108915981	-
	-10 <sup>-1</sup>	0.32670716948457	0.590900908037372
$\mathcal{L}_{4,2}^4$	+10 <sup>-2</sup>	0.45434070080051	0.655145623231591
	-10 <sup>-2</sup>	0.45425863731685	0.653612572840462
	+10 <sup>-1</sup>	-	-
	-10 <sup>-1</sup>	0.49234694416819	0.700183972968115
$\mathcal{L}_{4,2}^1 - \mathcal{L}_{4,2}^1$	+10 <sup>-2</sup>	0.43617246642194	0.642792930687672
	-10 <sup>-2</sup>	0.47203808978754	0.660168777033565
	+10 <sup>-1</sup>	0.3197591891	-
	-10 <sup>-1</sup>	0.62100652860143	-

Tabla 6. Valores de  $b_2$  para las diferentes soluciones tipo partícula obtenidas en la teoría GSU2P.