

La conjetura de la suma local y el polígono de Newton.

Omar Felipe Osorio Cortes.

Trabajo de Grado para optar al título de Maestría en matemáticas

Director.

Adriana Alexandra Albarracín Mantilla.

Doctorado en Matemáticas.

Co-director.

Edwin León Cardenal.

Doctorado en Matemáticas.

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Maestría en matemáticas

Bucaramanga

2022

### **Dedicatoria**

Dedicado a Sara Milena Osorio Cortes. Siempre serás parte de todo, te extraño.

### **Agradecimientos**

Para empezar debo agradecer a esa energía, que muchos llaman Dios, que en muchas oportunidades no ha dejado que me derrumbe, algunos la encuentran en grandes templos, otros en lugares algo distintos, yo la encuentro en aquellos que me han dado la mano sin esperar nada a cambio. A mi querida familia que siempre está pendiente de lo que me sucede y muchas de las veces toma parte en esto. A mis compañeros Sebastian, Manuel, Daniela, Jorge, Julian; por haber compartido conmigo este recorrido, más que a nivel académico, a nivel personal, ya que conocen al menos una parte de lo que este fue, a los distintos docentes que tuve el gusto de cruzarme (algunos en forma presencial y otros de forma virtual) pero en especial a mis directores de tesis la profesora Adriana Alexandra Albarracín Mantilla y el profesor Edwin León Cardenal, que siempre estuvieron muy atentos a proponer ideas y facilitar herramientas para el desarrollo de este trabajo, y obviamente a la Universidad Industrial de Santander por ser la casa de estudios donde realice este trabajo, sin más que decir ¡Muchas gracias a todos!

**Tabla de Contenido**

<b>Introducción</b>	<b>8</b>
<b>1. Objetivos</b>	<b>11</b>
<b>2. Preliminares</b>	<b>12</b>
2.1. El valor absoluto $ \cdot _p$ sobre $\mathbb{Q}$	21
2.2. El campo $\mathbb{Q}_p$	27
2.3. Un estudio sobre el campo $\mathbb{Q}_p$	34
2.4. Integración en $\mathbb{Q}_p$ .	42
<b>3. El poliedro de Newton y polinomios cuasi-homogéneos.</b>	<b>48</b>
3.1. El poliedro de Newton.	48
3.2. Polinomios cuasi-homogéneos.	55
<b>4. La conjetura de la suma exponencial local.</b>	<b>60</b>
4.1. Sumas exponenciales.	60
4.2. La conjetura de la suma exponencial local en dimensión 2.	62
4.3. Demostración Teorema 3.9	69
<b>Referencias Bibliográficas</b>	<b>112</b>

**Lista de Figuras**

Figura 1.	Polígono de Newton.	49
Figura 2.	Caras del polígono de Newton.	50
Figura 3.	Partición de $(\mathbb{R}^+)^2$ en conos $\Delta_\tau$ .	54
Figura 4.	Distancia de Newton $d(f)$ y $d_{\tau_2}$ .	55

## Resumen

**Título:** La conjetura de la suma local y el polígono de Newton. \*

**Autor:** Omar Felipe Osorio Cortes. \*\*

**Palabras Clave:** Números  $p$ -ádicos, polígono de Newton, Sumas exponenciales.

**Descripción:** En el siguiente trabajo se hace una recopilación de los resultados sobre dos conceptos matemáticos que permiten verificar la demostración de la conjetura de la suma local en dimensión dos presentada en el artículo ON THE LOCAL SUM CONJETURE IN TWO DIMENSIONS. Estos dos conceptos son, un conjunto numérico conocido como números  $p$ -ádicos, que es notados como  $\mathbb{Q}_p$ , y un objeto matemático conocido como el poliedro de Newton (el cual tiene bastantes usos en distintas ramas de la matemática).

Utilizando estos dos conceptos es posible escribir la suma exponencial local como una doble integral  $p$ -ádica, la cual tiene como dominio de integración unos subconjuntos de  $\mathbb{Q}_p^2$ , estos dependen de una partición del espacio  $(\mathbb{R}^+)^2$  que es definida por el poliedro de Newton, de esta forma, la conjetura de la suma local es escrita en términos del poliedro de Newton. En esta nueva forma, la conjetura tiene tres casos, los dos primeros casos pueden ser demostrados con teoría de integración  $p$ -ádica, en estos dos casos se centra este trabajo.

---

\* Trabajo de grado

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Adriana Alexandra Albarracín Mantilla, Doctorado en Matemáticas. Co-director: Edwin León Cardenal, Doctorado en Matemáticas.

### Abstract

**Title:** The local sum conjecture and the Newton's polygon. \*

**Author:** Omar Felipe Osorio Cortes \*\*

**Keywords:**  $p$ -adics numbers, Newton's polygon, exponential sums.

**Description:** In the next job we'll do a collection of the results on two mathematician concepts that allow check the local sum conjecture proof in two dimensions introduced in the article ON THE LOCAL SUM CONJETURE IN TWO DIMENSIONS. These two concepts are, a numerical set known  $p$ -ádics numbers, that we'll denote like  $\mathbb{Q}_p$ , and a mathematician object known Newton's polyhedron (this has several uses in differents branches of mathematics). we'll use these two concepts to write the exponential local sum like a double  $p$ -adic integral, this integral has as integration domain subsets of  $\mathbb{Q}_p$ , these depends of the partition of space  $(\mathbb{R}^+)^2$  this partition is define thanks to Newton's polyhedron, in this form, the local sum conjecture is write in Newton's polyhedron terms. In this new form, the conjecture has three cases, the first two cases can be proof with  $p$ -adic integration theory, our attention will be in these two cases.

---

\* Bachelor Thesis

\*\* Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Adriana Alexandra Albarracín Mantilla, Doctorado en Matemáticas. Co-director: Edwin León Cardenal, Doctorado en Matemáticas.

## Introducción

Los números  $p$ -ádicos  $\mathbb{Q}_p$  fueron inicialmente descritos por el matemático alemán Kurt Hensel en el año 1897. Este se construye definiendo una norma sobre  $\mathbb{Q}$  distinta a la usual, esta norma es conocida como norma  $p$ -ádica (se notará  $|\cdot|_p$ ) para esto, se fija  $p \in \mathbb{N}$  con  $p$  primo, se define una función  $v$  sobre  $\mathbb{Q}$  que se conoce como valuación (o orden)  $p$ -ádico, entonces para  $x \in \mathbb{Q}$  se define  $|x|_p = p^{-v(x)}$ , resulta que  $(\mathbb{Q}, |\cdot|_p)$  no es completo visto como espacio métrico, por lo cual vía el teorema de completitud se construye  $\mathbb{Q}_p$ .

La norma  $p$ -ádica se extiende al campo  $\mathbb{Q}_p$ ; con esta norma se ve  $(\mathbb{Q}_p, |\cdot|_p)$  como un espacio métrico, esto define una topología la cual cumple las características necesarias para poder dar una medida (conocida como medida de Haar) que dotará a  $\mathbb{Q}_p$  de un tipo de integración. En este ámbito son importantes algunos subconjuntos de  $\mathbb{Q}_p$ , el subconjunto  $\mathbb{Z}_p$  que es conocido como el anillo de enteros  $p$ -ádicos, el grupo de unidades  $\mathbb{Z}_p^\times$  y el ideal maximal  $p\mathbb{Z}_p$  Katok (2007), Vladimirov V. S (1994).

El estudio de la integración  $p$ -ádica ha permitido dar respuesta a problemas planteados fuera de este campo, uno de ellos es las sumas exponenciales. Considere  $\phi(x) \in \mathbb{Z}[x]$ , donde  $x = (x_1, \dots, x_n)$ , es un polinomio no constante, entonces se define la siguiente suma exponencial

$$S(\phi, p^s) = \frac{1}{p^{sn}} \sum_{x \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^n} e^{2\pi i \phi(x)/p^s}.$$



Fijando un caracter aditivo  $e : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$ , y algunos otros pasos esta suma exponencial puede ser escrita como

$$S(\phi, p^s) = \int_{\mathbb{Z}_p^n} e(\phi(x)/p^s) dx.$$

Un problema central consiste en describir el comportamiento asintótico de  $S(\phi, p^s)$ , en general este es un problema central para cualquier suma exponencial (Weil, 1948), (Korobov, 1992).

Dado a que esta suma exponencial se puede escribir como una integral  $p$ -ádica, es necesario conocer herramientas que permitan calcular estas integrales, un método para esto está asociado al poliedro de Newton, un objeto matemático que asocia a un polinomio con un poliedro en el espacio lineal  $\mathbb{R}^n$ , este poliedro se define como la envolvente convexa de las  $n$ -uplas formadas por las potencias de los monomios que conforman el polinomio. Su utilidad se presenta en algunas ramas de las matemáticas, por ejemplo, la teoría de números, las ecuaciones diferenciales, entre otros (Hoornaert, 2002), (Ikromov, 2011).

En varios artículos se estudia la conjetura sobre la suma exponencial, conocida como suma exponencial local

$$S_0(\phi, p^s) := \frac{1}{p^{sn}} \sum_{\substack{x \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^n \\ x \equiv 0 \pmod{p}}} e^{2\pi i \phi(x)/p^s}.$$

La conjetura postula que existe una constante  $C$ , independiente de  $p$  y  $s$ , y un conjunto finito  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\phi$  de primos tales que para todo  $p \notin \mathcal{P}$ ,

$$|S_0| \leq C s^{n-1} p^{-\sigma_c s}$$

donde  $\sigma_c = \sigma_c(\phi)$  es el índice de oscilación compleja, En (Cluckers R. Mustatǎ, 2019) Cluckers, Mustatǎ y Nguyen, demuestran la conjetura de la suma local en dimensión  $n$ , para ello, se establece la conjetura de Igusa para una suma exponencial completa donde  $\phi$  es un polinomio homogéneo en general. En dimensión dos, Lichtin en (Lichtin, 2013) da una prueba alternativa de la conjetura de Igusa y desde una perspectiva diferente, en (Albarracín Mantilla, 2018) se muestra una descripción detallada del comportamiento de la suma truncada en dos dimensiones basada en los polos de la correspondiente función zeta local bajo una condición de no degeneración adicional, esta conjetura ha sido estudiadas intensamente en (Cluckers, 2010)- (Denef, 1987), (Lichtin, 2013), (Wright, 2020).

En este trabajo se reúnen todos los conceptos que se han mencionado anteriormente, todo esto con el objetivo de dar una clara explicación de la demostración de la conjetura de la suma exponencial local en dimensión 2 propuesta en (Fraser, 2020), en los dos primeros capítulos se encuentran las nociones necesarias sobre el campo  $\mathbb{Q}_p$  y el poliedro de Newton, y en el tercer capítulo se tendrá una pequeña introducción a las sumas exponenciales, además de plantear la forma de la conjetura en dimensión dos, la cual estará asociada al poliedro de newton, y se dará una explicación detallada de una parte de la demostración de esta conjetura, lo cual permitirá ver un posible gap en la demostración.

## 1. Objetivos

### Objetivo general

Revisar, comprender y extender los conceptos y resultados obtenidos en el artículo ON THE LOCAL SUM CONJECTURE IN TWO DIMENSIONS.

### Objetivos específicos

1. Estudiar las técnicas del poliedro de Newton y la fórmula de la fase estacionaria para calcular funciones zeta.
2. Comprender las técnicas del poliedro de Newton y la fórmula de la fase estacionaria implementadas en el cálculo de funciones zeta locales, para hacer un estudio detallado de sumas exponenciales.

## 2. Preliminares

En este capítulo se dan los conceptos y resultados básicos para la comprensión de los capítulos siguientes.

**Definición 2.1.** Sea  $\mathbb{K}$  un campo y  $\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} | x \geq 0\}$ , se dice que una función

$$|\cdot| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^+$$

que cumple las siguientes tres propiedades

- i  $|x| = 0$  si y sólo si  $x = 0$ .
- ii  $|xy| = |x||y|$  para todo  $x, y \in \mathbb{K}$ .
- iii  $|x + y| \leq |x| + |y|$  para todo  $x, y \in \mathbb{K}$ .

es conocida como **valor absoluto arquimediano sobre  $\mathbb{K}$** . Si además cumple que

$$|x + y| \leq \max\{|x|, |y|\} \quad \text{para todo } x, y \in \mathbb{K},$$

se conoce como **valor absoluto no arquimediano sobre  $\mathbb{K}$** .

Por la definición anterior se puede notar que todo valor absoluto no arquimediano es arquimediano; pero no todo valor absoluto arquimediano es no arquimediano, se ilustra a continuación.

**Ejemplo 2.1.** Sea  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$ , se define el valor absoluto para  $x \in \mathbb{K}$ ;

$$|x| = \begin{cases} x, & \text{si } x \geq 0 \\ -x, & \text{si } x < 0 \end{cases},$$

a este valor absoluto se le conoce como **valor absoluto usual** y se denota  $|\cdot|_{\infty}$ . Este valor absoluto cumple la propiedad (iii), por lo tanto es un valor absoluto arquimediano, pero se puede notar que si  $x = y = 1$  se tiene

$$|x + y| = 2 > 1 = \text{máx}\{|x|, |y|\},$$

por lo tanto no es un valor absoluto no arquimediano.

Otro ejemplo de valor absoluto es

**Ejemplo 2.2.** Sea  $\mathbb{K}$  un campo, se define el valor absoluto para  $x \in \mathbb{K}$ ,

$$|x| = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } x \neq 0. \end{cases}$$

A este valor absoluto se le conoce como **valor absoluto trivial**. Este valor absoluto es no arquimediano.

Los siguientes lemas serán importantes para el desarrollo del objetivo de esta sección.

**Lema 2.1.** Sea  $\mathbb{K}$  un campo y  $|\cdot|$  un valor absoluto definido sobre  $\mathbb{K}$ . Se tiene que

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n = 0$$

si, y sólo si

$$|x| < 1.$$

**Lema 2.2.** Sean  $|\cdot|_1$  y  $|\cdot|_2$  valores absolutos sobre un campo  $\mathbb{K}$ . Los siguientes enunciados son equivalentes:

1.  $|\cdot|_1$  y  $|\cdot|_2$  son valores absolutos equivalentes;
2. Para cualquier  $x \in \mathbb{K}$  se tiene que  $|x|_1 < 1$  si, y sólo si  $|x|_2 < 1$ .
3. Existe un número real positivo  $\alpha$  tal que para cada  $x \in \mathbb{K}$  se tiene

$$|x|_1 = |x|_2^\alpha$$

*Demostración.* La demostración de estos dos resultados puede ser consultada en Katok (2007).

□

A continuación, se mostrará otras diferencias con el valor absoluto no arquimediano.

**Teorema 2.1.** Sea  $A \subseteq \mathbb{K}$  la imagen de  $\mathbb{Z}$  bajo la función  $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{K}$  definida de la siguiente manera

$$f(n) = \begin{cases} \underbrace{1 + 1 \dots + 1}_{n\text{-veces}}, & \text{si } n > 0, \\ 0, & \text{si } n = 0, \\ -\underbrace{(1 + 1 \dots + 1)}_{n\text{-veces}}, & \text{si } n < 0. \end{cases}$$

Un valor absoluto  $|\cdot|$  sobre  $\mathbb{K}$  es no arquimediano si y sólo si  $|a| \leq 1$  para todo  $a \in A$ . En particular, un valor absoluto sobre  $\mathbb{Q}$  es no arquimediano si y solo si  $|n| \leq 1$  para todo  $n \in \mathbb{Z}$ .

*Demostración.* La demostración de este resultado puede ser consultada en Vladimirov V. S (1994).

□

A continuación, la caracterización de valores absolutos arquimedianos.

**Definición 2.2.** Un valor absoluto es arquimediano si cumple la propiedad:

Dados  $x, y \in \mathbb{K}$ , con  $x \neq 0$ , existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $|nx| > |y|$ .

Ahora bien, si  $\mathbb{K}$  es un campo finito, este estudio no es interesante, dado que el único valor absoluto que se puede definir sobre  $\mathbb{K}$ , es el valor absoluto trivial.

Para continuar se definirá la métrica inducida por un valor absoluto sobre un cuerpo  $\mathbb{K}$ .

**Definición 2.3.** Una métrica  $d$  sobre un conjunto  $X$ , es una función

$$d : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

que cumple las propiedades

i.  $d(x, y) \geq 0$ .

ii.  $d(x, y) = 0$  si, y sólo si  $x = y$ .

iii.  $d(x, y) = d(y, x)$ .

iv.  $d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z)$ .

note que, si  $|\cdot|$  es un valor absoluto sobre un campo  $\mathbb{K}$  se puede definir una métrica  $d$  sobre  $\mathbb{K}$  de la forma

$$d(x, y) = |x - y|,$$

la demostración se deduce de las propiedades de  $|\cdot|$ .

Con este concepto se pueden verificar las siguientes proposiciones.

**Proposición 2.1.** *La función valor absoluto  $|\cdot| : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}^+$ , es continua.*

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , tenemos que si  $|x - y| < \varepsilon$  entonces

$$\begin{aligned} ||x| - |y||_{\mathbb{R}} &\leq |x - y|, \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

así,  $|\cdot|$ , es continua. □

**Proposición 2.2.** *Sea  $\mathbb{K}$  un campo con valor absoluto  $|\cdot|$ . Las operaciones de suma, producto y tomar inversos son funciones continuas.*



*Demostración.*

1. Sean  $x_0, y_0 \in \mathbb{K}$  fijos. Para cualquier  $\varepsilon > 0$ , tomando  $\delta = 1/\varepsilon$ , si se tiene que

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{y} \quad |y - y_0| < \delta,$$

entonces

$$|(x + y) - (x_0 + y_0)| \leq |x - x_0| + |y - y_0| < \frac{1}{\varepsilon} + \frac{1}{\varepsilon} = \varepsilon,$$

así la suma es continua.

2. Sean  $x_0, y_0 \in \mathbb{K}$  fijos. Para cualquier  $\varepsilon > 0$ , tomando

$$\delta = \min \left\{ \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)}, \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)}, 1 \right\},$$

se tiene que si

$$|x - x_0| < \delta \quad \text{y} \quad |y - y_0| < \delta,$$

entonces

$$|y| = |y - y_0 + y_0| \leq |y - y_0| + |y_0| < 1 + |y_0|,$$

por lo cual

$$\begin{aligned}
 |xy - x_0y_0| &= |xy - x_0y + x_0y - x_0y_0|, \\
 &\leq |xy - x_0y| + |x_0y - x_0y_0|, \\
 &= |y||x - x_0| + |x_0||y - y_0|, \\
 &< (1 + |y_0|) \left( \frac{\varepsilon}{2(|y_0| + 1)} \right) + |x_0| \left( \frac{\varepsilon}{2(|x_0| + 1)} \right), \\
 &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2}, \\
 &= \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Así el producto es una función continua

3. Sea  $x_0 \in \mathbb{K}$ . Para cualquier  $\varepsilon > 0$ , tomando  $\delta = \varepsilon$ , si se tiene que

$$|x - x_0| < \delta,$$

entonces

$$\begin{aligned}
 |-x - (-x_0)| &= |x_0 - x|, \\
 &< \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Por lo cual, la operación tomar inversos es continua.

4. Sea  $x_0 \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$  fijo. Para cualquier  $\varepsilon > 0$ , tomando

$$\delta = \min \left\{ \frac{|x_0|}{2}, \frac{\varepsilon|x_0|^2}{2} \right\},$$

se puede observar que dado

$$\| |x| - |x_0| \|_{\mathbb{R}} \leq |x - x_0|,$$

se tiene

$$-\frac{x_0}{2} < |x| - |x_0|,$$

lo cual implica

$$\frac{x_0}{2} < |x|,$$

por lo cual

$$\frac{1}{|x|} < \frac{2}{x_0},$$

así

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{x_0} - \frac{1}{x} \right| &= \frac{|x - x_0|}{|xx_0|}, \\ &< \left( \frac{2}{x_0} \right) \left( \frac{1}{x_0} \right) \left( \frac{\varepsilon|x_0|^2}{2} \right), \\ &= \varepsilon. \end{aligned}$$

Por lo tanto la operación tomar inversos es continua. □

**Proposición 2.3.** *Sea  $\mathbb{K}$  un campo y sea  $|\cdot|$  un valor absoluto no arquimediano sobre  $\mathbb{K}$ . Si  $x, y \in \mathbb{K}$  y  $|x| \neq |y|$  entonces*

$$|x + y| = \text{máx}\{|x|, |y|\}.$$

*Demostración.* Se puede suponer sin pérdida de generalidad que  $|y| < |x|$ , entonces

$$|x + y| \leq |x|,$$

por otro lado,

$$x = x + y - y,$$

así

$$|x| \leq \text{máx}\{|x + y|, |y|\},$$

dado que  $|y| < |x|$  se tiene

$$\text{máx}\{|x + y|, |y|\} = |x + y|,$$

por lo tanto

$$|x| \leq |x + y|.$$

Por la ley de la tricotomía se tiene que  $|x + y| = |x| = \text{máx}\{|x|, |y|\}$ . □

**Corolario 2.1.** *En un campo  $\mathbb{K}$  con valor absoluto no arquimediano  $|\cdot|$ , todos los "triángulos" son isósceles.*

### 2.1. El valor absoluto $|\cdot|_p$ sobre $\mathbb{Q}$

En esta sección se quiere definir un valor absoluto sobre  $\mathbb{Q}$  distinto al valor absoluto usual, para hacer esto se comienza con la siguiente definición.

**Definición 2.4.** Sea  $p$  un número primo fijo. La **valuación  $p$ -ádica** sobre  $\mathbb{Z}$  es la función

$$v_p : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{N},$$

definida de la siguiente forma: Para cada  $n \in \mathbb{Z}$ ,  $n \neq 0$ , sea  $v_p(n)$  el único entero no negativo que satisface

$$n = p^{v_p(n)} n', \quad \text{donde } p \nmid n'.$$

El dominio de la función  $v_p$  se extiende al campo  $\mathbb{Q}$  y su rango al campo  $\mathbb{Z}$  de la siguiente forma, si  $x \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$  de la forma  $x = a/b$  entonces

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b),$$

con  $v_p(0) = +\infty$ .

para apoyar la comprensión de la anterior definición se expondrán algunos ejemplos.

**Ejemplo 2.3.** Tómesese  $p$  un número primo fijo, se puede notar que para los números  $x = 1, 2, \dots, p-1$  se cumple que  $v_p(x) = 0$ , pero estos no son los únicos números en  $\mathbb{Q}$  que cumplen esto, para mos-

trar esto fíjese en los números

$$x = mp^n + i, \quad \text{donde } i = 2, 3, \dots, p-1 \text{ y } n, m \in \mathbb{N},$$

estos números cumplen también que  $v_p(x) = 0$ .

Teniendo en cuenta el ejemplo anterior se puede notar que

**Ejemplo 2.4.** Los números de la forma

$$x = \frac{p}{mp^n + i}, \quad \text{donde } i = 2, 3, \dots, p-1 \text{ y } n, m \in \mathbb{N},$$

cumplen que  $v_p(x) = 1$ .

Se puede verificar que la valuación  $p$ -ádica satisface los siguientes resultados.

**Lema 2.3.** Si  $m, n \in \mathbb{Z}$  entonces  $v_p(mn) = v_p(m) + v_p(n)$ .

**Proposición 2.4.** La valuación  $p$ -ádica cumple las siguientes propiedades

1. Para cualquier  $x \in \mathbb{Q}$ , el valor de  $v_p(x)$  no depende de su representación como cociente de dos enteros.
2.  $v_p(xy) = v_p(x) + v_p(y)$ , para todo  $x, y \in \mathbb{Q}$ .
3.  $v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$ , para todo  $x, y \in \mathbb{Q}$ .

Además  $x < +\infty$  para todo  $x \in \mathbb{Q}$  y  $x + \infty = +\infty$ .

*Demostración.* La demostración de estos resultados puede ser consultada en Vladimirov V. S (1994). □

Ahora, se define el valor absoluto  $p$ -ádico, y se puede ver que este es un valor absoluto no arquimediano sobre  $\mathbb{Q}$ .

**Definición 2.5.** Para cualquier  $x \in \mathbb{Q}$ , se define el valor absoluto  $p$ -ádico de  $x$  como

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)} & , \text{ si } x \neq 0, \\ 0 & , \text{ si } x = 0. \end{cases}$$

**Proposición 2.5.** La función  $|\cdot|_p$  definida anteriormente es un valor absoluto no arquimediano sobre  $\mathbb{Q}$ .

*Demostración.* Se verá que la función anterior cumple las propiedades de valor absoluto no arquimediano.

1. Por definición  $|x|_p = 0$ , si y solo si  $x = 0$ .
2. Sean  $x, y \in \mathbb{Q}$ , si  $x = 0$  o  $y = 0$  no hay nada que demostrar. Sean  $x, y \neq 0$ , se tiene que

$$\begin{aligned} |xy|_p &= p^{-v_p(xy)}, \\ &= p^{-v_p(x)-v_p(y)}, \\ &= |x|_p |y|_p. \end{aligned}$$

3. Sean  $x, y \in \mathbb{Q}$ , si  $x = 0$  o  $y = 0$  no hay nada que demostrar. Sean  $x, y \neq 0$ , nótese por  $k = \max\{-v_p(x), -v_p(y)\}$ , entonces  $k = -\min\{v_p(x), v_p(y)\}$ . por la **Proposición 1.4** se tiene,

$$v_p(x+y) \geq -k,$$

$$k \geq -v_p(x+y),$$

$$p^k \geq p^{-v_p(x+y)},$$

así,  $|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$ .

□

Ahora se mostrará que si se define un valor absoluto sobre el campo  $\mathbb{Q}$ , este es equivalente a un valor absoluto  $p$ -ádico o al valor absoluto usual; este resultado se conoce como Teorema de Ostrowski y para su demostración se utiliza el siguiente lema.

**Lema 2.4.** *Sea  $|\cdot|$  un valor absoluto sobre  $\mathbb{Q}$ . Si se conoce  $|n|$  para todo  $n \in \mathbb{N}$  entonces se puede determinar  $|x|$ , para todo  $x \in \mathbb{Q}$ .*

**Teorema 2.2** (Teorema de Ostrowski). *Cada valor absoluto no trivial sobre  $\mathbb{Q}$  es equivalente a uno de los valores absolutos  $|\cdot|_p$  donde  $p$  es un número primo o  $p = \infty$ .*

*Demostración.* La demostración de estos resultados puede ser consultada en Katok (2007). □

El objetivo de la próxima sección es introducir el campo  $\mathbb{Q}_p$ , vía el Teorema de completitud, así que en esta sección se mostrará el estudio sobre el campo  $\mathbb{Q}$  con valor absoluto  $|\cdot|_p$  que permite llevar a cabo esta idea. Se empieza por la siguiente definición



**Definición 2.6.** Sea  $\mathbb{K}$  un campo y sea  $|\cdot|$  un valor absoluto sobre  $\mathbb{K}$ .

1. Una sucesión de elementos de  $\mathbb{K}$ ,  $\{x_n\}$ , es llamada una sucesión de Cauchy si para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $m, n > N$  entonces  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ .
2. Un campo  $\mathbb{K}$  es llamado completo respecto a  $|\cdot|$  si cada sucesión de Cauchy de elementos de  $\mathbb{K}$  converge en  $\mathbb{K}$ .

**Lema 2.5.** Una sucesión  $\{x_n\}$  de números racionales es una sucesión de Cauchy con respecto a un valor absoluto no arquimediano  $|\cdot|$  si, y sólo si se tiene

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0.$$

*Demostración.* Sea  $\varepsilon > 0$ , dado que  $\{x_n\}$  es de Cauchy, existe  $N \in \mathbb{N}$ , tal que si  $n, m \geq N$  se tiene que  $|x_n - x_m| < \varepsilon$ , si se toma  $n \geq N$  entonces  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$  implica que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0.$$

En sentido contrario, sea  $\varepsilon > 0$ , dado que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = 0$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq N$  entonces  $|x_{n+1} - x_n| < \varepsilon$ . Sean  $n, m \in \mathbb{N}$  tales que  $n, m \geq N$ , sin pérdida de generalidad se puede

suponer que  $m > n$ , entonces existe  $r > 0$  tal que  $m = n + r$ , por lo cual

$$\begin{aligned} |x_m - x_n| &= |x_{n+r} - x_{n+r-1} + x_{n+r-1} - x_{n+r-2} + x_{n+r-2} - \dots + x_{n+1} - x_n|, \\ &\leq \text{máx}\{|x_{n+r} - x_{n+r-1}|, |x_{n+r-1} - x_{n+r-2}|, \dots, |x_{n+1} - x_n|\}, \\ &< \varepsilon, \end{aligned}$$

por lo cual  $\{x_n\}$  es una sucesión de Cauchy. □

**Teorema 2.3.** *El campo  $\mathbb{Q}$  de números racionales no es completo respecto a cualquiera de los valores absolutos no triviales.*

*Demostración.* Por el Teorema de Ostrowski es suficiente ver esto en los valores absolutos  $|\cdot|_\infty$  y  $|\cdot|_p$ . Es conocido que  $\mathbb{Q}$  con  $|\cdot|_\infty$  no es completo, así que se estudiará el caso cuando  $p$  es un número primo. Sea  $\mathbb{Q}$  con  $|\cdot|_p$  con  $p$  fijo. Considere la sucesión

$$x_n = 1 + p + p^2 + \dots + p^n,$$

se puede ver por Lema 1.1 que  $\{x_n\}$  es de Cauchy, ya que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n| = \lim_{n \rightarrow \infty} |p^{n+1}| = \lim_{n \rightarrow \infty} p^{-(n+1)} = 0.$$

Ahora bien,  $\{x_n\}$  converge al número  $1 + p + p^2 + \dots + p^n + \dots$ . Si  $1 + p + p^2 + \dots + p^n + \dots$  es

un número racional  $s$ , entonces

$$s = 1 + p + p^2 + \dots + p^n + \dots = 1 + p(1 + p + p^2 \dots + p^n + \dots) = 1 + ps$$

por lo cual se puede verificar que  $s$  es igual a un número mayor que él, y esto es una contradicción, por lo cual  $1 + p + p^2 + \dots + p^n + \dots$  no es un número racional. Por tanto,  $\mathbb{Q}$  con el valor absoluto  $|\cdot|_p$  no es completo.  $\square$

## 2.2. El campo $\mathbb{Q}_p$

La completación de  $\mathbb{Q}$  bajo  $|\cdot|_p$  se le conoce como el campo  $\mathbb{Q}_p$ , en esta sección se verá la construcción de este campo.

Se denota por  $\mathcal{C}$  o  $\mathcal{C}_p(\mathbb{Q})$ , el conjunto de todas las sucesiones de Cauchy de elementos de  $\mathbb{Q}$  con respecto a  $|\cdot|_p$ .

**Proposición 2.6.** *Definiendo*

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n),$$

$$(x_n) \cdot (y_n) = (x_n y_n),$$

$$0 = (0)_n,$$

$$1 = (1)_n,$$

*Se tiene que  $\mathcal{C}$  es un anillo conmutativo con unidad.*

*Demostración.* Para ver que la suma es cerrada en  $\mathcal{C}$ , si  $(x_n), (y_n) \in \mathcal{C}$  y  $\varepsilon > 0$ , existen  $N_1$  y

$N_2 \in \mathbb{N}$ , tales que si  $m, n \geq N_1$  entonces  $|x_n - x_m|_p < \varepsilon$  y si  $m, n \geq N_2$  por lo tanto  $|y_n - y_m|_p < \varepsilon$ .

Sea  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . Si  $n, m \geq N$  por lo tanto

$$\begin{aligned} |x_n + y_n - (x_m + y_m)|_p &= |(x_n - x_m) + (y_n - y_m)|_p, \\ &\leq \{|x_n - x_m|_p, |y_n - y_m|_p\}, \\ &< \varepsilon. \end{aligned}$$

Así,  $(x_n + y_n) \in \mathcal{C}$ .

Para probar que el producto es cerrado en  $\mathcal{C}$ , se verá que toda sucesión de Cauchy es acotada. Sea

$(x_n)$  una sucesión de Cauchy, para  $\varepsilon = 1$  existe  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n, m \geq N$  entonces  $|x_n - x_m|_p < 1$ .

En particular  $|x_n - x_N|_p < 1$  si  $n > N$ , entonces

$$||x_n|_p - |x_N|_p|_\infty \leq |x_n - x_N|_p < 1.$$

Luego,  $-1 < |x_n|_p - |x_N|_p < 1$  si  $n > N$ . Esto implica que  $|x_n|_p < |x_N|_p + 1$  si  $n > N$ .

Sea  $k = \max\{|x_1|_p, |x_2|_p, \dots, |x_N|_p, |x_N|_p + 1\}$ , por lo cual se tiene que  $|x_n|_p \leq k$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ .

Así, la sucesión  $(x_n)$  está acotada.

Sean  $(x_n), (y_n) \in \mathcal{C}$  y  $\varepsilon > 0$ , por lo anterior existen  $k_1, k_2 \in \mathbb{R}$  mayores que cero, tales que  $|x_n|_p < k_1$

y  $|y_n|_p < k_2$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ . Sea  $k = \max\{k_1, k_2\}$ . Para  $\varepsilon/k$  existen  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  tales que si  $n, m \geq N_1$

entonces  $|x_n - x_m|_p < \varepsilon/k$  y si  $m, n \geq N_2$  entonces  $|y_n - y_m|_p < \varepsilon/k$ . Sea  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . Si

$n, m \geq N$  entonces

$$\begin{aligned}
 |x_n y_n - x_m y_m|_p &= |x_n y_n - x_m y_n + x_m y_n - x_m y_m|_p, \\
 &= |y_n(x_n - x_m) + x_m(y_n - y_m)|_p, \\
 &\leq \max\{|y_n|_p |x_n - x_m|_p, |x_m|_p |y_n - y_m|_p\}, \\
 &< \max\left\{k \frac{\varepsilon}{k}, k \frac{\varepsilon}{k}\right\}, \\
 &= \varepsilon.
 \end{aligned}$$

Así,  $(x_n y_n) \in \mathcal{C}$ . Las propiedades de anillo se heredan por ser  $\mathbb{Q}$  un campo y de la definición de las operaciones, comprobar que el elemento neutro es  $0 = (0)$  y el elemento unidad es  $1 = (1)$  se sigue de la definición de las operaciones.  $\square$

**Lema 2.6.** *La función  $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathcal{C}$  definida por  $f(x) = (x)$  es una inclusión de  $\mathbb{Q}$  en  $\mathcal{C}$ .*

*Demostración.*  $f$  está bien definida y es inyectiva dado que si  $f(x) = f(y)$  entonces  $(x) = (y)$  por lo cual  $x = y$ .

Además, es un morfismo de anillos, pues  $f(x + y) = (x + y) = (x) + (y)$ ,  $f(xy) = (xy) = (x)(y) = f(x)(y)$  y por último  $f(1) = (1)$ .  $\square$

**Definición 2.7.** Se define  $\mathcal{N} \subset \mathcal{C}$  como el conjunto

$$\mathcal{N} = \{(x_n) : x_n \rightarrow 0\} = \{(x_n) : \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p = 0\},$$

es decir, el conjunto de sucesiones que convergen a cero con respecto al valor absoluto  $|\cdot|_p$ .

**Proposición 2.7.**  $\mathcal{N}$  es un ideal en  $\mathcal{C}$ .

*Demostración.*

1.  $(0) \in \mathcal{N}$ , ya que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |0|_p = 0$ .
2. Si  $(x_n), (y_n) \in \mathcal{N}$ , entonces existen  $N_1, N_2 \in \mathbb{N}$  tales que si  $n > N_1$  y  $m > N_2$  entonces

$$|x_n|_p < \varepsilon \quad \text{y} \quad |y_m|_p < \varepsilon.$$

Sea  $N = \max\{N_1, N_2\}$ . Para  $n \geq N$  se tiene que  $|x_n + y_n| \leq \max\{|x_n|_p, |y_n|_p\} < \varepsilon$  por lo tanto

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (x_n + y_n) = 0,$$

así,  $x_n + y_n \in \mathcal{N}$ .

3. Sea  $(x_n) \in \mathcal{N}$  e  $(y_n) \in \mathcal{C}$ , tales que  $|x_n y_n|_p = |x_n|_p |y_n|_p$ , dado que  $(y_n) \in \mathcal{C}$  entonces existe  $k \in \mathbb{R}$  tal que  $|y_n|_p \leq k$  para todo  $n \in \mathbb{N}$ , así

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n y_n|_p \leq k \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p = 0,$$

y

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n y_n|_p = 0,$$

por lo tanto, se concluye que  $(x_n)(y_n) \in \mathcal{N}$ .

□

se quiere ver que  $\mathcal{N}$  es un ideal maximal, para esto, es necesario el siguientes resultado.

**Lema 2.7.** Si  $(x_n)$  es una sucesión de Cauchy tal que  $(x_n) \not\rightarrow 0$  entonces existen  $c > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$  tales que  $|x_n|_p > c$ , para cada  $n \geq N$ .

*Demostración.* La demostración de este resultado puede ser consultada en Katok (2007). □

**Proposición 2.8.**  $\mathcal{N}$  es un ideal maximal de  $\mathcal{C}$ .

*Demostración.* Sea  $\mathcal{I}$  un ideal de  $\mathcal{C}$  tal que  $\mathcal{N} \subset \mathcal{I}$  y  $\mathcal{I} \neq \mathcal{N}$ , entonces  $\mathcal{I} = \mathcal{C}$ .

En efecto, dado que,  $\mathcal{I} \neq \mathcal{N}$  existe  $(x_n) \not\rightarrow 0$ , dado que  $(x_n)$  es una sucesión de Cauchy, por el Lema 1.7 existen  $c > 0$  y  $N \in \mathbb{N}$  tal que si  $n \geq n$  entonces  $|x_n|_p > c$ . se define la sucesión  $(y_n)$  como

$$y_n = \begin{cases} 0 & , \text{si } n < N, \\ \frac{1}{x_n} & , \text{si } n \geq N. \end{cases}$$

Se tiene

$$|y_{n+1} - y_n|_p = \left| \frac{1}{x_{n+1} - \frac{1}{x_n}} \right|_p = \frac{|x_n - x_{n+1}|_p}{|x_{n+1}|_p |x_n|_p} < \frac{|x_n - x_{n+1}|_p}{c^2} \quad \text{para } n \geq N.$$

Ahora bien, la sucesión  $(x_n)$  es de Cauchy y por Lema 1.5, se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0$ , y dado que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_{n+1} - y_n|_p \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x_n - x_{n+1}|_p}{c^2},$$

se concluye

$$\lim_{n \rightarrow \infty} |y_{n+1} - y_n|_p = 0,$$

y en consecuencia la sucesión  $(y_n)$  es de Cauchy.

Dado que  $\mathcal{I}$  es un ideal de  $\mathcal{C}$  se tiene que  $(x_n)(y_n) \in \mathcal{I}$ , además

$$(x_n y_n) = \begin{cases} 0 & , \text{si } n < N, \\ 1 & , \text{si } n \geq N. \end{cases}$$

Entonces  $1 - (x_n y_n) \in \mathcal{N}$ , sea  $(z_n) = 1 - (x_n y_n)$ . Luego,  $1 = (z_n) + (x_n y_n) \in \mathcal{I}$  ya que  $(z_n), (x_n y_n) \in \mathcal{I}$ , por lo cual,  $\mathcal{I} = \mathcal{C}$  y por tanto se tiene que  $\mathcal{N}$  es maximal en  $\mathcal{C}$ .  $\square$

Con las anteriores afirmaciones se puede definir el campo  $\mathbb{Q}_p$  de la siguiente forma.

**Definición 2.8.** El campo de los números p-ádicos, se define como

$$\mathbb{Q}_p := \frac{\mathcal{C}}{\mathcal{N}}.$$

**Definición 2.9.** Si  $\lambda \in \mathbb{Q}_p$  y  $(x_n)$  es cualquier sucesión Cauchy representante de  $\lambda$ , se define

$$|\lambda|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p.$$

**Lema 2.8.** Sea  $\lambda \in \mathbb{Q}_p$  y  $(x_n)$  es cualquier sucesión Cauchy representante de  $\lambda$ , la sucesión de números reales es eventualmente estacionaria, es decir, existe un  $N \in \mathbb{N}$  tal que  $|x_n|_p = |x_m|_p$  si



$m, n \geq N$ .

*Demostración.* La demostración de este resultado puede ser consultada en Katok (2007).  $\square$

**Proposición 2.9.** *La función  $|\cdot|_p : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{R}^+$ , definida anteriormente es un valor absoluto no arquimediano.*

*Demostración.* Se tiene que,

1. Si  $|\lambda|_p = 0$  entonces existe  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p = 0$  para toda sucesión representante de la clase  $\lambda$ .

Entonces  $(x_n) \in \mathcal{N}$ , es decir,  $\lambda = 0$ .

Por otro lado, si  $\lambda = 0$  entonces para algún representante  $(x_n)$  de  $\lambda$  se tiene que  $\lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p =$

0 así  $|\lambda|_p = 0$ .

2. Sean  $\lambda, \beta \in \mathbb{Q}_p$ , se tiene

$$\begin{aligned} |\lambda|_p |\beta|_p &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n|_p, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p |y_n|_p, \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n y_n|_p, \\ &= |\lambda \beta|_p. \end{aligned}$$

3. Por el **Lema 1.8** existen naturales  $N_1, N_2$  y  $N_3$  tales que si  $n \geq N_1$  entonces  $|x_n|_p = |x_{N_1}|_p$ , si

$n \geq N_2$  entonces  $|y_n|_p = |y_{N_2}|_p$  y si  $n \geq N_3$  entonces  $|x_n + y_n|_p = |x_{N_3} + y_{N_3}|_p$ .

Sea  $N = \max\{N_1, N_2, N_3\}$ , entonces  $|\lambda + \beta|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n + y_n|_p = |x_N + y_N|_p$ ,  $|\lambda|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |x_n|_p =$

$|x_N|_p$  y  $|\beta|_p = \lim_{n \rightarrow \infty} |y_n|_p = |y_N|_p$ . Usando la desigualdad  $|x_N + y_N|_p \leq \max\{|x_N|_p, |y_N|_p\}$  se obtiene  $|\lambda + \beta|_p \leq \max\{|\lambda|_p, |\beta|_p\}$ .

De 1, 2 y 3 se concluye que  $|\cdot|_p$  es un valor absoluto no arquimediano.  $\square$

**Proposición 2.10.**  $\mathbb{Q}_p$  es completo con respecto a  $|\cdot|_p$ .

*Demostración.* La demostración de este resultado se puede consultar en Katok (2007).  $\square$

### 2.3. Un estudio sobre el campo $\mathbb{Q}_p$

En la anterior sección se definió el campo  $\mathbb{Q}_p$  y el valor absoluto  $|\cdot|_p$ . Es valido recordar estas dos observaciones.

1. El conjunto de valores de  $\mathbb{Q}$  y  $\mathbb{Q}_p$  bajo  $|\cdot|_p$  es el mismo, específicamente,

$$\begin{aligned} \{x \in \mathbb{R}^+ : x = |\lambda|_p, \lambda \in \mathbb{Q}\} &= \{x \in \mathbb{R}^+ : x = |\lambda|_p, \lambda \in \mathbb{Q}_p\}, \\ &= \{p^n : n \in \mathbb{Z}\} \cup \{0\}. \end{aligned}$$

2. Como consecuencia del inciso anterior se tiene que para cada  $x \in \mathbb{Q}_p, x \neq 0$ , existe un entero  $v_p(x)$  tal que  $|x|_p = p^{-v_p(x)}$ . En otras palabras, la valuación p-ádica se extiende a  $\mathbb{Q}_p$ .

Ahora bien, para empezar el desarrollo de esta sección se darán las definiciones de unos subconjuntos de  $\mathbb{Q}_p$ , que serán útiles para el estudio que se quiere realizar.

**Definición 2.10.** El anillo de enteros p-ádicos es el conjunto

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\},$$

el anillo  $\mathbb{Z}_p$  de enteros  $p$ -ádicos es un anillo local cuyo ideal maximal es el ideal principal

$$p\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq p^{-1}\},$$

además, cada elemento de  $\mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$  tiene su inverso en  $\mathbb{Z}_p$ . A este último subconjunto se le nota por

$$\mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p^\times = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p = 1\}.$$

A continuación se mostrará el comportamiento topológico que tiene el campo  $\mathbb{Q}_p$  respecto a la métrica  $d$  definida anteriormente.

**Definición 2.11.** Se definen la bola con centro en  $a$  y radio  $p^r$ , y la esfera con centro en  $a$  y radio  $p^r$  como,

$$B_{p^r}(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < p^r\},$$

$$S_{p^r}(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p = p^r\}.$$

se puede notar que,

$$B_{p^r}(a) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p < p^r\} = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - a|_p \leq p^{r-1}\} = \bar{B}_{p^{r-1}}(a).$$

A partir de esta definición se pueden demostrar los siguientes resultados

**Proposición 2.11.** *Se cumple lo siguiente,*

1.  $B_{p^r}(a)$  es un conjunto abierto y cerrado.
2. Si  $b \in B_{p^r}(a)$  entonces  $B_{p^r}(a) = B_{p^r}(b)$ .
3. Si  $a, b \in \mathbb{Q}_p$  entonces  $B_{p^r}(a) \cap B_{p^s}(b) \neq \emptyset$  si, y sólo si  $B_{p^r}(a) \subset B_{p^s}(b)$  ó  $B_{p^s}(b) \subset B_{p^r}(a)$ .

**Proposición 2.12.**  $\mathbb{Q}_p$  es un espacio de Hausdorff totalmente desconexo.

*Demostración.* La demostración de estos resultado puede ser consultada en Katok (2007). □

Para continuar con el estudio topológico de  $\mathbb{Q}_p$  se hace necesaria la siguiente proposición y su corolario.

**Proposición 2.13.** La inclusión  $\mathbb{Z} \hookrightarrow \mathbb{Z}_p$  tiene una imagen densa. En particular, dado  $x \in \mathbb{Z}_p$  y  $n \geq 1$  existe  $\alpha \in \mathbb{Z}$  con  $0 \leq \alpha \leq p^n - 1$ , tal que  $|x - \alpha|_p \leq p^{-n}$ . El entero  $\alpha$  con estas propiedades es único.

Para cualquier  $x \in \mathbb{Z}_p$  existe una sucesión de Cauchy  $\alpha_n$  que converge a  $x$  con las siguientes características:

1.  $\alpha_n \in \mathbb{Z}$  para todo  $n$  y  $0 \leq \alpha_n \leq p^n - 1$ .
2. Para cada  $n$  se tiene que  $\alpha_n \equiv \alpha_{n-1} \pmod{p^{n-1}}$ .

La sucesión  $(\alpha_n)$  con estas propiedades es única.

**Corolario 2.2.** Sea  $n \in \mathbb{N}$  se tiene

$$\mathbb{Z}_p / p^n \mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z} / p^n \mathbb{Z}$$

*Demostración.* La demostración de estos resultado puede ser consultada en Katok (2007).  $\square$

Ahora bien, conociendo los anteriores resultados es posible demostrar las siguientes propiedades.

**Proposición 2.14.** *Las esferas son conjuntos abiertos y cerrados.*

*Demostración.* El **Corolario 1.2** afirma que  $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ , esto implica que los números  $0, 1, \dots, p^n - 1$  son representantes de las clases de  $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p$ , es decir,

$$\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{i=0}^{p^n-1} i + p^n\mathbb{Z}_p,$$

y dado que  $\mathbb{Z}_p^\times = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$  se tiene

$$\mathbb{Z}_p^\times = \bigsqcup_{i=1}^{p-1} i + p\mathbb{Z}_p,$$

por lo tanto

$$S_{p^n}(a) = a + p^{-n}\mathbb{Z}_p^\times = \bigsqcup_{i=0}^{p-1} a + ip^n + p^{-(n-1)}\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{i=0}^{p-1} B_{p^{(n-1)}}(a + ip^{-n}).$$

Así,  $S_{p^n}(a)$  es un conjunto abierto y cerrado, para cada  $a \in \mathbb{Q}_p$  y  $n \in \mathbb{Z}$ , pues las bolas son conjuntos abiertos y cerrados.  $\square$

**Corolario 2.3.**  $\mathbb{Z}_p$  es compacto.

*Demostración.* Puesto que  $\mathbb{Z}_p = B_{p^0}(0)$  es un conjunto cerrado y además  $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Q}_p$  que es un conjunto completo entonces  $\mathbb{Z}_p$  es completo. Por otro lado, por el **Corolario 1.2** se tiene que si

$n \in \mathbb{N}$  entonces  $\mathbb{Z}_p/p^n\mathbb{Z}_p \cong \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$ , por lo cual

$$\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{i=0}^{p^n-1} i + p^n\mathbb{Z}_p,$$

con esto se tiene

$$\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{i=0}^{p^n-1} B_{p^{-n}}(i),$$

Así, si  $\varepsilon > 0$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $p^{-n} < \varepsilon$  y se obtiene,

$$\mathbb{Z}_p = \bigsqcup_{i=0}^{p^n-1} B_{p^{-n}}(i) \subset \bigcup_{i=0}^{p^n-1} B_{p^{-n}}(i).$$

Por lo tanto  $\mathbb{Z}_p$  es totalmente acotado.

Como  $\mathbb{Z}_p$  es completo y totalmente acotado, por el teorema de Heine-Borel se concluye que  $\mathbb{Z}_p$  es compacto. □

**Proposición 2.15.** *Las esferas y las bolas son conjuntos compactos.*

*Demostración.* Sea  $h : \{p^{-n}\} \times \mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$  definida por  $h(x, y) = xy$ .

Se puede notar que  $h$  es la operación producto restringida al conjunto  $\{p^{-n}\} \times \mathbb{Z}_p$  y como la operación producto es continua se obtiene que  $h$  es continua.

Dado que  $h(\{p^{-n}\} \times \mathbb{Z}_p) = B_{p^n}(0)$ , entonces  $B_{p^n}(0)$  es un compacto pues es la imagen continua de un compacto. Sea  $g : \{a\} \times p^{-n}\mathbb{Z}_p \rightarrow \mathbb{Q}_p$  definida por  $g(x, y) = x + y$ , donde  $g$  es la operación suma restringida al conjunto  $\{a\} \times p^{-n}\mathbb{Z}_p$  y como la operación suma es continua se obtiene que  $g$  es continua.

Ahora, puesto que  $g(\{a\} \times p^{-n}\mathbb{Z}_p) = B_{p^n}(a)$ , entonces  $B_{p^n}(a)$  es un compacto ya que es la imagen continua de un compacto. Así se concluye que las bolas son conjuntos compactos. Un pensamiento análogo prueba que las esferas son conjuntos compactos.  $\square$

En consecuencia se puede afirmar que:

1.  $\mathbb{Q}_p$  es localmente compacto.
2.  $\mathbb{Z}_p^\times$  es compacto.
3.  $\mathbb{Q}_p^\times$  es localmente compacto.

Finalmente, se mostrará la forma de representar un número p-ádico, esta forma permite operar estos elementos.

**Proposición 2.16.** *Cada  $x \in \mathbb{Z}_p$  puede escribirse de la forma*

$$x = b_0 + b_1p + b_2p^2 + \dots + b_np^n + \dots$$

con  $b_i \in \mathbb{N}$ , tales que  $0 \leq b_i < p$ . Además, esta representación es única.

El siguiente resultado da la forma para cualquier  $x \in \mathbb{Q}_p$ .

**Corolario 2.4.** *Cada  $x \in \mathbb{Q}_p$  puede ser escrito en la forma*

$$x = b_{-n_0}p^{-n_0} + b_{-n_0+1}p^{-n_0+1} + \dots + b_0 + b_1p + \dots + b_np^n + \dots = \sum_{n \geq -n_0} b_np^n,$$

con  $0 \leq b_n \leq p-1$  y  $b_{-n_0} \neq 0$ . Esta representación es única y además  $v_p(x) = -n_0$ .

*Demostración.* La demostración de estos resultado puede ser consultada en Katok (2007).  $\square$

Para cerrar esta sección se presenta un resultado importante sobre extensiones algebraicas de  $\mathbb{Q}_p$  y una función que conecta con los números complejos.

**Lema 2.9.** (*Lema de Hensel*) Sea  $f(x) = c_0 + c_1x + \dots + c_nx^n$  con  $c_i \in \mathbb{Z}_p, i = 0, \dots, n$  y sea  $f'(x) = c_1 + 2c_2x + \dots + nc_nx^{n-1}$  su derivada formal. Si  $a_0 \in \mathbb{Z}_p$  tal que  $f(a_0) \equiv 0 \pmod{p}$  y  $f'(a_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$ , entonces existe un único entero  $p$ -ádico  $x_0$  sujeto a  $x_0 \equiv a_0 \pmod{p}$  que satisface  $f(x_0) = 0$ .

*Demostración.* La demostración de este resultado puede ser consultada en Katok (2007).  $\square$

El Lema de Hensel permite ver, por ejemplo, que el polinomio  $x^2 + 1$  es reducible en  $\mathbb{Q}_5$ , pero no lo es en  $\mathbb{Q}_7$ , en efecto, note que en  $\mathbb{Q}_5$  se tiene que

$$2^2 + 1 = 5 \equiv 0 \pmod{5},$$

$$3^2 + 1 = 10 \equiv 0 \pmod{5},$$

además se tiene que

$$2(2) = 4 \not\equiv 0 \pmod{5},$$

$$2(3) = 6 \not\equiv 0 \pmod{5}.$$

Por lo tanto, existen  $x_2, x_3 \in \mathbb{Z}_5$  tal que  $f(x_2) = f(x_3) = 0$ , pero notese que en  $\mathbb{Q}_7$  se tiene que para  $x = 1, 2, 3, \dots, 6; x^2 + 1 \not\equiv 0 \pmod{7}$ . Esto implica que el polinomio  $x^2 + 1$  es irreducible en  $\mathbb{Q}_7$ .



Por lo tanto, existen polinomios en  $\mathbb{Q}_p$  que no son reducibles, lo cual permite pensar en extensiones algebraicas.

Sea  $\mathbb{K}$  un campo tal que  $\mathbb{K} = \mathbb{Q}_p(u)$  donde  $u$  es raíz del polinomio

$$x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_1x + a_0,$$

entonces se define

$$N_{K/\mathbb{Q}_p}(u) = \prod_{i=1}^n u_i,$$

donde  $u_i$  son los conjugados de  $u = u_1$  sobre  $\mathbb{Q}_p$ .

La norma algebraica  $N_{K/\mathbb{Q}_p}$  cumple las siguientes propiedades

- $N_{K/\mathbb{Q}_p}(uv) = N_{K/\mathbb{Q}_p}(v)N_{K/\mathbb{Q}_p}(u)$ .
- Para un cuerpo intermedio  $E$ , se tiene que  $N_{E/\mathbb{Q}_p}(N_{K/E}(u)) = N_{K/\mathbb{Q}_p}(u)$ .
- $N_{K/\mathbb{Q}_p}(a) = a^n$ , para  $a \in \mathbb{Q}_p$ .

esto permite ver el siguiente resultado.

**Teorema 2.4.** *Sea  $K$  una extensión finita de grado  $n$  sobre  $\mathbb{Q}_p$ . Entonces*

$$|x|_K = \left| N_{K/\mathbb{Q}_p}(x) \right|_p^{1/n}.$$

*Demostración.* La demostración de este resultado se puede consultar en Koblitz (1977). □

Por último se dará la definición del caracter multiplicativo definido sobre  $\mathbb{Q}_p$ .

**Definición 2.12.** Sea  $e : \mathbb{Q}_p \rightarrow \mathbb{C}$  definida de la siguiente forma

$$e(x) = e^{2\pi i [\sum_{j=-N}^{-1} a_j p^j]},$$

donde  $x$  está representado como en el Corolario 1.4. Esta función es conocida como caracter multiplicativo sobre  $\mathbb{Q}_p$ .

#### 2.4. Integración en $\mathbb{Q}_p$ .

**Teorema 2.5.** *Sea  $(G, +)$  un grupo topológico localmente compacto, existe una medida regular de Borel, única salvo multiplicación por constantes positivas, tal que*

1.  $\int_U dx > 0$ , para cada conjunto de Borel  $U$ , distinto del vacío.
2.  $\int_{x+U} dx = \int_U dx$ , para cada conjunto de Borel.

La medida  $dx$  descrita en el teorema anterior es una Medida de Haar sobre  $G$ .

En las secciones anteriores se vio que  $(\mathbb{Q}_p, +)$  es un grupo topológico abeliano localmente compacto, así por el Teorema 1.5 existe una medida de Haar  $dx$  sobre  $(\mathbb{Q}_p, +)$ . Por otro lado,  $\mathbb{Z}_p$  es compacto y por ser  $dx$  una medida regular se obtiene

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx < \infty.$$

Así, se puede normalizar esta medida por la condición

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx = 1,$$

y así  $dx$  es única.

Los abiertos compactos de  $\mathbb{Q}_p$ ,  $B_{p^{-m}}(a)$ , generan la  $\sigma$ -álgebra de Borel. La medida  $dx$  asigna a cada subconjunto abierto compacto  $U$  un número real no negativo  $\int_U dx$ , que además satisface

$$\int_{\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n} dx = \sum_{n=1}^{\infty} \int_{U_n} dx,$$

para todos los subconjuntos abiertos compactos  $U_n$  en  $\mathbb{Q}_p$ , que son disjuntos dos a dos, tales que  $\bigcup_{n=1}^{\infty} U_n$  es igualmente compacto. También cumple,

$$\int_{x_0+U} dx = \int_U dx.$$

**Proposición 2.17.** *Sea  $d(ax)$  definida por  $d(ax)(U) = dx(aU)$ , entonces  $d(ax)$  es una medida de Haar y*

$$d(ax) = |a|_p dx \quad a \in \mathbb{Q}_p^\times.$$

*Es decir,*

$$\int_{aU} dx = |a|_p \int_U dx.$$

*Demostración.* La demostración de este resultado puede ser consultada en Vladimirov V. S (1994).

□

En los siguientes ejemplos, se calcula las integrales sobre los conjuntos  $B_r(a)$  y  $S_r(a)$  con  $a \in \mathbb{Q}_p$ .

**Ejemplo 2.5.** Vladimirov V. S (1994)

$$\int_{B_{p^r}(a)} dx = p^r \quad \text{y} \quad \int_{S_{p^r}(a)} dx = p^r(1 - p^{-1}).$$

En efecto, dado que

$$B_{p^r}(a) = a + p^{-r}\mathbb{Z}_p,$$

se tiene

$$\begin{aligned} \int_{B_{p^r}(a)} dx &= \int_{a+p^{-r}\mathbb{Z}_p} dx, \\ &= \int_{p^{-r}\mathbb{Z}_p} dx. \end{aligned}$$

Entonces para cada  $x \in B_{p^r}(a)$  se puede hacer la sustitución  $x = p^{-r}y$ , donde  $y \in \mathbb{Z}_p$ , con lo que  $dx = |p^{-r}|_p dy$ , así por el resultado anterior.

$$\begin{aligned} \int_{B_{p^r}(a)} dx &= \int_{p^{-r}\mathbb{Z}_p} dx, \\ &= |p^{-r}|_p \int_{\mathbb{Z}_p} dy, \\ &= p^r. \end{aligned}$$

Ahora bien, para

$$\int_{S_{p^r}(a)} dx.$$

Se tiene en cuenta que

$$B_{p^r}(a) = S_{p^r}(a) \sqcup B_{p^{r-1}}(a),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \int_{S_{p^r}(a)} dx &= \int_{B_{p^r}(a)} dx - \int_{B_{p^{r-1}}(a)} dx, \\ &= p^r - p^{r-1}, \\ &= p^r(1 - p^{-1}). \end{aligned}$$

Un último resultado que será de utilidad para el desarrollo de este trabajo, permite calcular la integral sobre la función caracter.

**Ejemplo 2.6.** Vladimirov V. S (1994)

$$\int_{B_{p^r}(0)} e(\xi x) dx = \begin{cases} p^r & \text{si } |\xi|_p \leq p^{-r}, \\ 0 & \text{si } |\xi|_p \geq p^{-r+1}. \end{cases}$$

En efecto, si  $|\xi|_p \leq p^{-r}$  se tiene que  $|\xi x|_p \leq 1$  por lo tanto  $e(\xi x) = 1$ , así

$$\begin{aligned} \int_{B_{p^r}(0)} e(\xi x) dx &= \int_{B_{p^r}(0)} dx, \\ &= p^r, \end{aligned}$$

ahora bien, si  $|\xi|_p \geq p^{-r+1}$ , entonces para  $x' \in S_{p^r}(0)$ , que se sabe que cumple que  $B_{p^r}(0) = B_{p^r}(x')$

se tiene que  $|\xi x'|_p \geq p$  por lo tanto  $e(\xi x') \neq 1$ , así se hace, la sustitución  $x = y - x'$ , se obtiene que  $dx = dy$ , y así

$$\begin{aligned} \int_{B_{p^r}(0)} e(\xi x) dx &= \int_{B_{p^r}(x')} e(\xi(y - x')) dy, \\ \int_{B_{p^r}(0)} e(\xi x) dx &= \int_{B_{p^r}(x')} e(\xi y) e(-\xi x') dy, \\ \int_{B_{p^r}(0)} e(\xi x) dx &= e(-\xi x') \int_{B_{p^r}(0)} e(\xi y) dy, \\ (1 - e(-\xi x')) \int_{B_{p^r}(0)} e(\xi x) dx &= 0, \end{aligned}$$

con lo que se concluye que

$$\int_{B_{p^r}(0)} e(\xi x) dx = 0,$$

con esto se puede ver que

$$\int_{S_{p^r}(0)} e(\xi x) = \begin{cases} p^r(1 - p^{-1}) & \text{si } |\xi|_p \leq p^{-r}, \\ -p^{r-1} & \text{si } |\xi|_p = p^{-r+1}, \\ 0 & \text{si } |\xi|_p \geq p^{-r+2}. \end{cases}$$

Para extender estas idea a dimensión  $n$ , se tiene que

$$\mathbb{Q}_p^n = \mathbb{Q}_p \times \mathbb{Q}_p \times \dots \times \mathbb{Q}_p,$$

y sobre el cual define la norma

$$\|x\|_p = \max_{1 \leq j \leq n} |x_j|_p.$$

Se puede verificar de manera sencilla que la anterior norma es no arquimediana.

Este espacio hereda de  $\mathbb{Q}_p$  varias características, entre ellas tener una medida de Haar que se notará por  $d^n x$  y ésta se puede normalizar de la siguiente manera.

$$\int_{\mathbb{Z}_p^n} d^n x = 1.$$

Un último resultado importante en este trabajo es el siguiente.

**Teorema 2.6.** *Teorema de Fubini.* Sea  $f(x, y)$  con  $x \in \mathbb{Q}_p^n$  e  $y \in \mathbb{Q}_p^m$  tal que la integral iterada

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} \left( \int_{\mathbb{Q}_p^m} f(x, y) dy \right) dx,$$

existe, entonces la función  $f$  es integrable sobre  $\mathbb{Q}_p^{n+m}$  y todas las integrales iteradas de  $f$  existen,

y

$$\int_{\mathbb{Q}_p^n} \left( \int_{\mathbb{Q}_p^m} f(x, y) dy \right) dx = \int_{\mathbb{Q}_p^{n+m}} f(x, y) dy dx = \int_{\mathbb{Q}_p^m} \left( \int_{\mathbb{Q}_p^n} f(x, y) dx \right) dy,$$

de forma contraria, si una función  $f$  es (absolutamente) integrable sobre  $\mathbb{Q}_p^{n+m}$  entonces todas las integrales iteradas existen y son iguales entre ellas.

### 3. El poliedro de Newton y polinomios cuasi-homogéneos.

El siguiente capítulo está dividido en dos secciones, en la primera se dará a conocer la definición del poliedro de Newton asociado a un polinomio, y los diferentes objetos sobre él. En la segunda sección se presentará la definición de polinomios  $(\kappa_1, \kappa_2)$ -homogéneos, y se verá un resultado sobre éstos.

#### 3.1. El poliedro de Newton.

**Definición 3.13.** Dado un polinomio  $f(x) = \sum_l a_l x^l \in \mathbb{K}[x] \setminus \mathbb{K}$ , para  $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ , tal que  $f(0) = 0$ , se define el soporte de  $f$  como

$$\text{supp}(f) = \{l \in \mathbb{N}^n : a_l \neq 0\}.$$

El poliedro de Newton de  $f$  notado por  $\Gamma(f)$  se define como

$$\Gamma(f) := \text{Envolvente convexa} \left\{ \bigcup_{l \in \text{supp}(f)} (l + \mathbb{R}_{\geq 0}^n) \right\}.$$

**Ejemplo 3.7.** Para el polinomio  $f(x, y) = x^3y + y^3 + x^6 + x^2y^2$ , se tiene que el poliedro de Newton es



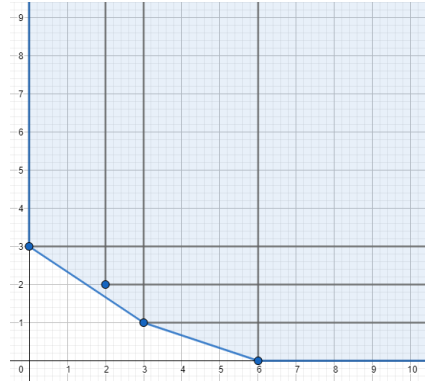


Figura 1. Polígono de Newton.

**Definición 3.14.** Se llama cara de  $\Gamma(f)$  a todo subconjunto convexo  $\tau$  que sea la intersección de  $\Gamma(f)$  y un hiperplano  $H$  de  $\mathbb{R}^n$  tal que alguno de los semiespacios definidos por  $H$  contiene a  $\Gamma(f)$ .

**Definición 3.15.** Para cada cara  $\tau$  en  $\Gamma(f)$ , se define la función cara

$$f_\tau = \sum_{l \in \mathbb{N}^2 \cap \tau} a_l x^l.$$

**Definición 3.16.** Sea  $\Delta(\phi)$  la colección de caras compactas de  $\Gamma(\phi)$ . El diagrama de Newton  $\mathcal{N}_d(\phi)$  es la unión de las caras en  $\Delta(\phi)$ .

**Ejemplo 3.8.** En la siguiente imagen se pueden ver las distintas caras del polígono de Newton asociado al polinomio  $f(x, y) = x^3y + y^3 + x^6 + x^2y^2$

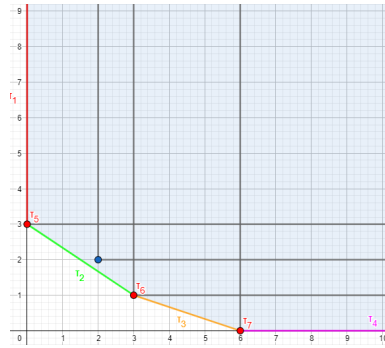


Figura 2. Caras del poligono de Newton.

dado que  $f$  es un polinomio en dos variables se tendrán caras de dimensión 0 y 1 (sin contar el poliedro de Newton que tiene dimensión 2). Los generadores de las caras de dimensión 1 son

$$\tau_1 = \{t(0, 1) | t \geq 3\},$$

$$\tau_2 = \{(1-t)(0, 3) + t(3, 1) | 0 \leq t \leq 1\},$$

$$\tau_3 = \{(1-t)(3, 1) + t(6, 0) | 0 \leq t \leq 1\},$$

$$\tau_4 = \{t(1, 0) | t \geq 6\},$$

las caras de dimensión 0 son

$$\tau_5 = (0, 3),$$

$$\tau_6 = (3, 1),$$

$$\tau_7 = (6, 0).$$

Además, se tiene que

$$f_{\tau_1}(x, y) = y^3,$$

$$f_{\tau_2}(x, y) = x^3y + y^3,$$

$$f_{\tau_3}(x, y) = x^3y + x^6,$$

$$f_{\tau_4}(x, y) = x^6,$$

$$f_{\tau_5}(x, y) = y^3,$$

$$f_{\tau_6}(x, y) = x^3y,$$

$$f_{\tau_7}(x, y) = x^6.$$

A continuación se define una relación de equivalencia sobre  $(\mathbb{R}^+)^n$ .

**Definición 3.17.** Para  $a \in (\mathbb{R}^+)^n$ , se define

$$N(a) = \min_{x \in \Gamma(f)} \{\langle a, x \rangle\},$$

y el primer lugar de encuentro de  $a$  como

$$F(a) = \{x \in \Gamma(f) : \langle a, x \rangle = m(a)\},$$

donde  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  denota el producto interno usual en  $(\mathbb{R}^+)^n$ .

Se define la relación de equivalencia sobre  $(\mathbb{R}^+)^n$

$$a \sim a' \text{ si y solo si } F(a) = F(a').$$

Las clases de esta relación de equivalencia se definen de la siguiente forma

**Definición 3.18.** Si  $\tau$  es una cara de  $\Gamma(f)$ , se define el cono asociado a  $\tau$  como

$$\Delta_\tau = \{a \in (\mathbb{R}^+)^n : F(a) = \tau\}.$$

Cada  $\Delta_\tau$  es una clase de la relación anteriormente definida.

Con las definiciones anteriormente expuestas es posible ver que forma tiene las clases de equivalencia  $\Delta_\tau$ , este trabajo puede ser algo aparatoso, por lo cual, se exponen los siguientes resultados que dan una herramienta para calcular los  $\Delta_\tau$ .

**Lema 3.10.** Sea  $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \mathbb{K}$ .

- i) Si  $H$  es un hiperplano soporte del Poliedro de Newton  $\Gamma(\phi)$  y  $a \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$  es perpendicular a  $H$ , entonces  $a$  ó  $-a \in (\mathbb{R}^+)^n$ .
- ii) Si  $\tau$  es una careta (cara de dimensión  $n - 1$ ), entonces existe  $a \in \mathbb{N}^n \setminus \{0\}$  tal que es perpendicular a  $\tau$ .

**Proposición 3.18.** Sea  $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \mathbb{K}$ . Sea  $\tau$  una cara de  $\Gamma(\phi)$  ( $\tau \neq \Gamma(\phi)$ ) y sean  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$  las caretas de  $\Gamma(\phi)$  que contienen a  $\tau$ . Sean  $a_1, \dots, a_r$  los únicos vectores primitivos en  $\mathbb{N}^n \setminus \{0\}$  que son

perpendiculares a  $\gamma_1, \dots, \gamma_r$ , respectivamente. Entonces el cono  $\Delta_\tau$  está dado por,

$$\Delta_\tau = \left\{ \sum_{i=1}^r \lambda_i a_i \mid \lambda_i \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\} \right\}.$$

Más aún,  $\dim(\Delta_\tau) = \text{codim}(\tau) = n - \dim(\tau)$ .

*Demostración.* La demostración de estos resultados puede ser consultada en Hoornaert (2002).

□

**Ejemplo 3.9.** En  $f(x, y) = x^3y + y^3 + x^6 + x^2y^2$  se tiene que las caras de dimensión 1 son las caras  $\tau_1, \tau_2, \tau_3$  y  $\tau_4$  y se puede ver que

$$\Delta_{\tau_1} = \{t(1, 0) \mid t \in \mathbb{R}^+\},$$

$$\Delta_{\tau_2} = \{t(2, 3) \mid t \in \mathbb{R}^+\},$$

$$\Delta_{\tau_3} = \{t(1, 3) \mid t \in \mathbb{R}^+\},$$

$$\Delta_{\tau_4} = \{t(0, 1) \mid t \in \mathbb{R}^+\},$$

por lo cual

$$\Delta_{\tau_5} = \{t(1, 0) + s(2, 3) \mid t, s \in \mathbb{R}^+\},$$

$$\Delta_{\tau_6} = \{t(2, 3) + s(1, 3) \mid t, s \in \mathbb{R}^+\},$$

$$\Delta_{\tau_7} = \{t(3, 1) + s(0, 1) \mid t, s \in \mathbb{R}^+\}.$$

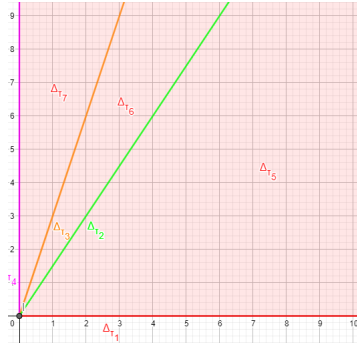


Figura 3. Partición de  $(\mathbb{R}^+)^2$  en conos  $\Delta_\tau$ .

**Definición 3.19.** Sea  $f \in \mathbb{K}[x] \setminus \mathbb{K}$ .

- Se define la distancia de Newton, que se nota por  $d(f)$ , como la distancia desde el origen hasta el punto intersección entre la bisectriz y la frontera de  $\Gamma(\phi)$ .
- Se nota por  $\pi(f)$  a la cara de dimensión mínima que contiene al punto intersección entre la bisectriz y la frontera de  $\Gamma(\phi)$ .
- La función cara asociada a  $\pi(f)$  se nota por  $f_{\text{pr}}$ .
- Si  $\tau$  es una cara compacta, se nota por  $d_\tau$  a la distancia desde el origen al punto intersección entre la recta identidad con la recta soporte que contiene a  $\tau$ .

**Ejemplo 3.10.** Para el polinomio  $f(x, y) = x^3y + y^3 + x^6 + x^2y^2$  se tiene que

$$\tau_2 = \{(1-t)(0, 3) + t(3, 1) | 0 \leq t \leq 1\},$$

$$\tau_3 = \{(1-t)(3, 1) + t(6, 0) | 0 \leq t \leq 1\},$$

por lo tanto

$$d_{\tau_2} = d(f) = 1.8,$$

$$d_{\tau_3} = 1.5,$$

$$\pi(f) = \tau_2,$$

$$f_{\text{pr}}(x, y) = x^3 y + y^3,$$

como se ve en la siguiente gráfica.

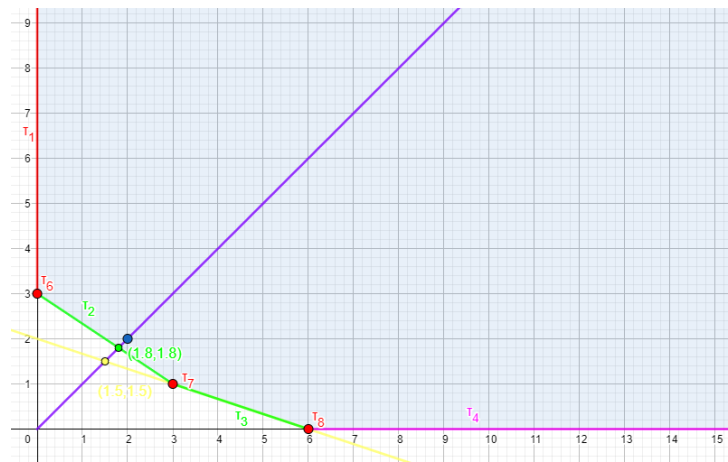


Figura 4. Distancia de Newton  $d(f)$  y  $d_{\tau_2}$ .

### 3.2. Polinomios cuasi-homogéneos.

En esta sección se dará a conocer la definición de polinomio cuasi-homogéneo de grado  $a$  y un resultado que es de utilidad para el desarrollo de este trabajo.

**Definición 3.20.** Sean  $f \in \mathbb{K}[x, y]$  y  $q, m \in \mathbb{N}_{>0}$ , se dice que  $f$  es un polinomio cuasi-homogéneo

de pesos  $(q, m)$  y de grado  $n$ , si para todo  $t > 0$  se cumple que

$$f(t^q x, t^m y) = t^n f(x, y).$$

**Proposición 3.19.** *Sea  $f$  un polinomio cuasi-homogéneo de pesos  $(q, m)$  y de grado  $n$ , tal que  $f$  no es de la forma  $f(x, y) = cx^{v_1}y^{v_2}$ . Asuma que  $q \leq m$ , y  $(q, m, n) = 1$ . Entonces  $(q, m) = 1$  y existen enteros no negativos  $\alpha_1, \alpha_2$  y un polinomio cuasi-homogéneo  $Q$  de pesos  $(1, 1)$  y grado  $n'$  tal que el polinomio  $f$  puede escribirse como*

$$f(x, y) = x^{\alpha_1}y^{\alpha_2}Q(x^m, y^q). \quad (1)$$

Más precisamente,  $f$  puede ser escrito como

$$f(x, y) = Cx^{v_1}y^{v_2} \prod_{L=1}^M (y^q - \lambda_L x^m)^{n_L}, \quad (2)$$

con  $M \geq 1$ , distintos  $\lambda_L \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  y multiplicidades  $n_L \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , con  $v_1, v_2 \in \mathbb{N}$  (posiblemente diferentes de  $\alpha_1, \alpha_2$  en (1)).

*Demostración.* Denote por  $A$  el conjunto de todas las soluciones  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{N}^2$  de la ecuación

$$\alpha q + \beta m = n, \quad (3)$$



entonces

$$f(x, y) = \sum_{(\alpha, \beta) \in A} C_{\alpha, \beta} x^{\alpha} y^{\beta}. \quad (4)$$

Para coeficientes adecuados  $C_{\alpha, \beta}$ , entonces escoja  $(\alpha_0, \beta_0) \in A$  con  $\alpha_0$  máximo. Como  $q\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} + n\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ , la identidad (3) implica que  $q\mathbb{Z} + m\mathbb{Z} = \mathbb{Z}$  (dado que  $A \neq \emptyset$ ), así que

$$(q, m) = 1. \quad (5)$$

Note que  $(\alpha, \beta) \in A$  es equivalente a  $(\alpha - \alpha_0)q + (\beta - \beta_0)m = 0$ . Entonces (5) implica que  $\alpha - \alpha_0 = -sm$ ,  $\beta - \beta_0 = sq$  para algún  $s \in \mathbb{Z}$ , o, equivalentemente

$$\alpha = \alpha_0 - sm, \beta = \beta_0 + sq.$$

Como  $\alpha_0$  es maximal para  $A$ , se tiene que  $s \geq 0$ . Escoja  $s_1 \in \mathbb{Z}$  maximal con  $\alpha_1 = \alpha_0 - s_1 m \geq 0$ .

Entonces para cualquier  $(\alpha, \beta) \in A$  se tiene la relación

$$\alpha = \alpha_1 + (s_1 - s)m, \beta = \beta_0 + sq.$$

Note que  $s, s_1 - s \in \mathbb{N}$ . Así, todo monomio  $x^{\alpha} y^{\beta}$  con  $(\alpha, \beta) \in A$  puede ser escrito como

$$x^{\alpha} y^{\beta} = x^{\alpha_1} y^{\beta_0} (x^m)^{s_1 - s} (y^q)^s.$$

Esto en combinación con (4) demuestra (1).

Para probar (2), se escribe

$$Q(y_1, y_2) = C_0 y_2^{n'} + C_1 y_2^{n'-1} y_1 + \dots + C_{n'} y_1^{n'},$$

donde  $n'$  es el grado de  $Q$ . Se puede asumir que  $C_0 \neq 0$ , de lo contrario se puede factorizar alguna potencia de  $y_1 = x^p$  de  $Q$  en (1). Suponiendo sin pérdida de generalidad  $C_0 = 1$ , se puede escribir

$$Q(y_1, y_2) = y_1^{n'} Q(1, y_2/y_1) = y_1^{n'} \prod_{j=1}^{n'} \left( \frac{y_2}{y_1} - \lambda_j \right) = \prod_{j=1}^{n'} (y_2 - \lambda_j y_1),$$

donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_{n'} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  son las raíces del polinomio  $Q(1, y_2)$ , listado con sus multiplicidades.

Esto mantiene (2). □

La demostración del anterior resultado puede ser vista en Ikromov (2011), en este artículo se encuentra una versión extensa.

Para una mejor comprensión se presenta el siguiente ejemplo.

**Ejemplo 3.11.** Sea  $\phi(x, y) = x^4 y^7 + x^7 y^6 + x^{10} y^5 + x^{13} y^4$  entonces se tiene que

$$\phi(x, y) = x^4 y^4 (y^3 + x^3 y^2 + x^6 y + x^9),$$

tomando  $x_1 = x^3$  se toma  $Q(x_1, y) = y^3 + x_1 y^2 + x_1^2 y + x_1^3$ , con lo cual

$$\phi(x, y) = x^4 y^4 Q(x_1, y),$$

se tiene que

$$Q(x_1, y) = x_1^3 Q\left(1, \frac{y}{x_1}\right).$$

Ahora bien, se nota que

$$Q(1, y) = y^3 + y^2 + y + 1 = (y + 1)(y - i)(y + i),$$

por lo tanto

$$Q(x_1, y) = (y + x_1)(y - ix_1)(y + ix_1),$$

así

$$\phi(x, y) = x^4 y^4 (y + x^3)(y - ix^3)(y + ix^3).$$

#### 4. La conjetura de la suma exponencial local.

##### 4.1. Sumas exponenciales.

Sea  $\mathbb{K}$  un campo y  $f : \mathbb{K}^n \rightarrow \mathbb{R}$  una función. Una suma exponencial es definida como una suma de la forma

$$S(x) = \sum_{\substack{x \in A \\ A \subset \mathbb{K}^n}} e^{2\pi i f(x)},$$

donde  $A$  es un conjunto finito numerable (la contención puede ser propia). En la teoría de números este tipo de sumas aparecen frecuentemente, por ejemplo, en el problema de Waring (véase Korobov (1992)), en el cual, se debe hacer un estudio de la suma exponencial

$$S(x) = \sum_{x=1}^P e^{2\pi i \alpha x^n},$$

donde  $\alpha \in [0, 1]$ .

El objetivo principal en sumas exponenciales es estudiar su comportamiento asintótico. Dado que en éstas se suman  $n \in \mathbb{N}$  números complejos de módulo igual a 1, siempre se tiene la cota trivial

$$|S(x)| \leq n.$$

Pero esta cota puede estar muy alejada del valor real del módulo de la suma. Como la suma depende de la función  $f$ , es posible pensar en poner más condiciones a esta función. Cuando  $f : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{R}$  es un polinomio de grado  $n$  se conocen como suma de Weyl de grado  $n$ , a la suma exponencial de la

forma

$$S(x) = \sum_{x=Q+1}^{Q+P} e^{2\pi i f(x)}.$$

Weyl demostró que

$$|S(x)| \leq C(n, \varepsilon) P^{1 - \frac{\gamma}{2^{n-1}}},$$

bajo cierta condición para el coeficiente principal del polinomio  $f$ ,  $\varepsilon$  está en el intervalo  $(0, 1)$ ,

$\gamma = 1 - \varepsilon$  y  $C(n, \varepsilon)$  no dependen de  $P$ .

La suma exponencial objetivo de este trabajo tienen la forma

$$S_0 = S_0(\phi, p^s) := \frac{1}{p^{sn}} \sum_{\substack{x \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^n \\ x \equiv 0 \pmod{p}}} e^{2\pi i \phi(x)/p^s},$$

donde  $\phi \in \mathbb{Z}[x_1, \dots, x_n]$  y  $s, n \in \mathbb{N}$ , ésta es conocida como la suma exponencial local, y es un truncamiento de la suma exponencial completa

$$S = S(\phi, p^s) := \frac{1}{p^{sn}} \sum_{x \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^n} e^{2\pi i \phi(x)/p^s}.$$

En la suma  $S_0(\phi, p^s)$  se selecciona los términos  $x = (x_1, \dots, x_n)$  donde  $p|x_j$  para todo  $1 \leq j \leq n$ .

Sobre estas sumas se conjetura que existe una constante  $C$ , independiente de  $p$  y  $s$ , y un conjunto finito  $\mathcal{P} = \mathcal{P}_\phi$  de primos tales que para todo  $p \notin \mathcal{P}$ ,

$$|S_0| \leq C s^{n-1} p^{-\sigma_c s}, \quad (1)$$

donde  $\sigma_c = \sigma_c(\phi)$  es el índice de oscilación compleja de  $\phi$  en 0. La conjetura (1) está relacionada con una de las conjeturas de Igusa sobre sumas exponenciales, que postula cotas uniformemente similares para  $S$  cuando  $\phi$  es un polinomio homogéneo.

Esta Conjetura ha sido demostrada en distintos artículos, en Denef (1987), Denef y Sperber la probaron cuando  $\phi$  es  $\mathbb{C}$ -no degenerado y cuando se tiene una condición auxiliar sobre los vértices del poliedro de Newton, en Cluckers (2010) Cluckers removió la condición auxiliar sobre los vértices, estableciendo la conjetura de Igusa cuando  $\phi$  es  $\mathbb{C}$ -no degenerado.

#### 4.2. La conjetura de la suma exponencial local en dimensión 2.

En la sección anterior se dio a conocer la conjetura de la suma local en dimensión  $n$ . En Cluckers R. Mustatǎ (2019) se estableció la conjetura de la suma local (1) en todas las dimensiones. Pero la demostración de esta conjetura en dimensión  $n > 2$  es difícil por el cálculo del índice de oscilación compleja  $\sigma_c$  en forma precisa para cualquier  $\phi$ , por lo cual, son necesarias herramientas complejas; ahora se va a explicar la demostración de esta conjetura en dimensión  $n = 2$  dada en Fraser (2020).

En dimensión  $n = 2$  se tiene que  $\sigma_c = 1/h(\phi)$  donde  $h(\phi) := \sup_z d_z(\phi)$  es conocida como la función altura de  $\phi$ , el supremo se calcula tomando todos los sistemas de coordenadas  $z = (x, y)$  del origen, y  $d_z(\phi)$  denota la distancia de Newton de  $\phi$  en las coordenadas de  $z$ ; además si se toma el exponente de Varchenko notado por  $v(\phi)$  en esta dimensión, se tiene que este toma el valor 0 o el valor 1, y con esta notación la conjetura sobre las sumas exponenciales locales se enuncia de la siguiente forma.

**Teorema 4.7.** *Sea  $\phi \in \mathbb{Z}[x, y]$ . Entonces existe un conjunto finito  $\mathcal{P}$  de primos y una constante*

$C = C_\phi$  tal que para cualquier  $p \notin \mathcal{P}$  y  $s \geq 1$ ,

$$|S_0(\phi, p^s)| \leq C s^{v(\phi)} p^{-s/h(\sigma)}, \quad (2)$$

se mantiene para todo  $\phi$  excepto para una clase excepcional  $\mathcal{E}$ . Para  $\phi \in \mathcal{E}$ , la estimación (2) se mantiene con  $v = 1$ , que es  $|S_0(\phi, p^s)| \leq C s p^{-s/h(\sigma)}$ . La clase  $\mathcal{E}$  consiste de los polinomios de la forma

$$\phi(x, y) = a(by^2 + cxy + dx^2)^m + \text{términos de orden mayor}$$

donde el polinomio cuadrático  $by^2 + cxy + dx^2$  es irreducible sobre los racionales.

La demostración de este teorema requiere de los siguientes dos resultados.

**Teorema 4.8.** Para cualquier  $\phi \in \mathbb{Z}[x, y]$  con  $\nabla\phi(0, 0) = 0$ , se puede encontrar un polinomio  $\psi \in \mathbb{Q}[x]$  tal que si  $\tilde{\phi}(x, y) = \phi(x, y + \psi(x))$ , entonces  $h(\phi) = h(\tilde{\phi}) = h(\tilde{\phi}_{pr})$ .

El anterior resultado permitirá finalizar la demostración del siguiente teorema.

**Teorema 4.9.** Suponga que los coeficientes de  $\phi \in \mathbb{Q}[x, y]$  son unidades en  $\mathbb{Z}_p$ .

(a) Si  $\pi(\phi)$  es una cara compacta, entonces

$$|S_0(\phi, p^s)| \leq \begin{cases} C_{deg(\phi)} p^{-s/d(\phi)} & \text{si } m_{pr}(\phi) < d(\phi), \\ C_{deg(\phi)} s p^{-s/d(\phi)} & \text{si } m_{pr}(\phi) = d(\phi), \\ C_{deg(\phi)} p^{-s/m_{pr}} & \text{si } m_{pr}(\phi) > d(\phi). \end{cases} \quad (3)$$

(b) Si  $\pi(\phi)$  es un vértice, entonces

$$|S_0(\phi, p^s)| \leq C_{deg(\phi)} s p^{-s/d(\phi)}, \quad (4)$$

y esto mejora a  $|S_0(\phi, p^s)| \leq C_{deg(\phi)} p^{-s/d(\phi)}$  cuando el vértice  $\pi(\phi) = (1, 1)$ .

(c) Si  $\pi(\phi)$  es una cara no acotada, entonces

$$|S_0(\phi, p^s)| \leq C_{deg(\phi)} p^{-s/d(\phi)}. \quad (5)$$

Se tiene que para todo  $\tau \in \Delta(\phi)$  el polinomio  $\phi_\tau$  resulta ser cuasi-homogéneo, por lo cual, aplicando la Proposición 2.19 se puede factorizar en la forma mencionada, se nota por  $\mathcal{A}$  la colección de números algebraicos consistente de las raíces  $\xi$ , como la diferencia de raíces distintas  $\xi_j - \xi_i$  para cada  $\phi_\tau$ . Entonces el conjunto finito  $\mathcal{P}$  de números primos consiste en



- Números primos que son a lo más  $\deg(\phi)$ .
- Primos divisores de los coeficientes de  $\phi$ .
- Primos divisores de los coeficientes del polinomio minimal de cada  $\xi \in \mathcal{A}$ .

$m_{pr}(\phi)$  es la máxima multiplicidad entre las raíces  $\{\xi\}_{j=1}^N$  que aparecen en la factorización de  $\phi_{pr}$  de  $\phi$ , cuando  $\pi(\phi)$  es una cara compacta, según la Proposición 2.19.

En el Teorema 3.9 literal a, se ve que las conclusiones son obtenidas por la relación que hay entre  $m_{pr}(\phi)$  y  $d(\phi)$ , para alcanzar estas conclusiones es necesario expresar a  $d_\tau$

$$d_\tau = \frac{1}{\kappa_1 + \kappa_2} = \frac{n}{m+q} = \frac{q\alpha + m\beta + qmM}{m+q} \quad (6)$$

con  $M = \sum_{j=1}^n n_j \leq d_\tau$  donde  $n_j$  son las distintas multiplicidades en la factorización de  $\phi_\tau$ , y el siguiente resultado

**Lema 4.11.** *Sea  $\tau \in \Delta(\phi)$  y  $M$  definido como antes, entonces.*

- (a.) *Si  $\tau$  no es la cara principal, entonces  $M = \sum_{j=1}^n n_j \leq d_\tau$ . Además la desigualdad estricta  $M < d_\tau$  se mantiene a no ser que un punto final de  $\tau$  esté sobre la bisectriz.*
- (b.) *Suponga que  $\tau = \pi(\phi)$  es la cara principal,  $m_{pr}(\phi) > d(\phi)$ , y  $j_*$  es tal que  $n_{j_*} = m_{pr}(\phi)$ . Entonces  $n_j < d(\phi)$  para todo  $j \neq j_*$  y  $\xi_{j_*} \in \mathbb{Q}$ .*
- (c.) *De nuevo suponga que  $\tau = \pi(\phi)$  pero ahora  $n_{j_*} = m_{pr}(\phi) = d(\phi)$ . Entonces  $\phi_{pr} = c(y^2 +$*

$bxy + dx^2)^n$  es una potencia de una forma cuadrática o

$$\phi_{pr}(x, y) = cx^\alpha y^\beta \prod_{j=1}^N (y - \xi_j x^m)^{n_j}. \quad (7)$$

$n_j < n_{j_*}$  para todo  $j \neq j_*$  y  $\xi_{j_*} \in \mathbb{Q}$ .

*Demostración.* Para probar (a), se supone que  $\tau$  se encuentra debajo de la bisectriz así que el punto final izquierdo  $(\alpha, \beta + qM)$  de  $\tau$  satisface que  $\alpha \geq \beta + qM$ . así por (6)

$$d_\tau \geq \frac{q(\beta + qM) + qmM}{q + m} \geq \frac{(\beta + qM) + mM}{q + m} \geq M,$$

como  $q \geq 1$ . Si el punto final izquierdo  $(\alpha, \beta + qM)$  no está sobre la bisectriz, entonces se tiene la desigualdad estricta  $\alpha > \beta + qM$  que a su vez implica  $d_\tau > M$  se mantiene.

Para probar (b), suponga que  $n_{j_*} > d(\phi)$  y que existe un  $1 \leq j \leq N$  con  $j \neq j_*$  tal que  $d(\phi) \leq n_j$ .

Entonces  $M > 2d(\phi)$  y así por (6),

$$d(\phi) \geq \frac{qmM}{m + q} > \frac{2qm}{m + q}d(\phi) \geq d(\phi),$$

que es una contradicción. Por lo tanto  $n_j < d(\phi)$  para todo  $j \neq j_*$ . Para mostrar que  $\xi_{j_*} \in \mathbb{Q}$ , se argumenta por contradicción de nuevo y suponga que el grado de  $\xi_{j_*}$  sobre los racionales es por lo menos 2. Dado que los conjugados de  $\xi_{j_*}$  todos se encuentran entre las raíces  $\{\xi_j\}_{j=1}^N$ , sería posible encontrar un conjugado  $\xi_j$  con  $j \neq j_*$ . como todos los conjugados deben tener la misma

multiplicidad, se ve que  $n_j = n_{j^*}$  que se ha visto que es imposible.

Finalmente para probar (c), suponga que  $n_{j^*} = d(\phi)$  y que existe un  $1 \leq j \leq N$  con  $j \neq j^*$  y  $n_j = n_{j^*}$ . Por lo tanto  $M \geq 2n_{j^*} = 2d(\phi)$  y así

$$d(\phi) \geq \frac{qmM}{m+q} \geq \frac{2qm}{m+q}d(\phi),$$

lo cual implica que  $2qm/(m+q) \leq 1$  y por lo tanto  $q = m = 1$ . Ahora por (6), se tiene

$$2d(\phi) = \alpha + \beta + M,$$

y como  $M \geq 2d(\phi)$ , esto es una contradicción a menos que  $\alpha = \beta = 0$  y  $M = 2d(\phi)$ . Por lo tanto  $d(\phi) = n_{j^*} = n_j$  y

$$\phi_{pr}(x, y) = c(y - \xi_1 x)^n (y - \xi_2 x)^n = c(y^2 + bxy + dx^2)^n,$$

es una potencia de una forma cuadrática con  $n = n_j$ . De lo contrario se tiene  $n_j < n_{j^*} = d(\phi)$  para todo  $j \neq j^*$  y razonando como en la parte (b), se concluye que  $\xi_{j^*} \in \mathbb{Q}$ .  $\square$

Para cerrar esta sección nótese que se puede suponer que  $\nabla\phi(0,0) = 0$ . Si  $\nabla\phi(0,0) \neq 0$  entonces, sin pérdida de generalidad se puede suponer que  $\partial_x\phi(0,0) = c \neq 0$  y como  $c$  es un coeficiente de  $\phi$ , se tiene que  $p \nmid c$  por tanto  $p \notin \mathcal{P}$ . Entonces para cualquier  $y \equiv 0 \pmod{p}$ , considere el polinomio  $g \in \mathbb{Z}[x]$  definido por  $g(x) = \phi(x, y)$  y ya que  $g'(x) = \partial_x\phi(x, y)$  se tiene que

$p \nmid g'(x)$  para todo  $x \equiv 0 \pmod{p}$ . así por Lema de Hensel, la función  $h(x) : x \rightarrow g(x) \pmod{p^s}$

define una biyección sobre  $\{x \in \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod{p}\}$  así que

$$\sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \\ x \equiv 0 \pmod{p}}} e^{2\pi i g(x)/p^s} = \sum_{\substack{u=0 \\ p|u}}^{p^s-1} e^{2\pi i u/p^s},$$

por lo tanto para  $s = 1$

$$\sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ x \equiv 0 \pmod{p}}} e^{2\pi i g(x)/p} = \sum_{\substack{u=0 \\ p|u}}^{p-1} e^{2\pi i u/p} = 1,$$

y para  $s \geq 2$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{x \in \mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z} \\ x \equiv 0 \pmod{p}}} e^{2\pi i g(x)/p^s} &= \sum_{\substack{u=0 \\ p|u}}^{p^s-1} e^{2\pi i u/p^s}, \\ &= \sum_{v=0}^{p^{s-1}-1} e^{2\pi i v/p^{s-1}}, \\ &= \frac{1 - e^{2\pi i (p^{s-1}-1+1)/p^{s-1}}}{1 - e^{2\pi i/p^{s-1}}}, \\ &= \frac{1 - e^{2\pi i}}{1 - e^{2\pi i/p^{s-1}}}, \\ &= 0. \end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$S_0(\phi, p^s) = \frac{1}{p^{2s}} \sum_{\substack{(x,y) \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^2 \\ (x,y) \equiv 0 \pmod{p}}} e^{2\pi i \phi(x,y)/p^s} = 0, \quad (8)$$

cuando  $s \geq 2$  e igual a  $p^{-2}$  cuando  $s = 1$ .

### 4.3. Demostración Teorema 3.9

El trabajo que se realizará en esta sección es la demostración de los items a. y b. Del Teorema 3.9, para ello es necesario hacer una conexión entre las integrales  $p$ -ádicas, el polígono de Newton y la suma exponencial local. El primer paso es notar que

$$S_0(\phi, p^s) = \iint_{(p\mathbb{Z}_p)^2} e(p^{-s}\phi(x, y)) dx dy,$$

para poder ver esto es necesario mostrar que

$$(p\mathbb{Z}_p)^2 = \bigsqcup_{\substack{(x_0, y_0) \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^2 \\ (x_0, y_0) \equiv 0 \pmod{p}}} B_{p^{-s}}(x_0) \times B_{p^{-s}}(y_0).$$

Sea  $(x, y) \in (p\mathbb{Z}_p)^2$  entonces

$$(x, y) = \left( \sum_{i=1}^{\infty} a_i p^i, \sum_{i=1}^{\infty} b_i p^i \right),$$

donde  $0 \leq a_i, b_i \leq p - 1$ ; ahora bien, tome

$$x_0 = \sum_{i=1}^{s-1} a_i p^i,$$

entonces

$$\begin{aligned}
 B_{p^{-s}}(x_0) &= \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : \left| x - \sum_{i=1}^{s-1} a_i p^i \right|_p \leq p^{-s}; 0 \leq a_i \leq p-1 \right\}, \\
 &= \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : x - \sum_{i=1}^{s-1} a_i p^i = \sum_{i=s}^{\infty} a_i p^i; 0 \leq a_i \leq p-1 \right\}, \\
 &= \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i p^i; 0 \leq a_i \leq p-1 \right\},
 \end{aligned}$$

por lo cual  $x \in B_{p^{-s}}(x_0)$ , y tomando

$$y_0 = \sum_{i=1}^{\infty} b_i p^i,$$

de manera análoga se obtiene que  $y \in B_{p^{-s}}(y_0)$ , además es bastante claro que  $(x_0, y_0) \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^2$

y  $(x_0, y_0) \equiv 0 \pmod{p}$  así

$$(x, y) \in \bigsqcup_{\substack{(x_0, y_0) \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^2 \\ (x_0, y_0) \equiv 0 \pmod{p}}} B_{p^{-s}}(x_0) \times B_{p^{-s}}(y_0).$$

En el otro sentido se toma

$$(x, y) \in \bigsqcup_{\substack{(x_0, y_0) \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^2 \\ (x_0, y_0) \equiv 0 \pmod{p}}} B_{p^{-s}}(x_0) \times B_{p^{-s}}(y_0).$$

Por lo tanto existe  $(x_0, y_0) \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^2$  con  $(x_0, y_0) \equiv 0 \pmod{p}$  tal que

$$(x, y) \in B_{p^{-s}}(x_0) \times B_{p^{-s}}(y_0),$$

como  $(x_0, y_0) \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^2$  con  $(x_0, y_0) \equiv 0 \pmod{p}$  se tiene que

$$(x_0, y_0) = \left( \sum_{i=1}^{s-1} a_i p^i, \sum_{i=1}^{s-1} b_i p^i \right),$$

donde  $0 \leq a_i, b_i \leq p-1$ , entonces como se vio anteriormente

$$B_{p^{-s}}(x_0) = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : x = \sum_{i=1}^{\infty} a_i p^i; 0 \leq a_i \leq p-1 \right\},$$

$$B_{p^{-s}}(y_0) = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : x = \sum_{i=1}^{\infty} b_i p^i; 0 \leq a_i \leq p-1 \right\},$$

con lo que se tiene que  $(x, y) \in (p\mathbb{Z}_p)^2$ .

Dado que se probó que

$$(p\mathbb{Z}_p)^2 = \bigsqcup_{\substack{(x_0, y_0) \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^2, \\ (x_0, y_0) \equiv 0 \pmod{p}}} B_{p^{-s}}(x_0) \times B_{p^{-s}}(y_0),$$

se tiene que,

$$\iint_{(p\mathbb{Z}_p)^2} e(p^{-s}\phi(x, y)) dx dy = \sum_{\substack{(x_0, y_0) \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^2 \\ (x_0, y_0) \equiv 0 \pmod{p}}} \iint_{B_{p^{-s}}(x_0) \times B_{p^{-s}}(y_0)} e(p^{-s}\phi(x, y)) dx dy,$$

por la definición de caracter  $e$  se ve que  $e(p^{-s}\phi(x,y)) = e(p^{-s}\phi(x_0,y_0))$  así

$$\begin{aligned}
\iint_{(p\mathbb{Z}_p)^2} e(p^{-s}\phi(x,y)) dx dy &= \sum_{\substack{(x_0,y_0) \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^2 \\ (x_0,y_0) \equiv 0 \pmod{p}}} \iint_{B_{p^{-s}}(x_0) \times B_{p^{-s}}(y_0)} e(p^{-s}\phi(x,y)) dx dy, \\
&= \sum_{\substack{(x_0,y_0) \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^2 \\ (x_0,y_0) \equiv 0 \pmod{p}}} \iint_{B_{p^{-s}}(x_0) \times B_{p^{-s}}(y_0)} e(p^{-s}\phi(x_0,y_0)) dx dy, \\
&= \sum_{\substack{(x_0,y_0) \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^2 \\ (x_0,y_0) \equiv 0 \pmod{p}}} e(p^{-s}\phi(x_0,y_0)) \iint_{B_{p^{-s}}(x_0) \times B_{p^{-s}}(y_0)} dx dy, \\
&= p^{-2s} \sum_{\substack{(x_0,y_0) \in [\mathbb{Z}/p^s\mathbb{Z}]^2 \\ (x_0,y_0) \equiv 0 \pmod{p}}} e(p^{-s}\phi(x_0,y_0)), \\
&= S_0(\phi, p^s).
\end{aligned}$$

Para continuar, es preciso ver la conexión que hay entre esta expresión de  $S_0(\phi, p^s)$  y el polígono de Newton, para esto es necesario ver

$$(p\mathbb{Z}_p)^2 = \bigsqcup_{\tau \in \Delta(\phi)} \bigsqcup_{\substack{\vec{l} \in \mathbb{N}^2 \\ \vec{l} \in \Delta_\tau}} S_{p^{-l_1}}(0) \times S_{p^{-l_2}}(0).$$

En efecto, sea  $(x,y) \in (p\mathbb{Z}_p)^2$  y  $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ , entonces se tiene que  $|x|_p \leq p^{-1}$  y  $|y|_p \leq p^{-1}$ , esto implica que  $|x|_p \leq p^{-l_1}$  y  $|y|_p \leq p^{-l_2}$ . Dado que se ha definido una partición sobre  $\mathbb{N}^2$ , por lo tanto existen  $\tau \in \Delta(\phi)$  única tal que  $l \in \Delta_\tau$ , y pues es claro que

$$(x,y) \in \bigsqcup_{\tau \in \Delta(\phi)} \bigsqcup_{\substack{\vec{l} \in \mathbb{N}^2 \\ \vec{l} \in \Delta_\tau}} S_{p^{-l_1}}(0) \times S_{p^{-l_2}}(0),$$



ahora bien, si

$$(x, y) \in \bigsqcup_{\tau \in \Delta(\phi)} \bigsqcup_{\substack{\vec{l} \in \mathbb{N}^2 \\ \vec{l} \in \Delta_\tau}} S_{p^{-l_1}}(0) \times S_{p^{-l_2}}(0),$$

entonces existen  $\tau \in \Delta(\phi)$  y  $l \in \Delta_\tau \cap \mathbb{N}^2$  tal que

$$(x, y) \in S_{p^{-l_1}}(0) \times S_{p^{-l_2}}(0),$$

esto implica que  $|x|_p \leq p^{-l_1}$  y  $|y|_p \leq p^{-l_2}$  y como  $\tau \in \Delta(\phi)$  se tiene que  $l_1, l_2 \geq 1$  así,  $|x|_p \leq p^{-1}$

y  $|y|_p \leq p^{-1}$  por lo tanto  $(x, y) \in (p\mathbb{Z}_p)^2$ . Lo anterior permite ver que

$$S_0(\phi, p^s) = \sum_{\tau \in \Delta(\phi)} \sum_{\substack{\vec{l} \in \mathbb{N}^2 \\ \vec{l} \in \Delta_\tau}} \iint_{S_{p^{-l_1}}(0) \times S_{p^{-l_2}}(0)} e(p^{-s}\phi(x, y)) dx dy,$$

y dado que  $S_{p^{-l_1}}(0) = p^{l_1}\mathbb{Z}_p^\times$  y  $S_{p^{-l_2}}(0) = p^{l_2}\mathbb{Z}_p^\times$  se tiene

$$S_0(\phi, p^s) = \sum_{\tau \in \Delta(\phi)} \sum_{\substack{\vec{l} \in \mathbb{N}^2 \\ \vec{l} \in \Delta_\tau}} \iint_{p^{l_1}\mathbb{Z}_p^\times \times p^{l_2}\mathbb{Z}_p^\times} e(p^{-s}\phi(x, y)) dx dy,$$

continuando, es fácil ver que para cada cara  $\tau \in \Delta(\phi)$  se tiene que

$$\phi(x, y) = \phi_\tau(x, y) + \eta_\tau(x, y),$$

donde

$$\phi_\tau(x, y) = \sum_{(j,k) \in \tau \cap \text{supp}(\phi)} c_{j,k} x^j y^k,$$

y

$$\eta_\tau(x, y) = \sum_{(j,k) \in (\Gamma(\phi) \setminus \tau) \cap \text{supp}(\phi)} c_{j,k} x^j y^k,$$

entonces por la definición de  $N(l)$ , se tiene que

$$\phi_\tau(p^{l_1}x, p^{l_2}y) = \sum_{(j,k) \in \tau \cap \text{supp}(\phi)} p^{(j,k) \cdot \vec{l}} c_{j,k} x^j y^k = p^{N(\vec{l})} \phi_\tau(x, y),$$

y

$$\eta_\tau(p^{l_1}x, p^{l_2}y) = \sum_{(j,k) \in (\Gamma(\phi) \setminus \tau) \cap \text{supp}(\phi)} p^{(j,k) \cdot \vec{l}} c_{j,k} x^j y^k = p^{N(\vec{l})} p * g_\tau(x, y),$$

cambiando variables para normalizar la región de integración, se tiene

$$S_0(\phi, p^s) = \sum_{\tau \in \Delta(\phi)} \sum_{\substack{\vec{l} \in \mathbb{N}^2 \\ \vec{l} \in \Delta_\tau}} p^{-l_1 - l_2} \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-s + N(\vec{l})} (\phi_\tau(x, y) + p g_\tau(x, y))) dx dy,$$

por comodidad se escribe

$$S_0(\phi, p^s) = \sum_{\tau \in \Delta(\phi)} I_\tau,$$

donde

$$I_\tau = \sum_{\substack{\vec{l} \in \mathbb{N}^2 \\ \vec{l} \in \Delta_\tau}} p^{-l_1 - l_2} \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-s + N(\vec{l})} (\phi_\tau(x, y) + p g_\tau(x, y))) dx dy.$$

Con esta representación se trabajan los dos casos que aparecen en el Teorema 3.9 en los ítems a, y b.

En el ítem a, se tiene el caso  $\tau$  una cara compacta, para este caso, gracias a la Proposición 2.19 se tiene que

$$\phi_{\tau}(x, y) = Cx^{\alpha}y^{\beta} \prod_{i=1}^N (y^q - \lambda_i x^m)^{n_i},$$

además,

$$\tau \subset \{(t_1, t_2) \in \mathbb{R}^2 \mid qt_1 + mt_2 = n\},$$

en otras palabras, la recta soporte de  $\tau$  tiene la ecuación  $qx + my = n$ , donde  $x, y \in \mathbb{R}$ ; dado a que esta recta tiene como vector director al vector  $(n/q, -n/m)$  se obtiene que

$$\Delta_{\tau} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) = C(q, m); C \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}\},$$

puesto que  $l \in \Delta_{\tau} \cap \mathbb{N}^2$  se tiene que  $l = l'(q, m)$  para  $l' \in \mathbb{N}$ , con  $l' \geq 1$ , además

$$\begin{aligned} N(l) &= l'(q, m) \cdot \left(x, \frac{n - qx}{m}\right), \\ &= l' \left(qx + (m) \left(\frac{n - qx}{m}\right)\right), \\ &= l'(qx + n - qx), \\ &= l'n, \end{aligned}$$

entonces para este caso se tiene que

$$I_\tau = \sum_{l' \geq 1} p^{l'(m+q)} \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-s+l'n}(\phi_\tau(x,y) + pg_\tau(x,y))) dx dy.$$

Es fácil notar que

$$\left| p^{-s+l'n}(\phi_\tau(x,y) + pg_\tau(x,y)) \right|_p = p^{s-l'n},$$

entonces se tiene que  $s - l'n \leq 0$  o  $s - l'n > 0$ , note que

$$s - l'n \leq 0,$$

$$-l'n \leq -s,$$

$$-l'n \leq -s,$$

$$l' \geq \frac{s}{n},$$

y dado que  $l \in \mathbb{N}$ , entonces

$$l' \geq \left\lfloor \frac{s}{n} \right\rfloor + 1,$$

en el otro caso

$$l' \leq \left\lfloor \frac{s}{n} \right\rfloor,$$

por lo tanto si se toma  $\kappa = \lfloor s/n \rfloor$  se tiene que

$$I_\tau = I_\tau^1 + I_\tau^2,$$

donde

$$I_{\tau}^1 = \sum_{l' \geq \kappa+1} p^{-l'(m+q)} I_{\tau, l'} \text{ y } I_{\tau}^2 = \sum_{l' \leq \kappa} p^{-l'(m+q)} I_{\tau, l'},$$

y

$$I_{\tau, l'} = \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-s+l'n}(\phi_{\tau}(x, y) + pg_{\tau}(x, y))) dx dy.$$

Se presta atención primero a la expresión  $I_{\tau}^1$ , en este caso se tiene que  $p^{-s+l'n}(\phi_{\tau}(x, y) + pg_{\tau}(x, y)) \in$

$\mathbb{Z}_p$ , por lo cual

$$e(p^{-s+l'n}(\phi_{\tau}(x, y) + pg_{\tau}(x, y))) = 1,$$

así

$$\begin{aligned} I_{\tau, l'} &= \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} dx dy, \\ &= (1 - p^{-1})^2, \end{aligned}$$

por lo que

$$\begin{aligned} I_{\tau}^1 &= (1 - p^{-1})^2 \sum_{l' \geq \kappa+1} p^{-l'(m+q)}, \\ &= (1 - p^{-1})^2 \left( \sum_{l'=0}^{\infty} p^{-l'(m+q)} - \sum_{l'=0}^{\kappa} p^{-l'(m+q)} \right), \\ &= (1 - p^{-1})^2 \left( \frac{1}{1 - p^{-(m+q)}} - \frac{1 - p^{-(\kappa+1)(m+q)}}{1 - p^{-(m+q)}} \right), \\ &= (1 - p^{-1})^2 \left( \frac{p^{-(\kappa+1)(m+q)}}{1 - p^{-(m+q)}} \right), \\ &= p^{-(\kappa+1)(m+q)} \left( \frac{(1 - p^{-1})^2}{1 - p^{-(m+q)}} \right). \end{aligned}$$

Se puede notar que

$$\frac{(1-p^{-1})^2}{1-p^{-(m+q)}} < 1,$$

por lo tanto para  $C \geq 1$  se tiene

$$\begin{aligned} I_{\tau}^1 &\leq Cp^{-(\kappa+1)(m+q)}, \\ &\leq Cp^{-s(m+q)/n}, \\ &= Cp^{-s/d_{\tau}}, \end{aligned}$$

y dado que  $d_{\tau} \leq d(\phi)$  se obtiene

$$|I_{\tau}^1| \leq Cp^{-s/d(\phi)}.$$

Por lo tanto se tiene una contribución aceptable para el Teorema 3.8.

Ahora se presta atención a la expresión  $I_{\tau}^2$ , se tiene que  $s - l'n > 0$ , este caso se estudiará en dos partes, primero cuando  $L \geq 2$  y segundo cuando  $L = 1$ ; así

$$I_{\tau}^2 = I_{\tau}^{2,1} + I_{\tau}^{2,2},$$

donde

$$I_{\tau}^{2,1} = \sum_{\substack{1 \leq l' \leq \kappa \\ s - l'n \geq 2}} p^{-l'(m+q)} I_{\tau, l'} \quad \text{y} \quad I_{\tau}^{2,2} = \sum_{\substack{1 \leq l' \leq \kappa \\ s - l'n = 1}} p^{-l'(m+q)} I_{\tau, l'},$$

por comodidad se nombra  $L = s - l'n$ , así

$$I_{\tau,L} = \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-L}(\phi_\tau(x,y) + pg_\tau(x,y))) dx dy.$$

Para la primera parte, sea

$$X = \{(x_0, y_0) \in [\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^2 : x_0 y_0 \neq 0\},$$

entonces para todo  $(x, y) \in (\mathbb{Z}_p^\times)^2$  existe un único elemento  $(x_0, y_0) \in X$  tal que  $(x, y) \equiv (x_0, y_0) \pmod{p}$ .

Se definen

$$Z_0 := \{(x_0, y_0) \in X : \phi_\tau \not\equiv 0 \pmod{p}\},$$

$$Z_j := \{(x_0, y_0) \in X : |y_0^q - \xi_j x_0^m| < 1\} \text{ para } 1 \leq j \leq N,$$

aquí  $\{\xi_j\}$  son las raíces asociadas a la factorización dada por la Proposición 2.25, por lo tanto para cada  $\xi_j$  se debe tener en cuenta que  $|\xi_j|_p = 1$  y  $|\xi_j - \xi_k|_p = 1$  cuando  $j \neq k$ ; con esto se verá que

$$X = \bigsqcup_{j=0}^N Z_j.$$

En efecto, sea  $(x_0, y_0) \in X$  entonces se tiene que  $\phi_\tau(x_0, y_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$  o  $\phi_\tau(x_0, y_0) \equiv 0 \pmod{p}$ , si se cumple la primera opción se tiene que  $(x_0, y_0) \in Z_0$  y se termina la demostración, ahora bien en el segundo caso se tendría que

$$C x_0^\alpha y_0^\beta \prod_{i=1}^N (y_0^q - \lambda_i x_0^m)^{n_i} \equiv 0 \pmod{p},$$

dado que  $(x_0, y_0) \in X$  entonces se tiene que  $Cx_0^\alpha y_0^\beta \not\equiv 0 \pmod{p}$  por lo cual se debe tener que

$$\prod_{i=1}^N (y_0^q - \lambda_i x_0^m)^{n_i} \equiv 0 \pmod{p},$$

esto implica que existe  $1 \leq j \leq N$  tal que  $y_0^q - \lambda_j x_0^m \equiv 0 \pmod{p}$  por lo cual  $|y_0^q - \lambda_j x_0^m| < 1$ , así  $(x_0, y_0) \in Z_j$ ; la contención inversa es trivial.

Ahora se verá que si  $j \neq j'$  entonces  $Z_j \cap Z_{j'} = \emptyset$ . En efecto, suponga que  $(x_0, y_0) \in Z_j$ , así  $|y_0^q - \lambda_j x_0^m| < 1$ , luego, se tiene que

$$\begin{aligned} |y_0^q - \lambda_{j'} x_0^m| &= |y_0^q - \xi_j x_0^m + \xi_j x_0^m - \xi_{j'} x_0^m|, \\ &\leq \max\{|y_0^q - \lambda_j x_0^m|, |\xi_j x_0^m - \xi_{j'} x_0^m|\}. \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} |\xi_j x_0^m - \xi_{j'} x_0^m| &= |x_0^m (\xi_j - \xi_{j'})|, \\ &= |x_0^m| |\xi_j - \xi_{j'}|, \\ &= 1, \end{aligned}$$

como  $|y_0^q - \lambda_j x_0^m| \neq |\xi_j x_0^m - \xi_{j'} x_0^m|$  se tiene que

$$\begin{aligned} |y_0^q - \lambda_{j'} x_0^m| &= \max\{|y_0^q - \lambda_j x_0^m|, |\xi_j x_0^m - \xi_{j'} x_0^m|\}, \\ &= 1. \end{aligned}$$



Por lo tanto  $(x_0, y_0) \notin Z_{j'}$  para  $j' \neq j$ , así se ha demostrado que

$$X = \bigsqcup_{j=0}^N Z_j.$$

Continuando, es necesario ver que

$$(\mathbb{Z}_p^\times)^2 = \bigsqcup_{j=0}^N \bigsqcup_{(x_0, y_0) \in Z_j} B_{p^{-1}}(x_0, y_0),$$

donde  $B_{p^{-1}}(x_0, y_0) = \{(x, y) \in \mathbb{Z}_p^2 : \max\{|x - x_0|_p, |y - y_0|_p\} \leq p^{-1}\}$ . En efecto, sea  $(a, b) \in (\mathbb{Z}_p^\times)^2$  por lo tanto

$$(a, b) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i, \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i \right),$$

con  $1 \leq a_0, b_0 \leq p - 1$  y  $0 \leq a_i, b_i \leq p - 1, i \neq 0$ . Es fácil ver que  $(a_0, b_0) \in [\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^2$  y  $a_0 b_0 \neq 0$ , por lo tanto se toma  $B_{p^{-1}}(a_0, b_0)$ , es claro que  $(a, b) \in B_{p^{-1}}(a_0, b_0)$ , por lo tanto

$$(a, b) \in \bigsqcup_{j=0}^N \bigsqcup_{(x_0, y_0) \in Z_j} B_{p^{-1}}(x_0, y_0).$$

En el otro sentido, sea

$$(a, b) \in \bigsqcup_{j=0}^N \bigsqcup_{(x_0, y_0) \in Z_j} B_{p^{-1}}(x_0, y_0),$$

entonces existe una única  $B_{p^{-1}}(x_0, y_0)$  con  $(x_0, y_0) \in [\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^2$  donde  $x_0 y_0 \neq 0$ , tal que  $(a, b) \in B_{p^{-1}}(x_0, y_0)$ , como  $(a, b) \in B_{p^{-1}}(x_0, y_0)$  se obtiene

$$\max \{ |a - x_0|_p, |b - y_0|_p \} \leq p^{-1},$$

como  $(x_0, y_0) \in [\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}]^2$  entonces, si se piensan como elementos en  $\mathbb{Q}_p$  se tendría que

$$x_0 = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \text{ y } y_0 = \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i,$$

donde  $a_0 = x_0$  y  $b_0 = y_0$ , además  $a_i, b_i = 0$  para  $i \neq 0$ . Entonces

$$|a - x_0|_p = \left| a - \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \right|_p = \left| a + (p - a_0) + \sum_{i=1}^{\infty} (p - 1) p^i \right|_p,$$

análogamente

$$|b - y_0|_p = \left| b - \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i \right|_p = \left| b + (p - b_0) + \sum_{i=1}^{\infty} (p - 1) p^i \right|_p,$$

por lo tanto si

$$|a - x_0|_p \leq p^{-1} \text{ o } |b - y_0|_p \leq p^{-1},$$

es necesario que

$$a = \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i \text{ y } b = \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i,$$

con  $a_0 = x_0$ ,  $b_0 = y_0$  y  $0 \leq a_i, b_i \leq p-1$  para  $i \neq 0$ , entonces se tiene que

$$|a|_p = 1 \text{ y } |b|_p = 1,$$

así

$$(a, b) \in (\mathbb{Z}_p^\times)^2,$$

y se obtiene

$$I_{\tau, L} = \sum_{j=0}^N \sum_{(x_0, y_0) \in Z_j} \iint_{B_{p^{-1}}(x_0, y_0)} e(p^{-L}(\phi_\tau(x, y) + pg_\tau(x, y))) dx dy.$$

Se denota

$$\mathcal{I}_j = \sum_{(x_0, y_0) \in Z_j} \iint_{B_{p^{-1}}(x_0, y_0)} e(p^{-L}(\phi_\tau(x, y) + pg_\tau(x, y))) dx dy,$$

ahora bien, se analizará cada  $\mathcal{I}_j$ , para  $0 \leq j \leq N$ , para  $\mathcal{I}_0$  primero se ve que

$$B_{p^{-1}}(x_0, y_0) = \bigsqcup_{\substack{(u_0, v_0) \in (\mathbb{Z}/p^{L-1}\mathbb{Z})^2 \\ (x_0, y_0) \equiv (u_0, v_0) \pmod{p}}} B_{p^{-L+1}}(u_0, v_0),$$

en efecto, sea  $(a, b) \in B_{p^{-1}}(x_0, y_0)$  entonces se tiene que

$$(a, b) = \left( \sum_{i=0}^{\infty} a_i p^i, \sum_{i=0}^{\infty} b_i p^i \right),$$

con  $a_0 = x_0, b_0 = y_0, 0 \leq a_i, b_i \leq p-1$ , y además existen  $i, j \geq 1$  tales que  $a_i, b_j \neq 0$ . Tomando

$$(u_0, v_0) = \left( \sum_{i=0}^{p^{L-2}} a_i p^i, \sum_{i=0}^{p^{L-2}} b_i p^i \right),$$

se tiene que  $(u_0, v_0) \in (\mathbb{Z}/p^{L-1}\mathbb{Z})^2$  con  $(u_0, v_0) \equiv (x_0, y_0) \pmod{p}$ , y se nota que

$$B_{p^{-L+1}}(u_0, v_0) = \left\{ \left( \sum_{i=0}^{p^{L-2}} a_i p^i + \sum_{i=p^{L-1}}^{\infty} a'_i p^i, \sum_{i=0}^{p^{L-2}} b_i p^i + \sum_{i=p^{L-1}}^{\infty} b'_i p^i \right) : 0 \leq a'_i, b'_i \leq p-1 \right\},$$

por lo tanto  $(a, b) \in B_{p^{-L+1}}(u_0, v_0)$ , la contención contraria es análoga. Con esto se obtiene que

$$\mathcal{I}_0 = \sum_{(x_0, y_0) \in Z_0} \sum_{\substack{(u_0, v_0) \in (\mathbb{Z}/p^{L-1}\mathbb{Z})^2 \\ (x_0, y_0) \equiv (u_0, v_0) \pmod{p}}} \iint_{B_{p^{-L+1}}(u_0, v_0)} e(p^{-L}(\phi_\tau(x, y) + pg_\tau(x, y))) dx dy,$$

por la extensión del teorema de Euler para funciones homogéneas a funciones cuasi-homogéneas

se tiene que

$$(qx, my) \cdot \nabla \phi_\tau(x, y) = n\phi_\tau(x, y),$$

entonces para  $(x_0, y_0) \in Z_0$  se tiene que  $\nabla \phi_\tau(x_0, y_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$  ahora se toma  $\varphi(x, y) = \phi_\tau(x, y) +$

$pg_\tau(x, y)$ , entonces se tiene que

$$\nabla \varphi(x_0, y_0) = \nabla \phi_\tau(x_0, y_0) + p\nabla g_\tau(x_0, y_0),$$

$$\equiv \nabla \phi_\tau(x_0, y_0) \pmod{p},$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 &= \sum_{(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}_0} \sum_{\substack{(u_0, v_0) \in (\mathbb{Z}/p^{L-1}\mathbb{Z})^2 \\ (x_0, y_0) \equiv (u_0, v_0) \pmod{p}}} \iint_{B_{p^{-L+1}}(u_0, v_0)} e(p^{-L}\varphi(x, y)) dx dy, \\ &= \sum_{(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}_0} \sum_{\substack{(u_0, v_0) \in (\mathbb{Z}/p^{L-1}\mathbb{Z})^2 \\ (x_0, y_0) \equiv (u_0, v_0) \pmod{p}}} p^{-2(L-1)} \iint_{(\mathbb{Z}_p)^2} e(p^{-L}\varphi(u_0 + p^{L-1}u, v_0 + p^{L-1}v)) dudv, \end{aligned}$$

se puede notar que

$$\varphi(u_0 + p^{L-1}u, v_0 + p^{L-1}v) \equiv \varphi(u_0, v_0) + p^{L-1}\nabla\varphi(u_0, v_0) \cdot (u, v) \pmod{p^L},$$

y dado que  $L \geq 2$  se tiene que

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_0 &= \sum_{(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}_0} \sum_{\substack{(u_0, v_0) \in (\mathbb{Z}/p^{L-1}\mathbb{Z})^2 \\ (x_0, y_0) \equiv (u_0, v_0) \pmod{p}}} p^{-2(L-1)} \\ &\quad \left( \iint_{(\mathbb{Z}_p)^2} e(p^{-L}(\varphi(u_0, v_0) + p^{L-1}\nabla\varphi(u_0, v_0) \cdot (u, v) + Kp^L)) dudv \right), \\ &= \sum_{(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}_0} \sum_{\substack{(u_0, v_0) \in (\mathbb{Z}/p^{L-1}\mathbb{Z})^2 \\ (x_0, y_0) \equiv (u_0, v_0) \pmod{p}}} p^{-2(L-1)} \\ &\quad \left( \iint_{(\mathbb{Z}_p)^2} e(p^{-L}\varphi(u_0, v_0) + p^{-1}\nabla\varphi(u_0, v_0) \cdot (u, v) + K) dudv \right), \\ &= \sum_{(x_0, y_0) \in \mathbb{Z}_0} \sum_{\substack{(u_0, v_0) \in (\mathbb{Z}/p^{L-1}\mathbb{Z})^2 \\ (x_0, y_0) \equiv (u_0, v_0) \pmod{p}}} p^{-2(L-1)} e(p^{-L}\varphi(u_0, v_0) + K) \\ &\quad \left( \iint_{(\mathbb{Z}_p)^2} e(p^{-1}\nabla\varphi(u_0, v_0) \cdot (u, v)) dudv \right), \end{aligned}$$

de nuevo por el Ejemplo 1.6 se tiene que las integrales que aparecen en esta expresión se anula dado que  $\nabla\varphi(u_0, v_0) \not\equiv 0 \pmod{p}$ ; por lo cual  $\mathcal{I}_0 = 0$ .

Para los sumandos  $\mathcal{I}_j$ , donde  $1 \leq j \leq N$  se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{I}_j &= \sum_{(x_0, y_0) \in Z_j} \iint_{B_{p^{-1}}(x_0, y_0)} e(p^{-L}\varphi(x, y)) dx dy, \\ &= \sum_{x_0 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}} \sum_{y_0 \in Z_{j, x_0}} \iint_{B_{p^{-1}}(x_0, y_0)} e(p^{-L}\varphi(x, y)) dx dy,\end{aligned}$$

donde  $Z_{j, x_0} = \{y_0 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\} : (x_0, y_0) \in Z_j\}$ .

Intercambiando la suma en  $y_0$  y la  $x$  en la integral, se tiene

$$\mathcal{I}_j = \sum_{x_0 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}} \int_{B_{p^{-1}}(x_0)} \left( \sum_{y_0 \in Z_{j, x_0}} \int_{B_{p^{-1}}(y_0)} e(p^{-L}\varphi(x, y)) dy \right) dx.$$

Denotando  $\text{Inner}_{x_0}(x)$  como la suma en  $y_0$ , se obtiene

$$\mathcal{I}_j = \sum_{x_0 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}} \int_{B_{p^{-1}}(x_0)} \text{Inner}_{x_0}(x) dx.$$

Para cualquier fijo  $x_0 \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \setminus \{0\}$  y  $x$  tal que  $|x - x_0| \leq p^{-1}$ , defina  $\psi_x(y) = \varphi(x, y)$ , así se tiene

$$\text{Inner}_{x_0}(x) = \sum_{y_0 \in Z_{j, x_0}} \int_{B_{p^{-1}}(y_0)} e(p^{-L}\psi_x(y)) dy,$$

para tratar esta expresión se usará el siguiente resultado

**Proposición 4.20.** *Sea  $\phi \in \mathbb{Z}_p[X]$  y supóngase que hay un  $n \geq 1$  tal que  $\phi^{(n)}(x)/n! \not\equiv 0 \pmod{p}$*

para todo  $x$  que pertenece a algún subconjunto  $S \subseteq \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ . Entonces existe una constante  $C$ , que depende del grado de  $\phi$  (y no de  $S$  o  $p$ ) tal que

$$\left| \sum_{x_0 \in S} \int_{B_{p^{-1}}(x_0)} e(p^{-s}\phi(x)) dx \right| \leq Cp^{-s/n},$$

se mantiene para todo  $s \geq 2$ . Es más cuando  $n = 1$ , la suma en la anterior expresión se anula.

Es claro que la expresión de  $\text{Inner}_{x_0}(x)$  satisface en gran parte las hipótesis de la Proposición 3.20, lo único que hace falta ver es que para cada  $j$  el número natural asociado  $n_j$ , que aparece en la factorización dada por la Proposición 2.19 cumple que

$$\frac{\psi_x^{(n_j)}(y_0)}{n_j!} \not\equiv 0 \pmod{p},$$

para todo  $y_0 \in Z_{j,x_0}$ . En efecto, se tiene que

$$\begin{aligned} \psi_x(y_0) &= \varphi(x, y_0), \\ &= \phi_\tau(x, y_0) + pg_\tau(x, y_0), \\ &= Cx^\alpha y_0^\beta \prod_{i=1}^N (y_0^q - \lambda_i x^m)^{n_i} + pg_\tau(x, y_0), \end{aligned}$$

tomando

$$f_i(y_0) = (y_0^q - \lambda_i x^m)^{n_i},$$

y

$$f_j(y_0) = Cx^\alpha y_0^\beta \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N (y_0^q - \lambda_i x^m)^{n_i},$$

se tiene que

$$\Psi_x(y_0) = f_i(y_0)f_j(y_0) + pg_\tau(x, y_0).$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \Psi_x^{n_i}(y_0) &= \sum_{j'=0}^{n_i} \binom{n_i}{j'} f_i^{n_i-j'}(y_0) f_j^{j'}(y_0) + pg_\tau^{n_i}(x, y_0), \\ &= f_i^{n_i}(y_0) f_j(y_0) + \sum_{j'=1}^{n_i} \binom{n_i}{j'} f_i^{n_i-j'}(y_0) f_j^{j'}(y_0) + pg_\tau^{n_i}(x, y_0). \end{aligned}$$

Ahora, se tiene que

$$\begin{aligned} |y_0^q - \lambda_i x^m|_p &= |y_0^q - \lambda_i x_0^m + \lambda_i x_0^m - \lambda_i x^m|_p, \\ &\leq \max\{|y_0^q - \lambda_i x_0^m|_p, |\lambda_i x_0^m - \lambda_i x^m|_p\}, \\ &= \max\{|y_0^q - \lambda_i x_0^m|_p, |x_0^m - x^m|_p\}, \end{aligned}$$

dado que  $|x - x_0|_p \leq p^{-1}$ , se puede comprobar que  $|x_0^m - x^m|_p \leq p^{-1}$ , así

$$|y_0^q - \lambda_i x^m|_p \leq p^{-1}.$$



Volviendo al cálculo de la derivada, se tiene que la expresión

$$\sum_{j'=1}^{n_i} \binom{n_i}{j'} f_i^{n_i-j'}(y_0) f_j^{j'}(y_0),$$

siempre tiene un factor  $(y_0^q - \lambda_i x^m)$ , mientras  $f_i^{n_i}(y_0) f_j(y_0)$ , no la tiene como factor, por lo tanto se tiene que

$$\varphi_x^{n_i}(y_0) \equiv f_i^{n_i}(y_0) f_j(y_0) \pmod{p},$$

lo cual permite ver que

$$\frac{\psi_x^{(n_j)}(y_0)}{n_j!} \not\equiv 0 \pmod{p},$$

para todo  $y_0 \in Z_{j,x_0}$ . Por lo tanto la cota uniforme

$$|\text{Inner}_{x_0}(x)| \leq C_{\text{deg}\phi} p^{-L/n_j},$$

se mantiene y cuando  $n_j = 1$ , de hecho se tiene  $\text{Inner}_{x_0}(x) = 0$ . Esto implica que

$$|\mathcal{I}_j| \leq C_{\text{deg}\phi} p^{-L/n_j} \text{ pero cuando } n_j = 1, \mathcal{I}_j = 0.$$

Por lo tanto

$$|\mathcal{I}_{\tau,L}| \leq C_{\text{deg}\phi} p^{-L/m_\tau},$$

donde  $m_\tau$  es la multiplicidad maximal de las raíces  $\{\xi_j\}$  de  $\phi_\tau$ . Así que

$$\begin{aligned} |I_\tau^{2,1}| &\leq C \left( \sum_{1 \leq l \leq \kappa} p^{-l(m+q)} p^{ln/m_\tau} \right) p^{-s/m_\tau}, \\ &= \left( \sum_{1 \leq l \leq \kappa} p^{-ln \left[ \frac{1}{d_\tau} - \frac{1}{m_\tau} \right]} \right) p^{-s/m_\tau}. \end{aligned}$$

Con esto se tiene que si se toma

$$\begin{aligned} h &= n \left( \frac{1}{d_\tau} - \frac{1}{m_\tau} \right), \\ C_1 &= \sum_{1 \leq l \leq \kappa} p^{-ln \left[ \frac{1}{d_\tau} - \frac{1}{m_\tau} \right]}, \end{aligned}$$

se tiene

$$\begin{aligned} C_1 &= \sum_{1 \leq l \leq \kappa} p^{-lh}, \\ &= \left( \frac{1 - p^{-(\kappa+1)h}}{1 - p^{-h}} \right) - 1, \\ &= \frac{1 - p^{\kappa+1}}{p^{h-1}}, \end{aligned}$$

entonces se puede notar que

$$\begin{cases} C_1 < 0, & \text{si } m_\tau < d_\tau, \\ C_1 > 0, & \text{si } m_\tau > d_\tau, \end{cases}$$

como esta constante depende de los valores de  $h$  y  $\kappa$ , y éstos dos dependen del valor de  $n$  y a su

vez, este depende del  $\deg(\phi)$ , se tiene que

$$|I_{\tau}^{2,1}| \leq \begin{cases} -C_1 p^{-s/d_{\tau}} & \text{si } m_{\tau} < d_{\tau}, \\ C_1 s p^{-s/d_{\tau}} & \text{si } m_{\tau} = d_{\tau}, \\ C_1 p^{-s/m_{\tau}} & \text{si } m_{\tau} > d_{\tau}. \end{cases} \quad (6)$$

Si  $\tau = \pi(\phi)$ , entonces  $d_{\tau} = d(\phi)$  y  $m_{\tau} = m_{\text{pr}(\phi)}$  así que (6) da una contribución aceptable a la cota (3) en el Teorema 3.8. Ahora suponga que el límite compacto  $\tau$  no es la cara principal. Por Lema 3.9 parte (a), se concluye que  $m_{\tau} \leq d_{\tau}$ . Es más, si el punto final de  $\tau$  no pertenece a la bisectriz, entonces de hecho  $m_{\tau} < d_{\tau}$  y así (6) implica  $|\mathcal{I}_{\tau}^{2,1}| \leq C p^{-s/d(\phi)}$  y esto es una cota aceptable como antes.

Por último, suponga que un punto final de  $\tau$  pertenece a la bisectriz. Entonces la cara principal  $\pi(\phi)$  es un vértice y  $d_{\tau} = d(\phi)$ . La cota (6) da una aceptable contribución a la cota (3) en Teorema 3.7 a menos que el vértice  $\pi(\phi)$  sea  $(1, 1)$ . En este caso, por la definición de  $d_{\tau}$  se tiene que  $d_{\tau} = d(\phi) = 1$ , además por el Lema 3.9 se tiene que  $m_{\tau} = M = 1$ , entonces

$$\frac{q\alpha + m\beta + qmM}{m+q} = d_{\tau},$$

$$\frac{q\alpha + m\beta + qm}{m+q} = 1,$$

entonces se tiene dos posibles resultados: (1)  $q = \alpha = 1$  y  $\beta = 0$ , en este caso  $\phi_{\tau} = ax(y - \xi x^m)$  para algún  $\xi \in \mathbb{Q}$ , o (2)  $q = m = \beta = 1$  y  $\alpha = 0$ , en este caso  $\phi_{\tau} = ay(y - \xi x)$  para algún  $\xi \in \mathbb{Q}$ . En cualquier caso,  $\mathcal{I}_{\tau,L} = \mathcal{I}_0 + \mathcal{I}_j$  donde  $n_j = 1$ . Por lo tanto por la Proposición 3.20 se tiene que

$\mathcal{I}_{\tau,L} = 0$ . Implicando a su vez  $I_{\tau}^{2,1} = 0$ .

Ahora se presta atención a la expresión  $I_{\tau}^{2,2}$ , en este caso se tiene que  $s - l'n = 1$  o lo que es lo mismo  $s = l'n + 1$ , lo cual implica que  $s \equiv 1 \pmod{n}$  y además que  $l' = \kappa$  por lo tanto

$$\begin{aligned} I_{\tau}^{2,2} &= \sum_{\substack{1 \leq l' \leq \kappa \\ s - l'n = 1}} p^{-l'(m+q)} I_{\tau,l'}, \\ &= p^{-\kappa(m+q)} \iint_{(\mathbb{Z}_p^{\times})^2} e(p^{-1}(\phi_{\tau}(x,y))) dx dy. \end{aligned}$$

Teniendo en cuenta que

$$(\mathbb{Z}_p^{\times})^2 = \bigsqcup_{\substack{(a,b) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \\ ab \neq 0 \pmod{p}}} B_{p^{-1}}(a) \times B_{p^{-1}}(b),$$

dado que la suma exponencial local se ve como una integral doble  $p$ -ádica, análogamente se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{(\mathbb{Z}_p^{\times})^2} e(p^{-1}(\phi_{\tau}(x,y))) dx dy &= p^{-2} \sum_{\substack{(a,b) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \\ ab \neq 0 \pmod{p}}} e(p^{-1}\phi_{\tau}(a,b)), \\ &= p^{-2} \sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ a \neq 0 \pmod{p}}} \sum_{\substack{b \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ b \neq 0 \pmod{p}}} e(p^{-1}\phi_{\tau}(a,b)), \end{aligned}$$

entonces para cada suma

$$\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ a \neq 0 \pmod{p}}} e(p^{-1}\phi_{\tau}(a,i)),$$

donde  $1 \leq i \leq p-1$ , aplicando la cota de Weil Weil (1948) se tiene que

$$\sum_{\substack{a \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \\ a \neq 0 \pmod{p}}} e(p^{-1}\phi_\tau(a, i)) \leq C_\phi p^{1/2},$$

por lo cual

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{(a,b) \in (\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^2 \\ ab \neq 0 \pmod{p}}} e(p^{-1}\phi_\tau(a, b)) &\leq C_\phi (p-1)p^{1/2}, \\ &= C_\phi (p^{3/2} - p^{1/2}), \\ &\leq C_\phi p^{3/2}, \end{aligned}$$

así

$$\iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}(\phi_\tau(x, y))) dx dy \leq C_\phi p^{-1/2},$$

con lo que se tiene que

$$|I_\tau^{2,2}| \leq C_\phi p^{-\kappa(m+q)} p^{-1/2},$$

y dado que  $\kappa(m+q) = (s-1)(m+q)/n = (s-1)/d_\tau$  se obtiene

$$|I_\tau^{2,2}| \leq C_\phi p^{-(\frac{1}{2} - \frac{1}{d_\tau})} p^{-s/d_\tau}.$$

Se puede observar que la cota para  $I_\tau^{2,2}$  depende del valor de  $d_\tau$ , así si  $d_\tau \geq 2$  entonces

$$|I_\tau^{2,2}| \leq C_\phi p^{-s/d(\phi)},$$

y se mostrará que para el caso  $d_\tau < 2$  esta cota se mantiene. En efecto, primero suponga que  $\tau$  no es la cara principal, entonces  $m_\tau \leq d_\tau$  por Lema 3.9 lo cual implica que  $m_\tau = 1$  (y por lo tanto  $d_\tau \geq 1$ ) así que  $\phi_\tau(x, y) = ax^\alpha y^\beta (y^q - \xi x^m)$  para algún  $\xi \in \mathbb{Q}$ . Si  $\tau$  se encuentra debajo de la bisectriz, entonces la segunda coordenada del punto final izquierdo debe ser igual a 1, por lo que  $\beta + q = 1$  implicando  $q = 1$ ,  $\beta = 0$  y así  $\phi_\tau(x, y) = ax^\alpha (y - \xi x^m)$ . Similarmente si  $\tau$  está sobre la bisectriz, entonces  $\alpha = 0$ ,  $m = 1$  y así  $\phi_\tau(x, y) = ay^\beta (y^q - \xi x)$ , en cualquier caso  $\phi_\tau$  es lineal en  $y$  o lineal en  $x$ , ahora bien, dado que  $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_p^\times \times p\mathbb{Z}_p$  se concluye que

$$(\mathbb{Z}_p)^2 = (\mathbb{Z}_p^\times)^2 \sqcup (p\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^\times) \sqcup (\mathbb{Z}_p^\times \times p\mathbb{Z}_p) \sqcup (p\mathbb{Z}_p)^2,$$

por lo tanto se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{(\mathbb{Z}_p)^2} e(p^{-1}\phi_\tau(x, y)) dx dy &= \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}\phi_\tau(x, y)) dx dy \\ &+ \iint_{p\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^\times} e(p^{-1}\phi_\tau(x, y)) dx dy \\ &+ \iint_{\mathbb{Z}_p^\times \times p\mathbb{Z}_p} e(p^{-1}\phi_\tau(x, y)) dx dy \\ &+ \iint_{(p\mathbb{Z}_p)^2} e(p^{-1}\phi_\tau(x, y)) dx dy. \end{aligned}$$

Se puede mostrar que cuando los dominios de integración son  $\mathbb{Z}_p^\times \times p\mathbb{Z}_p$  y  $(p\mathbb{Z}_p)^2$  se tiene que  $|\phi_\tau(x, y)|_p \leq p^{-1}$  con lo cual se ve que

$$\begin{aligned} \iint_{\mathbb{Z}_p^\times \times p\mathbb{Z}_p} e(p^{-1}\phi_\tau(x, y)) dx dy &= p^{-1}(1 - p^{-1}), \\ \iint_{(p\mathbb{Z}_p)^2} e(p^{-1}\phi_\tau(x, y)) dx dy &= p^{-2}. \end{aligned}$$

Ahora se prestará atención a las expresiones

$$\iint_{p\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^\times} e(p^{-1}\phi_\tau(x, y)) dx dy, \quad \iint_{(\mathbb{Z}_p)^2} e(p^{-1}\phi_\tau(x, y)) dx dy.$$

Tomando el caso  $\phi_\tau(x, y) = ay^\beta(y^q - \xi x)$  se tiene que

$$\begin{aligned} \iint_{p\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^\times} e(p^{-1}\phi_\tau(x, y)) dx dy &= \iint_{p\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^\times} e(p^{-1}(ay^\beta(y^q - \xi x))) dx dy, \\ &= \iint_{p\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^\times} e(ap^{-1}y^{\beta+q} - a\xi p^{-1}y^\beta x) dx dy, \\ &= \iint_{p\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^\times} e(ap^{-1}y^{\beta+q}) e(-a\xi p^{-1}y^\beta x) dx dy, \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \left( e(ap^{-1}y^{\beta+q}) \int_{p\mathbb{Z}_p} e(-a\xi p^{-1}y^\beta x) dx \right) dy, \end{aligned}$$

Se puede notar que  $\left| -a\xi p^{-1}y^\beta \right|_p = p$  entonces por ejemplo 1.6 se tiene que

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} e(-a\xi p^{-1}y^\beta x) dx = p^{-1},$$

con lo que se obtiene

$$\iint_{p\mathbb{Z}_p \times \mathbb{Z}_p^\times} e(p^{-1}\phi_\tau(x,y)) dx dy = p^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} e(ap^{-1}y^{\beta+q}) dy.$$

Analizando la otra expresión

$$\begin{aligned} \iint_{(\mathbb{Z}_p)^2} e(p^{-1}\phi_\tau(x,y)) dx dy &= \int_{\mathbb{Z}_p} \left( e(p^{-1}ay^{\beta+q}) \int_{\mathbb{Z}_p} e(-p^{-1}a\xi xy^\beta) dx \right) dy, \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} \left( e(p^{-1}ay^{\beta+q}) \int_{\mathbb{Z}_p} e(-p^{-1}a\xi xy^\beta) dx \right) dy \\ &\quad + \int_{p\mathbb{Z}_p} \left( e(p^{-1}ay^{\beta+q}) \int_{\mathbb{Z}_p} e(-p^{-1}a\xi xy^\beta) dx \right) dy, \end{aligned}$$

se puede notar que en la expresión

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} \left( e(p^{-1}ay^{\beta+q}) \int_{\mathbb{Z}_p} e(-p^{-1}a\xi xy^\beta) dx \right) dy$$

se tiene que  $\left| -p^{-1}a\xi y^\beta \right|_p = p$ , y en la expresión

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} \left( e(p^{-1}ay^{\beta+q}) \int_{\mathbb{Z}_p} e(-p^{-1}a\xi xy^\beta) dx \right) dy$$

se tiene que  $\left| -p^{-1}a\xi y^\beta \right|_p \leq 1$ , entonces por ejemplo 1.6 se tiene que en el primer caso

$$\int_{\mathbb{Z}_p} e(-p^{-1}a\xi xy^\beta) dx = 0,$$



y en el segundo

$$\int_{\mathbb{Z}_p} e(-p^{-1}a\xi xy^\beta)dx = 1,$$

por lo cual

$$\iint_{(\mathbb{Z}_p)^2} e(p^{-1}\phi_\tau(x,y))dxdy = \int_{p\mathbb{Z}_p} e(p^{-1}ay^{\beta+q})dy.$$

así

$$\begin{aligned} \int_{p\mathbb{Z}_p} e(p^{-1}ay^{\beta+q})dy &= \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}\phi_\tau(x,y))dxdy + p^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p^\times} e(ap^{-1}y^{\beta+q})dy + p^{-1}, \\ \left| \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}\phi_\tau(x,y))dxdy \right| &= \left| \int_{p\mathbb{Z}_p} e(p^{-1}ay^{\beta+q})dy - p^{-1} \left( \int_{\mathbb{Z}_p^\times} e(ap^{-1}y^{\beta+q})dy + 1 \right) \right|, \\ \left| \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}\phi_\tau(x,y))dxdy \right| &\leq \left| \int_{p\mathbb{Z}_p} e(p^{-1}ay^{\beta+q})dy \right| + \left| p^{-1} \left( \int_{\mathbb{Z}_p^\times} e(ap^{-1}y^{\beta+q})dy + 1 \right) \right|. \end{aligned}$$

Los anteriores cálculos fueron realizados para mostrar el por que de que en este caso se tenga que

$$\left| \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}\phi_\tau(x,y))dxdy \right| \leq Cp^{-1},$$

pero la integral que aparece al final no permite llegar a esta conclusión, por lo tanto se toma como

cierta mientras es resuelto este inconveniente, al suponer que

$$\left| \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}\phi_\tau(x,y))dxdy \right| \leq Cp^{-1},$$

esto implica que

$$|I_\tau^{2,2}| \leq C_\phi p^{-(1-\frac{1}{d_\tau})} p^{-s/d_\tau} \leq C_\phi p^{-s/d(\phi)}.$$

Ahora suponga que  $\tau$  es la cara principal. Entonces  $d_\tau = d(\phi)$ . Si  $d_\tau < 1$ , entonces  $\tau$  no puede contener cualquier punto en  $\mathbb{N}^2$  alejados de los ejes de coordenadas. Por lo tanto  $\alpha = \beta = 0$ ,  $M = 1$  y así  $\phi_\tau(x, y) = a(y^q - \xi x^m)$  para algún  $\xi \in \mathbb{Q}$ , entonces

$$\begin{aligned} d_\tau &= \frac{q\alpha + m\beta + qmM}{m+q}, \\ &= \frac{qm}{m+q}, \end{aligned}$$

y dado que  $d_\tau < 1$ , se tiene

$$\frac{qm}{m+q} < 1,$$

$$qm < m+q,$$

$$qm - q < m,$$

$$q(m-1) < m,$$

$$q < \frac{m}{m-1},$$

$$q \leq 1.$$

Dado que  $q \in \mathbb{N}$  se tiene  $q = 1$ , con lo cual  $\phi_\tau(x, y) = a(y - \xi x^m)$  así se obtiene que

$$\begin{aligned} \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}\phi_\tau(x, y)) dx dy &= \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}(a(y - \xi x^m))) dx dy, \\ &= \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}ay - p^{-1}a\xi x^m) dx dy, \\ &= \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}ay) e(-p^{-1}a\xi x^m) dx dy, \\ &= \int_{\mathbb{Z}_p^\times} e(p^{-1}ay) dy \int_{\mathbb{Z}_p^\times} e(-p^{-1}a\xi x^m) dx. \end{aligned}$$

por el Ejemplo 1.6 se tiene que

$$\int_{\mathbb{Z}_p^\times} e(p^{-1}ay) dy = -p^{-1},$$

y si  $m = 1$ , se tiene que

$$\left| \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}\phi_\tau(x, y)) dx dy \right| \leq Cp^{-2},$$

y

$$|I_\tau^{2,2}| \leq C_\phi p^{-(2-\frac{1}{d\tau})} p^{-s/d\tau} \leq C_\phi p^{-s/d(\phi)},$$

Cuando  $m \geq 2$ , se tiene que

$$\left| \int_{\mathbb{Z}_p^\times} e(-p^{-1}a\xi x^m) dx \right| \leq Cp^{-1/2},$$

la anterior cota aparece en *Wright* (2020), por lo cual

$$\left| \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}\phi_\tau(x, y)) dx dy \right| \leq Cp^{-3/2},$$

además en este caso, se tiene  $d_\tau = m/(m+1) \geq 2/3$  y así

$$|I_\tau^{2,2}| \leq C_\phi p^{-\left(\frac{3}{2} - \frac{1}{d_\tau}\right)} p^{-s/d_\tau} \leq C_\phi p^{-s/d(\phi)}.$$

Finalmente suponga que  $\tau$  es la cara principal pero  $d_\tau \geq 1$ . Dado que

$$\iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}(\phi_\tau(x,y))) dx dy = \iint_{\mathbb{Z}_p^2} e(p^{-1}(\phi_\tau(x,y))) dx dy + O(p^{-1}),$$

Se puede usar la cota de Cluckers Cluckers (2010) para concluir que

$$\left| \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}(\phi_\tau(x,y))) dx dy \right| \lesssim p^{-1/d_\tau},$$

lo cual implica

$$|I_\tau^{2,2}| \leq C_\phi p^{-s/d_\tau} \leq C_\phi p^{-s/d(\phi)},$$

por lo cual se ha probado la cota en todos los casos, y con esto se ha terminado el caso cuando  $\tau$  es una cara compacta.

Ahora se considera el caso donde  $\tau = (\alpha, \beta)$  es un vértice. Esto significa que  $\phi_\tau(x,y) = cx^\alpha y^\beta$  un monomio. Sin embargo, la suma sobre  $\bar{l}$  consistirá de más que solo múltiplos enteros de un vector fijo.

Asuma que  $\tau$  es el punto final de dos caras  $e_1$  y  $e_2$ , donde  $e_2$  está debajo (a la derecha de)  $\tau$  y  $e_1$

está sobre (a la izquierda de)  $\tau$ . Por lo tanto si los límites son compactos,

$$e_1 \subset \{(t_1, t_2) : q_1 t_1 + m_1 t_2 = n_1\} \text{ y } e_2 \subset \{(t_1, t_2) : q_2 t_1 + m_2 t_2 = n_2\}.$$

Para algunos enteros positivos  $(q_j, m_j), j = 1, 2$  con  $\text{mcd}(q_j, m_j) = 1$ . Por lo tanto se tendría que

$$\Delta_{e_1} = \left\{ (t_1, t_2) \left| t_2 = \frac{m_1}{q_1} t_1 \right. \right\},$$

$$\Delta_{e_2} = \left\{ (t_1, t_2) \left| t_2 = \frac{m_2}{q_2} t_1 \right. \right\}.$$

Si  $e_2$  es no acotado (esto es, es una línea horizontal), entonces  $e_2 \subset \{(t_1, t_2) : t_2 = \beta\}$ . De la misma forma si  $e_1$  es no acotada (vertical), entonces  $e_1 \subset \{(t_1, t_2) : t_1 = \alpha\}$ , por lo tanto, en este caso, se tiene que

$$\Delta_{e_1} = \{(t_1, t_2) | t_1 = t, t_2 = 0, t > 0\},$$

$$\Delta_{e_2} = \{(t_1, t_2) | t_1 = 0, t_2 = t, t > 0\}.$$

Ahora bien, si  $\vec{l} \in \Delta_\tau$ , con  $\vec{l} = (l_1, l_2)$  y  $e_1, e_2$  caras compactas se tiene que

$$\frac{m_1}{q_1} l_1 < l_2 < \frac{m_2}{q_2} l_1,$$

$$\frac{m_1}{q_1} < \frac{l_2}{l_1} < \frac{m_2}{q_2},$$

y se ve fácilmente que si alguno  $e_1$  o  $e_2$  son caras no acotadas, la restricción dada por esa cara se pierde.

Para continuar se puede asumir sin pérdida de generalidad que  $\alpha < \beta$ , ahora bien, en este caso se tendría que  $N(\vec{l}) = \alpha l_1 + \beta l_2$  entonces se tiene que

$$\begin{aligned} I_\tau &= \sum_{\vec{l} \in \Delta_\tau \cap \mathbb{N}^2} p^{-l_1 - l_2} \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-s+N(\vec{l})}(cx^\alpha y^\beta + pg_\tau(x,y))) dx dy, \\ &= \sum_{\substack{l_1, l_2 \geq 1 \\ \frac{m_1}{q_1} < \frac{l_2}{l_1} < \frac{m_2}{q_2}}} p^{-l_1 - l_2} \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-s+N(\vec{l})}(cx^\alpha y^\beta + pg_\tau(x,y))) dx dy. \end{aligned}$$

Por lo tanto, de nuevo, se tiene que el valor de la integral depende del valor de la expresión  $s - N(\vec{l})$ , entonces se toman tres casos análogos a los que se tomaron en el caso de  $\tau$  cara compacta, es decir, se descompone  $I_\tau = I_\tau^1 + I_\tau^2 + I_\tau^3$  en tres piezas acorde ya sea  $N(\vec{l}) \geq s$ ,  $N(\vec{l}) = s - 1$  y  $N(\vec{l}) \leq s - 2$ , respectivamente, en el primer caso se tiene que  $p^{-s+N(\vec{l})}(cx^\alpha y^\beta + pg_\tau(x,y)) \in \mathbb{Z}_p$ , así

$$e(p^{-s+N(\vec{l})}(cx^\alpha y^\beta + pg_\tau(x,y))) = 1,$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} I_\tau^1 &= \sum_{\substack{l_1, l_2 \geq 1 \\ N(\vec{l}) \geq s \\ \frac{m_1}{q_1} < \frac{l_2}{l_1} < \frac{m_2}{q_2}}} p^{-l_1 - l_2} \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} dx dy, \\ &= (1 - p^{-1})^2 \sum_{\substack{l_1, l_2 \geq 1 \\ N(\vec{l}) \geq s \\ \frac{m_1}{q_1} < \frac{l_2}{l_1} < \frac{m_2}{q_2}}} p^{-l_1 - l_2}. \end{aligned}$$

Ahora se centra la atención en la expresión

$$\sum_{\substack{l_1, l_2 \geq 1 \\ N(\vec{l}) \geq s \\ \frac{m_1}{q_1} < \frac{l_2}{l_1} < \frac{m_2}{q_2}}} p^{-l_1 - l_2},$$

como  $e_1$  y  $e_2$  son caras compactas, entonces

$$d_{e_1} = \frac{n_1}{m_1 + q_1},$$

$$d_{e_2} = \frac{n_2}{m_2 + q_2},$$

y dado que  $\tau = e_1 \cap e_2$  se tiene que

$$q_1 \alpha + m_1 \beta = n_1,$$

$$q_2 \alpha + m_2 \beta = n_2.$$

Ahora bien, para todo  $\vec{l} \in \Delta_\tau$  se tiene

$$N(\vec{l}) = \alpha l_1 + \beta l_2,$$

$$l_2 = \frac{N(\vec{l})}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta} l_1.$$

Por lo cual

$$\begin{aligned}
 \frac{m_1}{q_1} &< \frac{l_2}{l_1} < \frac{m_2}{q_2}, \\
 \frac{m_1}{q_1} &< \frac{\frac{N(\vec{l})}{\beta} - \frac{\alpha}{\beta}l_1}{l_1} < \frac{m_2}{q_2}, \\
 \frac{m_1}{q_1} &< \frac{N(\vec{l})}{\beta l_1} - \frac{\alpha}{\beta} < \frac{m_2}{q_2}, \\
 \frac{m_1}{q_1} + \frac{\alpha}{\beta} &< \frac{N(\vec{l})}{\beta l_1} < \frac{m_2}{q_2} + \frac{\alpha}{\beta}, \\
 \frac{m_1\beta + q_1\alpha}{q_1\beta} &< \frac{N(\vec{l})}{\beta l_1} < \frac{m_2\beta + q_2\alpha}{q_2\beta}, \\
 \frac{n_1}{q_1\beta} &< \frac{N(\vec{l})}{\beta l_1} < \frac{n_2}{q_2\beta}, \\
 \frac{q_2\beta}{n_2} &< \frac{\beta l_1}{N(\vec{l})} < \frac{q_1\beta}{n_1}, \\
 \frac{q_2\beta}{n_2} &< \frac{\beta l_1}{N(\vec{l})} < \frac{q_1\beta}{n_1}, \\
 \frac{q_2N(\vec{l})}{n_2} &< l_1 < \frac{q_1N(\vec{l})}{n_1},
 \end{aligned}$$

dado que

$$l_1 + l_2 = \frac{N(\vec{l})}{\beta} + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)l_1.$$



Se tiene que

$$\sum_{\substack{l_1, l_2 \geq 1 \\ s - N(\vec{l}) \leq 0 \\ \frac{m_1}{q_1} < \frac{l_2}{l_1} < \frac{m_2}{q_2}}} p^{-l_1 - l_2} \leq \sum_{\substack{N(\vec{l}) \geq s \\ \frac{q_2 N(\vec{l})}{n_2} < l_1 < \frac{q_1 N(\vec{l})}{n_1}}} p^{-\left(\frac{N(\vec{l})}{\beta} + \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)l_1\right)},$$

$$= \sum_{N(\vec{l}) \geq s} \left( p^{-\frac{N(\vec{l})}{\beta}} \sum_{\frac{q_2 N(\vec{l})}{n_2} < l_1 < \frac{q_1 N(\vec{l})}{n_1}} p^{-\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)l_1} \right),$$

$$\sum_{\substack{l_1, l_2 \geq 1 \\ s - N(\vec{l}) \leq 0 \\ \frac{m_1}{q_1} < \frac{l_2}{l_1} < \frac{m_2}{q_2}}} p^{-l_1 - l_2} \leq \sum_{N(\vec{l}) \geq s} \left( p^{-\frac{N(\vec{l})}{\beta}} \sum_{l_1 \geq \left\lceil \frac{q_2 N(\vec{l})}{n_2} \right\rceil} p^{-\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)l_1} \right),$$

como

$$\sum_{l_1 \geq \left\lceil \frac{q_2 N(\vec{l})}{n_2} \right\rceil} p^{-\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)l_1} = \frac{p^{-\left\lceil \frac{q_2 N(\vec{l})}{n_2} \right\rceil \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}}{1 - p^{-\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}} \leq \frac{p^{-\frac{q_2 N(\vec{l})}{n_2} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}}{1 - p^{-\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}},$$

se tiene que

$$\sum_{N(\vec{l}) \geq s} \left( p^{-\frac{N(\vec{l})}{\beta}} \sum_{l_1 \geq \left\lceil \frac{q_2 N(\vec{l})}{n_2} \right\rceil} p^{-\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)l_1} \right) \leq \sum_{N(\vec{l}) \geq s} p^{-\frac{N(\vec{l})}{\beta}} \left( \frac{p^{-\frac{q_2 N(\vec{l})}{n_2} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}}{1 - p^{-\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}} \right),$$

$$= \frac{1}{1 - p^{-\left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)}} \sum_{N(\vec{l}) \geq s} p^{N(\vec{l}) \left(-\left(\frac{1}{\beta} + \frac{q_2}{n_2} \left(1 - \frac{\alpha}{\beta}\right)\right)\right)},$$

ya que

$$\begin{aligned} \sum_{N(\vec{l}) \geq s} p^{N(\vec{l}) \left( -\left( \frac{1}{\beta} + \frac{q_2}{n_2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right) \right)} &\leq \frac{p^{-s \left( \frac{1}{\beta} + \frac{q_2}{n_2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right)}}{1 - p^{-\left( \frac{1}{\beta} + \frac{q_2}{n_2} \left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) \right)}}, \\ &= \frac{p^{-\frac{s}{de_2}}}{1 - p^{-\frac{1}{de_2}}}, \end{aligned}$$

entonces

$$\sum_{N(\vec{l}) \geq s} \left( p^{-\frac{N(\vec{l})}{\beta}} \sum_{l_1 \geq \left\lceil \frac{q_2 N(\vec{l})}{n_2} \right\rceil} p^{-\left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right) l_1} \right) \leq \frac{p^{-\frac{s}{de_2}}}{\left( 1 - p^{-\left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right)} \right) \left( 1 - p^{-\frac{1}{de_2}} \right)},$$

así

$$|I_\tau^1| \leq \frac{(1 - p^{-1})^2}{\left( 1 - p^{-\left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right)} \right) \left( 1 - p^{-\frac{1}{de_2}} \right)} p^{-\frac{s}{de_2}},$$

se puede notar que

$$\frac{(1 - p^{-1})^2}{\left( 1 - p^{-\left( 1 - \frac{\alpha}{\beta} \right)} \right) \left( 1 - p^{-\frac{1}{de_2}} \right)} < 2,$$

por lo tanto para  $C > 2$  se tiene que

$$|I_\tau^1| \leq C p^{-\frac{s}{de_2}}.$$

Ahora, si  $e_1$  no es una cara acotada, se procede de forma análoga.

Cuando  $\alpha = \beta$  entonces,

$$I_{\tau}^1 = (1 - p^{-1})^2 \sum_{N(\vec{l}) \geq s} \left( p^{-\frac{N(\vec{l})}{\beta}} \sum_{l_1 + l_2 = \frac{N(\vec{l})}{\beta}} 1 \right),$$

y se puede verificar que

$$\sum_{l_1 + l_2 = \frac{N(\vec{l})}{\beta}} 1 < N(\vec{l}),$$

por lo tanto

$$\begin{aligned} I_{\tau}^1 &\leq (1 - p^{-1})^2 \sum_{N(\vec{l}) \geq s} N(\vec{l}) p^{-\frac{N(\vec{l})}{\beta}}, \\ &\leq (1 - p^{-1})^2 s \sum_{N(\vec{l}) \geq s} p^{-\frac{N(\vec{l})}{\beta}}, \\ &\leq \frac{(1 - p^{-1})^2}{(1 - p^{-\frac{1}{\beta}})} s p^{-\frac{s}{\beta}}, \end{aligned}$$

y ya que  $\beta = d_{e_2}$  se tiene que

$$|I_{\tau}^1| \leq \frac{(1 - p^{-1})^2}{(1 - p^{-\frac{1}{d_{e_2}}})} s p^{-\frac{s}{d_{e_2}}},$$

se puede verificar que

$$\frac{(1 - p^{-1})^2}{(1 - p^{-\frac{1}{d_{e_2}}})} < 2,$$

así para  $C > 2$  se tiene que

$$|I_{\tau}^1| \leq C s p^{-\frac{s}{d_{e_2}}}.$$

Con esto se concluye que

$$|I_\tau^1| \leq \begin{cases} Cp^{-s/d_{e_2}} & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ Csp^{-s/d_{e_2}} & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Para continuar se pondrá atención a

$$I_\tau^3 = \sum_{\substack{l_1, l_2 \geq 1 \\ s - N(\bar{l}) \geq 2 \\ m_1/q_1 < l_2/l_1 < m_2/q_2}} p^{-l_1 - l_2} \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-s + N(\bar{l})} \varphi_\tau(x, y)) dx dy,$$

donde  $\varphi_\tau(x, y) = cx^\alpha y^\beta + pg_\tau(x, y)$ . Dado que  $\nabla \varphi(x, y) \not\equiv 0 \pmod{p}$  para cualquier  $(x, y) \in (\mathbb{Z}_p^\times)^2$ , el mismo argumento que se uso anteriormente para mostrar que  $\mathcal{I}_0 = 0$  muestra que  $I_\tau^3 = 0$ .

Finalmente, el procedimiento de

$$I_\tau^2 = \sum_{\substack{l_1, l_2 \geq 1 \\ N(\bar{l}) = s - 1 \\ m_1/q_1 < l_2/l_1 < m_2/q_2}} p^{-l_1 - l_2} \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1} cx^\alpha y^\beta) dx dy,$$

se sigue en la misma línea para  $I_\tau^1$  mostrando que la cota para  $I_\tau^1$  se mantiene para  $I_\tau^2$ .

Se puede verificar que

$$\sum_{\substack{l_1, l_2 \geq 1 \\ N(\bar{l}) = s - 1 \\ m_1/q_1 < l_2/l_1 < m_2/q_2}} p^{-l_1 - l_2} \leq \begin{cases} Cp^{-s/d_{e_2}} & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ Csp^{-s/d_{e_2}} & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Además, se ha visto que

$$\iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}cx^\alpha y^\beta) dx dy \leq C_\phi p^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{d_\tau}\right)},$$

con lo que se tiene que

$$|I_\tau^2| \leq p^{-\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{d_{e_2}}\right)} \begin{cases} C_\phi p^{-s/d_{e_2}}, & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ C_\phi s p^{-s/d_{e_2}}, & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

Se puede ver que la cota para  $I_\tau^2$  depende del valor de  $d_{e_2}$ , cuando  $d_{e_2} \geq 2$ , se tiene la cota que se quiere comprobar, ahora, si  $d_{e_2} < 2$  se tiene que  $\alpha = 1$  por lo cual  $1 \leq d_{e_2} < 2$ , (aquí se supone que  $\alpha < \beta$ ), por lo tanto

$$\iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}cxy^\beta) dx dy = (1 - p^{-1}) \int_{\mathbb{Z}_p^\times} e(cz) dz = -(1 - p^{-1})p^{-1},$$

el anterior procedimiento se realiza haciendo la sustitución  $z = xy^\beta$ , con lo que se tiene

$$|I_\tau^2| \leq p^{-\left(1 - \frac{1}{d_{e_2}}\right)} \begin{cases} C_\phi p^{-s/d_{e_2}} & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ C_\phi s p^{-s/d_{e_2}} & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

y se obtiene la cota requerida. Por lo tanto se concluye que

$$|I_\tau| \leq \begin{cases} C_\phi p^{-s/d_{e_2}} & \text{si } \alpha \neq \beta, \\ C_\phi s p^{-s/d_{e_2}} & \text{si } \alpha = \beta. \end{cases}$$

y como  $d_{e_2} \leq d(\phi)$  y el caso  $\alpha = \beta$  se tiene cuando  $\tau$  es la cara principal, la anterior cota da una buena contribución al Teorema 3.8.

Por último, cuando el vértice  $\tau = (1, 1)$ , entonces  $\tau = \pi(\phi)$  y  $d(\phi) = 1$ .

De nuevo se lleva a cabo la descomposición  $I_\tau = I_\tau^1 + I_\tau^2 + I_\tau^3$  donde  $I_\tau^3 = 0$  y en este caso

$$I_\tau^1 = (1 - p^{-1})^2 \sum_{\substack{N(\bar{i}) \geq s \\ m_1/q_1 < l_2/l_1 < m_2/q_2}} p^{-l_1 - l_2},$$

entendiendo que  $l_1, l_2 \geq 1$  y si uno de los límites  $e_1$  y/o  $e_2$  es no acotado, entonces la correspondiente restricción sobre el radio  $l_2/l_1$  no aparece. También

$$I_\tau^2 = \sum_{\substack{l_1, l_2 \geq 1 \\ N(\bar{i}) = s-1 \\ m_1/q_1 < l_2/l_1 < m_2/q_2}} p^{-l_1 - l_2} \iint_{(\mathbb{Z}_p^\times)^2} e(p^{-1}cxy) dx dy,$$

así que se puede escribir

$$I_\tau^2 = -(1 - p^{-1})p^{-1} \sum_{\substack{N(\bar{i}) = s-1 \\ m_1/q_1 < l_2/l_1 < m_2/q_2}} p^{-l_1 - l_2}.$$

Se puede ver que cuando  $\tau = (1, 1)$ ,  $I_\tau$  es una diferencia de dos sumas explícitas de términos positivos. Un análisis cuidadoso de esta diferencia exhibirá la cancelación adicional que se busca. Se mostrará esto cuando los límites  $e_1$  y  $e_2$  son ambos infinitos así la restricción sobre  $\bar{l} = (l_1, l_2)$  son  $l_1, l_2 \geq 1$  y cualquiera  $N(\bar{l}) \geq s$  o  $N(\bar{l}) = s - 1$ . El caso cuando un límite (o ambos) es compacto es similar. En este caso,  $N(\bar{l}) = l_1 + l_2$  y así

$$I_\tau^1 = (1 - p^{-1})^2 \sum_{\substack{l_1, l_2 \geq 1 \\ l_1 + l_2 \geq s}} p^{-l_1 - l_2} = (1 - p^{-1})^2 \sum_{N \geq s} (N - 1) p^{-N},$$

y por la fórmula de la serie geométrica

$$I_\tau^1 = (s - 1)p^{-s} - (s - 2)p^{-s-1}.$$

En una similar pero fácil manera,

$$I_\tau^2 = -(1 - p^{-1})p^{-1} \sum_{\substack{l_1, l_2 \geq 1 \\ l_1 + l_2 = s-1}} p^{-l_1 - l_2} = -(1 - p^{-1})(s - 2)p^{-s},$$

y así  $I_\tau = I_\tau^1 + I_\tau^2 = p^{-s}$  lo cual muestra la cancelación deseada entre los dos términos  $I_\tau^1$  y  $I_\tau^2$ .

Esto completa la demostración de los literales (a) y (b) del Teorema 3.9.

**Referencias Bibliográficas**

- Albarracín Mantilla, A. y León Cardenal, E. (2018). Igusa's local zeta functions and exponential sums for arithmetically non degenerate polynomials. *Journal de Théorie des Nombres de Bordeaux*, 30(1):331–354.
- Cluckers, R. (2010). Exponential sums: questions by denef, sperber, and igusa. *Trans. Amer. Math. Soc.*, page 3745–3756.
- Cluckers R. Mustatǎ, M. y Nguyen, K. (2019). Igusa's conjecture for exponential sums: optimal estimates for nonrational singularities. *Forum Math.*
- Denef, J. y Sperber, S. (1987). Igusa's conjecture for exponential sums: optimal estimates for nonrational singularities. *Bulletin (New Series) of the american mathematical society.*, 16(2):282–286.
- Fraser, R. y Wright, J. (2020). On the local sum conjecture in two dimensions. *International Journal of Number Theory.*
- Hoornaert, K. (2002). Newton polyhedra and the poles of igusa's local zeta function. *Bulletin of the Belgian Mathematical Society*, page 589–606.
- Ikromov, A. y Müller, D. (2011). On adapted coordinate systems. *Transactions of the american mathematical society*, 363(6):2821–2848.
- Katok, S. (2007). *p-adic analysis compared with Real*. Student mathematical library.



Koblitz, N. (1977). *p-adic numbers, p-adic analysis, and zeta-functions*. Springer-Verlag, New York Inc.

Korobov, N. M. (1992). *Exponential sums and their applications*. Springer.

Lichtin, B. (2013). On a conjecture of Igusa. *Mathematika*, 59(2):339–425.

Vladimirov V. S, Volovich I. V, Z. E. I. (1994). *p-adic analysis and mathematical physics*. World Scientific Publishing Co. Pte. Ltd.

Weil, A. (1948). On some exponential sums. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, page 204–207.

Wright, J. (2020). On a conjecture of Igusa in two dimensions. *American Journal of Mathematics*, 142(4):1193–1238.