Una introducción a la ecuación Benjamin-Ono

José Camilo Rueda Niño

Trabajo de Grado para optar al título de Matemático

Director

Gilberto Arenas Díaz

Doctor en Ciencias Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2021

Dedicatoria

Este trabajo viene dedicado para todas aquellas personas que apoyaron el desarrollo y ejecución de este trabajo de grado.

En especial reconozco la permanente presencia de Dios en mi camino de vida.

Agradecimientos

En primer lugar le agradezco a Dios por permitirme conseguir esta meta.

Quiero expresar un agradecimiento sincero a el profesor Gilberto Arenas por guiarme a lo largo de la tesis, por todas sus recomendaciones, su dedicación y empeño.

Agradezco a mis padres por todo el apoyo que me brindaron a lo largo de toda la carrera, también a aquellos que me brindaron su apoyo en algún momento Memo, Celis, Johan, Edson, Elian y a mi pareja Silvia. Quiero también expresar mis sinceros agradecimientos a los profesores Jhean y Diego por sus correcciones que ayudaron a mejorar el trabajo.

Tabla de Contenido

Lista de Figuras

Resumen

Título: Una introducción a la ecuación Benjamin-Ono *

Autor: José Camilo Rueda Niño **

Palabras Clave: Ondas Viajeras, Problema de Cauchy, Ecuación Diferencial Parcial, Buen Planteamiento.

Descripción: La ecuación Benjamin-Ono es una ecuación diferencial parcial no lineal dispersiva que posee importancia en el estudio de fenómenos que están relacionados con ondas de agua, y el análisis matemático, no solo eso, también esta ecuación ha permitido desarrollar diversos modelos y es utilizada en diversos campos.

El presente trabajo tiene como objetivo mostrar algunas nociones históricas acerca del estudio de ondas estacionarias que dieron origen a la ecuación Benjamin-Ono, describiendo las observaciones de Russell que fueron la base para el planteamiento de la ecuación KdV que sirvió como inspiración para Benjamin al plantear su modelo, que luego sería estudiado por Ono. Por consiguiente, se mostrará el proceso de deducción para la ecuación Benjamin-Ono.

Adicionalmente, con base en los problemas de Cauchy planteados por Iorio para la ecuación Benjamin-Ono en José Iório (1986); Iório Jr (1991) se estudiará el buen planteamiento para uno de los problemas en los espacios $H^s(\mathbb{R})$, tal que $s \in \mathbb{R}$ y $\mathscr{F}_r = H^r(\mathbb{R}) \cap L_r^2(\mathbb{R})$, con $r = 0,1,2$, mientras que para el otro problema de Cauchy se mostrará que existe un único elemento u_μ tal que pertenece a $C([0,T_s];H^s(\mathbb{R}))$ y su derivada con respecto al tiempo pertenece a $C\left([0,T_s];H^{s-2}(\mathbb{R})\right)$ tal que satisface dicho problema de Cauchy.

---

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Gilberto Arenas Díaz, Doctor en Ciencias Matemáticas.

Abstract

Title: An introduction to Benjamin-Ono equation *

Author: José Camilo Rueda Niño **

Keywords: Travelling wave, Cauchy problem, Partial Differential Equation, Well posedness.

Description: The Benjamin-Ono equation is a nonlinear dispersive partial differencial equation highly important in the study of standing waves and mathematical analysis, also, this equation has allowed the development of many models and it is used in many fields of knowledge.

this work has as purpose show some historical notions about the standing waves study which gave origin to te benjamin-ono equation, describing Russell's observations that were the foundation for the planning of the KdV equation that were an inspiration to benjamin to plan his model, later studied by Ono. Also the deduction process for this equation will be shown.

Furthermore, based on Cauchy problems presented by Iorio in José Iório (1986); Iório Jr (1991)) we will study it's well-posed for one of the problems in the spaces $H^s(\mathbb{R})$, such that $s \in \mathbb{R}$ and $\mathscr{F}_r = H^r(\mathbb{R}) \cap L^2_r(\mathbb{R})$, whit $r = 0, 1, 2$, while for the other cauchy problem it will be shown that exists an unique element u_μ such that belows to $C\left([0, T_s]; H^s(\mathbb{R})\right)$ and its derivate with respect to time belows to $C\left([0, T_s]; H^{s-2}(\mathbb{R})\right)$ such that it satisfies said cauchy problem.

---

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Gilberto Arenas Díaz, Doctor en Ciencias Matemáticas.

Introducción

Desde mediados del siglo XIX ha habido un enorme y creciente interés por parte de matemáticos y físicos en estudiar las soluciones más simples para un modelo dispersivo, conocidas hoy como ondas viajeras (ondas permanentes). Las ondas viajeras existen como consecuencia de un equilibrio entre los efectos de tipo dispersivo y los efectos de tipo no lineal presentes en un sistema; estas ondas viajan con una velocidad constante sin ninguna evolución temporal en forma o tamaño cuando el marco de referencia se mueve con la misma velocidad de la onda. Las investigaciones han demostrado que este tipo de soluciones especiales aparecen en diversos campos, como la mecánica de fluidos, la acústica, la óptica, la oceanografía, entre otros, ver Ferri et al. (2020); Bauza et al. (2005); Chen et al. (2014); Levario-Diaz et al. (2020). Las ondas viajeras están presentes en líquidos, sólidos, gases, corrientes eléctricas, campos electromagnéticos, atmósferas de planetas, cristales, plasmas, incluso en el cuerpo debido a que el sistema genético de nuestro organismo también opera en niveles de ondas las cuales ayudan a la transferencia de datos a través de ondas electromagnéticas y acústicas.

Debido a las características que poseen las ondas viajeras, ellas forman una clase especial de soluciones a algunas ecuaciones diferenciales parciales dispersivas no lineales, determinar la existencia y propiedades de tales soluciones es un problema de gran interés tanto para matemáticos puros como aplicados.

Dos de las ecuaciones diferenciales parciales dispersivas no lineales más relevantes son: la ecuación Korteweg de-Vries (KdV) que surge en el estudio de ondas de agua de gran elongación y de pequeña amplitud, y la ecuación Benjamin-Ono (BO) que surge en el estudio de ondas internas en fluidos estratificados en aguas profundas. La relevancia de estos modelos se debe, no solo a la teoría matemática que involucra su estudio y el número de problemas abiertos asociados que aún persisten, sino a lo sugestivas que ellas resultan a la hora de abordar problemas relacionados.

Sin embargo, cuando se acude a la literatura, se observa que, en su mayoría, el material relativo al estudio de estas ecuaciones, tiene un enfoque de contenido teórico muy abstracto y avanzado. Esto motivó a plantear el presente trabajo de disertación, que tiene como propósito realizar un estudio de la ecuación Benjamin-Ono, que aunque introductorio, permita realizar un primer acercamiento teórico formal, de manera tal que un lector, que esté en sus inicios en el estudio de la ecuación Benjamin-Ono, pueda tener una primera radiografía de lo que es el modelo, los aspectos más relevantes detrás de su origen, el espectro de sus aplicaciones, y el tipo de herramientas matemáticas necesarias para el análisis de existencia de solución.

El presente trabajo se ha organizado de la siguiente forma: En el primer capítulo, se realizará una revisión a algunos conceptos y resultados relevantes que serán de utilidad a lo largo del trabajo. Se iniciará revisando el concepto de la transformada de Hilbert, junto algunas de sus propiedades básicas, para posteriormente mostrar una caracterización de la transformada de Hilbert mediante la ecuación de Laplace. A continuación se realiza una revisión de los espacios $L^p(\mathbb{R})$; además se revisa la definición de la transformada de Fourier así como de la transformada inversa, adicionalmente se muestra un resultado acerca la transformada de Fourier en los espacios $L^p(\mathbb{R})$. Luego de esto, se introduce el espacio de Schwartz $\mathscr{S}$, y el espacio de las distribuciones temperadas $\mathscr{S}'$ como dual topológico de $\mathscr{S}$. También, se define los espacios de Sobolev de tipo $L^2(\mathbb{R})$, que se denotan usualmente como $H^s(\mathbb{R}^n)$, por medio del espacio de las distribuciones temperadas, adicionalmente se mencionan algunos resultados de estos espacios y para finalizar esta sección se definen los espacios $L_r^2(\Omega)$ y $\mathscr{F}_r = H^s(\mathbb{R}) \cap L_r^2(\mathbb{R})$ junto a un resultado que será de utilidad. Por último, se introducen ciertas nociones básicas de semigrupos.

En el segundo capítulo, se presentarán algunas nociones históricas acerca del origen de las ondas viajeras, como los experimentos realizados por John Scott Russel, así como un repaso a las ideas que dieron origen a una ecuación que modele este tipo de ondas, dicha ecuación conocida como la ecuación KdV, luego se muestran algunas de las ideas planteadas por Benjamin y ono en Benjamin (1966); Ono (1975) que permitieron llegar a la ecuación Benjamin-Ono. Seguido de esto, basados en estos trabajos se mostrará la deducción del modelo a partir de lo realizado por Benjamin y Ono.

Por último, se estudiará un problema de Cauchy planteado por Iorio en José Iório (1986)

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathscr{H}(u_\mu)\right), \quad u_\mu(0) = \phi, \tag{1}$$

donde $\mu \geq 0$. Para el estudio del buen planteamiento en los espacios $H^s(\mathbb{R})$, tal que $s \in \mathbb{R}$ y $\mathscr{F}_r = H^r(\mathbb{R}) \cap L_r^2(\mathbb{R})$, con $r = 0, 1, 2$. Adicionalmente, se estudiará el siguiente problema de Cauchy

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} = -\mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(u_\mu^2 + 2\mathscr{H}\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x}\right)\right), \quad u_\mu(0) = \phi, \tag{2}$$

donde $\mu > 0$, donde mostraremos que existe un único elemento u_μ tal que pertenece a

$C\left([0,T_s];H^s(\mathbb{R})\right)$ y su derivada con respecto al tiempo pertenece a $C\left([0,T_s];H^{s-2}(\mathbb{R})\right)$ tal que satisface el problema de Cauchy anterior.

1. Resultados preliminares

Para comodidad del lector, en esta sección se incluirán algunas definiciones, notaciones estándares y resultados importantes que se emplearán a lo largo del trabajo.

1.1. Transformada de Hilbert y algunas de sus propiedades

Definición 1.1. *La transformada de Hilbert de una función $f(t)$, la cual se denota $\mathscr{H}(f)(t)$, se define de la siguiente forma para todo $t \in \mathbb{R}$*

$$\mathscr{H}(f)(t) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{t-\tau}\,d\tau, \tag{3}$$

siempre que exista dicha integral. La expresión $\mathrm{p.v.}\int$ indica que la integral es en el sentido del valor principal.[1]

El propósito de tomar la integral en el sentido del valor principal es para ampliar la clase

---

[1] Sea $[a,b]$ un intervalo de números reales, y f una función en los complejos definida sobre $[a,b]$. Si f es no acotada cerca a un punto interior ξ del intervalo $[a,b]$, la integral de f sobre $[a,b]$ no existe siempre. Pero en cierto caso puede ocurrir que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_a^{\xi-\varepsilon} f(x)dx \text{ y } \lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\xi+\varepsilon}^{b} f(x)dx,$$

existan, por lo tanto la suma de estos dos límites es conocida como la integral impropia de f sobre $[a,b]$. En caso de que estos dos límites no existan puede ocurrir que el límite simétrico exista, dicho límite puede escribirse de la siguiente forma

$$\lim_{\varepsilon\to 0^+}\left(\int_a^{\xi-\varepsilon} f(x)dx + \int_{\xi+\varepsilon}^{b} f(x)dx\right),$$

en caso tal que exista, es llamado como la integral en el sentido del valor principal.

de funciones para las cuales la integral está definida, debido al polo que presenta $\dfrac{f(\tau)}{t-\tau}d\tau$ en $t=\tau$.

Teorema 1.2. *Sean $f(x), g(x), f'(x)$ funciones tales que su transformada de Hilbert exista, entonces*

a. La transformada de Hilbert es lineal, es decir,

$$\mathscr{H}(c_1 f + c_2 g)(t) = c_1\mathscr{H}(f)(t) + c_2\mathscr{H}(g)(t).$$

b. La derivada de la transformada de Hilbert es la transformada de la derivada, es decir,

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathscr{H}(f)(t)) = \mathscr{H}(f')(t).$$

c. Si se le aplica la transformada de Hilbert dos veces a una función real nos genera la misma función pero con signo contrario, es decir, $\mathscr{H}^2 = -I$. En general se tiene que

$$\mathscr{H}^n(f)(t) = (i\,\mathrm{sgn}(\tau))^n f(\tau).$$

Demostración. a. En primer lugar se considera la transformada de Hilbert de $c_1 f + c_2 g$

$$\begin{aligned}\mathscr{H}(c_1 f + c_2 g)(t) &= \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_1 f(\tau) + c_2 g(\tau)}{t-\tau}\,d\tau = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{c_1 f(\tau)}{t-\tau} + \frac{c_2 g(\tau)}{t-\tau}\,d\tau,\\ &= \frac{1}{\pi}\left(c_1\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{t-\tau}\,d\tau + c_2\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{g(\tau)}{t-\tau}\,d\tau\right),\end{aligned}$$

esto último se tiene debido a que la transformada Hilbert de f y g existen, por lo tanto se puede concluir que

$$\mathscr{H}(c_1 f + c_2 g)(t) = c_1 \mathscr{H}(f)(t) + c_2 \mathscr{H}(g)(t)$$

lo cual es lo que se quería probar.

b. En primer lugar, se considera lo siguiente

$$\frac{d}{dt}\mathscr{H}(f)(t) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)}{\tau - t}d\tau = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\frac{d}{dt}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau + t)}{\tau}d\tau,$$

bastaría aplicar la regla de Leibniz[2] para integrales para obtener que

$$\frac{d}{dt}\mathscr{H}(f)(t) = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f'(\tau + t)}{\tau}d\tau = \frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f'(\tau)}{\tau - t}d\tau = \mathscr{H}(f')(t),$$

donde $f'(t)$ es la derivada de $f(t)$ con respecto a t.

c. La prueba para este ítem puede verse en Johansson (1999).

$\square$

---

[2] Sea $f(x,t)$ una función diferenciable sobre $[a,b]$, entonces

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^b f(x,t)dt\right) = \int_a^b \frac{\partial}{\partial x} f(x,t)dt.$$

Observación 1.3. *También existe una caracterización de la transformada de Hilbert por medio de la ecuación de Laplace*

$$\frac{\partial^2 V(X,y,\tau,\varepsilon)}{\partial X^2}+\frac{\partial^2 V(X,y,\tau,\varepsilon)}{\partial y^2}=O\left(\varepsilon^2\right),$$

dotada por las siguientes condiciones

$$\begin{array}{l} V(X,y,\tau,\varepsilon)\to 0 \quad \textit{cuando} \quad y\to+\infty \\ V(X,y,\tau,\varepsilon)=V_0(X,\tau,\varepsilon) \quad \textit{para} \quad y=h_0 \end{array},$$

donde V_0 es una función dada. Este problema tiene como solución la función

$$V(X,y,\tau,\varepsilon)=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty}V_0\left(X',\tau,\varepsilon\right)\frac{y-h_0}{\left(y-h_0\right)^2+\left(X-X'\right)^2}\,\mathrm{d}X'. \tag{4}$$

Si en esta expresión se considera $V_0(X,\tau,\varepsilon)=-\dfrac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial\xi}$ y se deriva con respecto a y se puede afirmar que

$$\frac{\partial V\left(X,h_0,\tau,\varepsilon\right)}{\partial y}=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f\left(\xi',\tau\right)}{\xi-\xi'}\mathrm{d}\xi'.$$

Por último si se toma $\mathrm{z}=\xi'$ se puede afirmar afirmar que la expresión anterior es igual a $\mathscr{H}\{f(\mathrm{z})\}$. Este resultado se puede ver en Ono (1975).

En caso tal de que se quiera profundizar los conceptos mencionados en esta sección se puede revisar Johansson (1999).

1.2. Espacios de funciones

En esta sección se hablará de ciertos espacios de funciones que serán de utilidad a lo largo del documento, para esto se comenzará dando la definición de los espacios de Lebesgue. Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. Para $1 \leq p < \infty$ se define el espacio $L^p(\Omega)$ de la siguiente forma

$$L^p(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ es medible y } \int_\Omega |f(x)|^p dx < \infty \right\},$$

con norma definida como

$$\|f\|_{L^p(\Omega)} = \left(\int_\Omega |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

En el caso de que $p = \infty$ se definirá el espacio $L^\infty(\Omega)$ de la siguiente forma

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ f : \Omega \to \mathbb{R}^n \mid f \text{ es medible y } \|f\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty \right\},$$

donde su norma esta definida como

$$\|f\|_{L^\infty(\Omega)} = \sup_{x \in \Omega} \text{ess} |f(x)|.$$

Otra definición de importancia es la transformada de Fourier, por lo tanto, se define la transformada de Fourier de una función $f(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$ como

$$\widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) e^{-2\pi i (x \cdot \xi)} dx, \quad \text{para todo } \xi \in \mathbb{R}^n,$$

donde $(x \cdot \xi)$ es el producto punto usual, es decir $(x \cdot \xi) = x_1\xi_1 + x_2\xi_2 + \cdots + x_n\xi_n$. Usualmente es denotada como $\mathscr{F}(f(\xi))$ o $\widehat{f}(\xi)$.

Proposición 1.4. *Sea* $f(x), \widehat{f(x)} \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Entonces* $(\widehat{f(x)})^\vee = \widehat{f(x)^\vee(x)} = f(x)$ *ctp; donde* $f^\vee$ *denota la transformada inversa de Fourier definida como*

$$f^\vee(x) = \int_{\mathbb{R}^n} e^{2\pi i(x\cdot\xi)} \widehat{f}(\xi) d\xi. \tag{5}$$

Proposición 1.5. *Sea* $f \in L^1(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$. *Entonces* $\widehat{f} \in L^2(\mathbb{R}^n)$, *más aún*

$$\|\widehat{f}\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

La demostración de las dos proposiciones anteriores puede verse en Linares and Ponce (2014). Un espacio que será de interés en el documento es el espacio de Schwartz por lo tanto consideremos lo siguiente, para cada par de multi-índices[3] ν, β se define la siguiente seminorma

$$\|f\|_{(\nu,\beta)} = \left\| x^\nu \partial_x^\beta f \right\|_{L^\infty(\Omega)},$$

[3] Un multi-índice α es una n-tupla de números enteros, es decir, $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$. La norma de α, $|\alpha|$, es definida como $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$.

con esta seminorma en mente, se puede definir el espacio de Schwartz de la siguiente forma

$$\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) = \left\{\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n) : \|\varphi\|_{(\nu,\beta)} < \infty \text{ para todo } \nu, \beta\right\}.$$

Teniendo en cuenta la definición del espacio de Schwartz se estudiará el espacio de las funciones temperadas para mostrar una caracterización de los espacios de Sobolev.

Definición 1.6. *Sea $f : \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathbb{C}$ se dice que pertenece al espacio de distribuciones temperadas, es decir, al dual topológico del espacio de Schwartz, si se satisface que*

1. *f es lineal.*
2. *f es continua, es decir, sea $\left\{\varphi_j\right\}$ una sucesión en $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ tal que $\varphi_j \to 0$ cuando $j \to \infty$, entonces $f\left(\varphi_j\right) \to 0$ cuando $j \to \infty$.*

Definición 1.7. *Sea $s \in \mathbb{R}$. Definimos el espacio de Sobolev de tipo $L^2(\mathbb{R}^n)$, $H^s(\mathbb{R}^n)$, como*

$$H^s(\mathbb{R}^n) = \left\{f \in \mathscr{S}'(\mathbb{R}^n) : \Lambda^s f(x) = \left(\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \widehat{f}(\xi)\right)^\vee(x) \in L^2(\mathbb{R}^n)\right\},$$

con norma definida como

$$\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}.$$

Teorema 1.8. *Si $s \geq \dfrac{n}{2} + k$, entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ está continuamente inmerso en $C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$, el espacio de las funciones con k derivadas continuas tal que se anulan en infinito. Esto implica que $f \in C^k_\infty(\mathbb{R}^n)$*

además

$$\|f\|_{C^k_\infty(\mathbb{R}^n)} \leq C_s \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

donde C_s es una constante que depende de s.

Teorema 1.9. *$f \in H^m(\mathbb{R}^n), m \in \mathbb{N}$ si y solo si $\partial^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ donde $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$ es un multi-índice tal que $|\alpha| = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n \leq m$.*

Teorema 1.10. *Si $s \in (0, n/2)$, entonces $H^s(\mathbb{R}^n)$ está continuamente inmerso en $L^p(\mathbb{R}^n)$ con $p = 2n/(n-2s)$. Esto implica que $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$, $s \in (0, n/2)$,*

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq c_{n,s} \|D^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

donde $c_{n,s}$ es una constante que depende de n y s además

$$D^s f = (-\Delta)^{s/2} f = \left((2\pi|\xi|)^s \widehat{f}\right)^\vee.$$

La demostración de estos tres teoremas puede encontrarse en Linares and Ponce (2014). Se sabe que un álgebra es un espacio vectorial, donde sus vectores cumplen con la propiedad asociativa, distributiva en el espacio y la distributiva bajo la multiplicación por escalar, más aún diremos que un espacio es un álgebra de Banach si para todo x, y en el espacio se cumple que $\|xy\| \leq \|x\|\|y\|$, además debe poseer un elemento identidad tal que su norma sea igual a uno. Los espacios de Sobolev de tipo L^2 en general cumplen con las propiedades de álgebra de manera sencilla, pero esta última desigualdad requerida para ser un álgebra de Banach no es nada trivial, así que a continuación se mostrará esta prueba. Para dicha prueba se utilizarán las siguientes desigualdades.

Teorema 1.11 (Desigualdad de Young)**.** *Sea* $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p \leq \infty$, *y* $g \in L^1(\mathbb{R}^n)$. *Entonces,* $f * g \in L^p(\mathbb{R}^n)$ *y además*

$$\|f * g\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leq \|f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}.$$

La demostración de este resultado puede encontrarse en Linares and Ponce (2014).

Teorema 1.12 (Linares and Ponce (2014))**.** *Si* $s > \dfrac{n}{2}$, *entonces* $H^s(\mathbb{R}^n)$ *es una álgebra con respecto al producto de funciones. Esto es, si* $f, g \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *entonces* $fg \in H^s(\mathbb{R}^n)$ *y además*

$$\|fg\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq c_s \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^n)}.$$

Demostración. En primer se verificará la siguiente desigualdad

$$\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \leq 2^s \left[\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{s/2} + \left(1+|\eta|^2\right)^{s/2}\right], \quad \forall \xi, \eta \in \mathbb{R}^n. \tag{6}$$

Obsérvese que

$$(1+|\xi|^2) = (1+|\xi+\eta-\eta|^2) \leq (1+|\xi-\eta|^2) + (1+|\eta|^2), \tag{7}$$

por lo tanto, si se considera $\frac{s}{2} \geq 1$ y se usa la desigualdad de Hölder[4] suponiendo que $\frac{2}{s} + \frac{1}{q} = 1$, se puede reescribir (7) de la siguiente forma

$$(1+|\xi-\eta|^2)+(1+|\eta|^2) \leq \left((1+|\xi-\eta|^2)^{\left(\frac{s}{2}\right)}+(1+|\eta|^2)^{\left(\frac{s}{2}\right)}\right)^{\left(\frac{2}{s}\right)}(1+1)^{\frac{1}{q}}, \tag{8}$$

como $\frac{2}{s} + \frac{1}{q} = 1$ entonces $\frac{s}{2q} = \frac{s}{2} - 1$, por lo tanto, si elevamos (8) a la $\frac{s}{2}$ se tendrá

$$\begin{aligned}((1+|\xi-\eta|^2)+(1+|\eta|^2))^{\frac{s}{2}} &\leq 2^{\frac{s}{2}-1}\left((1+|\xi-\eta|^2)^{\left(\frac{s}{2}\right)}+(1+|\eta|^2)^{\left(\frac{s}{2}\right)}\right)\\ &\leq 2^{\frac{s}{2}}\left((1+|\xi-\eta|^2)^{\left(\frac{s}{2}\right)}+(1+|\eta|^2)^{\left(\frac{s}{2}\right)}\right).\end{aligned}$$

Si se toma $\frac{s}{2} = 0$, se obtiene de manera trivial la desigualdad (6). Si $0 < \frac{s}{2} < 1$, supongamos sin pérdida de generalidad que $(1+|\xi-\eta|^2) \geq (1+|\eta|^2)$ entonces

$$\begin{aligned}((1+|\xi-\eta|^2)+(1+|\eta|^2))^{\frac{s}{2}} \leq ((1+|\xi-\eta|^2)+(1+|\xi-\eta|^2))^{\frac{s}{2}} &\leq 2^{\frac{s}{2}}((1+|\xi-\eta|^2))^{\frac{s}{2}}\\ &\leq 2^{\frac{s}{2}}\left((1+|\xi-\eta|^2)^{\frac{s}{2}}+(1+|\eta|^2)^{\frac{s}{2}}\right).\end{aligned}$$

Lo cual verifica (6).

---

[4] **Desigualdad de Hölder.** Sea $p,q>0$ tal que $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ entonces

$$\sum_{k=1}^{n}|a_k b_k| \leq \left(\sum_{k=1}^{n}|a_k|^p\right)^{\frac{1}{p}}\left(\sum_{k=1}^{n}|b_k|^q\right)^{\frac{1}{q}}$$

para todo $(a_1,\ldots,a_n),(b_1,\ldots,b_n) \in \mathbb{R}^n$.

Usando la desigualdad (6) y teniendo en cuenta que $\widehat{(fg)}(\xi) = \widehat{f}(\xi) * \widehat{g}(\xi)$ (ver Linares and Ponce (2014)) se puede afirmar que

$$
\begin{aligned}
|\Lambda^s(fg)| &= \left|\left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \widehat{(fg)}(\xi)\right| \\
&= \left(1+|\xi|^2\right)^{s/2} \left|\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)d\eta\right| \\
&\leq 2^s \int_{\mathbb{R}^n} \left[\left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{s/2} |\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)| + \left(1+|\eta|^2\right)^{s/2} |\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)|\right] d\eta \\
&\leq 2^s \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{s/2} |\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)| d\eta + \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\eta|^2\right)^{s/2} |\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)| d\eta.
\end{aligned}
$$

Si realizamos un cambio de variable para el segundo término de la desigualdad y usamos la definición de $\Lambda^s f$ vamos a obtener

$$
\begin{aligned}
|\Lambda^s(fg)| &\leq 2^s \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{s/2} |\widehat{f}(\xi-\eta)\widehat{g}(\eta)| d\eta + \int_{\mathbb{R}^n} \left(1+|\xi-\eta|^2\right)^{s/2} |\widehat{f}(\eta)\widehat{g}(\xi-\eta)| d\eta \\
&\leq 2^s \left(\left|\widehat{\Lambda^s f} * \widehat{g}\right| + |\widehat{f} * \widehat{\Lambda^s g}|\right)
\end{aligned}
$$

así, si se toma la norma de fg en $H^s(\mathbb{R}^n)$, luego de esto se aplica la desigualdad anterior y la desigualdad de Young para tener

$$
\|fg\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} = \|\Lambda^s(fg)\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq c\left(\|\Lambda^s f\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \|\widehat{g}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} + \|\widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \|\Lambda^s g\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}\right).
$$

Finalmente, teniendo en cuenta la siguiente desigualdad empleada para probar el Teorema 1.8

$$\|\widehat{f}\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leq c_s \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

donde $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^n)$, $f \in H^s(\mathbb{R}^n)$ y $k > 0$ tal que $s > \dfrac{n}{2} + k$, se podrá concluir que

$$\begin{aligned} \|fg\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} &\leq c_s \left(\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \|\widehat{g}\|_1 + \|\widehat{f}\|_1 \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \right) \\ &\leq c_s \left(\|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{H^k(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \right), \end{aligned}$$

por lo tanto si se se toma $k = s$ se tendrá

$$\|fg\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \leq c_s \|f\|_{H^s(\mathbb{R}^n)} \|g\|_{H^s(\mathbb{R}^n)},$$

lo cual es lo que se quería probar. □

Teorema 1.13. *Sea $f \in H^s(\mathbb{R})$, tal que $s \in \mathbb{R}$ entonces $\partial^\alpha f \in H^{s-\alpha}(\mathbb{R})$, y además se cumple que*

$$\|\partial^\alpha f\|_{H^{s-\alpha}(\mathbb{R})} \leq \|f\|_{H^s(\mathbb{R})}.$$

La demostración de este teorema puede encontrarse en Júnior and Iorio (2001).

Definición 1.14. *Sea Ω un conjunto abierto de $\mathbb{R}^n$. $L^2_r(\Omega)$ denota el espacio de todas las funciones medibles tales que*

$$\|f\|^2_{L^2_r(\Omega)} = \int_\Omega \left(1 + x^2\right)^r |f(x)|^2 dx < \infty.$$

Definición 1.15. *Se define al espacio* $\mathscr{F}_r = H^r(\mathbb{R}) \cap L^2_r(\mathbb{R})$, *con* $r \in \mathbb{N}$ *donde su norma está definida como*

$$\|f\|^2_{\mathscr{F}_r} = \|f\|^2_{L^2_r(\mathbb{R})} + \|f\|^2_{H^r(\mathbb{R})}.$$

Proposición 1.16. *El espacio* $\mathscr{F}_r$ *es la completación del espacio de Schwartz con respecto a la norma dada en la definición anterior. Además, si* $f \in \mathscr{F}_r$ *entonces* $x^\beta \partial_x^\alpha f \in L^2(\mathbb{R})$, *con* α, β *enteros tales que* $0 \leq \alpha + \beta \leq r$ *y* $C_{\alpha,\beta}$ *una constante que depende de ellos, tal que*

$$\left\| x^\beta \partial_x^\alpha f \right\|_{L^2(\mathbb{R})} \leq C_{\alpha,\beta} \|f\|_{\mathscr{F}_r}.$$

Demostración. Puede verse la prueba en el apéndice A de José Iório (1986). □

Si se desea profundizar acerca de la transformada de Fourier, espacios de Sobolev y los espacios de Schwartz puede remitirse a Linares and Ponce (2014).

1.3. Semigrupos

Definición 1.17. *Sea X un espacio de Banach. Un semigrupo fuertemente continuo en X, o sencillamente semigrupo* C_0, *es un operador* $T(t)$ *tal que*

- $T(0) = I$,
- *para todo* t, t' *en el espacio de Banach se tiene que* $T(t+t') = T(t)T(t')$,
- *para todo* x *en el espacio de Banach* $T(t)x \to x$ *cuando* $t \to 0^+$.

Si en vez de cumplir con la última propiedad cumple que $\|T(t)\| \leq 1$, *para toda* t, *diremos que es un semigrupo de contracción.*

Definición 1.18. *Sean X y Y espacios de Banach complejos. Un operador lineal de X en Y es una función $A : \mathscr{D}(A) \subseteq X \longrightarrow Y$ tal que*

- *$\mathscr{D}(A)$ es un subconjunto de X tal que la combinación lineal de elementos de $\mathscr{D}(A)$ está en si mismo;*
- *$A(\alpha t + \beta t') = \alpha A(t) + \beta A(t')\ \forall t, t' \in X$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$.*

Definición 1.19. *Sean X un espacio de Banach y $T(t)$ un C_0 semigrupo en X. El generador infinitesimal de T es el operador lineal definido de la siguiente forma*

$$A\phi = \lim_{t\to 0} \frac{T(t)\phi - \phi}{t} \quad \forall \phi \in \mathscr{D}(A),$$

y el dominio de A está definido de la siguiente forma

$$\mathscr{D}(A) = \left\{ \phi \in X : \lim_{t\to 0^+} \frac{T(t)-1}{t}\phi \text{ existe en la topología definida por la norma de } X \right\}.$$

Teorema 1.20. *Sea A el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo. Entonces $\mathscr{D}(A)$ es denso en X y cerrado.*

Teorema 1.21. *Sea X un espacio de Banach y A el generador infinitesimal de un C_0 semigrupo $T(x)$, tal que $x \in X$. Entonces*

- *Para todo $x \in X$,*
$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int_t^{t+h} T(s)x ds = T(t)x.$$

- *Para todo* $x \in X$ *y* $t > 0$ *se tiene que*

$$\int_0^t T(s)xds \in D(A) \qquad y \qquad A\left(\int_0^t T(s)xds\right) = T(t)x - x.$$

- *Para todo* $x \in \mathscr{D}(A)$*, se tiene que* $T(t)x \in \mathscr{D}(A)$*. Además, se tiene que la función* $t \in [0,\infty) \longrightarrow T(t)x \in X$ *es diferenciable y la derivada está dada por*

$$\frac{d}{dt}T(t)x = AT(t)x = T(t)Ax.$$

- *Para todo* $x \in \mathscr{D}(A)$*,*

$$T(t)x - T(s)x = \int_s^t T(\tau)Axd\tau = \int_s^t AT(\tau)xd\tau.$$

Las demostraciones de estos resultados se pueden encontrar en Pazy (2012). El lector interesado en profundizar acerca de semigrupos puede dirigirse a Júnior and Iorio (2001); Pazy (2012). A continuación se dará un vistazo a un par de teoremas de punto fijo los cuales servirán para el estudio que se realizará a lo largo de la monografía, para esto se presentarán algunas definiciones que serán de utilidad.

Definición 1.22. *Sea* X *un espacio de Banach y* $F : (0,T) \to X$*, para algún* $T \in (0,\infty)$*. Se dirá que*

$u : (0, T) \to X$ *es una solución suave del problema de Cauchy*

$$\frac{du}{dt} = F, \quad u(0) = u^0,$$

si u es continua bajo la topología de X *y además*

$$u(t_2) = u(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} F(s)ds,$$

para todo $t_1, t_2 \in (0, T)$.

Sean X un espacio de Banach y $F : A \subset X \to X$ un operador lineal, para todo $\lambda \in \mathbb{C}$ se define $T_\lambda = T - \lambda I$, donde I es el operador identidad. Se dice que λ es un valor regular si T_λ es inyectiva, es decir, posee imagen inversa, denotada usualmente por $R(\lambda, T)$, tal que es un operador acotado y se define sobre un subespacio denso. Además, se puede definir el conjunto solución de T de la siguiente forma

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ es un valor regular de } T\}.$$

Teorema 1.23. *Sea A un operador cerrado*[5] *en X. Para el problema de Cauchy*

$$u'(t) = Au(t), \quad u(0) = x, \tag{9}$$

se tiene que las siguientes implicaciones son equivalentes:

- *Para todo $x \in X$ el problema de Cauchy* (9) *tiene única solución suave.*
- *El operador A es un generador infinitesimal de un semigrupo fuertemente continuo.*
- *El conjunto solución de A es no vacío y para todo x que pertenece al dominio del operador existe una única solución clásica del problema de Cauchy* (9)*, se entenderá como una solución clásica a una función $u \in C^1(\mathbb{R}_+, X)$ tal que $u(t) \in \mathscr{D}(A)$ para todo $t \geq 0$ y que cumpla el problema de Cauchy* (9).

La demostración de este teorema podemos encontrarla en Arendt (1987).

Teorema 1.24. *Sean X un espacio métrico completo*[6] *y $f : X \to X$ una aplicación contractiva. Se denota como $f^{(n)}(x) = (f \circ \ldots \circ f)(x)$ para $x \in X$. Entonces:*

- *Existe un único punto $x \in X$ de manera que $f(x) = x$. Denotaremos este punto fijo por x^* y lo llamaremos punto fijo de f.*

---

[5] **Operador cerrado.** Sea $A : D_A \to X$ un operador lineal. Se dice que A es un operador cerrado si y solo si para toda sucesión $x_n \in D_A$ tal que $x_n \to x$ y $Ax_n \to y$ entonces $x \in D_A$ y $Ax = y$.

[6] **Espacio métrico completo.** Un espacio métrico X se dice que es completo si todo sucesión de Cauchy en X converge a un elemento de X.

- *Para todo* $x \in X$ *se tiene que* $\lim_{n \to \infty} f^{(n)}(x) = x^*$.

La demostración de este teorema podemos encontrarla en Daniel (2020).

2. Acerca de los orígenes de la ecuación Benjamin-Ono

2.1. Historia y origen del modelo

En esta sección se quieren abordar los detalles históricos que llevaron a diversos científicos a plantear y abordar el tema de ondas viajeras, el cual desencadenó en la deducción de diversos modelos matemáticos que poseen como solución este tipo de ondas, además se dará un repaso histórico de cómo se llegó al modelo en el que se centrará este trabajo. Se presenta también la deducción del modelo de la ecuación Benjamin-Ono.

Si se quiere hablar de ondas viajeras se debe hablar de John Scott Russel (1808–1882), quien fue un ingeniero escocés el cual es conocido por sus diversos trabajos acerca de ondas, así como por ser el primero en observar experimentalmente el efecto Doppler utilizando las ondas sonoras producidas al pasar un tren. Se le conoce también por diseñar un sistema para la construcción de cascos de barcos, el cual generó un importante impacto en la ingeniería naval del siglo XIX, entre otras cosas como la reorganización de la Sociedad Real de Artes o la fundación de la institución de arquitectos navales. En el campo de las matemáticas es conocido por ser el primero en escribir acerca de las ondas viajeras (ondas de traslación).

En 1834, mientras se realizaba un experimento para mejorar el diseño de los barcos, el cual consistía en remolcar una barcaza a través de un canal usando caballos, Russel observó un fenómeno el cual llamó como ondas de traslación, las cuales hoy día en dinámica de fluidos se conocen como ondas solitarias u ondas viajeras. Russel mencionaba en sus artículos que en el momento en que la barcaza se detuvo se alzó una masa de agua alrededor de la proa del barco. En la figura 1 podemos observar lo descrito por Russel, dicha masa de agua él la definía como suave, esta siguió por el canal sin ningún cambio en su forma o velocidad. Él siguió dicha onda por varios kilómetros, pero su altura disminuyó gradualmente, hasta que en cierto punto por las diversas curvas del canal perdió a la onda. Al observar esto Russel decide estudiar este fenómeno construyendo diversos canales, de manera que él pudiera recrear las condiciones que se debían tener para que estas ondas se manifestaran. Estos experimentos y análisis hechos por Russel se pueden encontrar en Russell (1845).

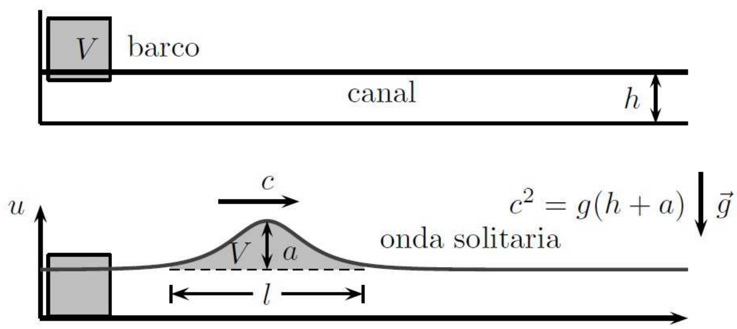

Figura 1. Experimentos John Scott Russel. Adaptado de Russell (1845)

Russel tuvo algunos detractores con respecto a su nuevo tipo de ondas, uno de estos fue Airy[7], una figura de suma importancia en ondas el cual menciona en Airy (1845), que no estaba dispuesto a reconocer este nuevo tipo de ondas planteadas por Russel como una nueva clase de onda importante, ya que él consideraba que estas ondas estaban regidas por la teoría conocida

---

[7] George Biddell Airy, 1801-1892, matemático y astrónomo inglés conocido por sus diversos tratados relacionados con la astronomía y ondas.

como ondas de gran longitud, más aún mencionaba que se regían bajo la siguiente ecuación

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = g\kappa \frac{\partial^2 X}{\partial x^2}, \tag{10}$$

así que afirmaba que este tipo de ondas ya eran conocidas. Además, Airy en Airy (1845) menciona que es posible que Russel no estuviera convencido del todo con sus experimentos, ya que según Airy, por este motivo decidió no incluir ciertos experimentos en su introducción. Algunos historiadores indican que Airy fue el primero en mencionar que las ondas en un canal con sección trasversal rectangular deben necesariamente cambiar su forma a medida que van avanzando, tomando una forma más inclinada hacia el frente y menos empinada en su parte trasera, esta declaración fue apoyada por diversas figuras importantes como Busset. Por otro lado, Stokes[8] afirma en Stokes (1846), que la única onda permanente no debía ser sinusoidal.

En contra posición, Stokes menciona en Stokes (1847) que en caso de que este nuevo tipo de ondas fuese cierta quedaba por discutir su modelo. Esta expresión que las modela fue dada en primer lugar en 1871 por Boussinesq[9] en Boussinesq (1871, 1872, 1877), y tiempo después en 1876 Lord Rayleigh[10] en Rayleigh (1876), también plantea un modelo para este tipo de ondas.

---

[8] Sir George Gabriel Stokes, Irlanda 1819- Inglaterra 1903, físico y matemático destacado por sus grandes avances en la mecánica de fluidos y óptica, además por sus trabajos de suma importancia en polarización y fluorescencia.

[9] Joseph Valentin Boussinesq, 1842-1929, matemático y físico francés el cual es una figura de suma importancia en la mecánica de fluidos e hidráulica.

[10] Jhon William Strutt, tercer Barón de Rayleigh, 1842-1919, físico francés el cual realizó importantes contribuciones

Veamos el planteamiento dado por Rayleigh. Como se mencionó anteriormente Airy menciona que las ondas viajeras están dadas por la ecuación (10), donde $\kappa = H$ que es la profundidad del canal y g es la gravedad. Además la velocidad de onda esta dada por $\sqrt{g\kappa}$, esto se tiene por un resultado previo dado por Lagrange en 1786. Pero hay que tener en cuenta que este resultado es solo válido para aproximaciones de primer orden donde $\frac{h}{H}$ se pueda despreciar, esto último fue mencionado por Rayleigh diciendo además que es imposible encontrar una onda que no cumpla con esto último y posea velocidad de onda $\sqrt{g\kappa}$ y además pueda propagarse sin deformaciones. Partiendo de esta premisa y de los resultados experimentales de Russel, Rayleigh propone buscar una aproximación más precisa de la velocidad de onda, para esto él asume la existencia de una onda estacionaria la cual desaparece en infinito y agrega al fluido una velocidad base constante aún desconocida y la cual es opuesta al de la onda, gracias a esto se puede omitir la dependencia del tiempo. Debido a que el flujo está libre de rotaciones y es incompresible existe un potencial de velocidad y una función de flujo, las cuales se rigen bajo la ecuación de Laplace. Junto a esto y usando una serie de expansiones para la velocidad horizontal y vertical, método que usará más adelante Ono para su análisis, logra plantear su modelo

$$\left(\frac{dh}{dx}\right)^2 + \frac{3}{H^3}h^2\left(h - h_0\right) = 0,$$

---

a la dinámica de fluidos, óptica, electromagnetismo y fue galardonado con el nobel de física por su estudio de diversos gases y a su vez por el descubrimiento del argón.

además Rayleigh menciona que el resultado obtenido es similar al obtenido por Boussinesq en uno de sus estudios de ondas solitarias.

En 1895 con el propósito de aclarar ciertas dudas sobre la existencia de estas ondas solitarias D.J. Korteweg y G. de Vries, en Korteweg and De Vries (1895), plantean un modelo que describe cómo se comportan estas ondas viajeras. Este modelo se basó, de igual forma, en la suposición de que la profundidad del agua es pequeña si la comparamos con el ancho de la onda, además relaciona la amplitud de la misma con su variación en el tiempo. Este modelo dispersivo es uno de los más importantes en el estudio de ondas de agua, además de basarse en los modelos previos de Rayleigh y Boussinesq, usando métodos de deducción similares a los empleados por ellos.

En 1966 Thomas Brooke Benjamin en Benjamin (1966), basándose en lo hecho previamente por Korteweg[11] y G. de Vries[12] plantea un análisis teórico para una nueva clase de onda estacionaria, la cual posee una amplitud finita. Dichas ondas presentan una propiedad común, y es que ellas se presentan en aquellos sistemas donde la densidad varía en una sola de sus capas cuyo espesor es finito contrario a como consideramos la profundidad total, que se plantea infinita. También es importante saber que la altura de esta capa finita, es la escala fundamental con la cual se medirá la longitud y amplitud de la onda. Estas ondas aparecen principalmente en la naturaleza

[11] Diederik Johannes Korteweg, 1848-1941, matemático holandés conocido principalmente por su formulación de la ecuación KdV.

[12] Gustav de Vries, 1866-1934, matemático neerlandés conocido principalmente por su formulación de la ecuación KdV.

gracias a la termoclina oceánica, es decir, la capa que se encuentra entre la parte superficial oceánica donde la temperatura es un poco más alta debido al contacto con la luz solar y la segunda capa la cual esta una decena de metros más abajo en donde la temperatura desciende, la estructura que tiene la termoclina oceánica queda representada en la Figura 2. Aunque Benjamin plantea que este tipo de ondas también tienen un posible uso en los estudios atmosféricos Yang et al. (2019); Romanova (1981). Benjamin[13] se plantea usar un par de fluidos incompresibles con diferentes densidades, además plantea diferentes distribuciones de densidades y diferentes alturas entre los fluidos, donde él plantea que la longitud de la onda es mayor que la longitud media de la capa finita del fluido. Junto a estos experimentos usando las leyes de conservación y ecuación Kortweg-de Vries, KdV, logra plantear un primer modelo que rige a este tipo de ondas estacionarias.

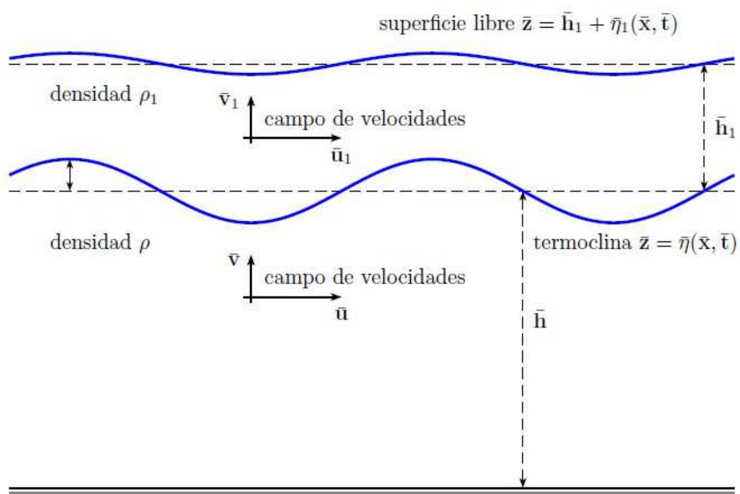

Figura 2. Termoclina oceánica.

13 Thomas Brooke Benjamin, 1929-1995, matemático y físico inglés conocido por sus importantes trabajos en análisis matemático y dinámica de fluidos.

Posteriormente en 1975, Hiroaki Ono en Ono (1975), basándose en los trabajos previos de algunos autores como Benjamin, David y Acrivos en Davis and Acrivos (1967a,b), busca estudiar y determinar cuándo el tipo de ondas estacionarias planteadas por Benjamin se pueden considerar solitones y bajo qué condiciones sucede esto. Para este estudio Ono se basó en los experimentos planteados por Benjamin y Acrivo, al igual que estos decide tomar un sistema de fluidos estratificados[14], pero Ono toma una distribución de densidades diferentes con el fin de simplificar el análisis, pero también él aclara que el análisis hecho para esta distribución es posible realizarlo para otras distribuciones de densidades. Las distribuciones de densidades tomadas se reflejan en la figura 3 donde la densidad descrita en la segunda gráfica fue tomada por Ono y las dos restantes son las tomadas por Benjamin. Junto a esto Ono usa las ecuaciones gobernantes de los fluidos estratificados, las leyes de conservación de la ecuación KdV, para así poder plantear su modelo, el cual es conocido como la ecuación Benjamin-Ono.

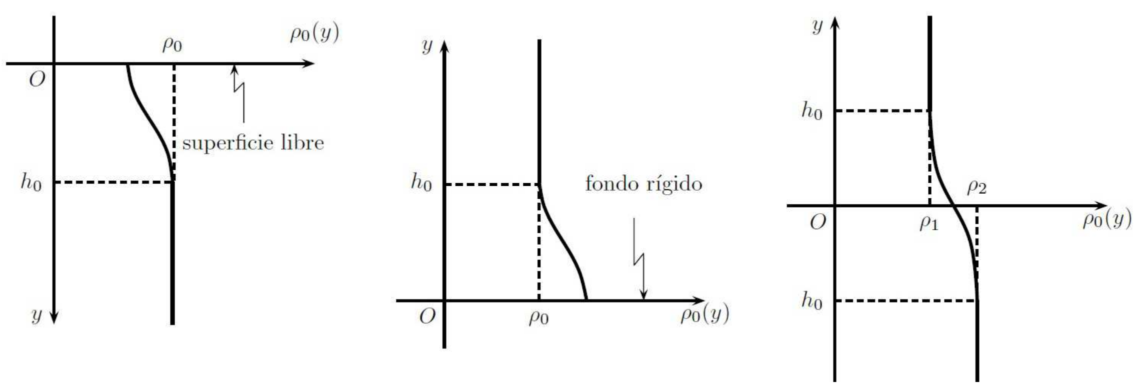

Figura 3. Distribución de densidades. Adaptado de Ono (1975)

14 Un fluido estratificado puede definirse como aquel fluido que presenta variaciones de densidad en la dirección vertical, un ejemplo podría ser el agua y aire, ambos se consideran fluidos y si se consideran juntos se pueden ver como un sistema de fluidos estratificados.

2.2. Deducción de la ecuación Benjamin-Ono

El propósito de esta sección es mostrar la deducción de la ecuación Benjamin-Ono, basándonos en lo realizado por Ono en Ono (1975), empleando diversos métodos para abordar este problema. Es de recordar que la ecuación Benjamin-Ono modela las ondas internas generadas en un sistema que posee dos capas de fluidos estratificados incompresibles, donde dicho sistema posee una distribución de densidades adecuada, con la densidad de la capa superior mayor que la densidad en la capa inferior, y además se considera que la altura de la capa inferior es mayor que la presente en la capa superior. Para realizar la deducción de la ecuación se considera el siguiente sistema bidimensional que modela el movimiento de un fluido incompresible estratificado de manera estable a lo largo del eje y. Dicho sistema se obtiene a través de las ecuaciones de Euler (13–14), la ecuación de continuidad (11) y teniendo en cuenta que se trabaja con fluidos incompresibles tenemos la condición dada por la ecuación (12), este sistema lo escribiremos de la siguiente forma

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u\frac{\partial \rho}{\partial x} + v\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \tag{11}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{12}$$

$$\rho\left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial x}, \tag{13}$$

$$\rho\left(\frac{\partial v}{\partial t} + u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) = -\frac{\partial P}{\partial y} - \rho g, \tag{14}$$

donde en el sistema x y y representan las variables espaciales, u y v la velocidad horizontal y vertical respectivamente, P describe la presión, g es la gravedad, y por último ρ la densidad. Siendo esta última constante en la capa superior del fluido $(y \geq h_0)$ y $\rho_0(y)$ si nos ubicamos en la capa inferior del fluido $(0 \leq y < h_0)$. Teniendo en cuenta esto podemos ver que el modelo podría representarse de la siguiente forma

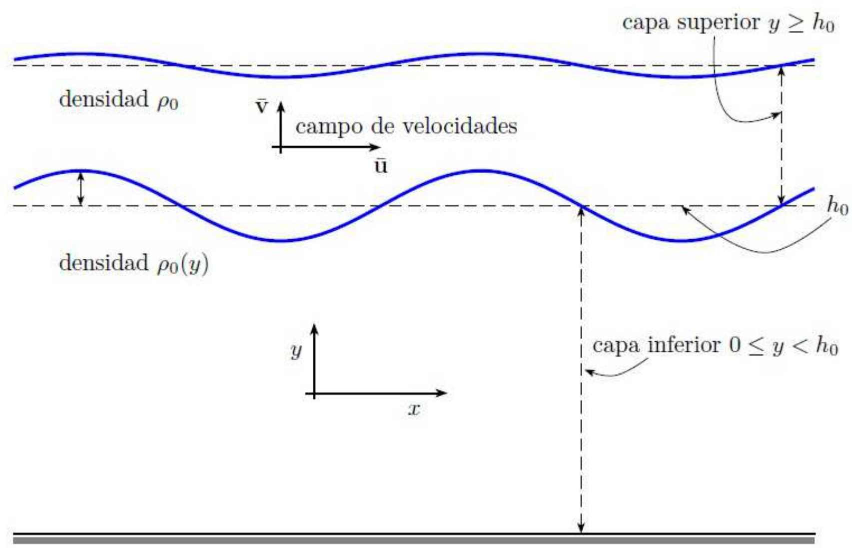

Figura 4. Modelo de las ondas internas.

Con esto último en mente se sabe que se debe realizar un estudio para cada fluido, uno que genere una ecuación para la capa inferior y establezca unas condiciones de contorno para esta capa y otro estudio análogo para la capa superior pero teniendo en cuenta que las condiciones de contorno para la capa superior deben coincidir con las halladas en la capa inferior.

Para estudiar la capa inferior se debe considerar el problema no lineal, por lo tanto se plantea el estudio de la interacción entre los efectos de la dispersividad y de la no linealidad, para esto se tomará el movimiento de la onda con la escala espacial característica del mismo orden de no linealidad. Se denotará esta medida común como ε. Con esto, el orden de la variación temporal dada por la interacción debe ser elegida de tal forma que sea $O(\varepsilon)$ con referencia a la velocidad de onda lineal direccional c_0, este valor es constante. De acuerdo con esto se hará una transformación adecuada con el fin de introducir esta escala.

$$\left.\begin{aligned} \xi &= \varepsilon\,(x - c_0 t) \\ \tau &= \varepsilon^2 t \\ y &= y, \end{aligned}\right\} \text{para } \ 0 \leq y < h_0$$

ahora, se expanden u, v, ρ y P en términos de estas variables que representan un estado excitado del estado fundamental:

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n u_n(\xi,\tau,y), \qquad v = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^{n+1} v_n(\xi,\tau,y),$$

$$\rho = \rho_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n \rho_n(\xi,\tau,y), \qquad P = P_0(y) + \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon^n P_n(\xi,\tau,y).$$

Esto para $0 \leq y < h_0$. Se verá qué forma tienen las ecuaciones (11)-(14) teniendo en cuenta las expansiones anteriores y tomando orden de aproximación ε^2. Para esto, en primer lugar se verá el proceso de sustitución para la ecuación (11). Note que

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial y} &= \frac{d\rho_0}{dy} + \frac{\partial \rho_1}{\partial y}\varepsilon + \frac{\partial \rho_2}{\partial y}\varepsilon^2, \\
\frac{\partial \rho}{\partial x} &= \varepsilon \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}\varepsilon^2, \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau}\varepsilon + \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}\varepsilon = \frac{\partial \rho_1}{\partial \tau}\varepsilon^3 - c_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}\varepsilon^2 = -c_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}\varepsilon^2, \\
u(\xi,\tau,y) &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2, \\
v(\xi,\tau,y) &= \varepsilon^2 v_1,
\end{aligned}
$$

si se reemplazan estas derivadas en (11) y posteriormente se sustituye u y v por sus respectivas expansiones se obtiene

$$
\begin{aligned}
-c_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}\varepsilon^2 + u \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}\varepsilon^2 + v\left(\frac{d\rho_0}{dy} + \frac{\partial \rho_1}{\partial y}\varepsilon + \frac{\partial \rho_2}{\partial y}\varepsilon^2\right) &= 0, \\
-c_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}\varepsilon^2 + u_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}\varepsilon^3 + u_2 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}\varepsilon^4 + v_1 \frac{d\rho_0}{dy}\varepsilon^2 + v_1 \frac{\partial \rho_1}{\partial y}\varepsilon^3 + v_1 \frac{\partial \rho_2}{\partial y}\varepsilon^4 &= 0.
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta el orden de aproximación, se podría reescribir la expresión anterior de la siguiente forma

$$
-c_0 \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} + v_1 \frac{d\rho_0}{dy} = 0.
$$

Se seguirá el proceso de sustitución para la ecuación (12), de igual forma note que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\varepsilon + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial u_2}{\partial \xi}\varepsilon^2 = \frac{\partial u_1}{\partial \xi}\varepsilon^2, \\
\frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\partial v_1}{\partial y}\varepsilon^2,
\end{aligned}$$

llevando estas derivadas a (12) se tendrá lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\varepsilon^2 + \frac{\partial v_1}{\partial y}\varepsilon^2 &= 0, \\
\frac{\partial v_1}{\partial y} + \frac{\partial u_1}{\partial \xi} &= 0.
\end{aligned}$$

Ahora se seguirá con el proceso de sustitución para la ecuación (13), en la cual se utilizarán las siguientes derivadas

$$\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial y} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial y}, \\
\frac{\partial u}{\partial t} &= = \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{t\partial t} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial y}\frac{\partial \xi}{t\partial t} + \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial \tau}\frac{\partial \tau}{\partial t} = -c_0\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial \xi} - c_0\varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial \xi}, \\
\frac{\partial P}{\partial x} &= \varepsilon\frac{\partial P_1}{\partial \xi},
\end{aligned}$$

reemplazando estas expresiones junto a las expansiones de u y v en (13) se obtendrá lo siguiente

$$\begin{aligned}
\rho(c_0\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial\xi}-c_0\varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial\xi}+(\varepsilon u_1+\varepsilon^2u_2)\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\varepsilon^2+\varepsilon^2v_1(\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial y}+\varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial y})) &= -\varepsilon\frac{\partial P_1}{\partial\xi},\\
\rho(c_0\varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial\xi}-c_0\varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial\xi}+u_1\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\varepsilon^3+u_2\frac{\partial u_1}{\partial\xi}\varepsilon^4+\varepsilon^3v_1\frac{\partial u_1}{\partial y}+\varepsilon^4v_1\frac{\partial u_2}{\partial y}) &= -\varepsilon\frac{\partial P_1}{\partial\xi},\\
\rho_0(y)c_0\frac{\partial u_1}{\partial\xi} &= \frac{\partial P_1}{\partial\xi},
\end{aligned}$$

esto último se tiene gracias al orden de aproximación que se está tomando. El proceso de sustitución que se sigue para (14), es análogo al realizado anteriormente para (13) solo basta cambiar u por v, por lo tanto al realizarlo se obtendrá la siguiente expresión

$$0=-\frac{\partial P_1}{\partial y}-\rho_1 g.$$

Teniendo en cuenta lo realizado hasta el momento, se obtiene el siguiente sistema

$$-c_0\frac{\partial\rho_1}{\partial\xi}+v_1\frac{d\rho_0}{dy} = 0, \tag{15}$$

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial u_1}{\partial\xi} = 0, \tag{16}$$

$$c_0\rho_0(y)\frac{\partial u_1}{\partial\xi} = \frac{\partial P_1}{\partial\xi}, \tag{17}$$

$$-\frac{\partial P_1}{\partial y}-\rho_1 g = 0. \tag{18}$$

Ahora, se busca reescribir en términos de una ecuación diferencial parcial el sistema anterior. Para ello, se despeja de (16) uno de los términos y se sustituye en la ecuación (17), luego de esto a la ecuación resultante se deriva con respecto a y,

$$\begin{aligned} -\frac{\partial u_1}{\partial \xi} &= \frac{\partial v_1}{\partial y}, \\ -c_0\rho_0(y)\frac{\partial v_1}{\partial y} &= \frac{\partial P_1}{\partial \xi}, \\ c_0\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0(y)\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) &= -\frac{\partial^2 P_1}{\partial y \partial \xi}, \end{aligned} \tag{19}$$

ahora, se deriva la ecuación (18) con respecto a ξ y se sustituye el resultado en la ecuación (19)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 P_1}{\partial \xi \partial y} &= -g\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}, \\ c_0\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0(y)\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) &= g\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}, \end{aligned} \tag{20}$$

después de hacer esto, se reescribe la ecuación (15) y se sustituye en (20)

$$\begin{aligned} \frac{v_1}{c_0}\frac{d\rho_0(y)}{dy} &= \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}, \\ c_0\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0(y)\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) &= \frac{g}{c_0}\frac{d\rho_0(y)}{dy}v_1, \end{aligned}$$

solo basta despejar para obtener la ecuación diferencial parcial que se buscaba

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0(y)\frac{\partial v_1}{\partial y}\right) - \frac{g}{c_0^2}\frac{d\rho_0(y)}{dy}v_1 = 0. \tag{21}$$

Teniendo la ecuación (21) se le aplica separación de variables a v_1, suponiendo que

$$v_1(\xi, y, \tau) = -\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi}\,\phi(y). \tag{22}$$

Ahora, se reescribirá la ecuación (21) teniendo en cuenta (22), por lo tanto considere

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0(y)\frac{\partial}{\partial y}\left(-\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi}\,\phi(y)\right)\right) + \frac{g}{c_0^2}\frac{d\rho_0(y)}{dy}\,\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi}\,\phi(y) &= 0,\\
-\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi}\,\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0(y)\frac{\partial}{\partial y}\,(\phi(y))\right) + \frac{g}{c_0^2}\frac{d\rho_0(y)}{dy}\,\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi}\,\phi(y) &= 0,\\
\frac{\partial}{\partial y}\left(\rho_0(y)\frac{\partial}{\partial y}\,(\phi(y))\right) - \frac{g}{c_0^2}\frac{d\rho_0(y)}{dy}\,\phi(y) &= 0,
\end{aligned}$$

por lo tanto se tendrá una ecuación diferencial en términos de $\phi(y)$ que tiene la siguiente forma

$$\frac{d}{dy}\left(\rho_0(y)\frac{d\phi(y)}{dy}\right) - \frac{g}{c_0^2}\frac{d\rho_0(y)}{dy}\,\phi(y) = 0. \tag{23}$$

Ahora, se busca escribir u_1, P_1 y ρ_1 en términos de $f(\xi,\tau)$ y $\phi(y)$. Para esto en primer lugar se deriva v_1 con respecto a y luego el resultado se reemplaza en (16) y a la expresión resultante se integra con respecto a ξ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial v_1}{\partial y} &= -\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi}\frac{d\phi(y)}{dy},\\
\frac{\partial u_1}{\partial \xi} &= \frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi}\frac{d\phi(y)}{dy},\\
u_1 &= f(\xi,\tau)\frac{d\phi(y)}{dy}.
\end{aligned}$$

Por otro lado, se reemplaza $\frac{\partial u_1}{\partial \xi}$ en (17) y se integra con respecto a ξ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial P_1}{\partial \xi} &= c_0\,\rho_0(y)\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi}\frac{d\phi(y)}{dy},\\
P_1 &= c_0\,\rho_0(y)\,f(\xi,\tau)\frac{d\phi(y)}{y}.
\end{aligned}$$

Por último, se reemplaza v_1 en (15) y se integra nuevamente respecto a ξ

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi} &= \frac{\phi}{c_0}\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi}\frac{d\rho_0(y)}{dy},\\
\rho_1 &= \frac{\phi}{c_0}f(\xi,\tau)\frac{d\rho_0(y)}{dy}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto las expresiones resultantes en términos de $f(\xi,\tau)$ y $\phi(y)$ son las siguientes

$$
\begin{aligned}
u_1 &= f(\xi,\tau)\frac{d\phi(y)}{dy}, && (24)\\
P_1 &= c_0\,\rho_0(y)\,f(\xi,\tau)\frac{d\phi(y)}{y}, && (25)\\
\rho_1 &= \frac{\phi}{c_0}f(\xi,\tau)\frac{d\rho_0(y)}{dy}. && (26)
\end{aligned}
$$

Teniendo en cuenta las expresiones anteriores, se busca expandir el sistema al siguiente orden de ε, es decir, se manejarán únicamente aquellos términos que tengan hasta la tercera potencia de ε. Los procedimientos para realizar estas expansiones son análogos a los realizados para obtener (15)-(18). Ahora se verá como queda la ecuación (11), para ello se consideran las siguientes derivadas donde la comilla denotará la derivada con respecto a y

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial \rho}{\partial y} &= {\rho_0}' + \frac{\partial \rho_1}{\partial y}\varepsilon + \frac{\partial \rho_2}{\partial y}\varepsilon^2 = {\rho_0}' + \varepsilon\left(\frac{\phi}{c_o}{\rho_0}'\right)' f + \frac{\partial \rho_2}{\partial y}\varepsilon^2, \\
\frac{\partial \rho}{\partial x} &= \varepsilon\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \varepsilon^2\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}\varepsilon^2 + \varepsilon^3\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} = \frac{\phi}{c_o}{\rho_0}'\frac{\partial f}{\partial \xi}\varepsilon^2 + \varepsilon^3\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi}, \\
\frac{\partial \rho}{\partial t} &= \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial \rho_1}{\partial \tau}\varepsilon + \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}\varepsilon + \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial \rho_2}{\partial \tau}\varepsilon^2 + \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi}\varepsilon^2 \\
&= \frac{\partial \rho_1}{\partial \tau}\varepsilon^3 - c_0\frac{\partial \rho_1}{\partial \xi}\varepsilon^2 + \frac{\partial \rho_2}{\partial \tau}\varepsilon^4 - c_0\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi}\varepsilon^3 = -c_0\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi}\varepsilon^3 - \frac{1}{c_0}\phi\frac{\partial f}{\partial \tau}\rho'\varepsilon^3 - \phi\frac{\partial f}{\partial \xi}\rho_0'\varepsilon^3\varepsilon^2, \\
u(\xi,\tau,y) &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 = \varepsilon f\phi' + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3, \\
v(\xi,\tau,y) &= \varepsilon^2 v_1 + \varepsilon^3 v_2 = -\varepsilon^2\frac{\partial f}{\partial \xi}\phi + \varepsilon^3 v_2.
\end{aligned}
$$

Ahora se reemplaza estas derivadas en la ecuación (11), luego de esto se reemplazan u y v por sus respectivas expansiones

$$
\begin{aligned}
-c_0\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi}\varepsilon^3 - \frac{1}{c_0}\phi\frac{\partial f}{\partial \tau}\rho'\varepsilon^3 - \phi\frac{\partial f}{\partial \xi}\rho_0'\varepsilon^2 + \left(\varepsilon f\phi' + \varepsilon^2 u_2 + \varepsilon^3 u_3\right)\left(\frac{\phi}{c_o}{\rho_0}'\frac{\partial f}{\partial \xi}\varepsilon^2 + \varepsilon^3\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi}\right) + \\
\left(-\varepsilon^2\frac{\partial f}{\partial \xi}\phi + \varepsilon^3 v_2\right)\left({\rho_0}' + \varepsilon\left(\frac{\phi}{c_o}{\rho_0}'\right)' f + \frac{\partial \rho_2}{\partial y}\varepsilon^2\right) = 0,
\end{aligned}
$$

bastaría operar esto último teniendo en cuenta que el orden de aproximación que se está manejando para obtener lo siguiente

$$
-c_0\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi} + v_2\frac{d\rho_0}{dy} = \frac{1}{c_0}\rho_0'(y)\phi\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{c_0}\left(\rho_0'(y)\phi\phi' - \phi(\rho_0'(y)\phi)'\right) f\frac{\partial f}{\partial \xi}.
$$

El proceso para la expansión de orden para las ecuaciones (12), (14) son análogos a los procesos realizados para obtener las ecuaciones (16) y (18) respectivamente. Así que se verá como queda la ecuación (13), para ello se consideran las siguientes expresiones

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\partial u_1}{\partial y}\varepsilon + \frac{\partial u_2}{\partial y}\varepsilon^2 = f\phi''\varepsilon + \frac{\partial u_2}{\partial y}\varepsilon^2, \\
\frac{\partial u}{\partial x} &= \varepsilon\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} + \varepsilon^2\frac{\partial u_2}{\partial \xi}\frac{\partial \xi}{\partial x} = \frac{\partial u_1}{\partial \xi}\varepsilon^2 + \frac{\partial u_2}{\partial \xi}\varepsilon^3 = \frac{\partial f}{\partial \xi}\phi'\varepsilon^2 + \frac{\partial u_2}{\partial \xi}\varepsilon^3, \\
\frac{\partial u}{\partial t} &= \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial u_1}{\partial \tau}\varepsilon + \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\varepsilon + \frac{\partial \tau}{\partial t}\frac{\partial u_1}{\partial \tau}\varepsilon^2 + \frac{\partial \xi}{\partial t}\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\varepsilon^2 \\
&= \frac{\partial u_1}{\partial \tau}\varepsilon^3 - c_0\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\varepsilon^2 + \frac{\partial u_2}{\partial \tau}\varepsilon^4 - c_0\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\varepsilon^3 = \frac{\partial f}{\partial \tau}\phi'\varepsilon^3 - c_0\frac{\partial f}{\partial \xi}\phi\varepsilon^2 - c_0\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\varepsilon^3, \\
\frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial P_1}{\partial \xi}\varepsilon + \frac{\partial \xi}{\partial x}\frac{\partial P_2}{\partial \xi}\varepsilon^2 = \frac{\partial P_1}{\partial \xi}\varepsilon^2 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\varepsilon^3 = c_0\rho_0\frac{\partial f}{\partial \xi}\phi'\varepsilon^2 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\varepsilon^3, \\
u(\xi,\tau,y) &= \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2, \\
v(\xi,\tau,y) &= \varepsilon^2 v_1, \\
\rho(\xi,\tau,y) &= \rho_0 + \rho_1\varepsilon + \rho_2\varepsilon^2.
\end{aligned}
$$

Reemplazando estos términos en la ecuación (13) se obtiene

$$
\begin{aligned}
&\left(\rho_0 + \rho_1\varepsilon + \rho_2\varepsilon^2\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \tau}\phi'\varepsilon^3 - c_0\frac{\partial f}{\partial \xi}\phi\varepsilon^2 - c_0\frac{\partial u_1}{\partial \xi}\varepsilon^3 + \left(\varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2\right)\left(\frac{\partial f}{\partial \xi}\phi'\varepsilon^2 + \frac{\partial u_2}{\partial \xi}\varepsilon^3\right)\right. \\
&\qquad\left. + \varepsilon^2 v_1\left(f\phi''\varepsilon + \frac{\partial u_2}{\partial y}\varepsilon^2\right)\right) = -c_0\rho_0\frac{\partial f}{\partial \xi}\phi'\varepsilon^2 - \frac{\partial \xi}{\partial x}\varepsilon^3.
\end{aligned}
$$

Bastaría ahora operar esto último teniendo en cuenta el orden de aproximación que se manejando, para obtener la siguiente expresión

$$-\rho_0(y)c_0\frac{\partial u_2}{\partial \xi}+\frac{\partial P_2}{\partial \xi}=-\rho_0(y)\phi'\frac{\partial f}{\partial \tau}-\left(\rho_0(y)(\phi')^2-\rho_0\phi\phi''+\rho_0'(y)\phi\phi'\right)f\frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

Por lo tanto, el sistema de ecuaciones resultante de la expansión al siguiente orden de ε es el siguiente

$$-c_0\frac{\partial \rho_2}{\partial \xi}+v_2\frac{d\rho_0}{dy} = G_1, \tag{27}$$

$$\frac{\partial v_2}{\partial y}+\frac{\partial u_2}{\partial \xi} = 0, \tag{28}$$

$$-\rho_0(y)c_0\frac{\partial u_2}{\partial \xi}+\frac{\partial P_2}{\partial \xi} = G_2, \tag{29}$$

$$-\frac{\partial P_2}{\partial y}-\rho_2 g = 0. \tag{30}$$

La forma de los términos G_1 y G_2, donde la comilla denotará la derivada con respecto a y, es dada por

$$G_1 = \frac{1}{c_0}\rho_0'(y)\phi\frac{\partial f}{\partial \tau} + \frac{1}{c_0}\left(\rho_0'(y)\phi\phi' - \phi(\rho_0'(y)\phi)'\right) f\frac{\partial f}{\partial \xi},$$

$$G_2 = -\rho_0(y)\phi'\frac{\partial f}{\partial \tau} - \left(\rho_0(y)(\phi')^2 - \rho_0\phi\phi'' + \rho_0'(y)\phi\phi'\right) f\frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

De igual forma que el sistema (15 – 18), se buscará formar una sola ecuación pero esta vez con el sistema (27 – 30), la cual es posible hallar realizando el mismo procedimiento hecho en (24), que genera como resultado la siguiente expresión

$$J(f,\phi) = \frac{\partial}{\partial y}\left\{\rho_0(y)\frac{\partial v_2}{\partial y}\right\} - \frac{g}{{c_0}^2}\frac{\mathrm{d}\rho_0(y)}{\mathrm{d}y}v_2, \tag{31}$$

donde

$$J(f,\phi) = -\frac{2}{c_0}\left\{\rho_0(y)\phi'\right\}'\frac{\partial f}{\partial \tau} - \frac{1}{c_0}\left[3\left\{\rho_0(y)\phi'^2\right\}' - 2\rho_0(y)\phi'\phi'' - 2\left\{\rho_0(y)\phi\phi''\right\}'\right] f\frac{\partial f}{\partial \xi}.$$

Para garantizar que la ecuación (31) tenga solución diferente a la trivial, se dirá que $v = 0$ cuando $y = 0$, pero esto es equivalente a tener que $v(\xi,\tau,0) = v_1(\xi,\tau,0) + v_2(\xi,\tau,0)$ lo cual implica que $v_1(\xi,\tau,0) = 0$ y $v_2 = (\xi,\tau,0)$, pero la primera se puede reescribir como $-\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\xi}\phi(0) = 0$ lo cual implica que $\phi(0) = 0$, por lo tanto juntando estos dos resultados se tendrían las siguientes condiciones de contorno

$$\phi(y) = 0 \quad \text{y} \quad v_2(\xi, \tau, y) = 0 \quad \text{cuando} \quad y = 0. \tag{32}$$

Multiplicando la igualdad (31) por ϕ e integrando a ambos lados con respecto a y, se obtiene

$$\int_0^{h_0} J(f,\phi)\phi \mathrm{d}y = \int_0^{h_0} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left\{ \rho_0(y) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right\} - \frac{g}{c_0^2} \rho_0'(y) v_2 \right] \phi \mathrm{d}y, \tag{33}$$

ahora, se buscará simplificar esta expresión, para eso se utiliza que

$$\begin{aligned} \phi \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho_0(y), \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] &= -\phi' \left[\rho_0(y) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\phi \rho_0(y) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right], \\ \int_0^{h_0} J(f,\phi)\phi \mathrm{d}y &= \int_0^{h_0} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\phi \rho_0(y) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] - \phi' \left[\rho_0(y) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] - \frac{g}{c_0^2} \rho_0'(y) v_2 \phi \right] \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

luego de esto, agrupando términos y separándolos en dos integrales, se tiene

$$\int_0^{h_0} J(f,\phi)\phi \mathrm{d}y = \int_0^{h_0} \left[\frac{\partial}{\partial y} \left[\phi \rho_0(y) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] \right] \mathrm{d}y - \int_0^{h_0} \left[\phi' \left[\rho_0(y) \frac{\partial v_2}{\partial y} \right] + \frac{g}{c_0^2} \rho_0'(y) v_2 \phi \right] \mathrm{d}y,$$

ahora, si se tiene en cuenta la siguiente sustitución se puede reescribir la integral de la siguiente forma

$$\frac{\partial \phi}{dy} \rho_0(y) \frac{\partial v_2}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho_0(y) v_2 \frac{d\phi}{dy} \right] - v_2 \frac{\partial}{\partial y} \left[\rho_0(y) \frac{\partial \phi}{\partial y} \right],$$

$$\int_0^{h_0} J(f,\phi)\phi \mathrm{d}y = \int_0^{h_0}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left[\phi\rho_0(y)\frac{\partial v_2}{\partial y}\right]\right]\mathrm{d}y \\ -\int_0^{h_0}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_0(y)v_2\frac{d\phi}{dy}\right]-v_2\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_0(y)\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]+\frac{g}{c_0^2}\rho_0'(y)v_2\phi\mathrm{d}y\right].$$

De forma análoga separando el segundo término en dos integrales

$$\int_0^{h_0} J(f,\phi)\phi \mathrm{d}y = \int_0^{h_0}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left[\phi\rho_0(y)\frac{\partial v_2}{\partial y}\right]\right]\mathrm{d}y \\ -\int_0^{h_0}\left[\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_0(y)v_2\frac{d\phi}{dy}\right]\right]\mathrm{d}y+\int_0^{h_0}\left[-v_2\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_0(y)\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]+\frac{g}{c_0^2}\rho_0'(y)v_2\phi\right]\mathrm{d}y.$$

Después de aplicar el teorema fundamental del cálculo para integrales junto a las condiciones de contorno (32), se obtiene

$$\int_0^{h_0} J(f,\phi)\phi \mathrm{d}y = \phi(h_0)\rho_0\frac{\partial v_2(h_0)}{\partial y}-\rho_0 v_2(h_0)\frac{d\phi(h_0)}{dy} \\ -\int_0^{h_0}\left[v_2\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_0(y)\frac{\partial\phi}{\partial y}\right]-\frac{g}{c_0^2}\rho_0'(y)v_2\phi\mathrm{d}y\right].$$

A continuación, se multiplica (23) por v_2 al despejar el resultado se reemplaza en la ecuación anterior para obtener lo siguiente:

$$v_2\frac{d}{dy}\left(\rho_0(y)\frac{d\phi(y)}{dy}\right)=\frac{g}{c_0^2}\frac{d\rho_0(y)}{dy}\phi(y)v_2$$

$$\begin{aligned}\int_0^{h_0} J(f,\phi)\phi \mathrm{d}y &= \phi(h_0)\rho_0\frac{\partial v_2(h_0)}{\partial y} - \rho_0 v_2(h_0)\frac{d\phi(h_0)}{dy} \\ &\quad - \int_0^{h_0}\left[v_2\frac{\partial}{\partial y}\left[\rho_0(y)\frac{\partial\phi}{\partial y}\right] - v_2\frac{d}{dy}\left(\rho_0(y)\frac{d\phi(y)}{dy}\right)\right] \\ \int_0^{h_0} J(f,\phi)\phi \mathrm{d}y &= \rho_0\left[\phi(h_0)\frac{\partial v_2(h_0)}{\partial y} - v_2(h_0)\frac{d\phi(h_0)}{dy}\right].\end{aligned}$$

Por último se reemplaza $J(f,\phi)$ y se despeja, para obtener:

$$\begin{aligned}c_0\rho_0\left\{v_2(h_0)\frac{\mathrm{d}\phi(h_0)}{\mathrm{d}y} - \frac{\partial v_2(h_0)}{\partial y}\phi(h_0)\right\} &= \left[2\int_0^{h0}\left\{\rho_0(y)\phi'\right\}'\phi \mathrm{d}y\right]\frac{\partial f}{\partial\tau} \\ &+ \left[\int_0^{h_0}\left\{3\left(\rho_0(y)\phi'^2\right)' - 2\rho_0(y)\phi'\phi'' - 2\left(\rho_0(y)\phi\phi''\right)'\right\}\phi \mathrm{d}y\right] f\frac{\partial f}{\partial\xi}. \qquad (34)\end{aligned}$$

Como se había mencionado, esta primera parte del estudio concluye aquí, ya que se lograron obtener unas condiciones de contorno para la capa inferior, pero para obtener la ecuación Benjamin-Ono faltaría hallar las condiciones cuando $y = h_0$ para ϕ y v_2.

Se procederá ahora a hacer el estudio de la capa superior usando el sistema (11–14), para así poder obtener las condiciones de contorno adecuadas. Se sabe que el fluido de la capa superior se excita únicamente por el movimiento de las ondas del fluido en la capa inferior, con lo cual no hay una escala espacial distinguible entre el eje horizontal y vertical de la capa superior, en este caso. Para esta capa, se considera un nuevo cambio de variable adecuado teniendo en cuenta lo que se acaba de mencionar, el cual sería:

$$\left.\begin{array}{l} \chi = x - c_0 t \\ \\ \tau = \varepsilon^2 t \\ \\ y = y \end{array}\right\} \text{ para } \; y \geq h_0.$$

al sustituir este cambio de variable en (11) y (12), se obtiene

$$\begin{aligned} -c_0 \frac{\partial \rho}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \frac{\partial \rho}{\partial \tau} + u \frac{\partial \rho}{\partial \chi} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial \chi} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0, \end{aligned}$$

estos dos cambios de variable anteriores son directos por medio de regla de la cadena. Ahora, reemplazando en (13) y (14) se obtiene

$$\begin{aligned} \rho(-c_0 \frac{\partial u}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \frac{\partial u}{\partial \tau} + u \frac{\partial u}{\partial \chi} + v \frac{\partial u}{\partial y}) &= -\frac{\partial P}{\partial \chi}, \\ \rho(-c_0 \frac{\partial v}{\partial \chi} + \varepsilon^2 \frac{\partial v}{\partial \tau} + u \frac{\partial v}{\partial \chi} + v \frac{\partial v}{\partial y}) &= -\frac{\partial P}{\partial y} + \rho g, \end{aligned}$$

teniendo en cuenta la distribución que de densidades, se sabe que para $y \geq h_0$ la densidad es constante y toma el valor de ρ_0 que es diferente de 0, con lo cual este par de ecuaciones son de la forma

$$\begin{aligned}
-c_0\frac{\partial u}{\partial \chi}+\varepsilon^2\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial \chi}+v\frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial \chi},\\
-c_0\frac{\partial v}{\partial \chi}+\varepsilon^2\frac{\partial v}{\partial \tau}+u\frac{\partial v}{\partial \chi}+v\frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y}+g.
\end{aligned}$$

Por lo tanto el sistema resultante es el siguiente, donde ρ_0 es una constante

$$-c_0\frac{\partial \rho}{\partial \chi}+\varepsilon^2\frac{\partial \rho}{\partial \tau}+u\frac{\partial \rho}{\partial \chi}+v\frac{\partial \rho}{\partial y} = 0, \tag{35}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \chi}+\frac{\partial v}{\partial y} = 0, \tag{36}$$

$$-c_0\frac{\partial u}{\partial \chi}+\varepsilon^2\frac{\partial u}{\partial \tau}+u\frac{\partial u}{\partial \chi}+v\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial \chi}, \tag{37}$$

$$-c_0\frac{\partial v}{\partial \chi}+\varepsilon^2\frac{\partial v}{\partial \tau}+u\frac{\partial v}{\partial \chi}+v\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho_0}\frac{\partial P}{\partial y}+g. \tag{38}$$

Como se mencionó anteriormente el movimiento de la capa superior se genera a partir del movimiento de la capa inferior, así que esto nos indica que la velocidad vertical máxima puede alcanzar como máximo el orden de aproximación de la capa inferior, es decir de segundo orden. Además, debido a la continuidad de la ecuación (36), se tendría que el orden máximo de la velocidad horizontal también es de segundo orden. Con esto en mente se puede expresar u, v, P y ρ en lo siguientes términos para esta capa

$$\left.\begin{aligned}
&u = \varepsilon^2 U(X, y, \tau, \varepsilon),\\
&v = \varepsilon^2 V(X, y, \tau, \varepsilon),\\
&P = P_0(y) + \varepsilon^2 P(X, y, \tau, \varepsilon),\\
&\rho = \rho_0 + \varepsilon^4 R(X, y, \tau, \varepsilon),
\end{aligned}\right\} \text{ para } y \geq h_0.$$

Teniendo en cuenta esto, y siguiendo la línea de pensamiento empleada en la capa inferior buscamos convertir el sistema de ecuaciones (35 – 38) en una sola ecuación diferencial parcial, para esto en primer lugar se reemplazará la expansión obtenida de u en la ecuación (36) y luego se derivará con respecto a y

$$\begin{aligned}
-c_0 \frac{\partial U}{\partial \chi} + O\left(\varepsilon^2\right) &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial P}{\partial \chi},\\
-c_0 \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial \chi} + O\left(\varepsilon^2\right) &= -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial y \partial \chi},
\end{aligned}$$

luego, se realiza un proceso análogo para la ecuación (37), para obtener

$$-c_0 \frac{\partial^2 V}{\partial \chi \partial \chi} + O\left(\varepsilon^2\right) = -\frac{1}{\rho_0} \frac{\partial^2 P}{\partial \chi \partial y},$$

realizando un proceso de igualación con estas dos ecuaciones resultantes, se obtiene

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} + O\left(\varepsilon^2\right) = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial \chi}.$$

Por último reemplazando las respectivas expansiones en (35), y derivando con respecto a y, y reemplazando lo obtenido en la ecuación anterior, se tiene

$$\frac{\partial^2 U}{\partial y \partial \chi} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 y} = 0,$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial \chi^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial^2 y} = O\left(\varepsilon^2\right). \tag{39}$$

Teniendo en cuenta esta ecuación, se soluciona la ecuación de Laplace con la siguientes condiciones de contorno

$$\begin{aligned} &V(X, y, \tau, \varepsilon) \to 0 \quad \text{cuando} \quad y \to +\infty, \\ &V(X, y, \tau, \varepsilon) = V_0(X, \tau, \varepsilon) \quad \text{si} \quad y = h_0. \end{aligned} \tag{40}$$

En dichas condiciones de contorno $V_0(X, y, \tau, \varepsilon)$ debe coincidir con la solución hallada para la capa inferior. La solución de la ecuación de Laplace con las condiciones de contorno (40), evaluada en $y = h_0$, está dada por (4)

$$\frac{\partial V\left(X, h_0, \tau, \varepsilon\right)}{\partial y} = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial}{\partial X}\,\mathrm{p.v.}\int_{-\infty}^{\infty} V_0(X, \tau, \varepsilon)\frac{\mathrm{d}X'}{X - X'}. \tag{41}$$

Ahora, se pueden determinas las condiciones dónde se encuentran la capa superior con la inferior como las condiciones de contorno de la solución de la capa inferior en $y = h_0$. Específicamente se necesita que la solución de la capa inferior coincida con la superior para $0\left(\varepsilon^3\right)$ a través de $y = h_0$ como también su derivada de primer orden. Con esto en mente se sabe que

$$\begin{aligned} \varepsilon^2 v_1(\xi, h_0, \tau) + \varepsilon^3 v_2(\xi, h_0, \tau) &= \varepsilon^2 V(X, h_0, \tau, \varepsilon), &(42)\\ \varepsilon^2 \frac{\partial v_1}{\partial y}(\xi, h_0, \tau) + \varepsilon^3 \frac{\partial v_2}{\partial y}(\xi, h_0, \tau) &= \varepsilon^2 \frac{\partial V}{\partial y}(X, h_0, \tau, s). &(43) \end{aligned}$$

Ahora, supongamos sin pérdida de generalidad que

$$V_0(X, \tau, \varepsilon) = -\frac{\partial f(\xi, \tau)}{\partial \xi}.$$

Con lo cual, reemplazando esto en (41) se obtiene lo siguiente:

$$\frac{\partial V(X, h_0, \tau, \varepsilon)}{\partial y} = \varepsilon \frac{1}{\pi} \mathrm{p.v.} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi', \tau)}{\xi - \xi'} \mathrm{d}\xi'. \tag{44}$$

Teniendo en cuenta las ecuaciones (42 –43) se buscará plantear las condiciones de contorno restantes. En primer lugar si de la ecuación (43) tomamos aquellos términos que posean potencia ε cubo, se obtiene

$$\frac{\partial v_2(\xi, h_0, \tau)}{\partial y} = \frac{1}{\pi} \mathrm{p.v.} \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{f(\xi', \tau)}{\xi - \xi'} \mathrm{d}\xi'.$$

Con esta misma ecuación, si se toman los términos que tengan potencia ε cuadrado y se tiene en cuenta la ecuación (22) se obtiene

$$\frac{\partial v_1}{\partial y}(\xi, h_0, \tau) = -\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi}\frac{d\phi(h_0)}{dy} = 0,$$

$$\frac{d\phi(h_0)}{dy} = 0.$$

Por otro lado, si igualamos aquellos términos que tengan potencia ε cubo de la ecuación (42) se tiene

$$v_2(\xi, h_0, \tau) = 0.$$

Además, tomando ahora aquellos términos que tengan potencia ε cuadrado se obtiene que

$$-\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi}\phi(h_0) = -\frac{\partial f(\xi,\tau)}{\partial \xi},$$

$$\phi(h_0) = 1.$$

Juntando estos resultados se tendrían las siguientes condiciones de contorno:

$$\left.\begin{array}{l} \phi(h_0) = 1, \quad v_2(\xi, h_0, \tau) = 0, \\ \dfrac{\mathrm{d}\phi(h_0)}{\mathrm{d}y} = 0, \quad \dfrac{\partial v_2(\xi, h_0, \tau)}{\partial y} = \dfrac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\,\dfrac{\partial^2}{\partial \xi^2}\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty}\dfrac{f(\xi',\tau)}{\xi-\xi'}\mathrm{d}\xi' \end{array}\right\} \tag{45}$$

Haciendo uso de estas condiciones de contorno y de la ecuación (34) buscaremos llegar a la deducción de la ecuación Benjamin-Ono. Para esto usando la sustitución $\xi' = z$ en la condición de contorno (44), se tendrá

$$\frac{\partial v_2(\xi,h_0,\tau)}{\partial y}=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\,\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(z,\tau)}{\xi-z}\mathrm{d}z.$$

Sustituyendo esta última ecuación junto $\frac{\mathrm{d}\phi(h_0)}{\mathrm{d}y}=0$, $\phi(h_0)=1$ en (34) se obtiene

$$\begin{aligned}-c_0\rho_0\left\{\frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\,\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(z,\tau)}{\xi-z}\mathrm{d}z\right\}&=\left[2\int_0^{h0}\{\rho_0(y)\phi'\}'\phi\mathrm{d}y\right]\frac{\partial f}{\partial\tau}\\&+\left[\int_0^{h_0}\left\{3\left(\rho_0(y)\phi'^2\right)'-2\rho_0(y)\phi'\phi''-2\left(\rho_0(y)\phi\phi''\right)'\right\}\phi\mathrm{d}y\right]f\frac{\partial f}{\partial\xi}.\end{aligned}$$

Se sabe por la Definición 1.1, que

$$\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathscr{H}\{f(\xi)\}=\frac{1}{\pi}\,\mathrm{p.v.}\,\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(z)}{\xi-z}\,\mathrm{d}z,$$

entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}-c_0\rho_0\left\{\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathscr{H}\{f(\xi)\}\right\}&=\left[2\int_0^{h0}\{\rho_0(y)\phi'\}'\phi\mathrm{d}y\right]\frac{\partial f}{\partial\tau}\\&+\left[\int_0^{h_0}\left\{3\left(\rho_0(y)\phi'^2\right)'-2\rho_0(y)\phi'\phi''-2\left(\rho_0(y)\phi\phi''\right)'\right\}\phi\mathrm{d}y\right]f\frac{\partial f}{\partial\xi}.\end{aligned}\tag{46}$$

Ahora, se buscarán hacer algunas sustituciones con el fin de llegar a la ecuación deseada, para ello se usa que

$$\left(\rho(y)\phi'(y)\right)'\phi(y) = \left(\rho_0(y)\phi'(y)\phi(y)\right)' - \rho_0(y)\phi'^2(y).$$

Estas expresiones se sustituirán en

$$\begin{aligned} 2\left[\int_0^{h0} \left\{\rho_0(y)\phi'\right\}' \phi \mathrm{d}y\right] &= 2\left[\int_0^{h0} \left(\rho_0(y)\phi'(y)\phi(y)\right)' - \rho_0(y)\phi'^2(y)\mathrm{d}y\right] \\ &= 2\left[\left(\rho_0(h_0)\phi'(h_0)\phi(h_0)\right) - \left(\rho_0(0)\phi'(0)\phi(0)\right) - \int_0^{h0} \rho_0(y)\phi'^2(y)\mathrm{d}y\right]. \end{aligned}$$

Utilizando que $\phi(0) = 0$ y además que $\phi'(h_0) = 0$ se obtiene

$$2\left[\int_0^{h0} \left\{\rho_0(y)\phi'\right\}' \phi \mathrm{d}y\right] = -2\left[\int_0^{h0} \rho_0(y)\phi'^2(y)\mathrm{d}y\right].$$

Ahora, tiendo en cuenta el siguiente par de sustituciones y llevándolas a la ecuación anterior, se obtiene

$$\begin{aligned} (\rho_0(y)\phi'^2(y))'\phi(y) &= (\rho_0(y)\phi'^2(y)\phi(y))' - \rho_0(y)\phi'^3(y) \\ (\rho_0(y)\phi(y)\phi''(y))'\phi(y) &= (\rho_0(y)\phi(y)\phi''(y)\phi(y))' - \rho_0(y)\phi(y)\phi''(y)\phi'(y) \end{aligned}$$

$$\int_0^{h_0} \left\{3\left(\rho_0(y)\phi'^2\right)' - 2\rho_0(y)\phi'\phi'' - 2\left(\rho_0(y)\phi\phi''\right)'\right\}\phi \mathrm{d}y = \int_0^{h_0} 3(\rho_0(y)\phi'^2(y)\phi(y))'$$
$$- 3\rho_0(y)\phi'^3(y) - 2\rho_0(y)\phi'(y)\phi''(y)\phi(y) - 2(\rho_0(y)\phi(y)\phi''(y)\phi(y))' + 2\rho_0(y)\phi(y)\phi''(y)\phi'(y)\mathrm{d}y.$$

Ahora se buscará simplificar la expresión anterior usando el Teorema Fundamental del Cálculo[15]

$$\int_0^{h_0} \left\{3\left(\rho_0(y)\phi'^2\right)' - 2\rho_0(y)\phi'\phi'' - 2\left(\rho_0(y)\phi\phi''\right)'\right\}\phi \mathrm{d}y = 3(\rho_0(h_0)\phi'^2(h_0)\phi(h_0))$$
$$-3(\rho_0(0)\phi'^2(0)\phi(0)) - 3\int_0^{h_0} \rho_0(y)\phi'^3(y)\mathrm{d}y - 2\rho_0(h_0)\phi(h_0)\phi''(h_0)\phi(h_0) + 2\rho_0(0)\phi(0)\phi''(0)\phi(0).$$

Usando que $\phi'(h_0) = 0$, $\phi(0) = 0$, y además teniendo en cuenta la forma como se define la densidad

$$\rho_0(y) = \begin{cases} \rho_0 & y \geq h_0, \\ \\ \rho_0(y) & 0 \leq y < h_0, \end{cases}$$

se tendrá que $\rho_0'(h_0) = 0$, esto junto con la ecuación (23) se tiene que $\phi(h_0)'' = 0$ por lo tanto se podrá reescribir la igualdad anterior de la siguiente forma

---

[15] **Teorema Fundamental del Cálculo.** Sea f continua en $[a,b]$ y $f = g'$ entonces

$$\int_a^b f(t)dt = g(b) - g(a).$$

$$\int_0^{h_0} \left\{ 3\left(\rho_0(y)\phi'^2\right)' - 2\rho_0(y)\phi'\phi'' - 2\left(\rho_0(y)\phi\phi''\right)' \right\} \phi \mathrm{d}y = -3\int_0^{h_0} \rho_0(y)\phi'^3(y)\mathrm{d}y.$$

Llevando estas dos formas de reescribir estas integrales a (46) vamos a obtener:

$$-c_0\rho_0 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \mathscr{H}\{f(\xi)\} \right\} = -2\left[\int_0^{h0} \rho_0(y)\phi'^2(y)\mathrm{d}y\right] \frac{\partial f}{\partial\tau} - \left[3\int_0^{h_0} \rho_0(y)\phi'^3(y)\mathrm{d}y\right] f\frac{\partial f}{\partial\xi}.$$

Por último, se puede reescribir esta última expresión de la siguiente forma

$$-c_0\rho_0 \left\{ \frac{\partial^2}{\partial\xi^2} \mathscr{H}\{f(\xi)\} \right\} + 2\left[\int_0^{h0} \rho_0(y)\phi'^2(y)\mathrm{d}y\right] \frac{\partial f}{\partial\tau} + \left[3\int_0^{h_0} \rho_0(y)\phi'^3(y)\mathrm{d}y\right] f\frac{\partial f}{\partial\xi} = 0.$$

Luego se divide a ambos lados de la igualdad por el coeficiente que acompaña a $\dfrac{\partial f}{\partial\tau}$ y teniendo en cuenta que

$$\alpha = \frac{3\int_0^{h_0} \rho_0(y)\phi'^3 \,\mathrm{d}y}{2\int_0^{h_0} \rho_0(y)\phi'^2 \,\mathrm{d}y} \qquad \text{y} \qquad \beta = \frac{c_0\rho_0}{2\int_0^{h_0} \rho_0(y)\phi'^2 \,\mathrm{d}y},$$

se obtiene la ecuación Benjamín-Ono

$$\frac{\partial f}{\partial\tau} + \alpha f\frac{\partial f}{\partial\xi} - \beta\frac{\partial^2}{\partial\xi^2}\mathscr{H}(f) = 0. \tag{47}$$

3. Problema de Cauchy

A lo largo de esta sección se estudiará el problema de Cauchy asociado con la ecuación Benjamin-Ono

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} = \mu \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathscr{H}(u_\mu)\right), \quad u_\mu(0) = \phi, \tag{48}$$

donde $\mu \geq 0$, bajo ciertas restricciones que favorecerán su estudio, dicho problema fue abordado por Iório en José Iório (1986). Se analizará el buen planteamiento del problema en los espacios $H^s(\mathbb{R})$ con $s \in \mathbb{R}$ y $\mathscr{F}_r = H^r(\mathbb{R}) \cap L^2_r(\mathbb{R})$ con $r = 0, 1, 2$. Para este estudio se emplearán algunos operadores recurrentes los cuales se definen a continuación.

Sean $\mu \geq 0$, $\xi \in \mathbb{R}$ y $f \in L^2(\mathbb{R})$ entonces, se definen los siguientes operadores:

$$Q_\mu = -(\mu - 2\mathscr{H})\partial_x^2, \tag{49}$$

$$F_\mu(t,\xi) = e^{-t(\mu - 2i\ \mathrm{sgn}(\xi))\xi^2}, \tag{50}$$

$$E_\mu(t)f = (F_\mu(t,\cdot)\hat{f})^\vee. \tag{51}$$

Basándose en el problema de Cauchy asociado a la Ecuación de Schrödinger lineal (ver Júnior and Iorio (2001))

$$\partial_t u(t) = \Delta u(t) \in H^{s-2}(\mathbb{R}^n) \quad u(0) = \phi \in H^s(\mathbb{R}^n) \quad u \in C([0,\infty); H^s(\mathbb{R}^n)), \tag{52}$$

Iório define $E_\mu(t)f$ de tal forma que generaliza dicha solución para adaptarla al problema (48). Es conocido que el problema (52) está bien puesto (ver Júnior and Iorio (2001)), y además posee única solución, definida de la siguiente forma

$$u(t) = e^{(t\Delta)}\phi, \qquad \text{donde} \quad \phi \in H^s(\mathbb{R}^n).$$

Es posible encontrar un operador similar a $E_\mu(t)f$ como solución al problema de Cauchy asociado con la ecuación de Schrödinger no lineal

$$\partial_t u(t) + iq(D)u(t) = \mu\partial_x^2 u(t), \quad u(0) = \phi \in H^s(\mathbb{R}), \quad u \in C([0,\infty); H^s(\mathbb{R})), \tag{53}$$

donde $\widehat{L(t)f} = \left(e^{t\left(-\mu(\check{\xi})^2 - iq(\xi)\right)}\right)\hat{f}(\xi)$, con $f \in H^s(\mathbb{R})$, considerando la función $u : (0,\infty) \to L(t)f$ con $t \mapsto L(t)f$, se puede demostrar que es la única solución del problema de Cauchy (53). Para profundizar sobre este problema se recomienda al lector la referencia Júnior and Iorio (2001).

Teniendo en cuenta lo anterior, se demostrará que el operador $E_\mu(t)f$ es solución del problema de Cauchy asociado a la ecuación Benjamín-Ono (48).

Teorema 3.1. *Sea $\lambda \in [0,\infty)$, entonces:*

a) Para todo $t > 0$ y $s \in \mathbb{R}$ se tiene que $E_\mu(t) \in B(H^s(\mathbb{R}), H^{s+\lambda}(\mathbb{R}))$[16]*. Además, para todo*

---

[16] El conjunto de todas las transformaciones lineales que van de $H^s(\mathbb{R})$ a $H^{s+\lambda}(\mathbb{R})$ es denotado como $B(H^s(\mathbb{R}), H^{s+\lambda}(\mathbb{R}))$. Los elementos de $B(H^s(\mathbb{R}), H^{s+\lambda}(\mathbb{R}))$ son llamados generalmente operadores lineales acotados.

$\varphi \in H^s(\mathbb{R})$,

$$\left\|E_\mu(t)\varphi\right\|_{H^{s+\lambda}(\mathbb{R})} \leq K_\lambda \left[1+(2\mu t)^{-\lambda} e^{2t\mu}\right]^{1/2} \|\varphi\|_{H^s(\mathbb{R})}, \tag{54}$$

donde K_λ es una constante que depende de λ. Más aún, como consecuencia de esto se obtiene que $E_\mu(t)\varphi$ es continuo, para todo t, bajo la topología usual de $H^{s+\lambda}(\mathbb{R})$.

b) *Además, se tiene que $E_\mu : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R})$ es un semigrupo de contracción.*

Demostración. En primer lugar, si se toma $\lambda = 0$ la desigualdad (54) surge a partir de la ecuación (56). Ahora, se demostrará el caso $\lambda > 0$. Teniendo en cuenta la definición del operador $E_\mu(t)f$ y usando la definición de la norma del espacio H^s, se puede decir que

$$\left\|E_\mu(t)\varphi\right\|^2_{H^{s+\lambda}(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+\lambda} \left|\mathscr{F}((F_\mu(t,\xi)\hat{\varphi}(\xi))^\vee)\right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+\lambda} \left|F_\mu(t,\xi)\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 d\xi.$$

Teniendo en cuenta la definición de la función $F_\mu(t,\xi)$, la definición de la norma en $H^s(\mathbb{R})$ y el hecho que la función exponencial $\exp\left(-2t\mu\xi^2\right)$ decrece más rápidamente que cualquier polinomio obtenemos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s+\lambda} \left|F_\mu(t,\xi)\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 d\xi &= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{\lambda} \left|F_\mu(t,\xi)\right|^2 \left(1+\xi^2\right)^{s} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{\lambda} \exp\left(-2t\mu\xi^2\right) \left(1+\xi^2\right)^{s} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \sup_{\xi} \left(\left(1+\xi^2\right)^{\lambda} \exp\left(-2t\mu\xi^2\right)\right) \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^{s} |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi \\
&\leq \left(1+\sup_{\xi} \alpha_\lambda(\xi) e^{2t\mu}\right) \|\varphi\|^2_{H^s(\mathbb{R})},
\end{aligned} \tag{55}$$

donde $\alpha_\lambda(\xi) = \xi^{2\lambda} e^{-2\mu t \xi^2}$. Notése que la última desigualdad se tiene dado que el $\sup_\xi \left(\left(1+\xi^2\right)^\lambda \exp\left(-2t\mu\xi^2\right) \right)$ es $\lambda^\lambda e^{-\lambda}(2t\mu)^{-\lambda} e^{2t\mu}$, mientras que $\left(1+\sup_\xi \alpha_\lambda(\xi) e^{2t\mu}\right)$ es $\lambda^\lambda e^{-\lambda}(2t\mu)^{-\lambda} e^{2t\mu}+1$.

Veamos ahora que

$$\alpha_\lambda(\xi) = \xi^{2\lambda} e^{-2\mu t \xi^2} \leq \lambda^\lambda e^{-\lambda} (2\mu t)^{-\lambda}.$$

En efecto, obsérvese que la relación se satiface si $\xi = 0$. Consideremos ahora el caso en el cual $\xi \neq 0$. Nótese que $x \leq e^{x-1}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Esto implica que $e \leq \frac{1}{x} e^x$, en particular, para $x = \delta/\lambda$, con $\delta = 2\mu t \xi^2 > 0$. Así, si se toma $\lambda > 0$, entonces

$$e^\lambda \leq \left(\frac{\lambda}{\delta}\right)^\lambda e^\delta = \left(\frac{\lambda}{\delta} e^{\delta/\lambda}\right)^\lambda \quad \Longleftrightarrow \quad e^{-\delta} \leq \lambda^\lambda e^{-\lambda} (\delta)^{-\lambda},$$

reemplazando $\delta = 2\mu t \xi^2$, se obtiene

$$e^{-2\mu t \xi^2} \leq \lambda^\lambda e^{-\lambda} \left(2\mu t \xi^2\right)^{-\lambda} \quad \Longleftrightarrow \quad \alpha_\lambda(\xi) = \xi^{2\lambda} e^{-2\mu t \xi^2} \leq \lambda^\lambda e^{-\lambda} (2\mu t)^{-\lambda},$$

como se quería demostrar. Ahora, reemplazando la desigualdad que se acaba de demostrar en (55) se tiene que

$$\begin{aligned}
\left\|E_\mu(t)\varphi\right\|^2_{H^{s+\lambda}(\mathbb{R})} &\leq \left(1+\sup_\xi \alpha_\lambda(\xi)e^{2t\mu}\right)\|\varphi\|^2_{H^s(\mathbb{R})}\\
&\leq \left(1+\lambda^\lambda e^{-\lambda}\,(2\mu t)^{-\lambda}\,e^{2t\mu}\right)\|\varphi\|^2_{H^s(\mathbb{R})}\\
&\leq K_\lambda^2\left(1+(2\mu t)^{-\lambda}\,e^{2t\mu}\right)\|\varphi\|^2_{H^s(\mathbb{R})},
\end{aligned}$$

donde $K_\lambda^2 \geq \text{máx}\left\{1,\lambda^\lambda e^{-\lambda}\right\}$, lo cual demuestra la desigualdad (54).

Demostremos ahora la continuidad de $E_\mu(t)\varphi$. Sin pérdida de generalidad, considérese $t>\tau$ y acotemos la siguiente diferencia teniendo en cuenta que $F_\mu(t,\xi)$ esta acotada

$$\begin{aligned}
\left\|E_\mu(t)\varphi-E_\mu(\tau)\varphi\right\|^2_{H^{s+\lambda}(\mathbb{R})} &= \left\|\left(E_\mu(t)-E_\mu(\tau)\right)\varphi\right\|^2_{H^{s+\lambda}(\mathbb{R})}\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^{s+\lambda}\left|\left(F_\mu(t,\xi)-F_\mu(\tau,\xi)\right)\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 d\xi\\
&= \int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^{\lambda+s}\left|F_\mu(t,\xi)\right|^2\left|F_\mu(\tau-t,\xi)-1\right|^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi,\\
&\leq \sup_\xi\left(\left|F_\mu(\tau-t,\xi)-1\right|^2\right)\int_{\mathbb{R}}\left(1+\xi^2\right)^{\lambda+s}\left|F_\mu(t,\xi)\right|^2|\hat{\varphi}(\xi)|^2\,\mathrm{d}\xi.
\end{aligned}$$

Ahora, teniendo en cuenta la desigualdad (54) se obtiene que

$$\left\|E_\mu(t)\varphi-E_\mu(\tau)\varphi\right\|^2_{H^{s+\lambda}(\mathbb{R})}\leq K_\lambda^2\left[1+(2\mu t)^{-\lambda}e^{2t\mu}\right]\|\varphi\|^2_{H^s(\mathbb{R})}\sup_\xi\left(\left|F_\mu(\tau-t,\xi)-1\right|^2\right),$$

si se considera a $\tau=\tau_n$ una sucesión que tienda a t por derecha, se obtiene que $F_\mu(\tau_n-t,\xi)\to 1$

con lo cual

$$\lim_{n\to\infty} \left\|E_\mu(t)\varphi - E_\mu(\tau_n)\varphi\right\|^2_{H^{s+\lambda}(\mathbb{R})} = 0,$$

lo cual implica que $E_\mu(t)\varphi$ es continuo. Con esto queda demostrada la parte a).

Ahora, sea $\lambda = 0$ y demostremos que $E_\mu : H^s(\mathbb{R}) \to H^s(\mathbb{R})$ es una contracción. En efecto, por definición de F_μ se tiene que $\left|F_\mu(t,\xi)\right| \leq 1$ para todo $t > 0$ y $\xi \in \mathbb{R}$. Así, por la definición de la norma en $H^s(\mathbb{R})$, se tiene que

$$\left\|E_\mu(t)\varphi\right\|^2_{H^s(\mathbb{R})} = \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s \left|F_\mu(t,\xi)\hat{\varphi}(\xi)\right|^2 d\xi \leq \int_{\mathbb{R}} \left(1+\xi^2\right)^s |\hat{\varphi}(\xi)|^2 d\xi = \|\varphi\|^2_{H^s(\mathbb{R})}, \quad (56)$$

lo cual implica que E_μ es una contracción de $H^s(\mathbb{R})$ en $H^s(\mathbb{R})$. Bastaría probar las dos propiedades restantes de semigrupo. En primer lugar se tiene que

$$E_\mu(0) = e^{-0(\mu-2i\ \mathrm{sgn}(\xi))\xi^2} = e^0 = 1.$$

Por último, sean $t_1, t_2 \in (0,\infty)$ entonces

$$E_\mu(t_1+t_2) = e^{-(t_1+t_2)(\mu-2i\ \mathrm{sgn}(\xi))\xi^2} = e^{-t_1(\mu-2i\ \mathrm{sgn}(\xi))\xi^2} e^{-t_2(\mu-2i\ \mathrm{sgn}(\xi))\xi^2} = E_\mu(t_1)E_\mu(t_2).$$

Con lo cual hemos concluido la demostración de que $E_\mu : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^s(\mathbb{R})$ es un semigrupo de contracción. □

Como consecuencia de este resultado y haciendo uso del Teorema 1.24 se obtiene el siguiente corolario.

Corolario 3.2. *Sea $\phi \in H^s(\mathbb{R})$. Entonces, $u_\mu = E_\mu(t)\phi \in C([0,\infty); H^s(\mathbb{R}))$ es la única solución de*

$$\begin{aligned} \frac{\partial u_\mu}{\partial t} &= \mu \frac{\partial^2 u_\mu}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\mathscr{H}(u_\mu)\right). \\ u_\mu(0) &= \phi. \end{aligned}$$

El siguiente resultado describe la forma que tienen la derivadas parciales con respecto a ξ del operador $F_\mu(t,\xi)$.

Lema 3.3. *Sea $F_\mu(t,\xi)$ la función definida en* (50). *Entonces*

$$\begin{aligned} \partial_\xi F_\mu(t,\xi) &= -2t\xi(\mu - 2i\,\mathrm{sgn}(\xi))F_\mu(t,\xi), \\ \partial_\xi^2 F_\mu(t,\xi) &= -2t(\mu - 2i\,\mathrm{sgn}(\xi))F_\mu(t,\xi) + (-2t)^2\xi^2(\mu - 2ih)^2 F_\mu(t,\xi), \\ \partial_\xi^3 F_\mu(t,\xi) &= -4it\delta + 3(-2t)^2\xi(\mu - 2i\,\mathrm{sgn}(\xi))^2 F_\mu(t,\xi) + (-2t)^3\xi^3(\mu - 2i\,\mathrm{sgn}(\xi))^3 F_\mu(t,\xi). \end{aligned} \tag{57}$$

Más aún, para $n \geq 3$ la n-ésima derivada de $F_\mu(t,\xi)$ con respecto a ξ está definida de la siguiente forma

$$\partial_\xi^n F_\mu(t,F) = -4it\delta^{(n-2)} + \sum_{k=0}^{n-3} p_k(t)\delta^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} q_k(t)s_k(\xi)(\mu - 2ih)^k F_\mu(t,\xi), \tag{58}$$

donde, δ es la función delta de Dirac, y $p_k(t)$, $q_k(y)$ y $s_k(\xi)$ son polinomios tales que el grado de $p_k(t)$ es menor o igual a k y además el grado de $q_k(t), s_k(\xi)$ es k.

Demostración. La demostración se realizará usando inducción. Para iniciar tenga en cuenta que

$$\partial_\xi(\mu - 2i\,\mathrm{sgn}(\xi))^k = \delta(\xi)C_k, \tag{59}$$

donde C_k es una constante que solo depende de μ y k. Sin pérdida de generalidad supóngase que k es par. Para probar (59), en primer lugar se le aplica el teorema del binomio a $(\mu - 2i\,\mathrm{sgn}(\xi))^k$ teniendo en cuenta que $\mathrm{sgn}^n(\xi) = 1$ cuando n es par, y que $\mathrm{sgn}^n(\xi) = \mathrm{sgn}(\xi)$ cuando n es impar

$$\partial_\xi(\mu - 2i\,\mathrm{sgn}(\xi))^k = \partial_\xi\left(\sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j}\mu^{n-j}(-2i\,\mathrm{sgn}(\xi))^j\right),$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi(\mu - 2i\,\mathrm{sgn}(\xi))^k = \partial_\xi\Bigg(&\binom{k}{0}\mu^k(-2i\,\mathrm{sgn}(\xi))^0 + \binom{k}{1}\mu^{k-1}(-2i\,\mathrm{sgn}(\xi))^1 + \\ &+\cdots+\binom{k}{k-1}\mu^1(-2i\,\mathrm{sgn}(\xi))^{k-1} + \binom{k}{k}\mu^0(-2ih(\xi))^k\Bigg),\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\partial_\xi(\mu - 2i\,\mathrm{sgn}(\xi))^k = \partial_\xi\Bigg(&\binom{k}{0}\mu^k + \binom{k}{1}\mu^{k-1}(-2i)\,\mathrm{sgn}(\xi) \\ &+\cdots+\binom{k}{k-1}\mu^1(-2i)^{k-1}\,\mathrm{sgn}(\xi) + \binom{k}{k}\mu^0(-2i)^k\Bigg),\end{aligned}$$

finalmente si se aplica la derivada parcial con respecto a ξ y se usa que $\partial_\xi\,\mathrm{sgn}(\xi) = 2\delta(\xi)$, se tiene que todos aquellos términos que tengan potencia par de $\mathrm{sgn}(\xi)$ se anulan debido a que

$\partial_\xi \operatorname{sgn}^2(\xi) = \partial_\xi 1 = 0$, por lo tanto se tiene

$$\partial_\xi (\mu - 2i \operatorname{sgn}(\xi))^k = \binom{k}{1}\mu^{k-1}(-2i)2\delta(\xi) + \\ + \cdots + \binom{k}{k-3}\mu^3(-2i)^{k-3}2\delta(\xi) + \binom{k}{k-1}\mu^1(-2i)^{k-1}2\delta(\xi),$$

$$\partial_\xi (\mu - 2i \operatorname{sgn}(\xi))^k = \delta(\xi)\left(\binom{k}{1}\mu^{k-1}(-2i)2 + \right. \\ \left. + \cdots + \binom{k}{k-3}\mu^3(-2i)^{k-3}2 + \binom{k}{k-1}\mu^1(-2i)^{k-1}2\right) = \delta(\xi)C_k,$$

donde

$$C_k = 2\binom{k}{1}\mu^{k-1}(-2i) + \cdots + 2\binom{k}{k-3}\mu^3(-2i)^{k-3} + 2\binom{k}{k-1}\mu^1(-2i)^{k-1}.$$

Por lo tanto se puede concluir que $\partial_\xi (\mu - 2i \operatorname{sgn}(\xi))^k = \delta(\xi)C_k$.

Se demuestra ahora la validez de la igualdad (58) a través de inducción matemática.

Obsérvese que se tiene la validez de la igualdad para cuando $m = 1, 2, 3$:

$$\begin{aligned}
\partial_\xi F_\mu(t,\xi) &= -2t\xi(\mu - 2i\operatorname{sgn}(\xi))F_\mu(t,\xi), \\
\partial_\xi^2 F_\mu(t,\xi) &= -2t(\mu - 2i\operatorname{sgn}(\xi))F_\mu(t,\xi) + (-2t)^2\xi^2(\mu - 2ih)^2 F_\mu(t,\xi), \\
\partial_\xi^3 F_\mu(t,\xi) &= -4it\delta + 3(-2t)^2\xi(\mu - 2i\operatorname{sgn}(\xi))^2 F_\mu(t,\xi) + (-2t)^3\xi^3(\mu - 2i\operatorname{sgn}(\xi))^3 F_\mu(t,\xi).
\end{aligned}$$

Ahora, supóngase que la igualdad (58) es válida para cualquier número natural $m = n$:

$$\partial_\xi^n F_\mu(t,F) = -4it\delta^{(n-2)} + \sum_{k=0}^{n-3} p_k(t)\delta^{(k)} + \sum_{k=0}^{n} q_k(t)s_k(\xi)(\mu-2ih)^k F_\mu(t,\xi), \tag{60}$$

y demostremos que se tiene la validez de la igualdad para el caso $m = n+1$:

$$\partial_\xi^{n+1} F_\mu(t,\xi) = -4it\delta^{(n-1)} + \sum_{k=0}^{n-2} p_k(t)\delta^{(k)} + \sum_{k=0}^{n+1} q_k(t)s_k(\xi)(\mu-2ih)^k F_\mu(t,\xi).$$

Para esto se deriva con respecto a ξ a la ecuación (60):

$$\partial_\xi^{n+1} F_\mu(t,\xi) = \partial_\xi(-4it\delta^{(n)}) + \partial_\xi\left(\sum_{k=0}^{n-3} p_k(t)\delta^{(k)}\right) + \partial_\xi\left(\sum_{k=0}^{n} q_k(t)s_k(\xi)(\mu-2ih)^k F_\mu(t,\xi)\right). \tag{61}$$

Obsérvese por separado la forma de cada uno de los tres términos de la ecuación anterior:

$$\partial_\xi(-4it\delta^{(n)}) = -4it\delta^{(n+1)}, \tag{62}$$

$$\begin{aligned}
\partial_\xi\left(\sum_{k=0}^{n-3} p_k(t)\delta^{(k)}\right) &= \partial_\xi\left(p_0(t)\delta^{(0)} + p_1(t)\delta^{(1)} + \cdots + p_{j-2}(t)\delta^{(j-3)}\right) \\
&= p_0(t)\delta^{(1)} + p_1(t)\delta^{(2)} + \cdots + p_{j-2}(t)\delta^{(j-2)} \\
&= \sum_{k=1}^{n-2} p_{k-1}(t)\delta^{(k)}.
\end{aligned} \tag{63}$$

Para el último término se sabe por hipótesis que el grado de $s(t)_k$ es igual a k, así que notaremos como $\dot{s}_k(t)$ al polinomio $s(t)_k$ sin su término independiente a_k, es decir $s(t)_k = \dot{s}_k(t) + a_k$, por lo tanto se obtiene

$$\begin{aligned}\partial_\xi\left(\sum_{k=0}^{n} q_k(t)s_k(\xi)(\mu-2ih)^k F_\mu(t,\xi)\right) &= \partial_\xi\left(\sum_{k=0}^{n} q_k(t)(a_k+\dot{s}_k(\xi))(\mu-2ih)^k F_\mu(t,\xi)\right)\\ &= \partial_\xi\left(\sum_{k=0}^{n} q_k(t)a_k(\mu-2ih)^k F_\mu(t,\xi)\right)+\partial_\xi\left(\sum_{k=0}^{n} q_k(t)\dot{s}_k(\xi)(\mu-2ih)^k F_\mu(t,\xi)\right). \quad (64)\end{aligned}$$

Ahora se verá cómo serán cada una de estas dos derivadas

$$\begin{aligned}\partial_\xi\left(\sum_{k=0}^{n} q_k(t)\dot{s}_k(\xi)(\mu-2ih)^k F_\mu(t,\xi)\right) = &\sum_{k=0}^{n} q_k(t)\dot{s}_k(\xi)'(\mu-2ih)^k F_\mu(t,\xi)\\ &+\sum_{k=0}^{n} q_k(t)\dot{s}_k(\xi)\xi(-2ti)(\mu-2ih)^{k+1} F_\mu(t,\xi).\end{aligned}$$

Se puede notar que es posible juntar estas dos sumatorias, y además se sabe que $s_k\dot{(\xi)}\xi$ es un polinomio de grado $k+1$ al igual que $q_k(t)(-2ti)$, por lo tanto la sumatoria se puede reescribir de la siguiente forma

$$\partial_\xi\left(\sum_{k=0}^{n} q_k(t)\dot{s}_k(\xi)(\mu-2ih)^k F_\mu(t,\xi)\right)=\sum_{k=0}^{n+1} q_k(t)\dot{s}_k(\xi)(\mu-2ih)^k F_\mu(t,\xi). \quad (65)$$

Por otro lado, el término restante de (64) da como resultado

$$\partial_\xi\left(\sum_{k=0}^{n} q_k(t)a_k(\mu-2ih)^k F_\mu(t,\xi)\right)=\sum_{k=0}^{n} q_k(t)\delta. \quad (66)$$

Si se suma (63) con (66), se obtiene

$$
\begin{aligned}
\partial_\xi\left(\sum_{k=0}^{n} q_k(t)a_k(\mu-2ih)^k F_\mu(t,\xi)\right)+\partial_\xi\left(\sum_{k=0}^{n-3} p_k(t)\delta^{(k)}\right) &= \sum_{k=0}^{n} q_k(t)\delta+\sum_{k=1}^{n-2} p_{k-1}(t)\delta^{(k)}\\
&= \sum_{k=0}^{n-2} p_k(t)\delta^{(k)}, \qquad (67)
\end{aligned}
$$

por lo tanto, reemplazando (62), (65) y (67) en la ecuación (61), se obtiene

$$
\partial_\xi^{n+1}F_\mu(t,\xi)=-4it\delta^{(n-1)}+\sum_{k=0}^{n-2} p_k(t)\delta^{(k)}+\sum_{k=0}^{n+1} q_k(t)\dot{s}_k(\xi)(\mu-2ih)^k F_\mu(t,\xi).
$$

Con esto termina la prueba por inducción y se puede concluir que la ecuación (58) se cumple para todo n natural. □

Ahora, si se considera $(\widehat{E_\mu(t)\phi})(\xi)=F_\mu(t,\xi)\hat{\phi}(\xi)$, tal que $\phi\in L_1^2(\mathbb{R})$, sabemos que la primera derivada de este operador con respecto a ξ tendrá la siguiente forma

$$
\partial_\xi(\widehat{E_\mu(t)\phi})(\xi)=\partial_\xi(F_\mu(t,\xi)\phi(\hat{\xi}))=\left(\partial_\xi F_\mu(t,\xi)\right)\widehat{\phi}(\xi)+F_\mu(t,\xi)\partial_\xi\widehat{\phi}(\xi),
$$

donde $\left(\partial_\xi F_\mu(t,\xi)\right)$ está dada por la expresión generada en el Lema 3.3. Queremos que $\partial_\xi(\widehat{E_\mu(t)\phi})(\xi)\in L^2(\mathbb{R})$, esto pasa, si y solo si, $\partial_\xi\widehat{\phi}(\xi)\in L^2(\mathbb{R})$ esto último se obtiene si y solo si $\phi\in H^1(\mathbb{R})$. Esto implicaría que $\phi\in\mathscr{F}_1$. Para las derivadas de orden superior se puede garantizar que $\phi\in\mathscr{F}_r$ usando un argumento análogo al anterior. En este sentido se pueden demostrar los siguientes resultados (ver José Iório (1986)).

Teorema 3.4. *Sea μ fijo. Entonces,*

a) $E_\mu : \mathscr{F}_r \longrightarrow \mathscr{F}_r, \quad r = 0,1,2$ *es un semigrupo C_0 y satisface que*

$$\left\| E_\mu(t)\phi \right\|_{\mathscr{F}_r} \leq P_r(t) \|\phi\|_{\mathscr{F}_r},$$

para todo $\phi \in \mathscr{F}_r$, y donde $P_r(t)$ es un polinomio de grado r con coeficientes positivos que solo dependen de μ y r

b) Si $r \geq 3$ y $\phi \in \mathscr{F}_r$, la función $E_\mu(t)\phi$ pertenece a $C([0,\infty), \mathscr{F}_r)$ si y solo si

$$\partial_\xi^j \hat{\phi}(0) = 0, \quad j = 0,1,2,\ldots,r-2.$$

Además, en este caso la desigualdad en a) (ver Teorema 3.1) se mantiene.

Corolario 3.5. *Sean μ fijo y $\phi \in \mathscr{F}_r$. Si $r = 0,1,2$ la única solución de la ecuación* (48) *en $\mathscr{F}_r$ viene dada por $u_\mu(t) = E_\mu(t)\phi$. Por otro lado, si $r \geq 3$ entonces* (48) *tiene solución en $\mathscr{F}_r$ si y solo si se cumple el inciso b) del teorema anterior. Es más, en ese caso la solución es única y viene dada por $u_\mu(t) = E_\mu(t)\phi$.*

A continuación se abordará el problema de Cauchy planteado por Iório en Iório Jr (1991)

$$\frac{\partial u_\mu}{\partial t} = -\mu \frac{\partial u_\mu}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x}\left(u_\mu^2 + 2\mathscr{H}\left(\frac{\partial u_\mu}{\partial x}\right)\right), \quad u_\mu(0) = \phi, \tag{68}$$

donde $\mu > 0$. En este caso se demostrará que existe un único u_μ tal que pertenece a $C\left([0,T_s]\,; H^s(\mathbb{R})\right)$, su derivada con respecto al tiempo pertenece a $C\left([0,T_s];H^{s-2}(\mathbb{R})\right)$ y tal que satisface el problema de Cauchy (68). Al igual que como se procedió en el problema de Cauchy (48), se recurrirá al operador $E_\mu(t)f$.

Teorema 3.6. *Sea $\mu>0$ fijo y $\phi\in H^s(\mathbb{R})$ con $s>\dfrac{1}{2}$. Entonces existen $T_s>0$ que depende únicamente de s, $\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})}$, μ y una única función $u_\mu\in C([0,T_s];H^s(\mathbb{R}))$ tal que satisface la ecuación integral*

$$u(t)=E_\mu(t)\phi-\int_0^t E_\mu\left(t-t'\right)\frac{\partial u\left(t'\right)^2}{\partial x}dt' \tag{69}$$

donde $E_\mu(t)\phi$ es el operador definido en (51).

Demostración. Considere la función

$$Af=E_\mu(t)\phi-\int_0^t E_\mu\left(t-t'\right)\frac{\partial f\left(t'\right)^2}{\partial x}dt', \tag{70}$$

definida en el espacio métrico completo,

$$\mathfrak{I}_s=\left\{f\in C([0,T];H^s(\mathbb{R})):\left\|f(t)-E_\mu(t)\phi\right\|_{H^s(\mathbb{R})}\leq\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})},t\in[0,T]\right\},$$

donde $T>0$ y $\mathfrak{I}_s$ tiene la topología definida por la norma del supremo. Se quiere probar que para algún T suficientemente pequeño la función Af es una contracción en $\mathfrak{I}_s$. Nótese que $Af\in C([0,T];H^s(\mathbb{R}))$ para cualquier T fijo. En efecto, dado que el Teorema 3.1 garantiza que E_μ es un semigrupo de contracción y que $f \in \Im_s$, es suficiente demostrar que

$$Bf(t) = \int_0^t E_\mu\left(t-t'\right)\frac{\partial f\left(t'\right)^2}{\partial x}dt' \in C\left([0,T];H^s(\mathbb{R})\right). \tag{71}$$

En este sentido, si se hace el cambio de variable $\tau = t - t'$, se obtiene

$$(Bf)(t) = \int_0^t \chi_{[0,T]}(\tau)E_\mu(\tau)\frac{\partial f(t-\tau)^2}{\partial x}d\tau, \tag{72}$$

donde $\chi_{[0,T]}(\tau)$ es la función característica o función indicatriz. Teniendo la ecuación (72) la continuidad se obtiene de forma análoga al proceso realizado en el Teorema 3.1 parte $a)$.

Nótese que si $f \in \Im_s$ y tenemos en cuenta la desigualdad (56), se obtiene que

$$\|f(t)\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \|f(t) - E_\mu(t)\phi\|_{H^s(R)} + \|E_\mu(t)\phi\|_{H^s(R)} \leq 2\|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})}, \quad t \in [0,T]. \tag{73}$$

Considérese ahora la siguiente diferencia:

$$\begin{aligned}\left\|Af(t) - E_\mu(t)\phi\right\|_{H^s(\mathbb{R})} &= \left\|\int_0^t E_\mu\left(t-t'\right)\frac{\partial f\left(t'\right)^2}{\partial x}dt'\right\|_{H^s(\mathbb{R})} \\ &\leq \int_0^t \left\|E_\mu\left(t-t'\right)\frac{\partial f\left(t'\right)^2}{\partial x}\right\|_{H^s(\mathbb{R})} dt'. \end{aligned} \tag{74}$$

Por hipótesis se sabe que $f \in H^s(\mathbb{R})$, por lo tanto como $H^s(\mathbb{R})$, con $s > \frac{1}{2}$, es un álgebra de Banach (Teorema 1.12) se sabe que $f^2 \in H^s(\mathbb{R})$. Entonces utilizando el Teorema 1.13 se puede afirmar que

$\dfrac{\partial f(t')^2}{\partial x} \in H^{s-1}(\mathbb{R})$. Por lo tanto si se aplica el Teorema 3.1, en el caso $s-1$, $\lambda = 1$ y tomando $\dfrac{\partial f(t')^2}{\partial x} \in H^{s-1}(\mathbb{R})$, se obtiene

$$\left\|Af(t) - E_\mu(t)\phi\right\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \int_0^t K\left[1+(2\mu t)^{-1}e^{2\mu t}\right]^{1/2} \left\|\frac{\partial f(t')^2}{\partial x}\right\|_{H^{s-1}(\mathbb{R})} dt',$$

usando el Teorema 1.13 se obtiene

$$\left\|Af(t) - E_\mu(t)\phi\right\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \int_0^t K\left[1+(2\mu(t-t'))^{-1}e^{2\mu t}\right]^{1/2} \left\|f\left(t'\right)^2\right\|_{H^s(\mathbb{R})} dt'.$$

Por último, dado que $f^2 \in H^s(\mathbb{R})$, podemos usar la desigualdad (73) para obtener que

$$\left\|Af(t) - E_\mu(t)\phi\right\|_{H^s(\mathbb{R})} \leq \int_0^t 2K\left[1+(2\mu(t-t'))^{-1}e^{2\mu t}\right]^{1/2} \|\phi\|_{H^s(\mathbb{R})} dt'. \tag{75}$$

Siguiendo de forma análoga la demostración hecha para obtener la desigualdad (75) se puede obtener

$$\|(Af)(t) - (Ag)(t)\| \leq 2K\|\phi\|_s \|f-g\| \int_0^t \left[1+\left(2\mu\left(t-t'\right)^{-1}e^{2\mu t}\right)\right]^{1/2} dt', \tag{76}$$

donde $g \in \mathfrak{I}_s$. Las desigualdades (75) y (76) muestran que se puede escoger un $T_s > 0$ tal que (70) sea una contracción en $\mathfrak{I}_s$, lo cual finaliza la demostración. $\square$

Corolario 3.7. *Sea $\mu > 0$ fijo y $\phi \in H^s(\mathbb{R})$ con $s > \dfrac{1}{2}$. Entonces la función $u_\mu(t)$ construida en el Teorema 3.6 es el único elemento de $C([0,T_s]; H^s(\mathbb{R}))$ tal que $\dfrac{\partial u}{\partial t} \in C\left([0,T_s]; H^{s-2}(\mathbb{R})\right)$ y cumple* *con el problema de Cauchy* (68).

Demostración. Considere $v(t)$ como la función definida en (71) donde se considerará $f = u_\mu$, es decir

$$v(t) = Bu_\mu(t) = \int_0^t E_\mu\left(t-t'\right)\frac{\partial u_\mu\left(t'\right)^2}{\partial x}dt'.$$

Con esto en mente se puede reescribir $\frac{v(t+\varepsilon)-v(t)}{\varepsilon}$ de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
\frac{v(t+\varepsilon)-v(t)}{\varepsilon} &= \int_0^{t+\varepsilon}\frac{E_\mu\left(t+\varepsilon-t'\right)}{\varepsilon}\frac{\partial u_\mu\left(t'\right)^2}{\partial x}dt' - \int_0^t \frac{E_\mu\left(t-t'\right)}{\varepsilon}\frac{\partial u_\mu\left(t'\right)^2}{\partial x}dt' \\
&= \int_0^t \frac{E_\mu(\varepsilon)}{\varepsilon}E_\mu\left(t-t'\right)\frac{\partial u_\mu\left(t'\right)^2}{\partial x}dt' + \int_t^{t+\varepsilon}\frac{E_\mu(\varepsilon)}{\varepsilon}E_\mu\left(t-t'\right)\frac{\partial u_\mu\left(t'\right)^2}{\partial x}dt' \\
&\quad - \int_0^t \frac{E_\mu\left(t-t'\right)}{\varepsilon}\frac{\partial u_\mu\left(t'\right)^2}{\partial x}dt' \\
&= \int_0^t \frac{\left(E_\mu(\varepsilon)-1\right)}{\varepsilon}E_\mu\left(t-t'\right)\frac{\partial u_\mu\left(t'\right)^2}{\partial x}dt' + \int_t^{t+\varepsilon}\frac{E_\mu(\varepsilon)}{\varepsilon}E_\mu\left(t-t'\right)\frac{\partial u_\mu\left(t'\right)^2}{\partial x}dt',
\end{aligned}$$

aplicando el teorema del valor medio para integrales[17] al segundo término de la parte derecha del igual, donde se toma t^* como el valor medio, se obtiene

$$\frac{v(t+\varepsilon)-v(t)}{\varepsilon} = \int_0^t \frac{\left(E_\mu(\varepsilon)-1\right)}{\varepsilon}E_\mu\left(t-t'\right)\frac{\partial u_\mu\left(t'\right)^2}{\partial x}dt' + E_\mu(\varepsilon)E_\mu\left(t-t^*\right)\frac{\partial u_\mu\left(t^*\right)^2}{\partial x}.$$

---

[17] **Teorema del valor medio para integrales**. Sea $f(x)$ continua sobre $[a,b]$. Entonces existe $c \in (a,b)$ tal que

$$f(c)(b-a) = \int_a^b f(x)dx.$$

Si se aplica el límite cuando $\varepsilon \to 0$, se puede afirmar que

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial t} &= -Q_\mu E_\mu(0)\int_0^t E_\mu(t-t')\frac{\partial u_\mu(t')^2}{\partial x}dt' + E_\mu(0)E_\mu(0)\frac{\partial u_\mu(t)^2}{\partial x}, \\ &= -Q_\mu \int_0^t E_\mu(t-t')\frac{\partial u_\mu(t')^2}{\partial x}dt' + \frac{\partial u_\mu(t)^2}{\partial x}, \end{aligned} \tag{77}$$

esto se tiene para todo $t \in [0, T_s]$. Por lo tanto si se reemplaza (77) en (68) se tendrá la existencia. Para probar la unicidad, considere $u \in C([0,T_s] : H^s(\mathbb{R})$ una solución de (68). Entonces siguiendo una prueba análoga a la realizada para el Teorema 3.6 se puede garantizar que (69) se mantiene en $[0,T_s]$ y como igualdad en $H^{s-2}(\mathbb{R})$. Por lo tanto, debido a la parte a) del Teorema 3.1 la igualdad pertenece a $H^s(\mathbb{R})$ para todo $t \in [0,T_s]$ y esto completa la demostración. □

4. Conclusiones

- Se realizó una reseña histórica sobre los aspectos relevantes que llevaron al planteamiento de la ecuación Benjamin-Ono.
- Se realizó la deducción de la ecuación Benjamin-Ono.
- Se estudió el buen planteamiento de dos problemas de Cauchy asociados con la ecuación Benjamin-Ono en los espacios $H^s(\mathbb{R})$ con $s \in \mathbb{R}$ y $\mathscr{F}_r = H^r(\mathbb{R}) \cap L^2_r(\mathbb{R})$ con $r = 0, 1, 2$.

Referencias Bibliográficas

Airy, G. B. (1845). *Tides and waves*. B. Fellowes.

Arendt, W. (1987). Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. *Israel Journal of Mathematics*, 59(3):327–352.

Bauza, M. B., Hocken, R. J., Smith, S. T., and Woody, S. C. (2005). Development of a virtual probe tip with an application to high aspect ratio microscale features. *Review of scientific instruments*, 76(9):095112.

Benjamin, T. B. (1966). Internal waves of finite amplitude and permanent form. *Journal of Fluid Mechanics*, 25(2):241–270.

Boussinesq, J. (1871). Théorie de lâ€™intumescence liquide appelée onde solitaire ou de translation se propageant dans un canal rectangulaire. *CR Acad. Sci. Paris*, 72(755-759):1871.

Boussinesq, J. (1872). Théorie des ondes et des remous qui se propagent le long d'un canal rectangulaire horizontal, en communiquant au liquide contenu dans ce canal des vitesses sensiblement pareilles de la surface au fond. *Journal de mathématiques pures et appliquées*, pages 55–108.

Boussinesq, J. (1877). *Essai sur la théorie des eaux courantes*. Impr. nationale.

Chen, P., Luo, Z., Güven, S., Tasoglu, S., Ganesan, A. V., Weng, A., and Demirci, U. (2014). Microscale assembly directed by liquid-based template. *Advanced materials*, 26(34):5936–5941.

Daniel, G. Á. (2020). Teoremas del punto fijo y aplicaciones.

Davis, R. E. and Acrivos, A. (1967a). Solitary internal waves in deep water. *Journal of Fluid Mechanics*, 29(3):593–607.

Davis, R. E. and Acrivos, A. (1967b). The stability of oscillatory internal waves. *Journal of Fluid Mechanics*, 30(4):723–736.

Ferri, F., Garcia, S., Baghdad, M., Reichel, J., and Long, R. (2020). Mapping optical standing-waves of an open-access fabry–perot cavity with a tapered fiber. *Review of Scientific Instruments*, 91(3):033104.

Iório Jr, R. J. (1991). The Benjamin-Ono equation in weighted Sobolev spaces. *Journal of mathematical analysis and applications*, 157(2):577–590.

Johansson, M. (1999). The Hilbert transform. *Mathematics Masterâ€™s Thesis. Växjö University, Suecia. Disponible en internet: http://w3. msi. vxu. se/exarb/mj_ex. pdf, consultado el*, 19.

José Iório, Jr, R. (1986). On the Cauchy problem for the Benjamin-Ono equation. *Communications in partial differential equations*, 11(10):1031–1081.

Júnior, I. and Iorio, V. (2001). *Fourier analysis and partial differential equations*. Number 70. Cambridge University Press.

Korteweg, D. J. and De Vries, G. (1895). On the change of form of long waves advancing in a rectangular canal, and on a new type of long stationary waves. *The London, Edinburgh, and Dublin Philosophical Magazine and Journal of Science*, 39(240):422–443.

Levario-Diaz, V., Bhaskar, P., Galan, M. C., and Barnes, A. C. (2020). Effect of acoustic standing waves on cellular viability and metabolic activity. *Scientific reports*, 10(1):1–11.

Linares, F. and Ponce, G. (2014). *Introduction to nonlinear dispersive equations*. Springer.

Ono, H. (1975). Algebraic solitary waves in stratified fluids. *Journal of the Physical Society of Japan*, 39(4):1082–1091.

Pazy, A. (2012). *Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations*, volume 44. Springer Science & Business Media.

Rayleigh, L. (1876). On waves. *Phil. Mag.*, 1:257–259.

Romanova, N. (1981). Generalization of the Benjamin-Ono equation for a weakly stratified atmosphere. *FizAO*, 17:131–137.

Russell, J. S. (1845). *Report on Waves: Made to the Meetings of the British Association in 1842-43*.

Stokes, G. (1846). British association report.

Stokes, G. (1847). On the theory of oscillatory waves. *Reports of the British Association, Volume VI*.

Yang, H., Sun, J., and Fu, C. (2019). Time-fractional Benjamin-Ono equation for algebraic gravity