

Diseño e Implementación de una Secuencia Didáctica para Desarrollar Pensamiento  
Algebraico en Estudiantes de Quinto Primaria

Julián David Ballesteros Cortés y Miguel Ángel Chacón Herrera

Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Santander

Trabajo de grado Optar por el Título de Licenciado en Matemáticas

Directora

Dora Solange Roa Fuentes

Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga

2023

## CONTENIDO

|  |    |
|--|----|
| <b>Introducción</b> .....  | 1  |
| <b>1. Antecedentes</b> .....   | 2  |
| <b>1.1. Una Perspectiva Nacional: Pensamiento Variacional</b> .....  | 2  |
| <b>1.2. Perspectivas Internacionales Sobre El Pensamiento Algebraico</b> .....                                 | 5  |
| <b>1.3. Álgebra Temprana o <i>Early Algebra</i></b> .....  | 7  |
| <b>1.4. Diseño De Secuencias Didácticas, Tareas, Actividades: Pensamiento Algebraico En Primaria</b> .....     | 9  |
| <b>1.5. Uso De Herramientas Tecnológicas Para Potenciar El Pensamiento Algebraico En Básica Primaria</b> ..... | 11 |
| <b>2. Planteamiento del problema</b> .....   | 15 |
| <b>2.1. Objetivo General</b> .....   | 16 |
| <b>2.2. Específicos</b> .....  | 16 |
| <b>3. Marco Teórico: Teoría de las Situaciones Didácticas</b> .....  | 17 |
| <b>3.1. Aprendizaje por Adaptación</b> .....   | 17 |
| <b>3.2. Situación Didáctica</b> .....  | 18 |
| <b>3.3. Institucionalización</b> .....   | 18 |
| <b>3.4. Situación A-didáctica</b> .....  | 18 |
| <b>3.5. Medio</b> .....  | 19 |
| <b>3.6. Validación</b> .....   | 19 |
| <b>3.7. Devolución</b> .....   | 19 |
| <b>3.8. GeoGebra Como Medio</b> .....  | 21 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>4. Método: Ingeniería Didáctica</b> .....           | 22  |
| <b>4.1. La Ingeniería Didáctica</b> .....              | 22  |
| <b>4.1.1. Análisis Preliminar</b> .....                | 22  |
| <b>4.1.2. Análisis A Priori</b> .....                  | 31  |
| <b>4.1.3. Experimentación</b> .....                    | 58  |
| <b>4.1.4. Análisis a Posteriori y Evaluación</b> ..... | 83  |
| <b>5. Conclusiones</b> .....                           | 108 |
| <b>5.1. Actividad 1.</b> .....                         | 108 |
| <b>5.2. Actividad 2.</b> .....                         | 110 |
| <b>5.3. Actividad 3.</b> .....                         | 111 |
| <b>5.4. Actividad 4.</b> .....                         | 111 |
| <b>6. Reflexiones Finales</b> .....                    | 114 |
| <b>Referencias</b> .....                               | 116 |
| <b>Anexos</b> .....                                    | 121 |

**Lista de Tablas**

|                 |  |            |
|-----------------|--|------------|
| <b>Tabla 1</b>  | <i>Respuesta de los estudiantes en la primera tarea de la prueba diagnóstica.....</i>      | <i>58</i>  |
| <b>Tabla 2</b>  | <i>Respuesta de algunos estudiantes en la segunda tarea de la prueba diagnóstica. ....</i> | <i>59</i>  |
| <b>Tabla 3</b>  | <i>Respuesta de los estudiantes en la tercera tarea de la prueba diagnóstica. ....</i>     | <i>60</i>  |
| <b>Tabla 4</b>  | <i>Respuestas de los participantes en la primera tarea de la actividad 1 .....</i>         | <i>65</i>  |
| <b>Tabla 5</b>  | <i>Respuestas de los participantes en la segunda tarea de la actividad 1.....</i>          | <i>67</i>  |
| <b>Tabla 6</b>  | <i>Respuestas de los participantes en la tercera tarea de la actividad 1.....</i>          | <i>69</i>  |
| <b>Tabla 7</b>  | <i>Respuestas de los participantes en la cuarta tarea de la actividad 1.....</i>           | <i>71</i>  |
| <b>Tabla 8</b>  | <i>Respuestas de algunos estudiantes en la primera tarea de la actividad 2. ....</i>       | <i>73</i>  |
| <b>Tabla 9</b>  | <i>Respuestas de algunos estudiantes en la segunda tarea de la actividad 2.....</i>        | <i>75</i>  |
| <b>Tabla 10</b> | <i>Respuestas de algunos estudiantes en la tercera tarea de la actividad 2.....</i>        | <i>78</i>  |
| <b>Tabla 11</b> | <i>Respuestas de algunos estudiantes en la primera tarea de la Actividad 3.....</i>        | <i>80</i>  |
| <b>Tabla 12</b> | <i>Respuestas de algunos estudiantes en la segunda tarea de la Actividad 3. ....</i>       | <i>81</i>  |
| <b>Tabla 13</b> | <i>Respuestas de algunos estudiantes en la tercera tarea de la Actividad 3. ....</i>       | <i>82</i>  |
| <b>Tabla 14</b> | <i>Respuestas de los estudiantes en la actividad de secuencias figurales .....</i>         | <i>122</i> |
| <b>Tabla 15</b> | <i>Respuestas de los estudiantes en la actividad de secuencias numéricas.....</i>          | <i>129</i> |

### Lista de Figuras

|                  |  |    |
|------------------|--|----|
| <b>Figura 1</b>  | <i>Atención que deberían recibir los Estándares a lo largo de las etapas escolares</i>         | 6  |
| <b>Figura 2</b>  | <i>Rutas de acceso al pensamiento algebraico</i>   | 9  |
| <b>Figura 3</b>  | <i>Tablero estándar en Grid Algebra</i>  | 12 |
| <b>Figura 4</b>  | <i>Funcionamiento de las operaciones en un tablero de Grid Algebra</i>                         | 13 |
| <b>Figura 5</b>  | <i>Grafico de los elementos de la teoría de las situaciones didácticas</i>                     | 20 |
| <b>Figura 6</b>  | <i>Estrategias de resolución de problemas de generalización de patrones</i>                    | 25 |
| <b>Figura 7</b>  | <i>Primera tarea de la prueba diagnóstica</i>  | 33 |
| <b>Figura 8</b>  | <i>Segunda tarea de la prueba diagnóstica</i>  | 34 |
| <b>Figura 9</b>  | <i>Tercera tarea de la prueba diagnóstica</i>  | 35 |
| <b>Figura 10</b> | <i>Las 4 tareas de la actividad 1</i>  | 38 |
| <b>Figura 11</b> | <i>Ejemplo de casilla de entrada para escribir el argumento</i>                                | 39 |
| <b>Figura 12</b> | <i>Tareas del primer momento</i>   | 42 |
| <b>Figura 13</b> | <i>Tareas del segundo momento</i>  | 42 |
| <b>Figura 14</b> | <i>Elementos de la primera tarea que aparecen al marcar la casilla “Marcar para comenzar”</i>  | 43 |
| <b>Figura 15</b> | <i>Término de la secuencia desplegado al marcar la casilla “Verificar” en la primera tarea</i> | 44 |
| <b>Figura 16</b> | <i>Elementos que aparecen al marcar la casilla “Marcar para comenzar” en la segunda tarea</i>  | 45 |
| <b>Figura 17</b> | <i>Resultados en pantalla al marcar la casilla “Verificar”</i>                                 | 46 |
| <b>Figura 18</b> | <i>Objetos que aparecen en la tercera tarea al marcar la casilla “Marcar para comenzar”</i>    | 46 |
| <b>Figura 19</b> | <i>Término correcto proporcionado por marcar la casilla “Verificar”</i>                        | 47 |
| <b>Figura 20</b> | <i>Secuencias numéricas de la tercera actividad</i>  | 51 |

|   |     |
|---|-----|
| <b>Figura 21</b> <i>Pregunta de cada tarea en la actividad 3.</i> .....   | 52  |
| <b>Figura 22</b> <i>Mensaje de “Incorrecto” y “Correcto”</i> .....  | 53  |
| <b>Figura 23</b> <i>Ayudas de las tareas 1 y 2 de la tercera actividad.</i> .....   | 54  |
| <b>Figura 24</b> <i>Secuencia torres y secuencia rodeo de triángulos.</i> .....   | 57  |
| <b>Figura 25</b> <i>Algunas respuestas dadas por estudiantes.</i> .....   | 59  |
| <b>Figura 26</b> <i>Producción de estudiantes en la cuarta tarea de la prueba diagnóstica</i> .....                             | 62  |
| <b>Figura 27</b> <i>Producción de un estudiante en la cuarta tarea de la prueba diagnóstica</i> .....                           | 62  |
| <b>Figura 28</b> <i>Producción de un estudiante en la cuarta tarea de la prueba diagnóstica</i> .....                           | 63  |
| <b>Figura 29</b> <i>Secuencias figurales creadas por estudiantes en la cuarta tarea de la prueba diagnóstica</i> .....          | 63  |
| <b>Figura 30</b> <i>Secuencias numéricas creadas por estudiantes en la cuarta tarea de la prueba diagnóstica</i> .....          | 64  |
| <b>Figura 31</b> <i>El grupo NG3 trabajando en la Actividad 1.</i> .....  | 84  |
| <b>Figura 32</b> <i>El grupo NG3 desarrollando la primera tarea.</i> .....  | 86  |
| <b>Figura 33</b> <i>El grupo NG5 desarrollando la primera tarea.</i> .....  | 87  |
| <b>Figura 34</b> <i>Verificar la respuesta.</i> .....   | 89  |
| <b>Figura 35</b> <i>Descripción de la construcción de los términos 5 y 6.</i> .....   | 92  |
| <b>Figura 36</b> <i>Construcción del grupo de NG5 para la tercera tarea.</i> .....  | 95  |
| <b>Figura 37</b> <i>Explicación de un estudiante del grupo NG1 en la tarea 1 de la tercera actividad.</i><br>.....              | 99  |
| <b>Figura 38</b> <i>Acciones que realiza la estudiante del grupo NG1 para explicar la tarea 1 de la cuarta actividad.</i> ..... | 102 |
| <b>Figura 39</b> <i>Construcciones de la figura 4 del grupo NG2.</i> .....  | 103 |
| <b>Figura 40</b> <i>Explicación de la estudiante del grupo NG1 en la tarea 3 de la cuarta actividad.</i><br>.....               | 105 |

|  |     |
|--|-----|
| <b>Figura 41</b> <i>Explicación de la estudiante del grupo NG3 en la tarea 3 de la cuarta actividad</i><br>..... | 106 |
| <b>Figura 42</b> <i>Primera tarea de la prueba diagnóstico. ....</i>   | 132 |
| <b>Figura 43</b> <i>Segunda tarea de la prueba diagnóstico.....</i>  | 132 |
| <b>Figura 44</b> <i>Tercera tarea de la prueba diagnóstico.....</i>  | 133 |
| <b>Figura 45</b> <i>Cuarta tarea de la prueba diagnóstico. ....</i>  | 133 |
| <b>Figura 46</b> <i>Sala de cómputo donde se llevó a cabo la investigación .....</i>                             | 137 |
| <b>Figura 47</b> <i>Grupo de estudiantes con los que se llevó a cabo la investigación. ....</i>                  | 137 |
| <b>Figura 48</b> <i>Estudiantes trabajando en la actividad 4.....</i>  | 138 |

**Lista de Anexos**

|                      |     |
|----------------------|-----|
| <b>Anexo A</b> ..... | 122 |
| <b>Anexo B</b> ..... | 129 |
| <b>Anexo C</b> ..... | 132 |
| <b>Anexo D</b> ..... | 134 |
| <b>Anexo E</b> ..... | 137 |

## Resumen

**Título:** Diseño e Implementación de una Secuencia Didáctica para Desarrollar Pensamiento Algebraico en Estudiantes de Quinto Primaria \*

**Autores:** Julián David Ballesteros Cortés y Miguel Ángel Chacón Herrera \*\*

**Palabras Clave:** Álgebra temprana, secuencias, procesos de generalización, GeoGebra, teoría de las situaciones didácticas.

### Descripción:

La presente investigación tiene como objetivo diseñar una secuencia didáctica que sirva como apoyo para docentes que quieran promover el pensamiento algebraico en edades tempranas.

La secuencia se basa fundamentalmente en el diseño de actividades de discriminación de imágenes, secuencias figurales y secuencias numéricas para potenciar el proceso de generalización, utilizando la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) como referente teórico y la Ingeniería Didáctica como metodología de investigación. Para la experimentación de esta investigación, se implementó la secuencia diseñada a estudiantes de quinto grado de primaria entre 10 y 11 años, del colegio Jorge Eliecer Gaitán en Bucaramanga (Santander-Colombia), utilizando el software de GeoGebra como medio. En los resultados de la investigación se tuvieron en cuenta las estrategias de resolución de problemas de generalización de patrones que define Zapatera (2018) y los tipos de generalización descritos por Cañadas (2012). Asimismo, esta secuencia didáctica busca promover actividades que atiendan a desarrollar los procesos de “Descripción”, “Predicción”, “Representación” y “Construcción” propios de las matemáticas y en particular del pensamiento algebraico.

\* Trabajo de Grado

\*\* Facultad d Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Directora: Dora Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

**Abstract**

**Title:** Design and Implementation of a Didactic Sequence to Foster Algebraic Thinking in Fifth-Grade Students \*

**Author(s):** Julián David Ballesteros Cortés y Miguel Angel Chacon Herrera \*\*

**Key Words:** Early Algebra, Sequences, Generalization Processes, GeoGebra, Didactic Situations Theory.

**Description:**

The present research aims to design a didactic sequence that serves as support for teachers who wish to promote algebraic thinking at an early age. The sequence is primarily based on the design of activities involving image description, figurative sequences and numerical sequences to enhance the generalization process. The research utilizes the Theory of Didactic Situations (TDS) as a theoretical framework and Didactic Engineering as a research methodology. For the experimentation phase of this research, the designed sequence was implemented with fifth-grade students aged 10 to 11 years old at Jorge Eliecer Gaitan School in Bucaramanga, (Santander-Colombia), using GeoGebra Software as a milieu. The research results take into account the problem-solving strategies for pattern generalization defined by Zapatera (2018) and the types of generalization described by Cañadas (2012). Furthermore, this didactic sequence aims to promote activities that foster the processes of “Description”, “Prediction”, “Representation” and “Construction” inherent to mathematics and particularly algebraic thinking.

\* Degree Work

\*\* Facultad d Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Directora: Dora Solange Roa Fuentes. Doctora en Ciencias en la Especialidad de Matemática Educativa

## Introducción

Normalmente los currículos escolares de matemáticas introducen el estudio del álgebra en grados escolares avanzados. Sin embargo, diversas investigaciones en Educación Matemática consideran importante introducir elementos característicos del pensamiento algebraico desde los primeros años escolares. Un ejemplo de esto es la propuesta *early algebra* (Moreno 2015). Esto implica una visión amplia del pensamiento algebraico. Kieran (2004) propone que este se puede definir como el “desarrollo de formas de pensar sobre la relación entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio del cambio, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción” (p. 49).

Desde la perspectiva del álgebra temprana, el objetivo de este proyecto de investigación es: Potenciar el desarrollo del pensamiento algebraico en estudiantes de quinto primaria a través del diseño e implementación de una secuencia didáctica centrada en el estudio de patrones. Para el logro del objetivo, se propone como método de investigación la ingeniería didáctica que se lleva a cabo en cuatro fases: Análisis preliminar, donde se tiene en cuenta la dimensión epistemológica, cognitiva y didáctica; análisis a priori, donde se toman decisiones sobre los alcances y organización de la secuencia didáctica; Experimentación, en esta fase se realiza la implementación de la secuencia diseñada y por último, el análisis a posteriori, que se basa en realizar un contraste entre el análisis a priori y la experimentación.

## 1. Antecedentes

### 1.1. Una Perspectiva Nacional: Pensamiento Variacional

En Colombia se cuenta con tres documentos propuestos por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) que direccionan el desarrollo de la educación matemática en los niveles de básica y secundaria; estos son: los Lineamientos Curriculares (1998), los Estándares Básicos de Competencias en Matemáticas (2006) y los Derechos básicos de aprendizaje (2015).

Los lineamientos curriculares son una propuesta que se presenta a consideración de los docentes de educación básica y media que orientan y desarrollan el área de matemáticas en Colombia. Este documento fue desarrollado en un proceso que conformó el grupo de apoyo al MEN, para la formulación de los lineamientos curriculares y para la realización de actividades relacionadas con el impulso de la Educación Matemática en el país. Esta propuesta habla sobre conocimientos básicos y los divide en cinco tipos de pensamiento: Numérico y sistemas numéricos, Espacial y sistemas geométricos, Métrico y sistemas de medidas, Aleatorio y sistemas de datos, Variacional y sistemas algebraicos y analíticos. Según los Lineamientos Curriculares, el pensamiento Variacional y los sistemas algebraicos y analíticos buscan:

Proponer el inicio y desarrollo del pensamiento variacional como uno de los logros para alcanzar en la educación básica, presupone superar la enseñanza de contenidos matemáticos fragmentados y compartimentalizados, para ubicarse en el dominio de un campo conceptual, que involucra conceptos y procedimientos inter estructurados y vinculados que permitan analizar, organizar y modelar matemáticamente situaciones y problemas tanto de la actividad práctica del hombre, como de las ciencias y las

propiamente matemáticas donde la variación se encuentre como sustrato de ellas.

(MEN, 1998, p. 49)

Asimismo, este documento afirma que el estudio de la variación se puede iniciar pronto en el currículo de matemáticas. Por ejemplo, presentando problemas en escenarios que hagan referencia a fenómenos de cambio, en los cuales se pueden utilizar diferentes sistemas de representación asociados a la variación; estos son: enunciados verbales, representaciones tabulares, las gráficas de tipo cartesiano o sagital, entre otras. En consecuencia, el estudio de la variación en educación primaria la constituye el análisis de patrones ya sea a través de escenarios geométricos o numéricos para reconocer y describir regularidades.

Además, los Lineamientos Curriculares buscan ampliar la visión de la variación, teniendo en cuenta que el estudio de la misma comienza en el intento de cuantificar cantidades y magnitudes que cambian en diversos contextos, para promover en el estudiante actitudes de observación, registro y uso del lenguaje matemático. Esto promueve el desarrollo del pensamiento variacional progresivamente, lo que le permite al estudiante resolver situaciones problema que exijan considerar lo aprendido para aproximarse a las conceptualizaciones propias de las matemáticas.

Por otra parte, los Lineamientos Curriculares (MEN, 1998) aseguran que una herramienta para iniciar el estudio de la variación en primaria es el análisis de patrones, pues:

Estos incluyen escenarios en la vida práctica como fotografías y representaciones pictóricas e icónicas. En las matemáticas los escenarios geométricos o numéricos también deben ser utilizados para reconocer y describir regularidades o patrones presentes en las transformaciones. Estas exploraciones permiten, en una primera instancia, hacer una descripción verbal de la relación que existe entre las cantidades (el argumento y el producto terminado que se lee primero) que intervienen en la

transformación. Los contextos de variación deben incluir patrones aditivos y multiplicativos. (MEN, 1998, p. 50)

El estudio de patrones puede llevar a la construcción de tablas de valores, que después pueden llevar el trabajo de los estudiantes a la graficación de situaciones problema de tipo concreto, para posteriormente identificar diferentes relaciones entre variables.

A su vez, los Estándares Básicos de Competencias (MEN, 2006) señalan los parámetros que todo estudiante debe saber y saber hacer para lograr el nivel de calidad del que habla el sistema educativo colombiano. Este documento plantea referentes comunes para orientar la búsqueda de la calidad de la educación donde se espera que todo el sistema educativo, el cual abarca: al MEN, las Secretarías, las Instituciones y actores escolares:

(a) orienten la incorporación en todos los planes de estudio de los conocimientos, habilidades y valores requeridos para el desempeño ciudadano y productivo en igualdad de condiciones; (b) garanticen el acceso de todos los estudiantes a estos aprendizajes; (c) mantengan elementos esenciales de unidad nacional en el marco de una creciente descentralización; (d) sean comparables con lo que los estudiantes aprenden en otros países; y (e) faciliten la transferencia de estudiantes entre centros educativos y regiones, importante en un país con tan alta movilidad geográfica de la población. (MEN, 2006, p 10-11)

Se espera que los estudiantes desarrollen en cada una de las áreas a lo largo de su paso por la educación básica y media, diferentes habilidades que serán juzgadas bajo los criterios que establecen los Estándares Básicos de Competencias teniendo presente los grupos de grados (1 a 3, 4 a 5, 6 a 7, 8 a 9, 10 a 11).

Como el punto de partida de los Estándares básicos de competencias fueron los Lineamientos Curriculares, se tiene en cuenta los cinco tipos de pensamiento que se plantean en este último documento. Según los Estándares Básicos de Competencias el pensamiento

variacional y sistemas algebraicos y analíticos “tiene que ver con el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos” (MEN, 2006, p. 66). Así mismo, el desarrollo de este pensamiento tiene comienzo con la identificación de regularidades bajo criterios o reglas de formación que siguen los patrones que se repiten periódicamente. Esto puede identificarse en el estudio de secuencias o sucesiones que presentan objetos, sucesos, formas o sonidos en un orden específico. Por lo tanto,

[...] al identificar en qué se parecen y en qué se diferencian los términos de estas sucesiones o secuencias, se desarrolla la capacidad para identificar en qué consiste la repetición del mismo patrón y la capacidad para reproducirlo por medio de un cierto procedimiento, algoritmo o fórmula (MEN, 2006, p. 66).

Del mismo modo, los Derechos Básicos de Aprendizaje (DBA, 2015) constituyen un conjunto de saberes fundamentales que buscan garantizar condiciones de igualdad educativa. Son el punto de partida para las adaptaciones de los planes de estudio, mallas curriculares y planeaciones de clase. Fueron elaborados a partir de la revisión de los curriculum de países como: Chile, Estados Unidos y Singapur, entre otros. Además, van dirigidos a toda la población colombiana y buscan garantizar que los estudiantes en Colombia cuenten con los aprendizajes básicos como un derecho de todos a una educación de calidad.

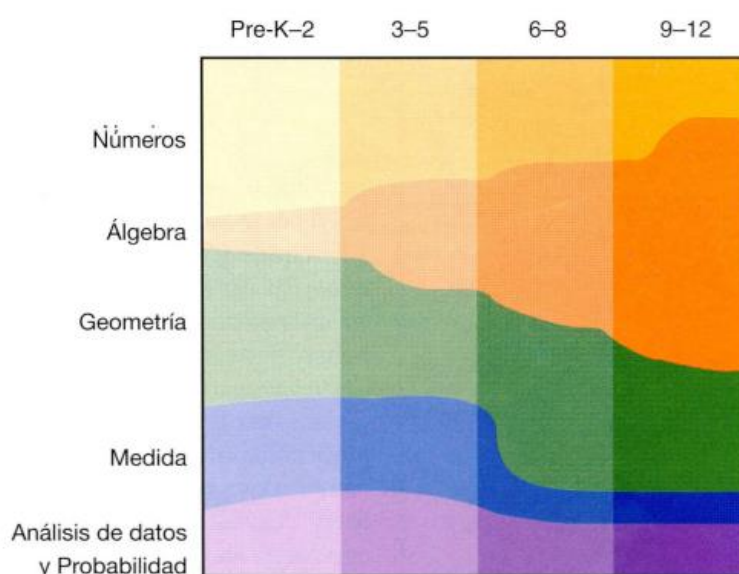
## **1.2. Perspectivas Internacionales Sobre El Pensamiento Algebraico.**

El documento Principios y Estándares para la Educación Matemática es un documento que propone los estándares para las matemáticas escolares desde el nivel de prekindergarten hasta el nivel 12 en Estados Unidos. Este documento es una guía que presenta el Consejo Nacional de Profesores de Matemáticas (*National Council of Teachers of*

*Mathematics*, NCTM, por sus siglas en inglés) sobre lo que debería valorarse en la enseñanza de las matemáticas. Este documento se divide en dos partes, Estándares de contenidos (Números y Operaciones, Álgebra, Geometría, Medida y Análisis de datos y probabilidad) y Estándares de procesos (Resolución de problemas, Razonamiento y prueba, Comunicación, Conexiones y Representación).

### Figura 1

*Atención que deberían recibir los Estándares a lo largo de las etapas escolares*



*Nota.* En la imagen se presenta como la parte de Números y Geometría son los ejes principales en grado Pre-K-2, en contraposición el Álgebra es menos trabajada. Tomado de Los Estándares de contenidos deberían recibir diferente atención a lo largo de las etapas (p. 32), de Principios y Estándares para la Educación Matemática, 2000, NCTM.

Es de interés para esta investigación, analizar los estándares de contenido, específicamente la parte de Álgebra. Como se evidencia en la Figura 1, en los primeros niveles de educación dicho campo no se encuentra desarrollado en la misma medida que Números o Geometría, en contraposición con los niveles superiores donde el Álgebra es el contenido con mayor desarrollo.

Al considerar el álgebra en los niveles inferiores, se espera que los profesores ayuden a los estudiantes a construir la base de comprensión y experiencia, para la preparación de los cursos de álgebra más complejos de los niveles superiores, teniendo en cuenta que el álgebra es mucho más que resolver ecuaciones y simplificar expresiones. “Los estudiantes necesitan comprender sus conceptos, las estructuras y principios que rigen la manipulación de los símbolos y cómo pueden usarse estos para registrar ideas y ampliar su comprensión de las situaciones” (NCTM, 2000, p. 39). Por tanto, según el NCTM el programa de enseñanza debería capacitar a los estudiantes para:

- Comprender patrones, relaciones y funciones;
- Usar modelos matemáticos para representar y comprender relaciones cuantitativas;
- Analizar el cambio en contextos diversos.

### **1.3. Álgebra Temprana o *Early Algebra***

Con numerosas investigaciones realizadas en las últimas décadas, cuyo enfoque fue el aprendizaje y enseñanza del álgebra, se llegó a la conclusión de que una posible solución a las falencias encontradas en los estudiantes de grados superiores era la de integrar características del álgebra desde los primeros años escolares (Davydov, 1995; Kaput, 2008). Es así como surgió el álgebra temprana o *early algebra*, una propuesta curricular y línea de investigación que mira el álgebra como una forma de pensar y no solo como una asignatura. Esta forma de pensar introduce elementos importantes del álgebra en los primeros grados escolares, relacionados por ejemplo con el proceso de generalización. Godino, Wilhelmi, Aké y Gonzato (2014) proponen que el proceso de generalización puede partir del reconocimiento, después la ampliación y finalmente la generalización de un patrón, ya que de esa forma se está desarrollando tanto el pensamiento numérico como el algebraico.

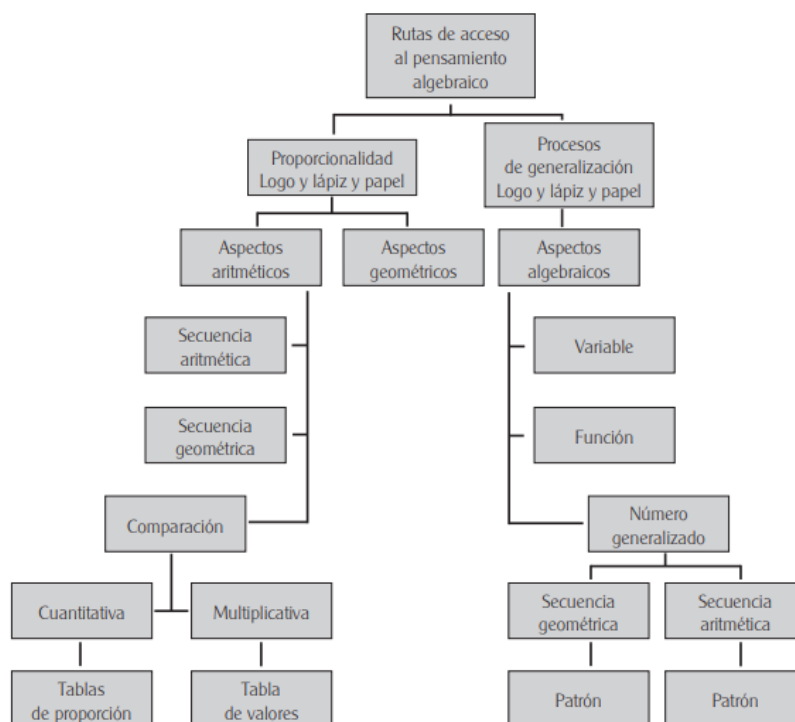
Una investigación que apoya la eficacia de trabajar con patrones en los primeros grados de escolaridad es la realizada por Moreno (2015). En esta investigación se busca favorecer una aproximación al pensamiento algebraico en estudiantes de grado tercero y analizar cómo el trabajo de los estudiantes sobre una secuencia de tareas matemáticas promueve la comprensión de los patrones numéricos y procesos asociados a estos.

Así mismo, Zapatera (2022) se apoya en diferentes investigaciones. Por ejemplo, en el trabajo de Molina (2009), para explicar que el early algebra propone introducir el pensamiento algebraico de manera transversal, gradual y sistemática en los niveles de primaria desarrollando actividades enfocadas principalmente en la identificación de patrones, relaciones y propiedades matemáticas. Estos trabajos se apoyan en los resultados iniciales planteados por Kieran (2004) quien afirma que el pensamiento algebraico no debe centrarse en la presentación de expresiones algebraicas en las primeras etapas de escolaridad, sino en actividades que incluyan: el análisis entre cantidades, la identificación de estructuras, el estudio de los cambios, la generalización, la resolución de problemas, la modelación, la justificación, la prueba y la predicción. De esta forma Zapatera (2022) analiza las respuestas de alumnos de primaria ante un problema de generalización de patrones.

Por otra parte, Butto y Rojano (2010) describen dos propósitos de su estudio, relacionados con el desarrollo temprano del álgebra:

- Investigar la factibilidad de una iniciación temprana al álgebra a partir de dos rutas de acceso: el razonamiento proporcional y los procesos de generalización;
- Diseñar una secuencia didáctica que tome en consideración tanto aspectos cognitivos como el uso de distintos lenguajes (numérico, geométrico y algebraico).

En la Figura 2 se señalan las rutas de acceso a las que hacen referencia Butto Zarzar y Rojano Ceballos, (2010):

**Figura 2***Rutas de acceso al pensamiento algebraico*

*Nota.* Tomado de *Rutas de acceso al pensamiento algebraico* (p. 6), de Butto y Rojano, 2010, Educación Matemática.

Por interés de la presente investigación, se considera el desarrollo de los procesos de generalización, que a su vez se potencia a través de aspectos aritméticos, geométricos y algebraicos.

#### **1.4. Diseño De Secuencias Didácticas, Tareas, Actividades: Pensamiento Algebraico En Primaria.**

El primer acercamiento al álgebra desde la escuela ocurre cuando se inicia con el estudio de patrones, esto de manera evidente da paso al desarrollo del proceso de generalización. En secundaria aparece de manera evidente la variable y formas de representarla, que generalmente genera dificultades en los estudiantes relacionados, por ejemplo, con su uso: como incógnita, para generalizar y relaciones funcionales; además de

interpretar en principio a esta como simples abreviaturas de palabras clave y una sobre explotación de las letras para representar (González, 2012).

Referente al diseño de tareas, Moreno (2015) diseña secuencias de tareas matemáticas, que involucran actividades que requieren conjeturar, representar y demostrar. Dicha secuencia busca desarrollar el pensamiento algebraico mediante la identificación y registro de patrones numéricos. Esta investigación se desarrolló con estudiantes de grado tercero, a través de dos situaciones, cada una subdividida en tareas.

La primera situación plantea tareas en las que se espera que los estudiantes identifiquen el patrón de una secuencia numérica, resaltando lo que se mantiene constante y lo variable. Además, se espera que los estudiantes puedan expresarse de manera oral, usando lenguaje simbólico o natural, para finalmente a partir de casos particulares, comprobar la validez del patrón construido. En la segunda situación, además de lo realizado en la primera, los estudiantes deben trabajar con distintas formas de representar el patrón, ya sea de manera pictórica, tabular o numérica. Moreno (2015), plantea dentro de las conclusiones de su investigación que:

- Los estudiantes lograron trabajar con conceptos algebraicos como variación y aritméticos como la estructura multiplicativa; además de lograr darle más sentido e importancia a estos.
- Los estudiantes lograron familiarizarse con representaciones tabulares como medio para organizar el patrón y se mostró que los patrones pictóricos ayudaron a identificar de manera más sencilla el patrón numérico.

De la investigación se destaca la coherencia y conexión que hay entre las dos situaciones, formando una sola gran tarea, donde cada subtarea aportaba algo a la siguiente, dando tareas no aisladas unas de otras, además de los aportes que se dan al trabajar con patrones y formas de representarlos. Esto dado que no desarrolla solamente pensamiento

algebraico, sino también el pensamiento espacial, cuando se trata representaciones geométricas, y el pensamiento numérico cuando se apoya en propiedades de la aritmética para identificar el patrón.

Para desarrollar el pensamiento algebraico Ramírez (2017) se basó en lo propuesto por Radford (2013) sobre la generalización de patrones para crear una serie de tareas que buscan identificar el tipo de generalización, numérica o algebraica, que desarrollan estudiantes de grado octavo. Para ello se plantean preguntas que buscan guiar al estudiante a través de todo el proceso de generalización. Usando secuencias figurales los estudiantes primero debían identificar los términos que corresponden según el patrón de la secuencia, después definir términos específicos, pero no consecutivos y finalmente llegar a una expresión que permite encontrar cualquier término. Con ese proceso, como menciona Godino y Wilhemil (2014), el estudiante al final deja de ver cada elemento de la secuencia como casos individuales e independientes, y los empieza a identificar como aquellos que se rigen bajo una regla, la cual es aquella expresión que permite encontrar cualquiera, formando un conjunto que se ve como una entidad unitaria.

### **1.5. Uso De Herramientas Tecnológicas Para Potenciar El Pensamiento**

#### **Algebraico En Básica Primaria.**

Para iniciar esta sección se presenta el trabajo de Hewitt (2016), quien propone el uso de Grid Algebra, un software de apoyo para que los estudiantes desarrollen habilidades en el manejo de estructuras matemáticas como el orden o equivalencia en las operaciones. Grid Algebra por defecto proporciona un tablero vacío de 6 filas y 6 columnas, el cual se puede llenar con letras, números o ambos, y además dejar visibles las casillas que se deseen.

**Figura 3***Tablero estándar en Grid Algebra*

|  |  |  |  |  |
|--|--|--|--|--|
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |
|  |  |  |  |  |

Cada espacio del tablero en la Figura 3 se puede mover en cuatro direcciones: arriba, abajo, derecha, izquierda. Cada movimiento representa una operación. Por ejemplo, en un tablero como el de la Figura 4, se selecciona el número 8 y se arrastra a la derecha, los números siguientes a este en la misma fila se podrán representar como la suma  $8 + 4n$ , donde  $n$  será la cantidad de casillas a la derecha que se mueva y el 4 debido a que se encuentran en la cuarta fila. De manera similar se representarán los números a la izquierda del 8 como una resta al arrastrarlo. Si el número se arrastra hacia abajo, los números se representan como un producto solo si el número a reemplazar es un múltiplo del que se esté arrastrando. Por ejemplo, si arrastramos el 8 hacia la posición del 12, no ocurrirá nada, pero si se arrastra hasta el 16, este se representará como  $8 * 2$ . Si el número se arrastra hacia arriba, los números se representan como una fracción, donde el numerador será el número que se arrastre, y de manera similar al producto, solo se representarán los números que sean divisores del número arrastrado, como puede verse en la Figura 4. Se pueden combinar los cuatro movimientos, llegando así a una expresión final que combina las cuatro operaciones básicas.

**Figura 4**

*Funcionamiento de las operaciones en un tablero de Grid Algebra.*

|       |           |    |               |       |
|-------|-----------|----|---------------|-------|
| 1     | → 1+1     | 3  | $\frac{8}{2}$ | 5     |
| ↓ 1×2 | 4         | 6  | ↑ 8           | ↓ 10  |
| 3     | 6         | 9  | 12            | 15    |
| 4     | 8 → 8+4   | 16 | 20            | ↓ 20  |
| 5     | 15-5 ← 15 | 20 | ↓ 25          | ↓ 25  |
| 6     | 12        | 18 | ↓ 12×2        | ↓ 5×6 |

Aunque, Grid Algebra también permite que los estudiantes desarrollen fluidez en el manejo de expresiones algebraicas que involucran letras como incógnitas o variables, el potencial del software para el grupo de esta investigación es que permitir plantear patrones numéricos en un tablero. Mediante la interacción con el software los estudiantes pueden experimentar como sus distintas acciones pueden generar distintos resultados, estructurando una idea de lo que es la variación, desarrollando así el pensamiento algebraico. Es posible crear espacios en los cuales los estudiantes pueden compartir sus ideas y debatir la de sus compañeros desarrollando, además, una autonomía en el estudiante para saber si su respuesta es correcta o no.

Por otra parte, en el estudio realizado por Trigueros, Sandoval y Lozano (2020) se destaca que enseñar matemáticas en primaria suele ser una tarea demandante. Por tanto, el uso de tecnologías para acompañar las clases puede crear nuevas presiones en la profesión, pero aun así las actividades con recursos digitales pueden generar situaciones donde surjan preguntas o comentarios por parte de los estudiantes que no serían posible trabajando en un

tablero o libro guía. Algunas de las características de la tecnología que promueven el aprendizaje en matemáticas son la retroalimentación que provee el programa, la capacidad de representar dinámicamente ciertas situaciones y el poder presentar simultáneamente diferentes representaciones en pantalla, de un patrón, por ejemplo.

Sobre el particular, Radford (2008) concreta la generalización de patrones en tres etapas: en la primera etapa el estudiante observa una propiedad común en algunos términos de una secuencia y extiende la propiedad observada a términos cercanos (generalización cercana), en la segunda extiende la propiedad a términos lejanos (generalización lejana) y en la tercera obtiene una regla general que permite calcular cualquier término de la secuencia. Con base en todos los elementos descritos en este capítulo, se propone en el siguiente el problema que se busca estudiar en esta investigación.

## 2. Planteamiento del problema

Generalmente cuando se habla de álgebra se tienen ideas asociadas con el uso de letras en matemáticas, la solución de ecuaciones o los casos de factorización; estas nociones generalmente se relacionan con los cursos de matemáticas de octavo grado donde “aparece”, el álgebra en la escuela secundaria. Estas concepciones, de diferentes miembros de la comunidad, oculta la verdadera esencia del álgebra, aspecto que se desarrolla en las secciones anteriores. En consecuencia, el aprendizaje por parte de los estudiantes se ve afectado por los procesos centrados en el trabajo con el lenguaje algebraico, el cual no presenta una relevancia significativa llevándolos a tener ciertas dificultades en el transcurso de la vida académica. En palabras de Castro (2012):

Entre las nociones que producen dificultad se señalan la clausura para las expresiones algebraicas que los estudiantes sienten la necesidad de hacer; el lenguaje algebraico al que no le “ven” sentido y que les lleva a asignar valores numéricos a las letras o a la sobre generalización de ciertas propiedades; la preservación de la jerarquía de las operaciones a la que no encuentran justificación; el uso de paréntesis; la percepción del signo igual como expresión de una equivalencia, entre otras. (p. 76)

Así mismo, la idea del álgebra temprana toma fuerza siguiendo las ideas de Kaput (2000) sobre la algebrización de currículum de matemáticas, integrando el pensamiento algebraico en los cursos de educación básica primaria. Por esta razón, se busca promover el desarrollo del pensamiento algebraico en edades tempranas que, como señalamos en las secciones anteriores se puede abordar potenciando ideas asociadas con el estudio de los procesos de generalización. Por tanto, la pregunta de investigación que guía este proyecto es: ¿Qué tipo de actividad matemática debe promoverse en el aula para potenciar el desarrollo de pensamiento algebraico en estudiantes de quinto primaria? Con base en esta pregunta se formulan los objetivos de este trabajo.

### **2.1. Objetivo General**

Diseñar una secuencia didáctica sustentada en secuencias figurales y numéricas para potenciar el proceso de generalización, como aspecto central para el desarrollo de pensamiento algebraico en estudiantes de quinto de primaria.

### **2.2. Específicos**

- Analizar los factores epistemológicos, cognitivos y didácticos del proceso de generalización para elaborar una secuencia de actividades que contribuyan al desarrollo del pensamiento algebraico.
- Analizar la actividad matemática de los estudiantes cuando abordan la secuencia didáctica tomando como sustento los elementos de la teoría de las situaciones didácticas.

### **3. Marco Teórico: Teoría de las Situaciones Didácticas**

La teoría seleccionada para este proyecto de investigación es la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau. A continuación, se presenta una descripción de los elementos que conforman esta teoría y que serán de utilidad en este trabajo.

#### **3.1. Aprendizaje por Adaptación**

Brousseau (2007), toma el planteamiento de Piaget sobre el concepto de aprendizaje por adaptación y lo ajusta para la enseñanza de las matemáticas. En consecuencia, el aprendizaje de un estudiante se da debido a la interacción y adaptación a un medio diseñado por una persona que quiere enseñar un conocimiento o controlar su adquisición.

En palabras de Pérez (2017), la interacción del sujeto con el medio establecido se puede describir así:

El sujeto, motivado por una necesidad o deseo personal, tiene una intención u objetivo, para lograrlo realiza acciones que inciden en el medio.

El medio reacciona siguiendo ciertas reglas, es decir no es cuestión de azar sino una consecuencia natural de las acciones del sujeto, proporcionando respuestas llamadas retroacciones.

El sujeto hace una interpretación de la respuesta del medio y decide la validez de su acción, en términos de si logró o no el objetivo. Este hecho se conoce como validación. (p.8)

Las evidencias del aprendizaje se pueden apreciar debido a la adaptación del estudiante al medio y se manifiesta por medio de nuevas respuestas.

### **3.2. Situación Didáctica**

Según Brousseau (2007), esta situación es el conjunto de las relaciones establecidas en el entorno del alumno, incluido el profesor, el sistema educativo y un medio. Dado que el estudiante no puede resolver toda situación a-didáctica, el profesor proporciona las situaciones que estén a su alcance. En ocasiones cuando se crea un sistema de interacciones donde el profesor está involucrado con el alumno y el medio se conoce como situación didáctica.

### **3.3. Institucionalización**

Brousseau (2007) la define como al acto que tiene como finalidad establecer y darle un carácter oficial a algún conocimiento aparecido o que emergió durante la situación problema. En particular se refiere al conocimiento que debe ser retenido para actividades posteriores, por lo tanto, la institucionalización se presenta cuando se reconoce el valor de un procedimiento y también en el proceso de formularlo.

### **3.4. Situación A-didáctica**

Para Brousseau (2007), el profesor debe promover las adaptaciones deseadas sobre el alumno, bajo la elección de problemas de tal modo que el estudiante pueda actuar, hablar, reflexionar y evolucionar sobre ellos. Así, “Entre el momento en que el alumno acepta el problema como suyo y aquel en que produce su respuesta, el profesor se rehúsa a intervenir en calidad de oferente de los conocimientos que quiere ver aparecer” (Brousseau, 2007, p.31). Estos conocimientos se considerarán como adquiridos cuando el estudiante sea capaz de utilizarlos en situaciones que estén fuera del contexto de enseñanza y en ausencia de toda indicación intencional. Es decir, una situación funciona de manera a-didáctica cuando el alumno y el docente logran que el primero asuma el problema planteado como propio, y entre

en un proceso de búsqueda autónoma, sin ser guiado por lo que pudiera suponer que el maestro espera.

### **3.5. Medio**

Brousseau (2007) lo define como todo aquello con lo que interactúa el alumno, en él puede realizar acciones que le permite recibir información con la cual puede validar lo que realizó. El medio puede modificarse en función de las intenciones propias del alumno cuando actúa en él. La información que provee el medio, al reaccionar con las decisiones que toma el alumno, puede ser tomada en consideración por él para futuras acciones (retroalimentación), permitiendo anticipar resultados.

### **3.6. Validación**

Brousseau (2007) menciona que una vez que el estudiante ha interactuado con el medio de manera individual, es decir, cuando se ha enfrentado al problema utilizando sus conocimientos previos para desarrollar un nuevo conocimiento, pasa a una situación de validación. En esta situación se le da al estudiante la oportunidad de verificar o validar lo que ha trabajado y así asegurarse de que lo que ha realizado es correcto. Esta validación puede ser guiada por un interlocutor, que puede ser el docente o compañeros de clase, o a través de retroacciones dadas por el medio.

### **3.7. Devolución**

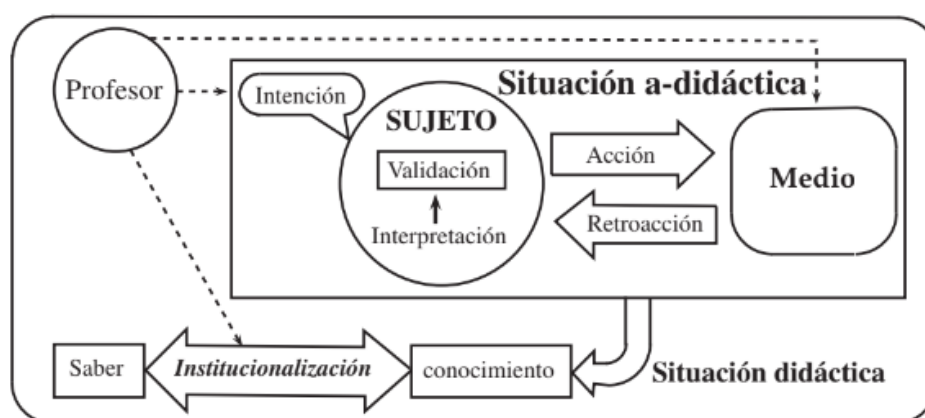
Brousseau (2007) plantea la devolución como todo acto por el cual el profesor hace que su alumno acepte la responsabilidad, se comprometa, con una situación de aprendizaje de un problema, y que acepte las consecuencias que esto trae. El maestro no puede dar previamente al alumno la respuesta a la que espera que llegue, sino intentar que asuma la responsabilidad de resolver los problemas cuya respuesta desconoce, es decir, la intervención

del docente debe reforzar el ciclo de interacción en el que se encuentra el estudiante para que así elabore la respuesta con sus propios medios.

A continuación, se presenta la Figura 5 tomada de “Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio” (Acosta, 2010) con la finalidad de visualizar las componentes de la TSD.

### Figura 5

Grafico de los elementos de la teoría de las situaciones didácticas



*Nota.* La imagen representa la estructura de los elementos que conforman la TSD. Tomado de *Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio*, (p. 177), de Acosta, M. at all, 2010, Revista integración.

En la Figura 5 se resume la estructura de la TSD, donde el sujeto, a partir de una intención realiza acciones sobre un medio, previamente elaborado por el profesor, que le genera una respuesta en forma de retroacción para que el sujeto a través de una interpretación dé algún tipo de validación y se pueda concretar una situación a-didáctica. A partir de esta situación a-didáctica se establece un conocimiento resultado del aprendizaje por adaptación, que luego de la intervención del profesor con el proceso de institucionalización se genera un saber y se concreta la situación didáctica.

### 3.8. GeoGebra Como Medio

Las actividades que se presentan en esta investigación fueron diseñadas en GeoGebra. Este es un software dinámico de libre acceso que permite diseñar y estudiar actividades en distintos campos de las matemáticas para cualquier nivel educativo. GeoGebra Online ofrece la creación de plataformas virtuales, en las cuales se pueden diseñar lecciones de clases en un formato llamado libro. Los libros de GeoGebra pueden estar compuestos por actividades, aplicaciones, Applets y hojas de trabajo, además de permitir observar en tiempo real las respuestas dadas por los estudiantes. Las actividades que se diseñan en este software permiten fundamentalmente la interactividad entre el estudiante y los elementos que se muestran en pantalla. Lo anterior permite que el estudiante realice una libre exploración en el espacio virtual que proporciona el software, donde cualquier tipo de acción que se realice puede ser fácilmente ignorado para probar otro distinto, y así variar fácilmente entre distintas opciones, lo cual sería difícil de replicar con medios más tradicionales como una hoja de papel. Por todo lo anterior se optó por diseñar la mayoría de las actividades usando GeoGebra y usarlo como medio para esta investigación.

Además, GeoGebra cumple con las características que describe Acosta et al. (2010) considerando que:

Para Brousseau el medio es una entidad que el profesor puede moldear con el fin de obtener los objetivos de aprendizaje. Esta entidad debe tener las siguientes características:

1. Ser exterior al alumno: el alumno debe reconocer una existencia objetiva.
2. Ser material: el alumno puede interactuar con él por medio de acciones.
3. No debe tener ninguna intención: no debe ser percibido como una persona.
4. Reaccionar: las acciones del alumno tienen efectos reconocibles.
5. Imponer restricciones a la acción: no cualquier acción es posible. (p 175).

#### 4. Método: Ingeniería Didáctica

En esta investigación se usan elementos de la ingeniería didáctica, entendida como metodología de investigación, dado que “se caracteriza en primer lugar por un esquema experimental basado en las “relaciones didácticas” en la clase, es decir, sobre la concepción, realización, observación y análisis de secuencias de enseñanza” (Artigue, 1995. p. 36). A continuación, se presentan aspectos de dicha metodología que son fundamentales para el desarrollo de este proyecto.

##### 4.1. La Ingeniería Didáctica

Artigue (1995) distingue dos niveles en esta metodología: la micro-ingeniería y la macro-ingeniería. En la primera se tiene en cuenta de manera local la complejidad de los fenómenos de clase y en la segunda dichos fenómenos se toman de manera global. De este modo la presente investigación se plantea en el nivel de micro-ingeniería. Además, la ingeniería didáctica se caracteriza por el registro de los estudios de caso, basados en la confrontación entre el análisis a priori y a posteriori. El proceso experimental de esta metodología está delimitado por cuatro fases que se presentan a continuación.

##### 4.1.1. *Análisis Preliminar*

Artigue (1995) señala que en esta fase son necesarios los análisis preliminares del marco teórico teniendo en cuenta los objetivos de la investigación; además estos análisis son importantes ya que se van retomando y profundizando en las diferentes fases. En esta fase se tienen en cuenta aspectos teóricos que permiten realizar un análisis de tipo didáctico, y para ello se tienen en cuenta tres dimensiones planteadas por Artigue (1995).

**Dimensión Epistemológica.** En esta dimensión se analiza el concepto o contenido con el que se va a trabajar desde cómo se forma y cuánto tiempo transcurre para esa

formalización, es decir, se asocia a las características del concepto o contenido puesto en funcionamiento.

En esta investigación la dimensión epistemológica se centra en el proceso de generalización. A partir de la generalización en matemáticas, las personas pueden abstraer conceptos y propiedades de los objetos y utilizarlos en diversos escenarios. Esta es una de las razones por las cuales la generalización es uno de los procesos cognitivos más importantes de la actividad matemática y tiene un papel relevante dentro del álgebra (Zapatera, 2018). Polya (1954) asegura que el proceso de generalización consiste en “pasar de un objeto a una clase que contiene al objeto” (p. 12). En palabras de Zapatera (2018):

Así pues, generalizar es universalizar una propiedad observada en un número limitado de casos, e implica poner a los estudiantes en la necesidad de buscar pautas generales de comportamiento, reglas y leyes que se puedan expresar verbal o simbólicamente y que se puedan aplicar a cualquier caso que se presente, haciéndoles notar la insuficiencia del método experimental. (p. 4)

Como ya se mostró, Radford (2008) desde la perspectiva de su teoría, la Objetivación, concreta la generalización de patrones en tres etapas: i. el estudiante observa e identifica una propiedad común entre algunos términos de una secuencia y extiende la propiedad observada a términos cercanos (generalización cercana); ii. extiende la propiedad identificada a términos que se encuentran lejanos a los primeros elementos de la secuencia (generalización lejana); finalmente, iii. obtienen una regla general que le permite calcular o encontrar cualquier término de la secuencia. La idea de Kaput (1998) concreta la de Radford (2008), al definir la generalización como la identificación de una regularidad presente en unos casos particulares y extender ese razonamiento a patrones, estructuras y relaciones.

Por lo tanto, generalizar es universalizar una propiedad o característica común observada en un conjunto limitado de casos. Particularmente, al considerar los términos de una secuencia, se enfrenta al estudiante ante una situación en la cual surge como necesidad encontrar pautas generales o reglas que puedan identificarse en un grupo de términos dados para expresar de manera verbal o escrita cómo se pueden producir términos cercanos desconocidos o lejanos.

Como elemento fundamental para esta investigación, interesa definir lo que se entiende por Secuencia Didáctica. Para empezar una secuencia se entiende como sucesión de elementos que se suceden unos de otros y guardan relación entre ellos; mientras que la didáctica es una disciplina cuyo principal foco es el de estudiar y analizar los distintos procesos y elementos que pueden existir en los fenómenos relacionados con los procesos de enseñanza y aprendizaje. Una secuencia didáctica es definida por Tobón (2010) como un conjunto de actividades de evaluación y aprendizaje que buscan que se consigan determinadas metas educativas. Además, Tobón (2010) plantea que los elementos que están involucrados en esas secuencias son: la situación problema del contexto, competencias a formar, actividades concatenadas, recursos de aprendizaje y la evaluación.

En diversas investigaciones en Educación Matemática se han definido estrategias relacionadas con el proceso de generalización de patrones en la resolución de problemas. Por ejemplo, Zapatera (2018) divide las estrategias en tres grandes grupos que se describen a continuación y son sintetizados en la Figura 6.

- *Estrategias aditivas*: estas estrategias se dividen en, recuento sobre el dibujo, cuando el estudiante no dibuja el término pedido y cuenta los elementos; recuento iterativo, si parte del primer término y suma la diferencia constante, o patrón de crecimiento, hasta llegar al término pedido; y recuento recursivo, si parte de un determinado

término y suma la diferencia constante hasta llegar al término requerido. Así mismo dicha estrategia envuelve el recuento y la diferencia que observó Stacey (1989), los esquemas de recuento planteados por García Cruz (1989) y el conteo, recursivo y múltiple de la diferencia que propone Lannin et al. (2006).

- *Estrategias funcionales*: estas estrategias se dividen en función local y función global. La primera se identifica si el estudiante utiliza una función para hallar los elementos de un determinado término y la segunda si utiliza una función para hallar los elementos de un término cualquiera. Esta estrategia contiene la función lineal propuesta por Stacey (1989), el esquema lineal que planteó García Cruz (1989) y la correspondencia desde la perspectiva de Lannin et al. (2006).
- *Estrategias proporcionales*: Zapatera (2018) define esta estrategia para describir cuándo el alumno utiliza erróneamente la proporcionalidad directa. Abarcando la proporcionalidad observada por Stacey (1989), el esquema proporcional de García Cruz (1989) y el razonamiento multiplicativo propuesto por Lannin et al. (2006).

### Figura 6

*Estrategias de resolución de problemas de generalización de patrones.*

| Autor (2018)      |                       | Stacey(1989) | García Cruz (1989)   | Lannin et al. (2006)   |
|-------------------|-----------------------|--------------|----------------------|------------------------|
| E. aditivas       | Recuento sobre dibujo | Recuento     | Esquema de recuento  | Conteo                 |
|                   | Recuento iterativo    | Diferencia   |                      | Recursiva              |
|                   | Recuento recursivo    |              |                      | Múltiplo de diferencia |
| E. Funcionales    | Función Local         | Lineal       | Esquema Lineal       | Correspondencia        |
|                   | Función Global        |              |                      |                        |
| E, Proporcionales |                       | Proporcional | Esquema Proporcional | Raíz multiplicativo    |

*Nota.* La imagen representa la categorización planteada por Zapatera teniendo en cuenta otros autores. Tomado de *Estrategias de resolución de problemas de generalización de patrones*, (p. 138), de Zapatera, 2022, Educación Matemática.

Además, Cañadas (2012) describe diferentes tipos de generalización que dependen del tipo de razonamiento que realice el estudiante cuando está realizando actividades que involucran secuencias. Los tipos de generalización que define Cañadas (2012) son:

- *Generalización empírica* cuando el estudiante acumula ejemplos para detectar una regularidad.
- *Generalización Gráfica* cuando construye una expresión gráfica después de generalizar una propiedad común identificada en la sucesión.
- *Generalización Verbal* cuando se construye una expresión de forma verbal desde el lenguaje natural al generalizar una propiedad común identificada en la sucesión.
- *Generalización Algebraica* cuando se construye una expresión simbólica al generalizar una propiedad común identificada en la sucesión.

Ahora bien, el desarrollo del proceso de generalización en la educación formal empieza en los primeros grados de la educación básica. A partir de una revisión de los estándares básicos de competencias matemáticas del MEN (2006) que los estudiantes deberían cumplir al terminar quinto grado, se identifica que este proceso de generalización se puede llevar a cabo bajo acciones que tienen que realizar los estudiantes tales como: “Describir”, “Construir”, “Predecir” y “Representar” los diferentes objetos que pueden pertenecer a una secuencia. Se entiende por “Describir” al proceso mental en el que el estudiante logra identificar un algo común en una secuencia, es decir, un patrón o una relación, además de comunicar, ya sea para él mismo o a otra persona, eso que se ha reconocido. “Representar” hace referencia a la comunicación, lograr hacer visible para otros aquello en lo que se está pensando, esto mediante el uso de símbolos, dibujos y la

comunicación escrita. “Predecir” se enfoca en probar la validez de las conjeturas realizadas de diferentes formas, lo cual implica tener la noción general de la sucesión, y eso involucra el usar casos particulares para mostrar lo que es general. Finalmente, “Construir” se relaciona con reestructurar, usando símbolos, letras o manipulando objetos en los casos particulares para lograr señalar características específicas de cada caso, reconocer semejanzas y diferencias entre casos, para finalmente notar que el cambio que se produce se realiza de manera regular.

Teniendo en cuenta lo mencionado por Olaya (2014): en su investigación de maestría en el análisis de los estándares básicos de competencias matemáticas del MEN, Posada y otros (2005), relacionan el desarrollo del pensamiento algebraico y los procesos de generalización, desde el estudio de patrones y regularidades con el desarrollo de habilidades para ver, decir, registrar y comunicar situaciones de variación y cambio (p. 41)

Estas habilidades que se nombran tienen una relación con las acciones que se mencionaron anteriormente, es decir, Describir está relacionado con las habilidades de ver y decir. Por su parte, Representar está vinculado con la habilidad de registrar. Es de aclarar que en cada una de las acciones está presente la habilidad de la comunicación, dado que cada una de ellas tiene como finalidad dar a conocer las ideas de los estudiantes.

Los procesos y tipos de generalización antes descritos no necesariamente se presentan de manera conjunta en cada una de las actividades que se plantean en esta investigación, se pueden identificar características combinadas o individuales. De ahora en adelante se hablará de procesos de “Descripción”, “Representación”, “Predicción” y “Construcción”.

**Dimensión Cognitiva.** En esta dimensión se describen las características cognitivas de la población a la que se dirige la enseñanza. La presente investigación toma como población a estudiantes de quinto grado de primaria, entre 10-11 años de edad, según el

sistema educativo colombiano. Por ende, se toma en consideración lo expuesto por los Estándares Básicos de Competencias (2006) dados por el Ministerio de Educación Nacional (MEN) y por Principles and Standard for School Mathematics (2000) del National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) con respecto a lo que los estudiantes en dicho grado deberían saber y saber hacer referente al pensamiento variacional y sistemas algebraicos y el álgebra respectivamente.

Según lo expuesto por el MEN (2006) un estudiante al terminar quinto grado debe estar en condiciones de:

- Describir e interpretar variaciones representadas en gráficos.
- Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica o gráfica.
- Representar y relacionar patrones numéricos con tablas y reglas verbales.
- Analizar y explicar relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad en situaciones económicas, sociales y de las ciencias naturales.
- Construir igualdades y desigualdades numéricas como representación de relaciones entre distintos datos.

Se puede ver que, en este documento, se hace referencia a los procesos de Descripción, Representación, Predicción, Construcción, es decir, se toman algunos elementos necesarios para el proceso de generalización, pero este concepto no se resalta en el grado de estudio.

Por otra parte, el NCTM (2000), propone que al finalizar quinto grado los estudiantes deberían ser capaces de:

- Describir y extender patrones geométricos y numéricos y hacer generalizaciones acerca de ellos;
- Representar y analizar patrones y funciones, verbalmente y mediante tablas y gráficas.

- Identificar propiedades como la conmutatividad, la asociatividad y la distributividad, y emplearlas en el cálculo con números naturales;
- Representar la idea de variable como cantidad desconocida, por medio de una letra o un símbolo;
- Expresar relaciones matemáticas mediante ecuaciones.

Se puede observar que a diferencia de lo expuesto por el MEN (2006), el NCTM (2000) se expresa directamente el interés por la generalización de patrones, ya sean numéricos o geométricos, a pesar de que el MEN (2006) toma lo dispuesto por el NCTM (2000) como uno de sus documentos de referencia.

Es importante considerar también que los estudiantes que en el presente año se encuentran cursando el quinto grado o que lo acaban de cursar, son estudiantes que vienen de una educación en tiempos de la pandemia de Covid -19. La pandemia provocó el cierre masivo de las actividades presenciales de las instituciones educativas en más de 190 países según la UNESCO (2020), entre ellos Colombia. Rodríguez et al. (2021) mencionan que, como alternativa al cierre de las instituciones, y para moderar los costos que se generaron debido a ello, se optó por procesos de formación mediante herramientas virtuales. Esto generó brechas educativas ya que para el 2019, según la Encuesta Nacional de Calidad de Vida (DANE, 2020), sólo el 51.9% de los hogares poseía una conexión a internet; además en las zonas rurales tan solo el 20.7% tenía disponibilidad a internet. Como lo muestran algunos estudios esta situación afectó el desarrollo de las habilidades cognitivas y no cognitivas de los estudiantes. Pues como menciona Di Pietro et al. (2020) se produjo una reducción en el tiempo que se destina al aprendizaje, se dieron cambios en la forma que interactúan entre sí los estudiantes, además, se presentaron diversos problemas relacionados con estrés y se amplió la desigualdad del acceso a la educación.

Por otra parte, Rodríguez et al. (2021) mencionan que la educación virtual, ha planteado nuevos retos al sistema educativo colombiano. Fue necesario realizar “rápidamente” adaptaciones curriculares, además muchos de los docentes no estaban preparados para la enseñanza a través de formas no presenciales, apoyados en recursos electrónicos y virtuales. Se debieron buscar nuevas estrategias de enseñanza que logran motivar a los estudiantes y valorar su trabajo.

Los aspectos descritos muestran que, aunque no se cuente con resultados sistemáticos de toda la población colombiana, es importante considerar que los estudiantes en la actualidad están evidenciando las consecuencias sociales, emocionales y académicas resultado de la contingencia creada por la pandemia del Covid-19. Parte de los aprendizajes asociados a dicho evento, ha generado que centremos más la mirada en las posibilidades de enriquecer los procesos de enseñanza y aprendizaje de las matemáticas apoyados en el diseño y uso de recursos digitales.

**Dimensión Didáctica.** En esta dimensión se analiza la enseñanza desde el concepto, es decir, se consideran las características del funcionamiento del sistema de enseñanza. En cuanto al panorama nacional, el proceso de generalización se trabaja en la etapa de primero a tercero y de cuarto a quinto a partir de la Descripción, Construcción, Predicción y Representación de patrones que se pueden llevar a cabo con el uso de secuencias numéricas o geométricas (MEN, 2006). En las otras etapas el concepto de generalización se enfoca en el estudio de la variación y el cambio relacionada a diferentes representaciones, resolución de ecuaciones, expresiones algebraicas, modelos en situaciones de variación, entre otros.

Como se mencionó anteriormente, en los estándares del Ministerio de Educación Nacional, la generalización de patrones es una forma adecuada de preparar el aprendizaje de los sistemas algebraicos que se estudian en grados escolares superiores. Esto se trabaja

especialmente en primaria, donde se menciona textualmente por el MEN (2006) que el estudiante al final del tercer grado debe: “Reconocer y describir regularidades y patrones en distintos contextos (numérico, figural, entre otros)” y al final del quinto grado “Predecir patrones de variación en una secuencia numérica, geométrica y gráfica”. Es evidente la intención por parte del MEN en desarrollar desde edades tempranas el pensamiento variacional o algebraico desde la identificación y caracterización de la variación o cambio en distintos contextos.

Una vez definidos los elementos de las diferentes dimensiones, es posible determinar que el proceso de generalización que se trabaja en los estudiantes participantes en esta investigación está estrechamente relacionado con lo planteado en los Estándares Básicos de Competencias Matemáticas del MEN, es decir, en los procesos de Descripción, Construcción, Predicción y Representación. En esta definición se encuentran elementos que pertenecen también a lo dicho por otros autores. Además de facilitar la categorización de las respuestas dadas por los estudiantes para su posterior análisis.

#### ***4.1.2. Análisis A Priori***

En esta fase juega un rol fundamental el equipo de investigación, quien define las variables que se propone poner en juego y toma decisiones respecto a los alcances y organización de la secuencia didáctica. Artigue (1995) define en dos tipos las posibles variables:

- Variables globales o macro-didácticas: relacionadas con la organización general de la investigación
- Variables locales o micro-didácticas: relacionadas con la organización de cada una de las secuencias o fases.

Artigue (1995) muestra que en particular se busca “precisar las posibilidades que se han seleccionado, los valores de las variables didácticas que se producen como consecuencia de esta selección y el sentido que pueden tomar los comportamientos previstos teniendo en cuenta estos valores” (Artigue, 1995, p. 16, tomado de Pérez, 2017).

Es decir, se busca determinar que las decisiones tomadas permitan controlar las posibles acciones de los estudiantes y lo que pueden significar.

Asimismo, Artigue (1995) aclara que el análisis a priori comprende una parte descriptiva y una predictiva centradas en las características de las situaciones a-didácticas que han sido diseñadas para trabajar con los alumnos.

En cuanto a esta investigación, teniendo en cuenta el análisis preliminar, se ha diseñado una prueba diagnóstica y cuatro actividades con el propósito de identificar cuáles de las acciones que se involucran en el proceso de generalización descritas por el MEN (2006) están presentes y cuáles no en el trabajo de los estudiantes, para potenciarlas y contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico.

La prueba diagnóstica está compuesta por cuatro tareas, cada una de ellas plantea problemas que permiten analizar el primer estado en el que se encuentran los estudiantes con respecto a los procesos de Construcción, Descripción, Predicción y Representación en actividades que involucran la generalización de patrones, para después comparar los resultados obtenidos con los de las cuatro actividades siguientes. Tres de las actividades están diseñadas para desarrollarse en un computador usando a GeoGebra como medio, y la última actividad se realiza con material concreto.

Las tareas que se plantean pueden ser desarrolladas en parejas para promover el trabajo en equipo, el diálogo, la formulación de estrategias y favorecer las habilidades sociales de los estudiantes. El papel del profesor está enfocado principalmente en estar pendiente de la

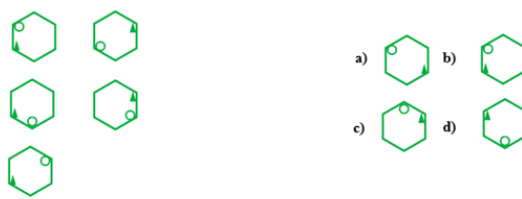
interacción de los alumnos con el objetivo de asegurar la participación de los integrantes del grupo. Para el desarrollo de las actividades se requiere de equipos de cómputo con acceso a internet para que los estudiantes puedan interactuar con las situaciones a-didácticas creadas. La prueba diagnóstica se responde de forma individual, además, se proporciona a los estudiantes hojas en las que podrán visualizar y responder las preguntas planteadas, mientras que las siguientes actividades se trabajan en grupos.

**Actividad 0: Prueba Diagnóstica.** Con el fin de analizar el desempeño de los estudiantes en actividades que involucran generalizar, se plantearon cuatro tareas con base a los procesos planteados por el MEN (2006), es decir, la Descripción, Construcción, Predicción y Representación. Además, las tareas también se asemejan a las actividades centrales que se diseñaron, esto con el fin de preparar al estudiante en el análisis de estas tareas.

**Diseño de Tareas.** En la primera tarea se presenta a los estudiantes un patrón de imágenes como se muestra en la Figura 7, de manera que se debe escoger entre un grupo de opciones la figura que falta en la secuencia. En un segundo momento el estudiante debe justificar el por qué de su elección. Se considera que cuando el estudiante analice cada término de la secuencia, está identificando en qué se parecen y en qué se diferencian entre sí para explicar qué lo lleva a seleccionar la opción que cree correcta. Con el segundo momento se espera identificar el proceso de Predicción y Descripción para seleccionar el elemento que pertenece a la secuencia.

### Figura 7

*Primera tarea de la prueba diagnóstica.*

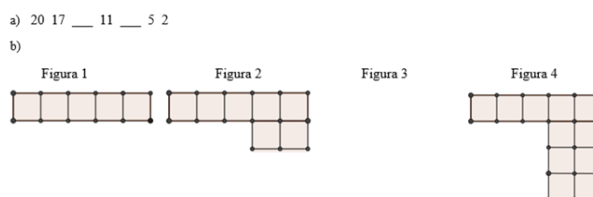


*Nota.* En la figura se muestra una imagen donde los elementos de la izquierda el estudiante debe escoger la que considere debe continuar en la secuencia que se encuentra a la derecha.

En la Figura 8, se muestra la segunda tarea, que consiste en dos secuencias, una numérica y otra figural con apoyo tabular. En este caso el estudiante debe completar los espacios vacíos con los términos que pertenecen a la secuencia según el patrón que las define, además de justificar por qué pertenece. En esta tarea, además de los procesos presentes en la tarea anterior, también se encuentra involucrado el de Construcción, ya que el estudiante a partir del análisis que haga con los elementos presentes debe dibujar o escribir el elemento que considere adecuado.

### Figura 8

*Segunda tarea de la prueba diagnóstica.*

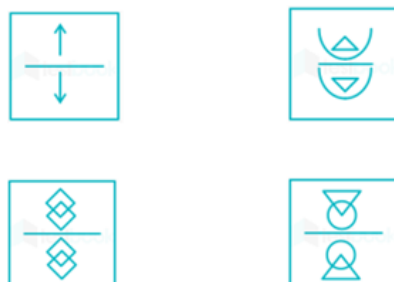


*Nota.* Entre el ejercicio a) y el b) hay un espacio donde el estudiante escribe la justificación de su respuesta.

Como se muestra en la Figura 9, en la tercera tarea se presenta al estudiante un grupo con cuatro figuras donde debe escoger una de entre las cuatro que considere es diferente a las otras. Es decir, el estudiante debe observar cada figura, identificar una propiedad o característica que deben cumplir todas, y con ello seleccionar la que no cumpla; además de justificar cuál fue esa propiedad que no cumplió. En esta tarea se espera identificar la capacidad del estudiante al discriminar entre opciones y su capacidad para describir.

**Figura 9**

*Tercera tarea de la prueba diagnóstica.*



En la cuarta y última tarea se les plantea a los estudiantes un espacio en blanco en donde deben diseñar su propia secuencia dibujando cualquier figura o escribiendo cualquier número, con el fin de promover los procesos de Construcción y Representación. También deben describir qué características cumplen su patrón para predecir qué otros elementos pueden pertenecer.

**Análisis de las Tareas.** En la primera tarea se espera que el estudiante, observando cada figura como un caso particular, determine el patrón de construcción que siguen las figuras pequeñas dentro de la grande, y así, de entre las opciones, escoja la correcta. Puede ocurrir que algunos estudiantes escojan cualquiera de las opciones usando como argumento que todas las imágenes se parecen ya que tienen las mismas figuras. Lo anterior puede llevarlos incluso a la respuesta correcta, por ello en las actividades principales se plantean preguntas que buscan determinar el razonamiento que lleva a cabo el estudiante. Otra situación posible es que dependiendo del orden en el que observen las figuras, el patrón que identifiquen sea distinto y por lo tanto se presentan respuestas diferentes. Es posible que el estudiante no identifique ningún patrón y no logre seleccionar ninguna respuesta. La mejor situación posible es que el estudiante logre identificar la característica que cumplen los elementos de la secuencia y eso lo lleve a escoger como respuesta la opción “c)”. Las

justificaciones escritas por parte de los estudiantes permiten identificar cuáles de las situaciones expuestas se presentaron y cuáles deben incluirse dentro del análisis.

En el patrón numérico de la segunda tarea puede ocurrir que el estudiante no identifica que los elementos de la secuencia van decreciendo ni de qué manera lo hacen. Por lo que sus posibles respuestas son difíciles de prever, aunque seguramente sean números cercanos a los que conocen. También puede ocurrir que el estudiante logre identificar los números decrecientes, pero no consiga identificar el patrón. Finalmente está el caso en el que el estudiante identifique el patrón correcto y escriba los números 14 y 8 en sus respectivos espacios.

En la secuencia figural es posible que el estudiante identifique que la torre que se forma en el lado derecho de la figura se va haciendo más grande, por lo que entre sus respuestas pueden estar figuras cuya torre está dibujada en distintas posiciones a lo largo de la base. Es decir, la torre está dibujada a la izquierda, en el centro, hacia arriba o a la izquierda como debe ser. Puede ocurrir que no sepa qué tan grande deben dibujar la torre y termine siendo más grande que el término 4 de la secuencia. Es ideal que el estudiante identifique que cada término está compuesto por cuadrados ordenados de una forma y con ello comparar el término 2 de la secuencia con el término 4 para dibujar correctamente el término 3.

En la tercera tarea, los estudiantes pueden identificar distintas características que los impulse a seleccionar la figura que no cumpla con lo que observaron. Uno de sus argumentos puede ser la simetría formada por las dos figuras separadas por el segmento horizontal que se encuentra en cada imagen. Otro argumento puede ser si la figura está formada por otras figuras distintas de simples segmentos o flechas, o si la figura tiene triángulos o no. Debido a

lo anterior no se considera una sola respuesta correcta y el valor de la tarea está en el argumento que den para justificar su elección.

Finalmente, en la cuarta tarea, debido a la libertad que se le proporciona al estudiante se esperan varias respuestas originales y distintas. Es posible que debido a la libertad que ofrece el ejercicio el estudiante no sepa qué debe hacer, por lo que el profesor podrá intervenir para dar indicaciones claras, e incluso dar ejemplos de lo que se espera que construyan. Otra situación posible es que el estudiante se base en la experiencia de las tareas para construir una nueva.

Para visualizar las actividades en el software de GeoGebra puede ingresar al siguiente link: [www.geogebra.org/classroom/pxbnfj8k](http://www.geogebra.org/classroom/pxbnfj8k)

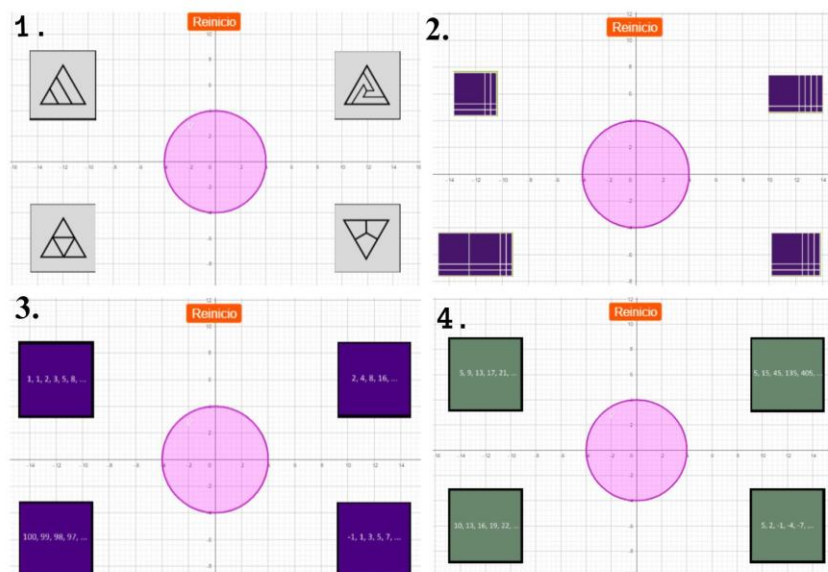
**Actividad 1: Identificando Propiedades.** Este material fue tomado de: WHICH ONE DOESN'T BELONG? En español, ¿cuál no pertenece? (<https://wodb.ca/numbers.html>) creado por el profesor de matemáticas Christopher Danielson. Las tareas presentadas en esta primera parte son útiles para trabajar los procesos matemáticos de razonamiento y comunicación (NCTM, 2000); además que presentan la idea de generalización en un conjunto específico. La calidad de los argumentos por parte de los estudiantes depende de los conocimientos que logren evidenciar a través de la tarea, por lo tanto, el profesor está en la libertad de seleccionar a su criterio cuáles imágenes son las más adecuadas para trabajar en la sesión pertinente. Con esta actividad se espera que los estudiantes identifiquen dos tipos de características en un conjunto de cuatro elementos, una característica “general” que cumplan la mayoría de los elementos que pertenecen al conjunto y una “particular” que sólo cumpla un elemento. Esto con la finalidad de poder discriminar objetos con un argumento coherente y justificado por parte de los estudiantes, y con ello reforzar el proceso de generalización

propuesto por el MEN (2006). La actividad 1 está compuesta por cuatro tareas que se describen a continuación.

**Diseño de Tareas.** Con el fin de desarrollar los procesos de Construcción, Descripción, Predicción y Representación involucrados en el proceso de generalización, se proponen cuatro tareas, que incluyen cuatro figuras que se pueden arrastrar por toda la pantalla como se puede ver en la Figura 10. Se da la indicación a los estudiantes de introducir en un círculo fijo la figura que para ellos no debe formar parte del grupo.

### Figura 10

Las 4 tareas de la actividad 1.

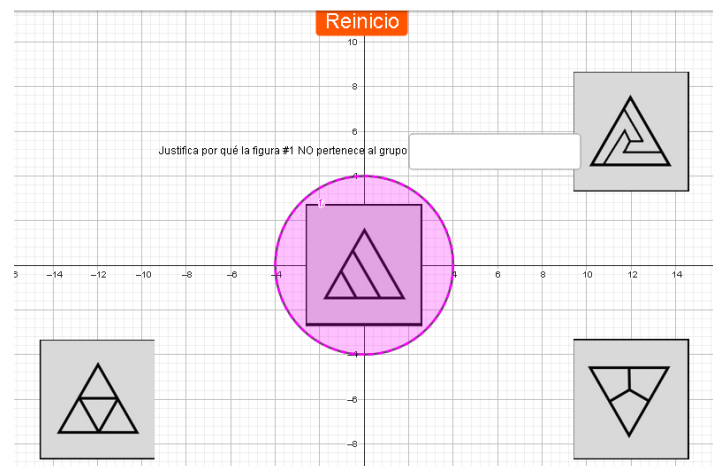


*Nota.* Cada tarea tiene su propia sección separada en el aula virtual de GeoGebra.

**Descripción del Medio y Retroacciones.** Las cuatro tareas están diseñadas para permitir el arrastre libre de las figuras por la pantalla, mientras que el círculo está fijo. Para resolver cada tarea el estudiante debe arrastrar al centro del círculo la figura que considere es diferente. Una vez ingresa una figura al círculo se despliega una casilla de entrada o espacio donde el estudiante debe justificar la elección, como se muestra en la Figura 11.

**Figura 11**

*Ejemplo de casilla de entrada para escribir el argumento.*



*Nota.* Casilla de entrada para escribir la justificación.

Además de las imágenes, el círculo y la casilla de entrada, en pantalla se encuentra un botón de “Reinicio” que pone a cada figura en su posición inicial. Es de aclarar que dada la naturaleza de la actividad no se presentan retroacciones o algún tipo de validación que permita el medio en el momento en que se termina de escribir en la casilla de entrada. Dado que las justificaciones que dan los alumnos dependen de las experiencias y conocimientos de cada uno, el rol del profesor es monitorear las respuestas de los estudiantes para garantizar la coherencia de las justificaciones y hacer una retroalimentación de las respuestas más comunes y/o creativas.

El estudiante debe tomar el papel fundamental de realizar la interacción con la actividad y buscar la explicación adecuada de por qué cada elemento no puede pertenecer a un conjunto determinado. Además, debe estar en condiciones de validar sus argumentos bajo los criterios de discriminación que usa en cada caso.

*Análisis de las Tareas.* Se espera que los estudiantes ubiquen las cuatro imágenes que se presentan en cada una de las tareas dentro del círculo y justifiquen por qué no pertenecen, pero en un orden de acciones específicas, es decir:

- 1- Ubica cualquier imagen dentro del círculo (solamente una);
- 2- Justifica por qué no pertenece al grupo;
- 3- Oprime el botón Reinicio para que el círculo quede libre y selecciona una imagen distinta;
- 4- Repite el procedimiento hasta completar las cuatro imágenes.

Debido a que es la primera actividad que se desarrolla, se espera que las primeras respuestas, correspondientes a la tarea 1, sean poco detalladas y expresen simplemente un primer detalle detectado por los estudiantes que les parezca que se ve diferente. Por lo cual es necesario una intervención por parte de los investigadores para plantear preguntas que busquen una ampliación de lo escrito, para identificar cómo se están desarrollando los procesos de Descripción y Representación. Cabe resaltar que es posible que algunos estudiantes no comprendan, u olviden, que deben escribir algo respecto a cada figura de cada tarea y dejen espacios en blanco.

*Análisis de la actividad.* Las tareas están diseñadas de tal manera que cuando el alumno esté analizando las características de cada figura que se muestra en pantalla, logre identificar al menos una con la cual diferenciarlas. Las tareas son desarrolladas en parejas para generar un espacio donde los estudiantes debatan entre ellos sobre las diferencias y generalidades que hay entre cada conjunto de figuras, y así incentivar el proceso de Descripción. Después los estudiantes tienen la oportunidad de escribir el argumento al que llegaron, donde es posible la intervención por parte de los investigadores planteando preguntas que guíen a los estudiantes hacia un argumento más completo con respecto a lo que piensan, y de esta forma desarrollar el proceso de Representación. Es posible que durante el

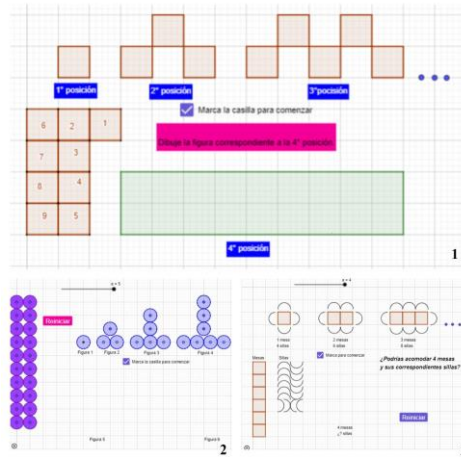
desarrollo de las tareas esté presente también el proceso de Predicción cuando los estudiantes usen como parte de su argumento ejemplos de figuras inventadas por ellos que sí deben pertenecer al grupo a diferencia de la escogida.

**Actividad 2: Secuencias Figurales.** Esta actividad está compuesta por tres tareas, donde cada una se puede dividir en dos momentos. En el primer momento se presenta una secuencia figural con apoyo tabular donde se exhiben los primeros elementos y el estudiante debe construir los elementos siguientes que se le piden como se puede ver en la Figura 12, para eso los estudiantes deben identificar la característica común que cumplen todos los elementos. El segundo momento está compuesto por una serie de preguntas que se pueden observar en la Figura 13, que permiten que el estudiante profundice en sus ideas formadas en el primer momento de la actividad, además las respuestas permitirán un mejor análisis de los procesos de generalización que se evidencien. Cada tarea tiene cuatro preguntas en total.

*Diseño de Tareas.* Cada tarea de la actividad tiene su propio apartado dentro del aula virtual de GeoGebra. Las secuencias de cada tarea, como se mencionó antes, muestran al estudiante los primeros elementos, donde con un deslizador que se encuentra en la parte superior del applet, se puede observar uno por uno. En pantalla también se encuentra una casilla nombrada: “Marcar para comenzar” que al darle click despliega unos elementos con los que se puede construir el término de la secuencia que se pide en un lugar indicado, esto con la finalidad de promover el proceso de Construcción al manipular los objetos. Después, al bajar por la sección, encuentra la serie de preguntas, donde si los investigadores consideran apropiado pueden intervenir con preguntas adicionales que ayuden a los estudiantes a consolidar sus ideas.

**Figura 12**

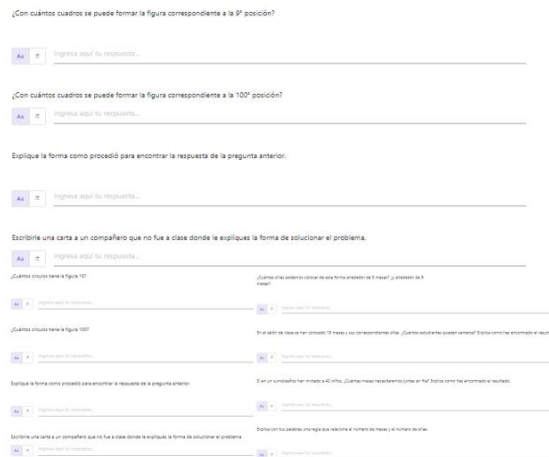
*Tareas del primer momento.*



*Nota.* Las figuras y espacios para construir aparecen después de marcar la casilla “Marcar para comenzar”.

**Figura 13**

*Tareas del segundo momento.*



*Nota.* Las preguntas de cada secuencia se encuentran debajo del espacio de las figuras.

Para visualizar las actividades puede ingresar al siguiente link

[www.geogebra.org/classroom/pxbnfj8k](http://www.geogebra.org/classroom/pxbnfj8k)

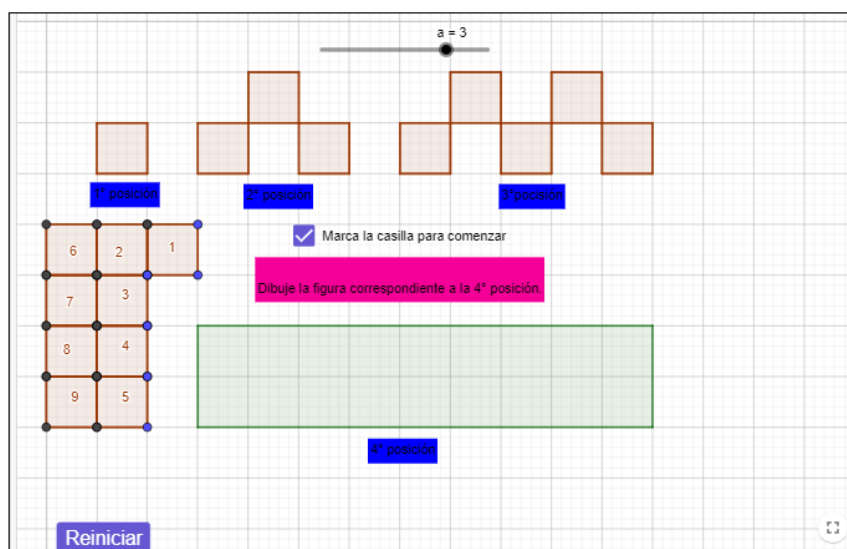
**Descripción del Medio y Retroacciones.** Es preciso declarar que, aunque en el aula virtual de GeoGebra cada secuencia va acompañada directamente con sus preguntas, por fines prácticos este apartado se divide en los dos momentos mencionados anteriormente.

**Primer Momento.** En cada una de las tres tareas se utiliza el mismo recurso para visualizar cada uno de los elementos de la secuencia. Es decir, mediante la interacción del estudiante con el deslizador se puede observar entre tres o cuatro términos de la secuencia y al marcar la casilla “Marcar para comenzar” que se encuentra en la parte inferior de los términos de la secuencia, se despliega la primera indicación.

Los cuadrados numerados que se pueden observar en la Figura 14, se pueden arrastrar por todo el espacio delimitado y se espera que los estudiantes construyan la figura que se pide en el sector que está marcado con el rectángulo verde.

**Figura 14**

*Elementos de la primera tarea que aparecen al marcar la casilla “Marcar para comenzar”.*

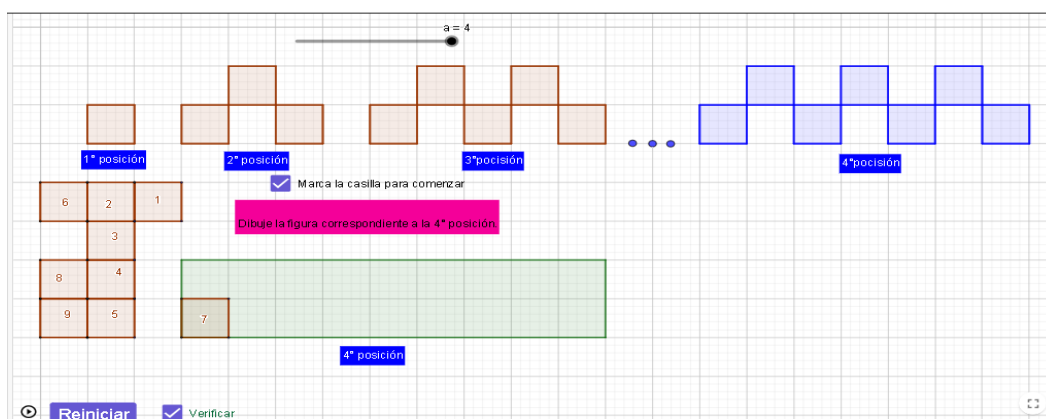


*Nota.* Primera tarea adaptada, primer momento. Secuencia tomada de *La transición aritmética-álgebra* (p. 92-93), por Rojas et al. (1999).

La numeración de los cuadrados cumple con el propósito de ayudar al estudiante a llevar un mejor orden en su construcción. Además, de asegurar que use el cuadrado número “7”, ya que este último habilita la casilla “Verificar” al cambiarlo de posición como se muestra en la Figura 15.

**Figura 15**

*Término de la secuencia desplegado al marcar la casilla “Verificar” en la primera tarea.*



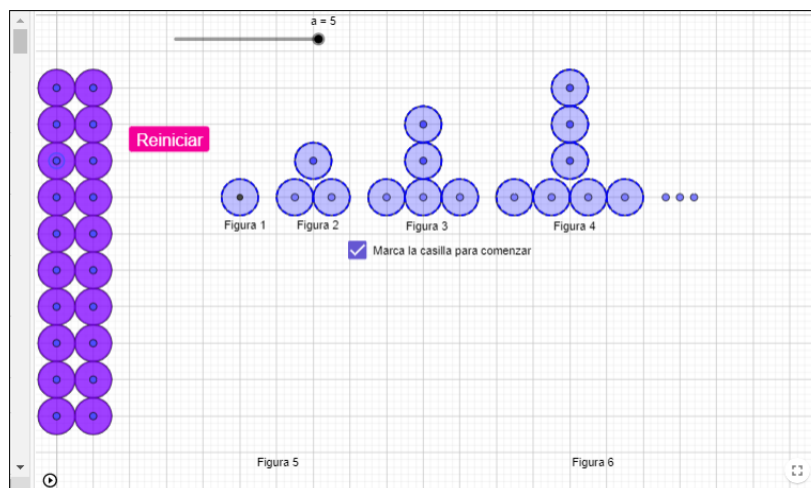
*Nota.* El cuadrado “7” puede estar en cualquier posición diferente a la inicial para activar la opción “Verificar”.

Cuando el estudiante construye su figura y marca la casilla “Verificar”, aparece en pantalla la silueta de la respuesta correcta como se observa en la Figura 15. Por último, en la parte inferior se encuentra un botón de “Reiniciar” que tiene como función ubicar cada uno de los cuadrados en la posición inicial, retornando al estado en el que se encontraba todo cuando se activó la casilla “Marcar la casilla para comenzar”.

Siguiendo con la segunda tarea, el estudiante debe acomodar los círculos de color púrpura que se observan en la Figura 16, para formar los términos 5 y 6 de la secuencia. La cantidad de círculos púrpuras es exacta para formar ambas figuras, es decir, no debe sobrar ni faltar ninguno en la construcción de los términos para completar la indicación correctamente.

**Figura 16**

*Elementos que aparecen al marcar la casilla “Marcar para comenzar” en la segunda tarea.*

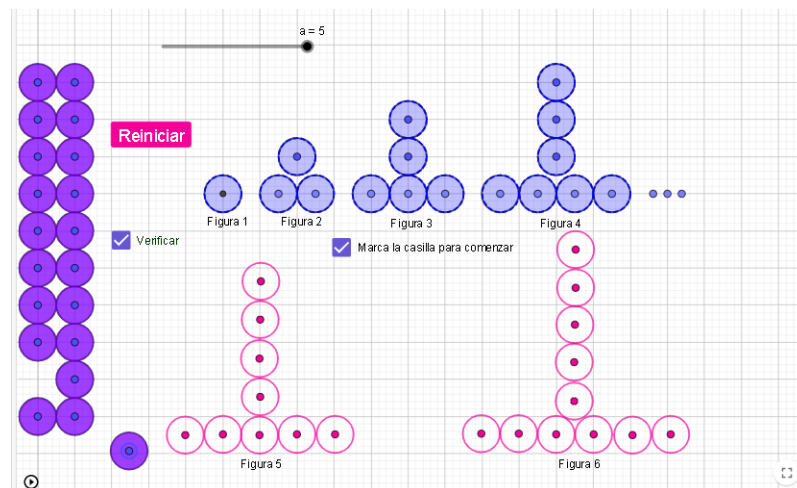


*Nota.* Segunda Tarea adaptada, primer momento. Secuencia tomada de *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria* (p. 98), por Vergel R. (2016), Universidad Distrital

A diferencia de la primera tarea, en esta no hay un recuadro verde donde construir las figuras, por lo que el estudiante debe gestionar el espacio en pantalla. Sin embargo, también está la opción de dar click sobre el botón “Reiniciar” que acomoda todos los círculos púrpuras en su posición de origen. Al igual que en la primera tarea, para activar la casilla “Verificar”, se debe cambiar de posición un círculo en específico, y esta despliega la silueta de la forma correcta de las figuras que se debe construir y en el espacio que corresponde. Con esto el estudiante puede comparar los términos de la secuencia que se muestra en la Figura 17 con las que esté construyendo.

**Figura 17**

*Resultados en pantalla al marcar la casilla “Verificar”.*

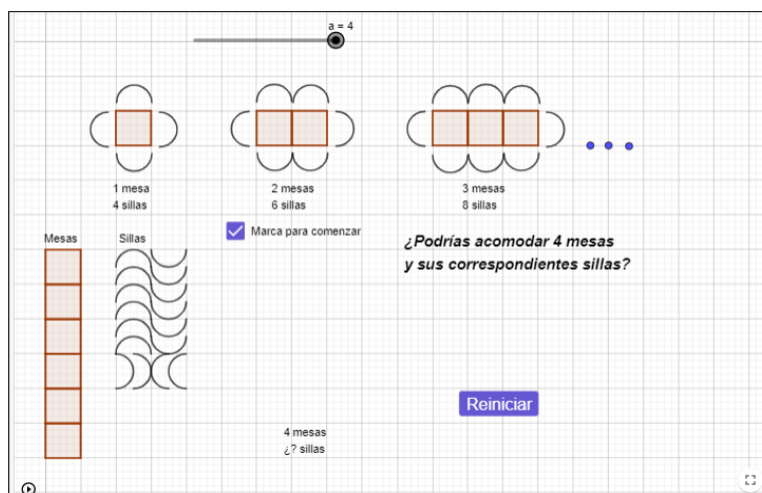


*Nota.* El círculo que habilita la casilla “Verificar” puede estar ubicado en cualquier lugar de las siluetas mostradas.

Continuando con la tercera tarea, la casilla “Marcar para comenzar” despliega un conjunto de cuadrados y semicírculos que el estudiante puede arrastrar por el espacio que proporciona GeoGebra y una pregunta que indica cuál término debe construir como se puede apreciar en la Figura 18.

**Figura 18**

*Objetos que aparecen en la tercera tarea al marcar la casilla “Marcar para comenzar”.*

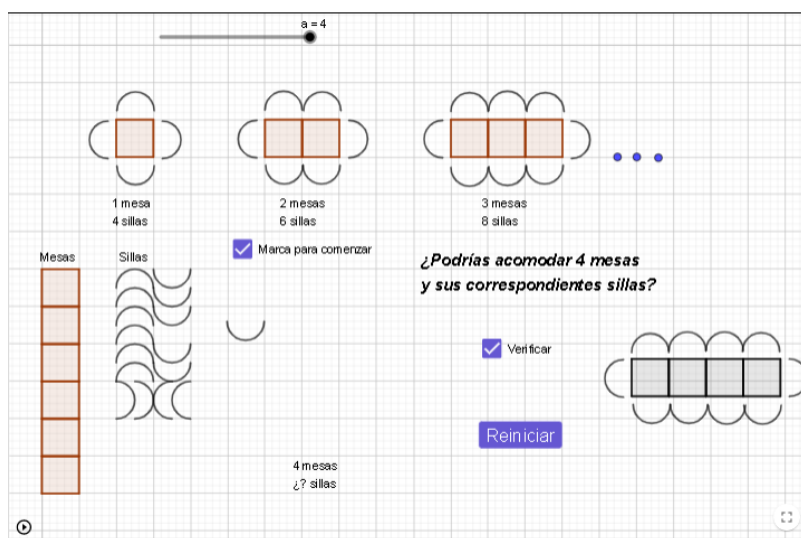


*Nota.* Tercera Tarea adaptada, primer momento. Secuencia tomada de *Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales*, por Callejo et al. (2016).

La pregunta que se plantea al estudiante le indica qué término debe construir para continuar con la secuencia. A diferencia de las anteriores tareas, esta presenta un contexto donde los cuadrados representan mesas y las semicircunferencias representan sillas. La casilla de “Verificar” que se puede observar en la Figura 19, se despliega luego de mover una de las semicircunferencias en específico que debe estar ubicada debajo de los cuadrados. Al marcar la casilla, se despliega en pantalla debajo de la pregunta, la forma correcta del término de la secuencia, o en términos de la pregunta, el cómo deben estar organizadas las mesas con sus sillas. El botón “Reiniciar”, al igual que las anteriores tareas, retorna todos los elementos a su posición inicial.

### Figura 19

*Término correcto proporcionado por marcar la casilla “Verificar”.*



*Nota.* Basta con mover la semicircunferencia cóncava hacia arriba para activar la casilla “Verificar”

Es importante mencionar que cada uno de los applets presentados cuenta con un botón de animación, para que el deslizador se mueva de manera independiente y vayan apareciendo los términos de la secuencia, cuando el estudiante interactúa con el deslizador la animación se detiene.

**Segundo Momento.** Como se mencionó, cada secuencia viene con cuatro preguntas que se visualizaron en la Figura 13, y cada una tiene su propio espacio donde escribir la respuesta. En las dos primeras tareas las preguntas llevan un orden similar. Las dos primeras preguntas están planteadas para que el estudiante ponga a prueba las conjeturas obtenidas tras la exploración realizada en el primer momento. La primera pregunta hace referencia a una generalización cercana y la segunda hace referencia a una generalización lejana; donde se espera que el estudiante opte por una forma óptima de encontrar el resultado que es pedido. Las preguntas número tres y cuatro buscan que el estudiante unifique sus ideas y mediante el proceso de Representación escriba una respuesta que permita identificar los procesos de Predicción y Construcción. De tal manera que para el estudiante sea claro cómo encontrar o construir cualquier elemento que pertenezca a la secuencia, y que este sea claro para todo lector. Esas respuestas escritas, y habladas si los investigadores intervienen, permiten identificar cómo el estudiante está ejecutando el proceso de generalización.

Las preguntas de la tercera tarea llevan un orden diferente, se espera que el estudiante determine la relación que hay entre los elementos que están en juego en la secuencia, las “mesas” y las “sillas”, cómo van cambiando conforme se van agregando términos a la secuencia. Esto puesto en la tarea final de la actividad con el fin de analizar cómo va cambiando el entendimiento de los estudiantes frente a ejercicios que involucran generalizar y como se va desarrollando el pensamiento algebraico. La cuarta, y última pregunta, es la misma a las tareas anteriores.

*Análisis de las Tareas.* Se espera que los estudiantes intenten resolver cada tarea, del primer momento, arrastrando los objetos que se presentan libres en los applets para habilitar la casilla “Verificar” en cada caso, y posteriormente marcarla para poder visualizar el término de la secuencia que se está pidiendo. Las secuencias de la primera y segunda tarea, que, aunque visualmente están compuestas por figuras distintas, el patrón por el que se relacionan sus elementos es el mismo. La decisión de ese diseño se tomó con el fin de propiciar un momento, al pasar de una tarea a la siguiente, en el que el estudiante desarrolle el proceso de Construcción. La secuencia de la tarea tres está diseñada para facilitar al estudiante la identificación, de manera individual, del patrón que sigue cada elemento que componen los términos de la secuencia, de esa forma propiciar el desarrollo del proceso de Descripción. Es posible que los estudiantes encuentren el objeto que habilita la casilla “Verificar” antes de terminar la construcción del elemento solicitado, pero para esto se debe presentar una interacción previa del sujeto con el medio para identificar exactamente cuál es ese elemento. Aunque el estudiante active la casilla de “Verificar” por casualidad, las preguntas propuestas en el segundo momento de la actividad necesitan que haya logrado una buena descripción de la secuencia para que logre responder de manera correcta.

En el segundo momento de las tareas, en la primera pregunta se espera que los estudiantes utilicen el applet para construir la figura que se está preguntando, debido a que este fue diseñado con los recursos necesarios para responder a dicha pregunta, pero en ningún momento se le comunica al estudiante que puede hacer uso de este recurso para encontrar la respuesta. En la segunda pregunta se espera que los estudiantes propongan una estrategia para poder explicar la regla de crecimiento que se presenta en la secuencia. Así mismo, las primeras dos preguntas están planteadas para identificar cómo el estudiante está prediciendo los términos de las secuencias y como describe esas ideas, siendo la Predicción y Descripción procesos de la generalización. Ya que la segunda pregunta está relacionada con un término,

de la secuencia, bastante lejana en comparación de las que muestra cada applet, se espera que el estudiante, que en su proceso de descripción no haya identificado un patrón, en este momento se vea forzado a hacerlo para no tener que dibujar o construir cada figura hasta llegar a la que involucra la secuencia. Las dos últimas preguntas están enfocadas en los procesos de Representación y de Construcción. En la tercera pregunta se espera que el estudiante comunique todas las ideas que tuvo, relacionando las conjeturas con los resultados. En la cuarta pregunta, dado que es necesario explicar a otro estudiante, se espera que los estudiantes señalen las características de cada caso particular de la secuencia, de manera que el estudiante que lo lea pueda notar el cambio regular que se realiza en la secuencia. Como esta es la tercera actividad que se realiza, se espera que las justificaciones de los estudiantes estén construidas de mejor manera debido a las indicaciones dadas en las actividades anteriores, de forma que se vea una evolución en los procesos de generalización.

***Análisis de la Actividad.*** El diseño de la actividad permite que el estudiante observe el desarrollo de los procesos de Descripción, Construcción, Predicción y Representación de manera progresiva para generalizar. Es decir, son tareas que, primero, promueven los procesos de Descripción y Predicción, y después los lleve a ver la Construcción y Representación, desarrollando así la generalización de la secuencia que permiten potenciar el pensamiento algebraico.

**Actividad 3: Secuencias Numéricas.** Como menciona el MEN (2006), el pensamiento algebraico es una base fundamental para acceder al proceso de generalización indispensable para el desarrollo de pensamiento espacial y numérico. Por tanto, para la actividad 2 se emplearon secuencias figurales, y en esta actividad se emplearon secuencias numéricas. Esta actividad consta de tres tareas, cada una con su respectiva secuencia numérica: la secuencia de los números triangulares; la secuencia de Fibonacci; y la secuencia

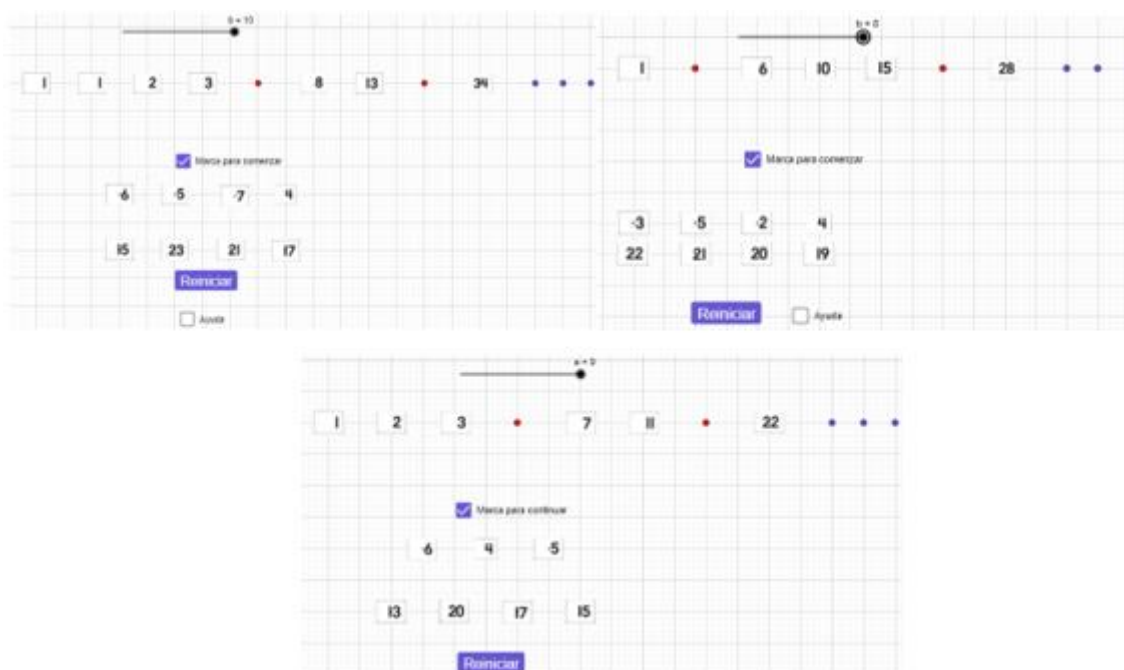
numérica de Srinivasa Ramanujan que trata sobre las distintas maneras de “partir” el número en piezas aditivas.

En los applets que se presentan en esta sección, los estudiantes deben completar la secuencia numérica y a partir de esto deben explicar el por qué de sus respuestas, es decir, explicar la regla de crecimiento o patrón que están siguiendo los números en cada una de las secuencias presentadas.

**Diseño de Tareas.** Al igual que en la actividad anterior, estas tareas se dividen en dos momentos. En el primero se presenta el applet con las secuencias numéricas como se puede observar en la Figura 20 donde el estudiante debe seleccionar de entre las opciones los números faltantes.

**Figura 20**

*Secuencias numéricas de la tercera actividad.*



*Nota.* Las opciones de respuesta aparecen al marcar la casilla “Marcar para comenzar”.

En el segundo momento el estudiante debe responder en un cuadro de espacio que se puede ver en a Figura 21, una pregunta en la que debe justificar el por qué de su respuesta.

**Figura 21**

*Pregunta de cada tarea en la actividad 3.*

Explica con tus propias palabras porque crees que esos valores son los que completan la secuencia numérica.



Ingresar aquí tu respuesta...

*Nota.* La misma pregunta se repite en cada tarea de esta actividad.

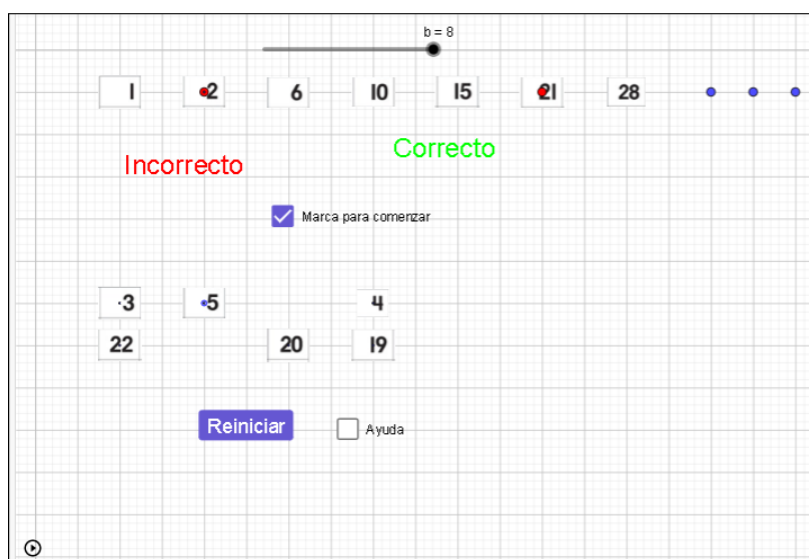
Además, se agrega una nueva casilla llamada “Ayuda”, la cual despliega en pantalla una representación gráfica de los elementos de la secuencia, en la siguiente sección se especifica sobre ello.

***Descripción del Medio y Retroacciones.*** Cada tarea presenta el applet con la secuencia numérica y justo debajo está la pregunta y el espacio para escribir la respuesta; además cada tarea tiene su propia pestaña dentro del aula virtual de GeoGebra. La explicación de las tareas se divide nuevamente en dos momentos.

***Primer momento.*** Al igual que en las anteriores tareas, se utiliza el recurso del deslizador para que los estudiantes mediante la interacción puedan visualizar los elementos de la secuencia, como se observó en la Figura 20, una a una. Los primeros elementos que se despliegan son números que pertenecen a la secuencia y un par de puntos rojos entre ellos que son el espacio donde el estudiante debe arrastrar, de entre las opciones, el número que considere debe ocupar ese espacio. Cuando el estudiante coloca un número sobre el punto rojo pueden ocurrir dos retroacciones, como se puede observar en la Figura 22: un mensaje en color rojo que dice “Incorrecto” si el número escogido no pertenece a esa posición de la secuencia, o un mensaje en color verde que dice “Correcto”, en caso contrario.

**Figura 22**

Mensaje de “Incorrecto” y “Correcto”.



*Nota.* Los puntos azules solo son para indicar que la sucesión tiene más términos y no ocurre ninguna retroacción si se posiciona un número sobre ellos.

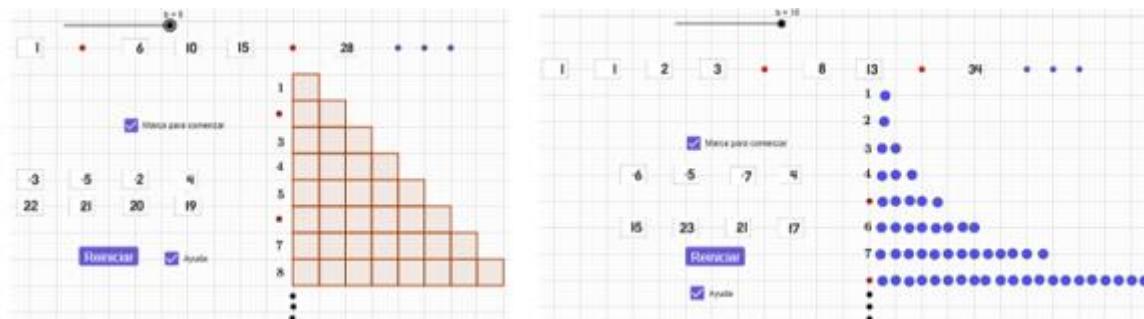
Como se mencionó, al marcar la casilla “Marcar para comenzar” aparecen las opciones de números que el estudiante puede arrastrar por toda la pantalla y debe seleccionar correctamente para que aparezcan ambos mensajes “Correcto” y puedan pasar a responder la pregunta.

A diferencia de las actividades anteriores, donde las secuencias estaban formadas en su mayoría por figuras, y era visualmente más notorio cómo se comporta cada secuencia; en este caso con sucesiones numéricas es necesario que el estudiante tenga en consideración las operaciones que se están realizando entre los elementos, por lo que para ayudar al análisis del estudiante se diseñó una casilla “Ayuda”. La finalidad de la casilla es mostrar una representación geométrica como se observa en la Figura 22, de las dos secuencias presentadas (números triangulares y Fibonacci) y de esta forma brindar a los estudiantes algún recurso que puedan utilizar para responder la pregunta del segundo momento. La tercera tarea no

cuenta con una casilla de “Ayuda” dado que se busca analizar los recursos usados por los estudiantes para intentar justificar la regla que sigue la secuencia.

### Figura 23

*Ayudas de las tareas 1 y 2 de la tercera actividad.*



*Nota.* La imagen de la izquierda corresponde a la primera tarea, y la imagen de la derecha a la segunda tarea.

La “Ayuda” para la primera tarea despliega una figura conformada por pequeños cuadrados que van formando una escalera, donde la suma de los elementos de cada fila equivale a un término de la secuencia. Es decir, la primera fila equivale al primer término, la suma de la cantidad de cuadrados de la primera fila y la segunda equivale al segundo término, el cual es el que debe encontrar el estudiante, y así sucesivamente.

Para la segunda tarea, la casilla de “Ayuda” despliega una figura compuesta por puntos, que como en la sucesión de Fibonacci; en cada fila está el resultado de sumar la cantidad de puntos de las dos filas anteriores teniendo en cuenta que en la primera y segunda fila el valor es de uno. Entonces, en la fila cuatro hay tres puntos, que es el resultado de sumar los puntos de la fila dos y tres.

**Segundo Momento.** Después de resolver la primera parte de la tarea, el estudiante debe justificar su respuesta, escribir en el espacio asignado que se observó en la Figura 21, el razonamiento que usó y lo llevó a identificar los números correctos.

**Análisis de las Tareas.** Al ser esta la última actividad que se realiza se espera que los estudiantes apliquen todos los procesos que involucran la generalización, durante el desarrollo de cada tarea, es decir, vean los procesos de Descripción, Construcción, Predicción y Representación. Como se ha mencionado, es de esperar que el principal problema es la complejidad de los patrones de cada secuencia, especialmente el de la tercera tarea, la sucesión de Ramanujan. En dicha sucesión el elemento que aparece en una posición correspondiente, indica la cantidad de maneras en las que se puede escribir el número de la posición como suma de números enteros positivos. Por ejemplo, el número “3” de la posición tres indica que hay tres formas de expresarlo como suma de naturales, estas son  $3 + 0 = 2 + 1 = 1 + 1 + 1$ . Al ser un patrón complejo y el cual no tiene diseñada la casilla “Ayuda”, los investigadores deben interactuar con los estudiantes para brindarles guía y puedan seguir con la Descripción y Construcción, para finalmente justificar su respuesta mediante los procesos de Predicción y Representación. De igual manera para las dos primeras tareas, si es necesario, los investigadores pueden interactuar con los estudiantes.

Aunque se espera que mediante los procesos de Descripción y Construcción los estudiantes encuentren las respuestas correctas, es posible que, por el diseño del applet, los estudiantes las encuentren mediante prueba y error. Es también probable que los estudiantes no logren identificar ningún patrón, y para ese caso los participantes deben escribir lo que intentaron hacer, aunque no les funcionara, ya que esas respuestas también son útiles para identificar los procesos de generalización que fueron utilizados.

**Análisis de la Actividad.** En esta actividad la generalización de patrones numéricos se desarrolla principalmente el pensamiento algebraico, pero también el pensamiento numérico. Además, el diseño de las tareas permite analizar la evolución que tengan los estudiantes en el proceso de generalización desde la Actividad 1, y verificar si el desarrollo de las Actividades potencia el desarrollo de pensamiento algebraico. Se eliminaron en cada tarea las preguntas

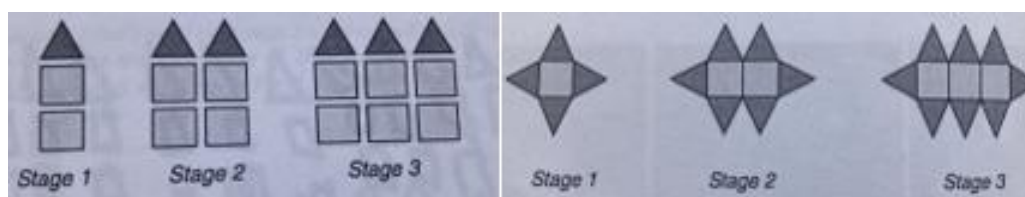
que guiaban al estudiante en identificar cómo variaron los elementos en cada sucesión y se dejó una sola, cuya respuesta debe reflejar el uso de todos los procesos que están involucrados en la generalización.

**Actividad 4: Actividad Final.** Esta actividad está compuesta por tres tareas y se desarrolla entre la actividad 2 y 3. Todas las tareas se basan en el uso de materiales físicos manipulativos, ya que como menciona el MEN (2006) el uso de estos materiales potencia la capacidad de pensar y razonar, ayudan a identificar regularidades y relaciones. Primero los estudiantes deben construir el siguiente término de dos secuencias figurales, y después crear su propia secuencia. El material físico es un conjunto de figuras en forma de cuadrados y triángulos hechos en cartulina.

**Diseño de Tareas.** La actividad se realiza en grupos de 4-6 estudiantes, a cada grupo se le asigna una cantidad suficiente de figuras para que cada miembro pueda intentar construir los términos de la sucesión. Como se menciona anteriormente, el trabajo grupal es con el fin de generar espacios de debate que promueven los procesos de Descripción, Predicción, Representación y Construcción. En la primera tarea se presentan los tres primeros términos de la “secuencia torre” y los estudiantes deben construir el cuarto y quinto término. Para la segunda tarea se procede de manera similar, pero con la “secuencia rodeo de triángulos”; en la Figura 24 se pueden visualizar dichas secuencias. Para concluir, se desarrolla la tercera tarea, donde los estudiantes deben dibujar una sucesión creada por ellos, donde se pueden apoyar en el material físico dado para construirla, para después explicar el patrón que sigue. La tercera tarea, aunque estén formados por grupos, se desarrolla de manera individual, no obstante, se puede abrir un espacio para compartir ideas y de una ayuda mutua.

**Figura 24**

*Secuencia torres y secuencia rodeo de triángulos.*



Nota. Ambas secuencias son tareas adaptadas de *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics* (p. 111-112), por Rivera F. (2013), Springer.

**Descripción del Medio y Retroacciones.** Por la naturaleza de la tarea no se presentan retroacciones del medio, dado que la actividad busca favorecerse del uso de materiales físicos, ya que como lo recomienda el MEN (2006), es necesario permitir que el estudiante manipule los objetos, esto puede ayudarle a encontrar y establecer relaciones entre los términos de la sucesión.

**Análisis de la Tarea.** Se espera que las dos primeras tareas sean resueltas correctamente por los estudiantes ya que en las actividades anteriores se realizaron tareas con secuencias figurales. Es decir, los estudiantes están familiarizados con este tipo de tareas. En la tercera tarea es posible que los estudiantes construyan secuencias parecidas a las presentadas en la actividad 2 o en la prueba diagnóstica, usando como referencia las figuras planteadas en esas tareas. También es posible que se creen secuencias originales dibujando elementos cotidianos para el estudiante como lápices, casas, entre otros.

**Análisis de la Actividad.** La actividad está diseñada con el propósito de que en las primeras dos tareas los estudiantes puedan describir a sus compañeros de grupo el elemento común de la secuencia para después hacer uso de la Representación para expresar las ideas y con la Predicción comprobarlas. Con la tercera tarea, el estudiante debe usar los procesos de Descripción, Representación, Predicción y Construcción para crear su secuencia y comprobar que es correcta, realizando una generalización.

### 4.1.3. Experimentación

Esta fase consiste en la implementación de la secuencia diseñada para los estudiantes y la observación de las producciones realizadas por los mismos, tomando en consideración lo decidido en el análisis a priori.

A continuación, presentamos la producción que realizaron los estudiantes en la prueba diagnóstica y en las tres primeras actividades planteadas en la secuencia didáctica. Los soportes o evidencias se presentan en la sección de anexos. La implementación de la prueba diagnóstica se realizó en el aula habitual de clase y tuvo un tiempo aproximado de dos horas, la secuencia didáctica se realizó en tres sesiones: en la primera, se realizaron la primera actividad y la primera tarea de la segunda actividad con una duración de dos horas y treinta minutos; en la segunda, se completaron las tareas de la segunda y tercera actividad con una duración de dos horas y treinta minutos; en la tercera, se realizó el trabajo con el material concreto con un tiempo estimado de dos horas. El aula donde se implementó la segunda y tercera sesión contaba con numerosos equipos de cómputo, acceso a internet (necesario para acceder a las tareas planteadas) y televisor inteligente para guiar a los estudiantes en la navegación de las actividades.

**Prueba Diagnóstica.** A continuación, se presentan los resultados de la prueba diagnóstica. Esta prueba la respondieron 17 estudiantes debido a que algunos faltaron a clase el día en el que se presentó.

**Tabla 1**

*Respuesta de los estudiantes en la primera tarea de la prueba diagnóstica*

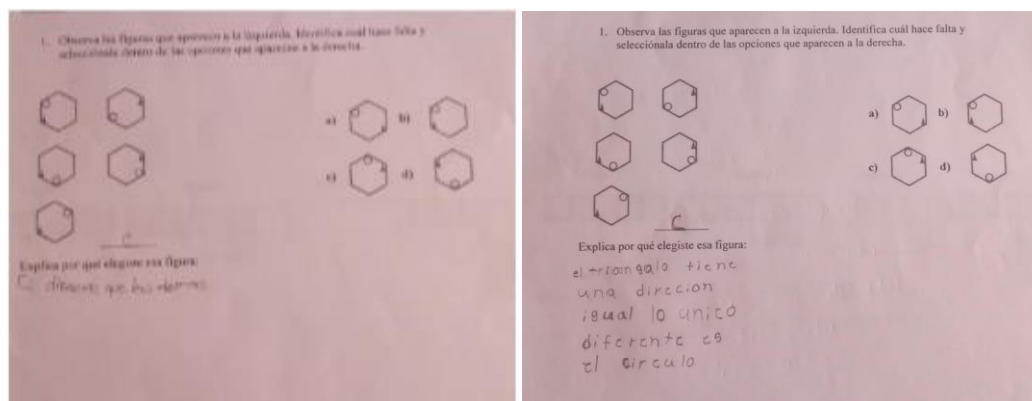
| a)                    | b)                | c)                     | d)                    |
|-----------------------|-------------------|------------------------|-----------------------|
| 11,76%, 2 estudiantes | 0%, 0 estudiantes | 76.47%, 13 estudiantes | 11,76%, 2 estudiantes |

*Nota.* En la tabla solo se muestran las opciones que seleccionaron los estudiantes.

En cuanto a las justificaciones, todos los estudiantes presentaron una producción escrita, aunque algunos no presentaron concretamente sus ideas como se muestra en la Figura 25.

**Figura 25**

*Algunas respuestas dadas por estudiantes.*



*Nota.* Respuestas de dos estudiantes, a la izquierda una justificación que no explica el razonamiento usado y a la derecha una justificación que lo intenta hacer.

Se presenta variedad entre las justificaciones por parte de los participantes, así mismo, se presentan tanto ideas concretas y bien argumentadas como ideas incoherentes y argumentos que no presentan ningún tipo de relación.

**Tabla 2**

*Respuesta de algunos estudiantes en la segunda tarea de la prueba diagnóstica.*

| Porcentaje y cantidad de estudiantes  | Justificaciones  |
|---|--|
| 29,41%, cinco estudiantes completaron de forma incorrecta la secuencia planteada en la parte a) | <p>Porque creo que se suman de 3 entre 3.</p> <p>Toca ir sumando de tres. para que nos dé un resultado correcto.</p> <p>Porque pienso que es colocar los números en 3 en 3 y me pareció que los números están correctos.</p> |

|   |   |
|---|---|
| 70, 58%, 12 estudiantes completaron de forma correcta la secuencia planteada en la parte a)             | Porque la ecuación esta de 3 en 3.<br>Porque conté de tres en tres por ejemplo 2 5 8.<br>Acá se va restando 3 en 3  |
| 41,17%, siete estudiantes dibujaron incorrectamente el término de la secuencia planteada en la parte b) | Saqué el resultado de la tres contando de dos en dos porque me di cuenta en la primera, segunda, y cuarta, que estaba de dos en dos.<br>La figura es igual solo le aumente 2 figuras más.   |
| 58,82%, diez estudiantes dibujaron correctamente el término de la secuencia planteada en la parte b)    | Es como la del punto cuatro, pero a esta le sumo dos para resolverlo para hacer la figura que faltaba en el término número tres.<br>porque cada vez son más se va 2 en 2 para abajo en cuadro.<br>porque conté las de arriba y le sume 2 más para que se viera diferente a las dos y porque no tiene color. |

*Nota.* Las justificaciones que se muestran en la tabla corresponden a los argumentos que utilizaron algunos de los estudiantes, por lo tanto, no se modificó la idea al hacer la transcripción.

En la primera parte, las justificaciones que utilizaron la mayoría de los participantes relacionan la secuencia decreciente con una regla de incremento, como se puede observar en la Tabla 2, solo un estudiante utilizó la palabra restar para relacionar una regla que debería seguir la secuencia decreciente.

### Tabla 3

*Respuesta de los estudiantes en la tercera tarea de la prueba diagnóstica.*

| Porcentaje y cantidad de estudiantes   | Justificaciones   |
|--|---|
| 41,17%, siete estudiantes seleccionaron la figura que se encuentra a la izquierda en la parte superior | Las flechas no pertenecen al grupo de figuras.<br>Porque todas esta conformadas por triángulos y la 1 está conformada por flechas.<br>Porque no es una figura yo creo que es esa no es la figura yo pienso que no es una figura.<br>Porque no está iguales que las otras son diferentes.<br>Porque tiene figuras y la otra son flechas. |

|  |   |
|--|---|
|  | <p>Que no es una figura porque para mí una figura son las otras menos ese porque también yo no creo que se parezca a una otra figura. no es una figura porque son rallas.</p> <p>Porque son diferentes a los demás y porque la figura no tiene y se diferencia a las figuras no se parece en nada de las otras figuras porque las otras tienen triángulos y esa figura no se parece en nada.</p>  |
| <p>35,29%, seis estudiantes seleccionaron la imagen que se encuentra a la derecha en la parte superior</p> | <p>Es porque no tiene la parte de arriba y por eso no es (Realiza un dibujo para indicar).</p> <p>Porque una de las figuras esta descompleta y la de abajo se está completa. a que una de las figuras tiene las rayitas de arriba y la otra no lo tiene (Realiza un dibujo para indicar).</p> <p>Porque la figura está incompleta y no tiene una dirección.</p> <p>Porque no es igual a la del lado y porque le falta el palito de arriba.</p> <p>Porque no tiene lo que tiene el otro.</p> <p>Porque no está puesta correctamente también porque esta desigual a su contrario (realiza dos dibujos para justificar) de esta manera debe estar porque la incorrecta no está de esta manera.</p> |
| <p>17,64%, tres estudiantes seleccionaron la imagen que está ubicada en la parte inferior izquierda</p>    | <p>Porque esta figura es diferente a las otras figuras y no coincide con las demás.</p> <p>Porque la encerrada no está en el grupo de triángulos.</p> <p>Porque esta figura no se parece a la de arriba la de arriba esta destapada o sea no están igual cambio las demás figuras si están bien tienen sus dibujitos iguales a los que tienen las figuras.</p>  |
| <p>5,88%, un estudiante seleccionó la imagen ubicada en la parte inferior izquierda</p>                    | <p>Todas las demás tienen las flechas hacia arriba y hacia abajo.</p>   |

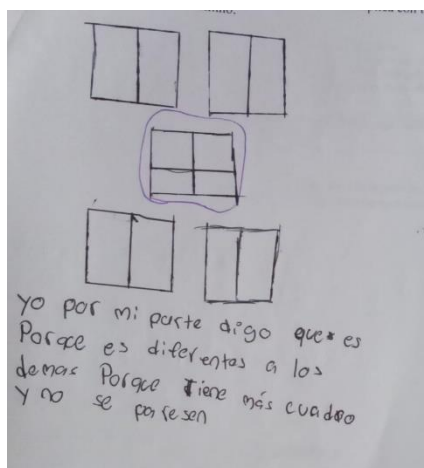
*Nota.* Las justificaciones que se muestran en la tabla corresponden a los argumentos que utilizaron algunos de los estudiantes, por lo tanto, no se modificó la idea al hacer la transcripción.

De estas respuestas proporcionadas por los estudiantes se pueden identificar pocos argumentos relevantes, pero en algunos casos las ideas que tienen los estudiantes son creativas y correctas.

En la cuarta tarea, un estudiante interpretó de manera errónea el enunciado de la tarea, dado que intentó realizar cinco figuras y discriminar una como en la indicación de la tercera tarea como se puede observar en la Figura 26. Así mismo, dos estudiantes entendieron el enunciado como si fuera similar a la primera tarea.

### Figura 26

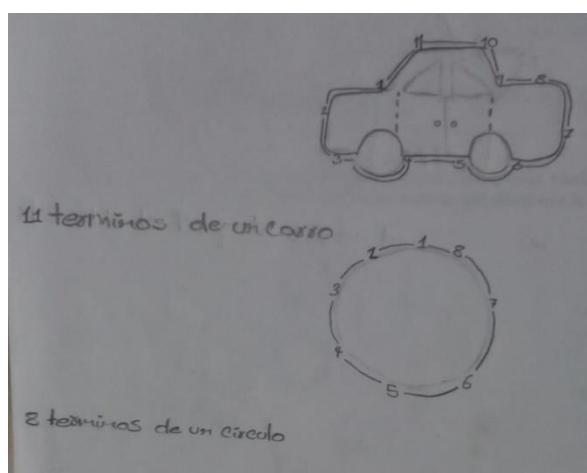
*Producción de estudiantes en la cuarta tarea de la prueba diagnóstica*



Por otra parte, un estudiante realizó dos dibujos, un carro y un círculo, alrededor de cada dibujo realizó una numeración y en la parte inferior escribió “11 términos de un carro” y “8 términos de un círculo” como se puede observar en la Figura 27.

### Figura 27

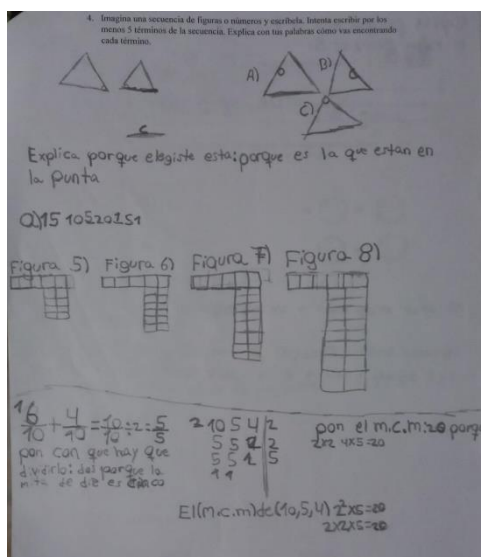
*Producción de un estudiante en la cuarta tarea de la prueba diagnóstica*



Se tiene el caso particular de un participante que realizó varias producciones en esta sección, en primer lugar, elaboró un grupo de figuras para replicar la primera tarea, en una segunda parte construyó una secuencia de números como se puede observar en la Figura 28. Además, construyó una secuencia figural que comienza con el término 5 y termina en el 8, como si fuera la continuación del inciso b) de la tarea 2. Por último, realizó unas operaciones de suma de números fraccionarios y terminó encontrando el mínimo común múltiplo entre 10, 5 y 4.

### Figura 28

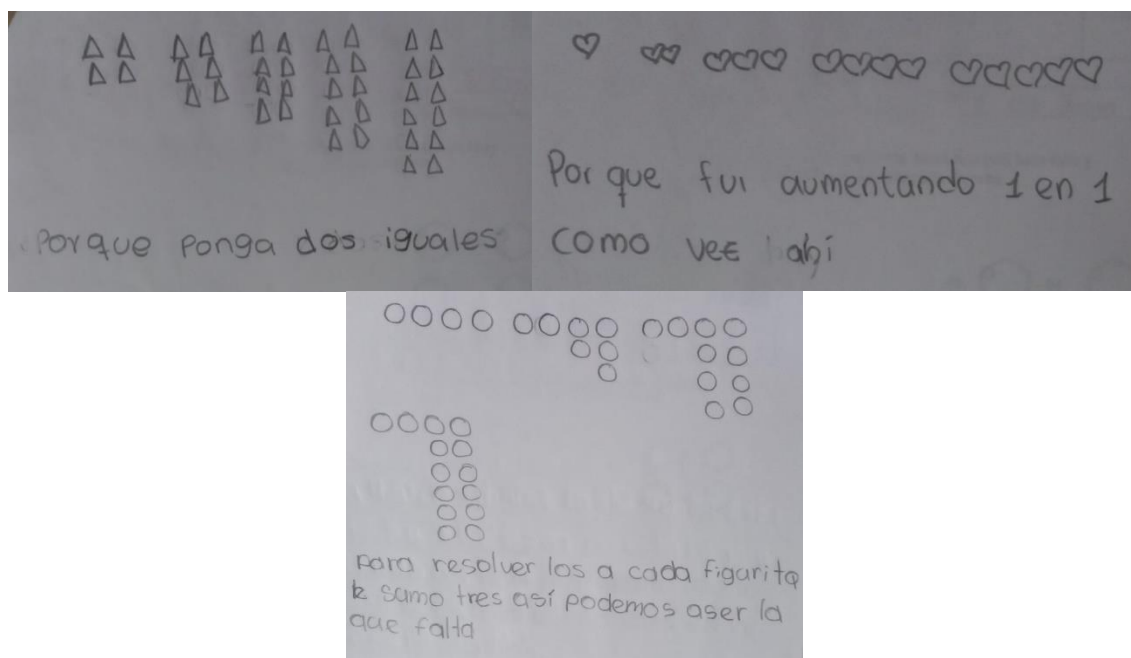
*Producción de un estudiante en la cuarta tarea de la prueba diagnóstica*



En contraposición, 7 estudiantes decidieron realizar secuencias figurales sin apoyo tabular, presentando ideas como las que se pueden observar en la Figura 29.

### Figura 29

*Secuencias figurales creadas por estudiantes en la cuarta tarea de la prueba diagnóstica*

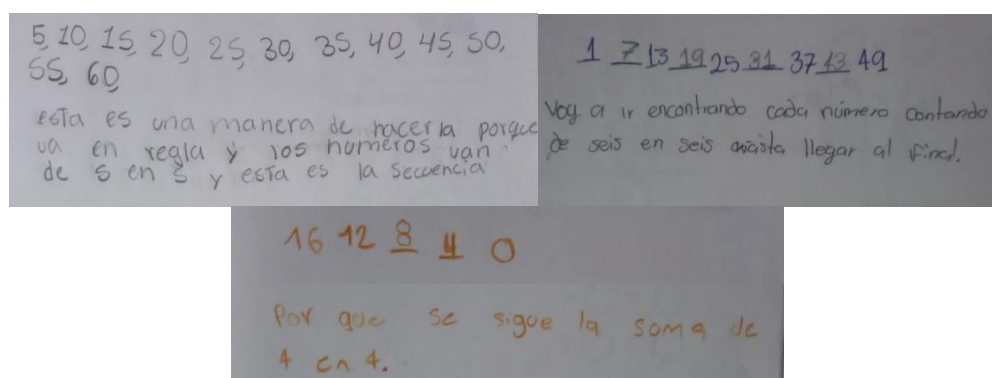


*Nota.* Se presentan las producciones de tres estudiantes.

Por otro lado, cinco estudiantes decidieron realizar secuencias numéricas sin apoyo tabular, algunas de estas secuencias se pueden visualizar en la Figura 30.

### Figura 30



*Secuencias numéricas creadas por estudiantes en la cuarta tarea de la prueba diagnóstica*

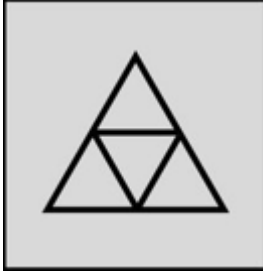


*Nota.* Se presentan las producciones de tres estudiantes.

**Actividad 1.** A continuación, se presentan las respuestas que todos los estudiantes dieron en la primera actividad, esto con el fin de mostrar un panorama de las justificaciones que fueron utilizadas por los participantes y visualizar los procesos de Descripción y Representación.


*Primera tarea.***Tabla 4***Respuestas de los participantes en la primera tarea de la actividad 1.*

| Estudiantes | Imagen a discriminar  | Justificación  |
|-------------|---|--|
|             | Superior izquierda  |  |
| G1          |    | Sin justificación.   |
| G2          |   | Está formada por rayas verticales.   |
| G3          |   | Porque me apunta hacia otro lado.  |
| *G4         |   | Porque las rallas son diferentes a las demás a las figuras y tienen las rallas derechas a las demás. |
| *G5         |   | Porque tiene muchas rayas adentro.   |
| *G6         |   | Tiene rayas en los lados y es diferente en la forma de la mita.                                      |
| G7          |   | Sin justificación.   |
| *G8         |   | Sin justificación.   |
| *G9         |   | Porque tiene rayas horizontales.   |
|             | Superior Derecha  |  |
| G1          |  | Sin justificación.   |
| G2          |   | Es diferente porque esta tiene diferentes rayas y todos también.                                     |
| G3          |   | Porque tiene tres unos.  |
| *G4         |   | Porque tiene diferente forma dentro del triángulo.   |
| *G5         |   | Porque tiene muchas rayas adentro y porque no tiene forma lo de adentro.                             |
| *G6         |   | Todas son iguales pero las rayas de adentro no coinciden con las otras.                              |
| G7          |   | Porque no tiene triangulitos en las puntas.  |
| *G8         |   | Porque tiene más líneas.   |
| *G9         |   | Porque dentro de si tiene figuras de diferente posición.   |
|             | Inferior Izquierda  |  |
| G1          |   | Sin justificación.   |
| G2          |   | Es diferente porque tiene triángulos adentro.  |
| G3          |   | porque tiene un triángulo adentro.   |

|     |   |   |
|-----|---|---|
| *G4 |  | porque tiene cuatro triángulos en el medio.   |
| *G5 |   | porque tiene un cuadro adentro pequeño.   |
| *G6 |   | Es diferente porque la figura del centro es triangulo mientras que en las otras no. |
| G7  |   | Sin justificar.   |
| *G8 |   | Porque está llena de triángulos.  |
| *G9 |   | Porque tiene muchas más figuras dentro.   |

---

Inferior Derecha

|     |  |   |
|-----|--|---|
| G1  |  | Porque esta al rebes y porque tiene una figura diferente y porque las otras están al derecho.                                     |
| G2  |  | Es diferente porque está parada en una punta y todas están normales.  |
| G3  |  | Porque está apuntando hacia abajo y las otras arriba.   |
| *G4 |  | Porque esta figura esta de para abajo y las demás están de para arriba.   |
| *G5 |  | porque esa figura esta al rebes.  |
| *G6 |  | Porque esta volteada, porque para mí es distinto por la forma y las líneas, es diferente por la forma de adentro y esta volteada. |
| G7  |  | Sin justificar.   |
| *G8 |  | Esta al rebes y todas están al derecho.   |
| *G9 |  | No pertenece ya que no tiene la misma posición que el resto no esta boca abajo.   |



---

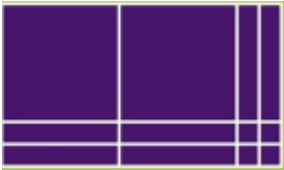

*Nota.* Esta tabla muestra las respuestas que los participantes escribieron en el software de GeoGebra.

En la Tabla 4, se puede ver cómo algunos estudiantes presentan argumentos detallados respecto a las características que pudieron visualizar en cada una de las figuras de la primera tarea, aunque varios de ellos se limitaron a escribir solo una característica o no vieron necesario ser más específicos con los argumentos utilizados.

***Segunda Tarea.***

**Tabla 5***Respuestas de los participantes en la segunda tarea de la actividad 1.*

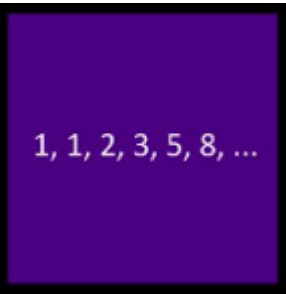

| Estudiantes | Imagen a discriminar  | Justificación   |
|-------------|---|---|
|             | Superior izquierda  |   |
| G1          |    | Sin justificar.   |
| G2          |   | Porque tiene rayas verticales y horizontales porque es más pequeñas que los demás.        |
| G3          |   | Porque esta pequeña y solo tiene dos rallas.  |
| *G4         |   | Porque es más pequeña de las demás.   |
| *G5         |   | Porque es más pequeña que otras y tiene menos líneas adentro y es más altas que las otras |
| *G6         |   | No pertenece al grupo porque es muy pequeño tiene 2 rayas por arriba y abajo en pequeño.  |
| G7          |   | Porque es más pequeña que las otras.  |
| *G8         |   | Es más pequeña que las otras.   |
| *G9         |   | Porque tiene diferente tamaño.  |
|             | Superior Derecha  |   |
| G1          |  | Sin justificar.   |
| G2          |   | Porque es mediano y los demás son pequeños y grandes.                                     |
| G3          |   | Porque tiene las cuatro rallas y las otra no.   |
| *G4         |   | Porque solo tiene una raya vertical.  |
| *G5         |   | Porque tiene 4 líneas paradas y las otras solo 3.   |
| *G6         |   | no pertenece porque tiene 4 líneas y es diferentes que las demás tiene más rayas.         |
| G7          |   | Porque es la única figura que tiene una línea horizontal.                                 |
| *G8         |   | Todas tienen dos cuadros y esta una.  |
| *G9         |   | Porque tiene menos rayas.   |
|             | Inferior Izquierda  |   |
| G1          |   | Porque tiene sus líneas separadas y es más ancha.   |


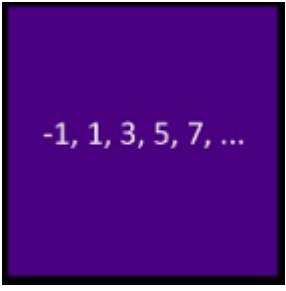
|                  |   |   |  |
|------------------|---|---|--|
| G2               |   | Porque es más grande que las demás y tienen rayas diferentes.   |  |
| G3               |   | Porque no tiene las líneas juntas.  |  |
| *G4              |  | Porque es más grande que las demás porque las demás son pequeñas y esa es grande.                               |  |
| *G5              |   | Porque esta es un poco más grande que las otras y más ancha.  |  |
| *G6              |   | Pues para mí es diferente porque es más grande que las demás y el lado izquierdo es más pequeño que el derecho. |  |
| G7               |   | Porque no tiene rayas pegadas como las otras.   |  |
| *G8              |   | Es más larga que las demás.   |  |
| *G9              |   | Porque tiene más rayas.   |  |
| Inferior Derecha |   |   |  |
| G1               |   |   | Porque esta tiene tres líneas y las otras tienen dos y cuatro. |
| G2               |   |                              | Porque es cuadrado y medio pequeño.                            |
| G3               | Porque es un poco pequeño y tiene tres rayas.                                     |   |  |
| *G4              | Porque tiene más rallas que las demás.  |   |  |
| *G5              | porque no es grande ni pequeño y por eso no se parece a las otras.                |   |  |
| *G6              | No pertenece al grupo porque tiene 3 rayas.                                       |   |  |
| G7               | Sin justificación.  |   |  |
| *G8              | porque tiene más cuadros.   |   |  |
| *G9              | Porque tiene más cuadros diminutos.   |   |  |

*Nota.* Esta tabla muestra las respuestas que los participantes escribieron en el software de GeoGebra.

En la Tabla 5 se puede observar que pocos grupos de trabajo dejaron algunas figuras sin discriminar, esto nos da a entender que el proceso de devolución que se realizó por parte de los investigadores tuvo un impacto positivo, dado que se estaba logrando el objetivo de la actividad que era buscar al menos una característica para discriminar cada imagen del grupo y no solamente una.

*Tercera Tarea.***Tabla 6***Respuestas de los participantes en la tercera tarea de la actividad 1.*

| Estudiantes | Imagen a discriminar  | Justificación  |
|-------------|---|--|
|             | Superior izquierda  |  |
| G1          |    | Sin justificar.  |
| G2          |   | Es diferente porque es más grande y tiene líneas muy anchas.   |
| G3          |   | Porque tiene casi todos números impares y solo un par.         |
| *G4         |   | Porque esta repetido el 1 en otras figuras.                    |
| *G5         |   | Porque no va ni en una ni en dos y ni en tres.                 |
| *G6         |   | Sin justificación.   |
| G7          |   | Porque no tienen un orden.                                     |
| *G8         |   | Tiene menos que 10.  |
| *G9         |   | Porque tiene números menores.                                  |
|             | Superior Derecha  |  |
| G1          |  | Sin justificación.   |
| G2          |   | Porque tienen números 2 4 8 y 16 y muchos más.                 |
| G3          |   | Porque tiene todos los numero pares.                           |
| *G4         |   | Porque son números pares.                                      |
| *G5         |   | Porque 8 y 16 no se suman de a dos.                            |
| *G6         |   | Sin justificación.   |
| G7          |   | Porque no sigue una secuencia.                                 |
| *G8         |   | Tiene menos que 20.  |
| *G9         |   | Porque tiene menor cantidad.                                   |
|             | Inferior Izquierda  |  |
| G1          |   | Porque el 97 debe estar de primero.                            |
| G2          |   | Es muy diferentes los demás porque tienen números más grandes. |
| G3          |   | Porque tiene números más altos que los demás.                  |

|                  |  |   |
|------------------|--|---|
| *G4              |   | Porque en esta secuencia solo están números grandes no hay números pequeños como el 1 o el 2.               |
| *G5              |  | Porque el 98 y 97 debería estar primero que el 100 y 99 para que fuera correcta y el 99 primero que el 100. |
| *G6              |  | Tiene números altos, pero van bajando los números no pertenece al grupo.                                    |
| G7               |  | Sin justificación.  |
| *G8              |  | Todos tienen números menores a 50.  |
| *G9              |  | Porque tiene números de mayor cantidad.   |
| Inferior Derecha |  |   |
| G1               |  | Porque tiene un menos.  |
| G2               |  | El cuadro es diferente porque las líneas son más pequeñas que los demás                                     |
| G3               |  | Porque tiene un menos y las otras no  |
| *G4              |  | porque tiene un menos en el principio y los números van en 2 en 2.  |
| *G5              |  | Porque se está restando y por eso no es igual que las otras porque las otras no se restan.                  |
| *G6              |  | Pues es diferente a los diferentes números como los anteriores son de más números o de menos o más.         |
| G7               |  | Porque se repite los dos números.   |
| *G8              |  | Tiene el símbolo menos.   |
| *G9              |  | Porque son menos números o sea que no tiene número o que le hace falta.                                     |

*Nota.* Esta tabla muestra las respuestas que los participantes escribieron en el software de GeoGebra.



En la Tabla 6 se muestra una particularidad, dos grupos discriminaron la imagen que estaba ubicada en la parte inferior izquierda escribiendo una característica que da a entender



que no conciben la secuencia que se presenta en la imagen como una secuencia decreciente, para ellos tiene que ser creciente.

**Cuarta Tarea.**

**Tabla 7**

*Respuestas de los participantes en la cuarta tarea de la actividad 1.*

| Estudiantes | Imagen a discriminar  | Justificación  |
|-------------|---|--|
|             | Superior izquierda  |  |
| G1          |   | Sin justificar.  |
| G2          |   | Es diferente porque tienen 5 9 13 17 21 y más números.                     |
| G3          |   | Porque tiene números impares.  |
| *G4         |   | Sin justificar.  |
| *G5         |   | Porque suma y no se resta ni multiplica para ser igual que las otras.      |
| *G6         |   | No pertenece al grupo porque ya sabiendo el número.                        |
| G7          |   | Sin justificación.   |
| *G8         |   | tiene menos que 22.  |
| *G9         |   | Porque son los números menores.  |
|             |   | Superior Derecha   |
| G1          |  | Sin justificación.   |
| G2          |   | Es diferente porque es un cuadrado diferente porque es un cuadrado mediano |
| G3          |   | Porque tiene números que se pasan del cien.                                |
| *G4         |   | Sin justificar.  |
| *G5         |   | Porque esta está multiplicando y las otros sumando y restando.             |
| *G6         |   | Pues es la mismo, pero todos los números son como es 10 13 17 14.          |
| G7          |   | Porque no sigue una secuencia.   |
| *G8         |   | Todos tienen números menores a 30.   |

|     | Inferior Izquierda  |   |
|-----|---|---|
| *G9 |   | Porque tiene mayor cantidad.  |
| G1  |    | Sin justificación.  |
| G2  |   | Este es diferente porque tienen números muchos mayores muchos menores.                  |
| G3  |   | porque tiene números que se pasan a los diez.   |
| *G4 |   | Sin justificación.  |
| *G5 |   | Porque comienza en 10 y las otras en 5.   |
| *G6 |   | Son diferentes números.   |
| G7  |   | Sin justificación.  |
| *G8 |   | Tiene menos que 25.   |
| *G9 |   | Porque tiene casi la misma cantidad que la primera.                                     |
|     |   | Inferior Derecha  |
| G1  |  | El uno es diferente porque tiene un menos.  |
| G2  |   | Es diferente porque es un cuadrado pequeño y tienen números pequeños y números grandes. |
| G3  |   | Porque tiene números negativos.   |
| *G4 |   | Sin justificación.  |
| *G5 |   | Porque si esta fuera sumando fuera igual que otras dos.                                 |
| *G6 |   | Acá los numero son más pequeños.  |
| G7  |   | Porque los números no tienen un orden.  |
| *G8 |   | tiene números normales y números con el símbolo menos.                                  |
| *G9 |   | Porque son los menores.   |

*Nota.* Esta tabla muestra las respuestas que los participantes escribieron en el software de GeoGebra.

En la Tabla 7 se evidencia que varios grupos dejaron sin discriminar varias imágenes, presentando un retroceso con lo expuesto en la Tabla 5.

En una primera instancia se cumplió la hipótesis que se estaba planteando, referente a que las respuestas de los estudiantes iban a ser poco detalladas y que simplemente iban a

expresar un primer detalle de las imágenes. Mediante el proceso de devolución que se presentó por parte de los investigadores, se planteaban preguntas para incentivar que los estudiantes escribieran más de una justificación para una imagen y también buscar una justificación para las otras imágenes. Uno de los principales problemas que se detectan en la revisión de las producciones por parte de los estudiantes es la coherencia y cohesión textual en los argumentos que utilizaron para discriminar las imágenes, pues algunas ideas se entienden, pero no presentan relación entre palabras de una misma oración o la imagen a la que se refieren.

**Actividad 2.** De aquí en adelante se presentan las respuestas de cinco grupos, dado que las producciones realizadas por estos participantes fueron de interés para los investigadores. Los grupos seleccionados son los que en las Tablas 4, 5, 6 y 7 están acompañados de un \* y que ahora en adelante serán mencionados como NG1, NG2, NG3, NG4 y NG5.

**Primera tarea.** Preguntas del segundo momento:

1- ¿Con cuántos cuadros se puede formar la figura correspondiente a la posición 9?

2- ¿Con cuántos cuadros se puede formar la figura correspondiente a la posición 100?

3- Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta

anterior.

4-Escribe una carta a un compañero que no fue a clase, donde le expliques la forma de solucionar el problema.

### Tabla 8

*Respuestas de algunos estudiantes en la primera tarea de la actividad 2.*

| Estudiantes | ¿Completo la primera secuencia? | Preguntas del segundo momento | Respuestas      |
|-------------|---------------------------------|-------------------------------|-----------------|
| NG1         |                                 | 1                             | Con 17 cuadros. |

|     |                |   |  |
|-----|----------------|---|--|
|     | Completaron    | 2 | . . . con (no continuaron escribiendo).  |
|     | la secuencia y | 3 | Sin responder.   |
|     | verificaron la | 4 | Sin responder.   |
|     | respuesta con  |   |  |
|     | el applet.     |   |  |
| NG2 | Completaron    | 1 | 17 cuadros.  |
|     | la secuencia y | 2 | Sin responder.   |
|     | verificaron la | 3 | Sin responder.   |
|     | respuesta con  | 4 | Sin responder.   |
|     | el applet.     |   |  |
| NG3 | Completaron    | 1 | Se puede formar con 17 cuadros por que se le van sumando 2 en 2.   |
|     | la secuencia y | 2 | se puede formar con 199 cuadros.   |
|     | verificaron la | 3 | Haciendo un analice, de pensamiento ya que cada número de cuadros no tienen mitad. así que daría como resultado 199 cuadros ya que no tiene mitad igual al resto, por eso es la respuesta correcta.  |
|     | respuesta con  | 4 | Bueno yo se lo explicaría diciéndole...que a cada fase se le va sumando de a 2 y que los cuadros no tienen mitad de número. Por ejemplo, la fase 1 la cantidad de cuadrados es 1 que no tiene mitad así sucede con la fase 2,3,4,5,6,7,8,9, etc. |
|     | el applet.     |   | El resultado lo encontramos multiplicando 2 por 100 pero tiene mitad y la mitad no es necesaria y le restamos 1 y dio 199.   |
| NG4 | Completaron    | 1 | 17 cuadro para poder formar las 9 posiciones porque a 9 le sumo 9.   |
|     | la secuencia y | 2 | 190 cuadros para armar 100 posiciones porque le multiplico de 10 en 10.  |
|     | verificaron la | 3 | Sumando y multiplicando.   |
|     | respuesta con  | 4 | Sin responder.   |
|     | el applet.     |   |  |
| NG5 | Completaron    | 1 | Con 7 cuadros.   |
|     | la secuencia y | 2 | Con 117 cuadros.   |

|   |        |  |
|---|--------|--|
| verificaron la<br>respuesta con<br>el applet. | 3<br>4 | Sume y multiplique estos números como 90,<br>10 y 17 para que nos dé el resultado.<br>Sin responder. |
|---|--------|--|

*Nota.* Esta tabla muestra las respuestas que los participantes escribieron en el software de GeoGebra, por lo tanto, no se realizaron modificaciones en la idea de las justificaciones.

En la Tabla 8, se muestra que cada grupo de estudiantes logra construir el término cuatro de la secuencia. Además, todos los grupos contestaron correctamente la pregunta número uno que hacía referencia a una generalización cercana. En cuanto a la pregunta número dos, que hacía referencia a una generalización lejana, solo un grupo contestó correctamente. Así mismo, ese grupo fue el único que se animó a responder la pregunta número cuatro.

**Segunda Tarea.** Preguntas del segundo momento:

1- ¿Cuántos círculos tiene la figura 15?

2- ¿Cuántos círculos tiene la figura 100?

3- Explique la forma como procedió para encontrar la respuesta de la pregunta anterior.

4- Escribe una carta a un compañero que no fue a clase donde le expliques la forma de solucionar el problema

### Tabla 9

*Respuestas de algunos estudiantes en la segunda tarea de la actividad 2.*

| Estudiantes | ¿Completo la<br>segunda secuencia?   | Preguntas<br>del segundo<br>momento | Respuestas  |
|-------------|--|-------------------------------------|---|
| NG1         | Completaron los dos<br>términos de la<br>secuencia y<br>verificaron en el<br>software. | 1<br>2                              | Abajo tendría 15 arriba 14 lo sumamos<br>$15+14 = 29$ y lo encontré con la figura 14.<br>Abajo 100 y arriba 99 y lo sumo<br>$100+99=199$ da este resultado igual lo<br>encontré con la figura 99. |

|     |  |   |   |
|-----|--|---|---|
|     |  | 3 | Pues la figura 15 la encontré con la figura 14, la 14 tiene 13 arriba entonces la 15 tiene 14 arriba y la figura 100 la encontré con la 99 la 99 tiene 98 arriba y 100 abajo la figura por ejemplo 4 tiene 4 abajo y 3 arriba el número de figuras coinciden con la parte de abajo. |
|     |  | 4 | Lo que tiene que hacer es esto, porque se perdió la clase y es más fácil el número de figuras es igual a lo de abajo y arriba solo se le resta 1.   |
| NG2 | Completaron los dos términos de la secuencia y verificaron en el software. | 1 | 29 porque tiene 15 abajo y 14 arriba.   |
|     |  | 2 | 199 porque tiene 100 abajo y 99 arriba  |
|     |  | 3 | Sumando lo de arriba y los de abajo.  |
|     |  | 4 | En la figura uno hay un círculo y en la figura dos hay dos círculos abajo y uno arriba entonces va sumando de a uno abajo y de a uno de arriba y en torre.  |
| NG3 | Completaron los dos términos de la secuencia y verificaron en el software. | 1 | Abajo se le colocan 15 y arriba 14.   |
|     |  | 2 | Tiene 199.  |
|     |  | 3 | Pues viendo que las figuras del 1 al 4 se le van sumando de a 2. y también porque son números impares.  |
|     |  | 4 | Pues que mire cada figura y la analicé y que haga las figuras con respecto a las demás.   |
| NG4 | Completaron los dos términos de la secuencia y verificaron en el software. | 1 | 29 círculos tienen 15 abajo y 14 arriba porque en la figura 6 tiene lo mismo 6 y la figura 15 pues tiene 15 abajo y arriba se le quita uno y así sacamos la figura 15.  |
|     |  | 2 | La figura 100 tienen 199 círculos 100 abajo y arriba 99 porque en las anteriores figura como la 6 tienen 6 círculos abajo y le quita uno arriba y así sería 5 y siguiendo el ejemplo de 6 sacamos el resultado de la 100.   |

|     |                              |   |  |
|-----|------------------------------|---|--|
|     |                              | 3 | Pues nos guiamos en la 6 y así sacamos el resultado de 15 y 100.   |
|     |                              | 4 | querida María Paula, esto se resuelve con el ejemplo de figura 1 2 3 4 5 6 y así podemos resolver cualquier figura que te pida como la 15 o la 100 con los ejemplos 1 2 3 4 5 6. |
| NG5 | No completaron la secuencia. | 1 | Sin responder.   |
|     |                              | 2 | Sin responder.   |
|     |                              | 3 | Sin responder.   |
|     |                              | 4 | Sin responder.   |

---

*Nota.* Esta tabla muestra las respuestas que los participantes escribieron en el software de GeoGebra, por lo tanto, no se realizaron modificaciones en la idea de las justificaciones.

En la Tabla 9, se ve que cuatro de los cinco grupos, construyeron los dos términos que se estaban solicitando y verificaron que la respuesta era correcta. Además, todos los grupos que contestaron la primera pregunta coincidieron en que la respuesta es 29 círculos, al igual en la pregunta dos, solamente un grupo de los estudiantes que contestaron respondió de manera incorrecta, pero el razonamiento que usaron es correcto. En cuanto a las preguntas tres y cuatro, un solo grupo no presentó las respuestas.

***Tercera tarea.*** Preguntas segundo momento:

1- ¿Cuántas sillas podemos colocar de esta forma alrededor de 5 mesas? ¿y alrededor de 6 mesas?

2-En el salón de clase se han colocado 18 mesas y sus correspondientes sillas. ¿Cuántos estudiantes pueden sentarse? Explica cómo has encontrado el resultado.

3-Si en un cumpleaños han invitado a 42 niños, ¿Cuántas mesas necesitaremos juntas en fila? Explica cómo has encontrado el resultado.

4-Explica con tus palabras una regla que relacione el número de mesas y el número de sillas.

**Tabla 10***Respuestas de algunos estudiantes en la tercera tarea de la actividad 2.*

| <b>Estudiantes</b> | <b>¿Completo la tercera secuencia?</b>         | <b>Preguntas del segundo momento</b> | <b>Respuestas</b>  |
|--------------------|--|--------------------------------------|--|
| NG1                | Completo la secuencia y verificó en el applet. | 1                                    | 12 sillas y a 16 22.   |
|                    |  | 2                                    | Pues $18 + 18$ ya que son 18 mesas arriba y abajo $18 + 18 = 36$ sumando arriba y abajo y a los lados da 38.         |
|                    |  | 3                                    | Se necesitan 42 ya que arriba ay 42 sillas pues mesas 42 no lo sé explicar muy bien, pero creo que se entiende.      |
|                    |  | 4                                    | Que arriba y abajo son el mismo número y de mesas a igual las sillas a los lados se suman con las de arriba y abajo. |
| NG2                | Completo la secuencia y verificó en el applet. | 1                                    | En 5 mesas podemos colocar 12 sillas y alrededor 6 mesas es 14 sillas.   |
|                    |  | 2                                    | 34 sillas se encuentran sumando $18 + 18 + 2$ .  |
|                    |  | 3                                    | 42 mesas y 84 sillas porque sume lo de arriba y los de abajo y el de los lados.                                      |
|                    |  | 4                                    | Siempre tiene que sumar lo de arriba el de abajo y el de los lados.  |
| NG3                | Completo la secuencia y verificó en el applet. | 1                                    | Del 5 se le ponen 12 sillas, y de las seis 14 sillas.  |
|                    |  | 2                                    | Se pueden sentar 38 estudiantes. y encontré la respuesta sumando a los lados y arriba y abajo.                       |
|                    |  | 3                                    | se necesitan 20 mesas para 42 niños. pues porque en 20 mesas hay 42 sillas.  |

|     |  |   |   |
|-----|--|---|---|
|     |  | 4 | Pues las sillas por abajo y por arriba es la misma cantidad de mesas y por los lados no. Las mesas representan el número de la figura y las sillas de abajo le sigue a las mesas y las de arriba igual.                           |
| NG4 | Completo la secuencia y verificó en el applet. | 1 | Al rededor de 5 mesas podemos colocar 12 silla y alrededor de 6 mesas podemos colocar 14 sillas.  |
|     |  | 2 | Hay 18 sillas disponible porque nos guiamos del resultado de la 3 porque 3 mesas y arriba tienen 3 sillas y abajo 3 sillas entonces uno sumo 18 arriba y 18 abajo y 2 a los lados porque 3 también de 2 a los lados y nos dio 38. |
|     |  | 3 | Hay que poner 20 mesas para que de 48 porque 20 arriba y 20 abajo y 2 a los lados y así va 42.  |
|     |  | 4 | La regla es que al sumar lo de arriba lo de abajo y los de los lados y, por ejemplo, 10 mesas y las sillas serian 10 arriba y 10 abajo y 2 a los lados y el resultado es 22 porque sume 10 de arriba 10 de abajo y 2 los dados.   |
| NG5 | Completo la secuencia y verificó en el applet. | 1 | La mesa cinco tiene 12 sillas y la mesa 6 tiene 14 sillas.  |
|     |  | 2 | En el salón hay 18 mesas y 20 sillas  |
|     |  | 3 | Pues necesitan 42 mesas y sillas para el cumpleaños.  |
|     |  | 4 | Sin responder.  |

---

*Nota.* Esta tabla muestra las respuestas que los participantes escribieron en el software de GeoGebra, por lo tanto, no se realizaron modificaciones en la idea de las justificaciones.

Como se muestra en la Tabla 10, cuatro grupos contestaron correctamente la pregunta que se relaciona con la generalización cercana, solo un grupo respondió de manera incorrecta dado que contestó bien el número de sillas que van alrededor de cinco mesas, pero se equivocaron con el número de sillas que van alrededor de 6 mesas. En cuanto a la segunda pregunta, cuatro grupos contestaron correctamente, aunque uno de ellos hizo un razonamiento que lo podía llevar a la respuesta correcta, cometió errores al efectuar las operaciones. Para la pregunta número tres, sólo dos grupos contestaron de manera correcta, los otros grupos se confundieron pensando que les estaban preguntando el número de sillas para 42 mesas. Finalmente, en la última pregunta, un solo grupo no se animó a dar respuesta. Además, cada grupo completó la secuencia y lo verificó en el applet como se esperaba.

### Actividad 3.

**Primera tarea.** Secuencia de los números triangulares.

Pregunta: Explica con tus propias palabras por qué crees que esos valores son los que completan la secuencia numérica.

**Tabla 11**

*Respuestas de algunos estudiantes en la primera tarea de la Actividad 3.*

| Estudiantes | ¿Completo la primera secuencia?             | Respuestas   |
|-------------|---|--|
| NG1         | Completo la secuencia y activo la ayuda.    | Va en 1 en 1.  |
| NG2         | Completo la secuencia y activo la ayuda.    | Poque 1 más 5 da 6 más 4 da 10 más 5 da 15 más 6 da 21 más 7 da 28 y así sigue sumando hasta llegar a un millón  |
| NG3         | Completo la secuencia y no activo la ayuda. | Porque en cada número se le suma diferentes cantidades, por ejemplo, en el 1 se pasa a 3 se le suman y después del 3 pasa al 6 y del 6 al 10 se le suman 4, ósea que en cada número es diferente cantidad la que se le suma. |

|     |  |   |
|-----|--|---|
| NG4 | Completo la secuencia y activo la ayuda. | Lo encontramos porque nos dimos cuenta que la primera es el 3 porque es la mita del 6 y el 21 lo encontramos porque suma en dos en dos. |
| NG5 | Completo la secuencia y activo la ayuda. | Porque los números pueden poner diferentes números y pueden sumar como de 2 en 2 o de 3 en 3 o más números                              |

*Nota.* Esta tabla muestra las respuestas que los participantes escribieron en el software de GeoGebra, por lo tanto, no se realizaron modificaciones en la idea de las justificaciones.

En la Tabla 11, se encuentra que un solo grupo presenta una idea interesante haciendo una suma consecutiva, pero no explica de dónde obtiene los números que va sumando.

**Segunda tarea.** Secuencia de Fibonacci.

Pregunta: Explica con tus propias palabras por qué crees que esos valores son los que completan la secuencia numérica.

**Tabla 12**

*Respuestas de algunos estudiantes en la segunda tarea de la Actividad 3.*

| Estudiantes | ¿Completo la segunda secuencia?   | Respuestas   |
|-------------|---|--|
| NG1         | Completó el primer término solicitado de la secuencia, el segundo que se solicitaba no lo completó y activó la ayuda. | Se va sumando y así da el resultado de cada uno.             |
| NG2         | Completó la secuencia y activó la ayuda.  | 1 más 1 da 2 más 3 da 5 más 3 da 8 más 5 da 13 más 21 da 34. |
| NG3         | No completó la secuencia y no activó la ayuda.  | Sin responder.   |
| NG4         | No completó la secuencia y no activó la ayuda.  | Sin responder.   |
| NG5         | No completó la secuencia y no activó la ayuda.  | Sin responder.   |

*Nota.* Esta tabla muestra las respuestas que los participantes escribieron en el software de GeoGebra, por lo tanto, no se realizaron modificaciones en la idea de las justificaciones.

En la Tabla 12, un grupo comprende cómo se estructura la secuencia de Fibonacci para hallar el número que sigue, pero no explican con detalle una regla para generalizarlo.

**Tercera tarea.** Secuencia de Srinivasa Ramanujan sobre las particiones aditivas de un número.

Pregunta: Explica con tus propias palabras por qué crees que esos valores son los que completan la secuencia numérica.

**Tabla 13**

*Respuestas de algunos estudiantes en la tercera tarea de la Actividad 3.*

| Estudiantes | ¿Completo la segunda secuencia? | Respuestas  |
|-------------|---------------------------------|---|
| NG1         | Completó la secuencia.          | Van aumentando y así da el resultado o sea suma.                      |
| NG2         | Completó la secuencia.          | 1 + 1 da 2 + 3 da 5 más 2 da 7 y más 4 da 11 más 4 da 15 más 7 da 22. |
| NG3         | No completó la secuencia.       | Sin justificación.  |
| NG4         | No completó la secuencia.       | Sin justificación.  |
| NG5         | No completó la secuencia.       | Sin justificación.  |

*Nota.* Esta tabla muestra las respuestas que los participantes escribieron en el software de GeoGebra, por lo tanto, no se realizaron modificaciones en la idea de las justificaciones.

En la Tabla 13, sólo dos grupos intentaron dar una respuesta a la pregunta, pero no pudieron llegar a algo en concreto.

En cada una de las secuencias numéricas se busca que los estudiantes expresen la forma como entienden el orden de la secuencia, y aunque no se esperaba obtener solo respuestas correctas se logró observar resultados positivos. Por otra parte, se esperaba que los estudiantes completaran la secuencia de cada tarea ya que los applets presentan una

retroacción que permite validar con rapidez las acciones realizadas, sin embargo, en la mayoría de los casos no fue así. Además, en las dos primeras tareas se esperaba que los estudiantes utilizaran las ayudas diseñadas en los applets, pero no todos lo hicieron.

#### ***4.1.4. Análisis a Posteriori y Evaluación***

Esta fase se basa en el conjunto de datos recogidos en la experimentación, es decir, de las observaciones realizadas en las producciones de los estudiantes en el desarrollo de las cuatro actividades. Se realiza un contraste entre lo planteado en el análisis a priori y lo que realmente ocurre en la experimentación, para observar si las hipótesis planteadas fueron correctas. Así, Artigue (1995) citado en Pérez (2017) especifica que “La confrontación entre el análisis a priori y el análisis a posteriori es entonces lo que constituye la validación de la ingeniería didáctica y determina los resultados de investigación”.

La recolección de los datos se llevó a cabo con la implementación de la secuencia didáctica en estudiantes de quinto grado del Instituto Integrado Jorge Eliecer Gaitán de Bucaramanga (Santander-Colombia); es preciso aclarar que estos alumnos no habían interactuado con el software de GeoGebra.

Durante la experimentación se realizaron videograbaciones de las explicaciones y acciones que hicieron los estudiantes en el software. Las respuestas que ofrecen mayor información fueron las dadas por cinco parejas de estudiantes, por lo que el análisis se enfocó en sus producciones. De ahora en adelante, las situaciones que se registraron en videograbaciones se presentan como breves transcripciones denominadas episodios.

**Actividad 1.** A continuación, se presenta algunos episodios que se dieron durante la primera tarea de la secuencia didáctica y posteriormente el análisis respectivo.

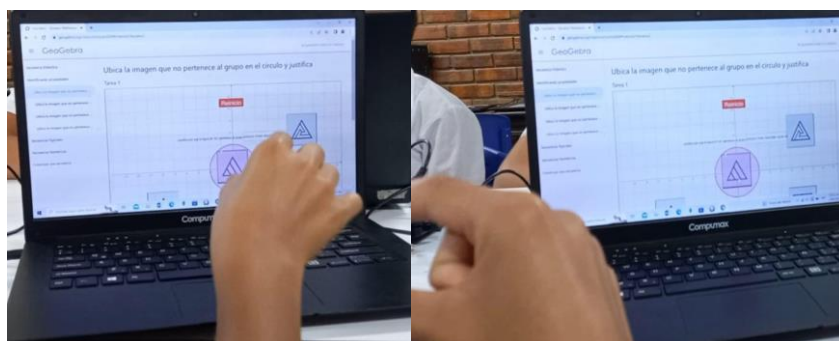
#### ***Episodio 1.***

[001] Profesor: Arrastra la figura, (los estudiantes mueven la figura superior izquierda al centro del círculo). ¡Perfecto! ¿qué dice la justificación?

- [002] Grupo NG3: Tiene muchas rayas adentro.
- [003] Profesor: ¿Cree que por otra razón no pertenezca? Porque ahí puede seguir escribiendo, ahí pueden escribir muchas cosas. Esa es una justificación que usted encontró, ¿puede justificarla de otra manera? ¿Puede escribir otra razón por la que no pertenezca al grupo?
- [004] Grupo NG3: (señalando la figura con la mano) Porque se ve como si se hiciera un triángulo y dos rectángulos.
- [005] Profesor: ¿Dos rectángulos?
- [006] Grupo NG3: Bueno, las cosas esas así (realizando una figura con los dedos).
- [007] Profesor: Puedes escribirlo si es tu justificación, pero ten en cuenta cuales son las características de un rectángulo ¿Listo?

### Figura 31

*El grupo NG3 trabajando en la Actividad 1.*



*Nota.* Se asignó un computador por grupo y los estudiantes se iban turnando el manejo de este.

Al comparar la respuesta escrita de la Tabla 4, y la respuesta expresada verbalmente en el Episodio 1 por el grupo NG3, se destaca la palabra “rayas”, en lo escrito hacen mención de “rayas horizontales” y en la parte verbal mencionan “muchas rayas adentro”. Aunque las dos respuestas no parecen tener mucha similitud, por lo expresado con gestos físicos se entiende que se refieren a los tres segmentos diagonales que están dentro del triángulo. Además, con el proceso de devolución que se evidencia en las líneas tres, cinco y siete del Episodio 1 se busca que el grupo de estudiantes se apropien del problema y expresen otra

justificación, o refuercen la escrita, para asegurar que esa figura no pertenece al grupo. Aunque se consiguió que expresaran verbalmente una nueva idea, el grupo NG3 dejó su respuesta escrita sin agregar esas ideas. Como se esperaba en el análisis a priori, esta primera respuesta parece ser una simple observación que se realizó después de un análisis poco detallado sobre todo el conjunto de figuras. Este grupo no profundizó sobre la característica que está generando en la figura que los segmentos que mencionan están en esa forma. Esto puede evidenciar que el proceso de Descripción está poco desarrollado, lo cual conlleva a que el proceso de Representación tampoco se desarrolle correctamente. Sin embargo, con lo expresado oralmente, los estudiantes intentan demostrar que las figuras que se forman internamente en el triángulo, debido a los segmentos diagonales, tienen características diferentes a las de las demás figuras. Esa identificación de elementos que hacen algo diferente, identificando qué características se mantienen y cuáles no, son evidencias de que se está desarrollando el pensamiento algebraico según lo definido en el análisis preliminar.

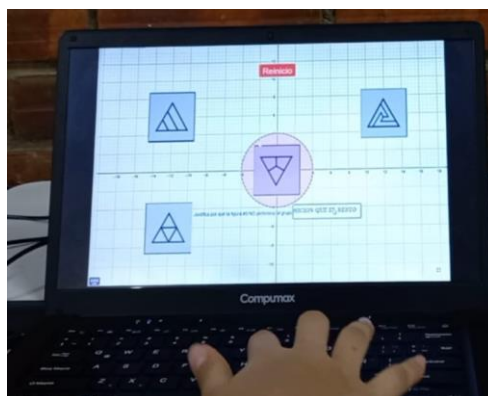
A continuación, se narra y analiza otro momento presentado con el mismo grupo en la primera tarea.

### ***Episodio 2.***

- [001] Profesor:           ¿Cuál era la justificación que decía?
- [002] Grupo NG3:        No pertenece ya que no tiene la misma posición que el resto.
- [003] Profesor:           ¿Cuál es esa posición?
- [004] Grupo NG3:        Boca Abajo.
- [005] Profesor:           ¿Por qué no está escrita esa parte?
- [006] Grupo NG3:        (escribe en el teclado para completar la respuesta).

**Figura 32**

*El grupo NG3 desarrollando la primera tarea.*



Al comparar la respuesta escrita en la Tabla 4 y la respuesta verbal en el Episodio 2 del grupo NG3, se puede ver cómo el grupo de trabajo, después de la intervención del profesor, intenta agregar más ideas a su justificación escrita del por qué la figura no pertenece al grupo, y de esa forma muestra el proceso de Representación en este caso escrita. En las líneas dos y cuatro del Episodio 2, se observa que el proceso de Descripción toma importancia al intentar expresar la idea de que la figura no tiene el mismo punto de apoyo que las demás. Esto es una evidencia de cómo los estudiantes según Zapatera (2018) toman una propiedad observada en un número limitado de casos y lo establecen como una pauta general de comportamiento, siendo un proceso fundamental en la generalización y de esa forma contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico.

A continuación, se describe y analiza los procedimientos realizados por el grupo NG5 en la primera tarea de la actividad 1.

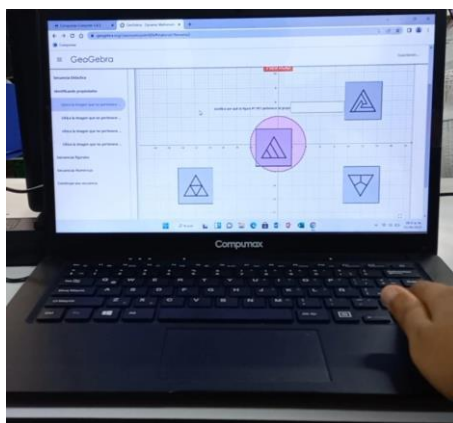
***Episodio 3.***

- |                  |  |
|------------------|--|
| [001] Profesor:  | Esa justificación ¿qué dice?   |
| [002] Grupo NG5: | Tiene diferente forma dentro del triángulo.  |
| [003] Profesor:  | Perfecto, oprima el botón reinicio y lleve otra figura al grupo.   |
| [004] Grupo NG5: | (Selecciona la imagen ubicada en la parte superior izquierda (figura 28) y la lleva dentro del círculo). |

- [005] Profesor: Esa no está justificada, ¿esa imagen pertenece al grupo o tiene alguna característica que no la deje pertenecer al grupo?
- [006] Grupo NG5: Si tiene una característica.
- [007] Profesor: ¿Cuál sería?
- [008] Grupo NG5: Tiene diferente forma de las otras.
- [009] Profesor: Pero esa se parece a la justificación anterior.
- [010] Grupo NG5: Si, pero podemos escribir otra cosa.

### Figura 33

*El grupo NG5 desarrollando la primera tarea.*



En las líneas dos y ocho del Episodio 3, se observa que el grupo no logra expresar en detalle la característica principal que identifican para diferenciar una figura de las otras, simplemente escriben una característica que se acomoda a cualquier figura de la tarea. Aunque los estudiantes tenían claridad en sus mentes sobre características más específicas de cómo se diferencian las figuras internas de cada triángulo de la tarea, no lograron comunicar esas ideas. Las afirmaciones anteriores demuestran que el grupo no logra desarrollar el proceso de Descripción ni de Representación, por lo que no es posible para estos estudiantes formular una generalización. Además, que no se cumple con lo que se espera de un estudiante de ese año escolar según el MEN (2006) con respecto al pensamiento algebraico.

En términos generales, se cumplieron la mayoría de situaciones esperadas en el análisis a priori. El trabajo en equipo hizo que los estudiantes compartieran entre sí sus ideas para al final escribir una respuesta aprobada por todos los miembros del grupo, lo cual

favoreció los procesos de Descripción y Representación. Aunque el diseño del applet fue llamativo para los estudiantes y facilitó el manejo de toda la actividad, debido a lo similar del proceso que se debe hacer para responder cada tarea, en la tercera y última tarea los estudiantes perdieron el foco de atención y querían pasar directamente a la actividad 2. Finalmente, cabe resaltar que no se presentó en un ningún grupo de estudiantes el proceso de Predicción como se esperaba.

**Actividad 2.** A continuación, se presenta una breve descripción de algunas situaciones que se dieron durante la implementación de las tres tareas de la actividad 2 y posteriormente el análisis respectivo.

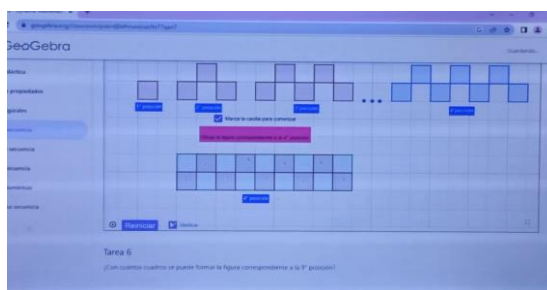
#### *Episodio 4.*

- [001] Profesor: ¿Esa es la figura de la posición cuatro?
- [002] Grupo NG2: Si.
- [003] Profesor: ¿Seguro?
- [004] Grupo NG2: Si, porque todas tienen el patrón que va de arriba hacia abajo.
- [005] Profesor: Listo, la posición de los cuadrados es la correcta porque así van todos, bien. Pero ¿es la cantidad adecuada de cuadrados?
- [006] Grupo NG2: Si, porque contamos uno, dos, tres y nos dio nueve y justo había nueve cuadrados.
- [007] Profesor: Espera, vamos a mirar la primera posición ¿cuántos cuadrados tiene esa posición?
- [008] Grupo NG2: Uno.
- [009] Profesor: Listo. ¿Cuántos cuadrados tiene la segunda posición?
- [010] Grupo NG2: Tres.
- [011] Profesor: ¿Cuántos cuadrados tiene la tercera posición?
- [012] Grupo NG2: Este... cinco.
- [013] Profesor: Entonces, ¿cuántos cuadrados debería tener la cuarta?
- [014] Grupo NG2: Entonces, serían cinco más tres igual a ocho más... nueve.
- [015] Profesor: ¿Seguro qué son nueve?
- [016] Grupo NG2: Si, nueve.
- [017] Profesor: Ahí abajo hay un botón verificar.
- [018] Grupo NG2: (Marca la casilla verificar).
- [019] Profesor: Ahí ya se desbloqueó la figura de la posición cuatro.

- [020] Grupo NG2: Uno, dos, tres, cuatro, cinco, seis, siete.  
 [021] Profesor: Entonces, ¿lo que ustedes hicieron era lo correcto?  
 [022] Grupo NG2: No porque acá (señalando la construcción que hicieron) hay nueve.  
 [023] Profesor: Perfecto. Entonces, ¿qué van a hacer ahora?  
 [024] Grupo NG2: Reiniciarlo y volverlo hacer, pero ahora solo hasta el siete.

### Figura 34

*Verificar la respuesta.*



*Nota.* El grupo NG2 compara su respuesta con la correcta al marcar la casilla “Verificar”.

Por lo expresado en la línea cuatro y seis del Episodio 4, se identifica como el grupo NG2 percibe la forma en que se deben acomodar los cuadrados en cada término de la secuencia, promoviendo el proceso de Construcción; sin embargo, no identifica correctamente la cantidad de cuadrados que se agregan a cada término. Como se mencionó en el análisis a priori, el applet está diseñado para brindar más cuadrados de los que se necesita para construir el término que se pide, esto con el fin de que se den momentos como el del grupo NG2 donde los estudiantes deben reestructurar sus ideas y después validarlas. Cuando el grupo NG2 tuvo que cambiar sus primeras hipótesis y verificar las nuevas, se promovieron los procesos de Descripción y Construcción.

La intención en el proceso de devolución, que se muestra en las líneas siete, nueve, once y trece del Episodio 4, fue para que los estudiantes reconocieran el patrón con el cual se van agregando cuadrados en cada término de la secuencia, aun así, en la línea catorce se ve que no fue posible. Mediante el uso de la casilla “Verificar” se invita a los estudiantes a corroborar las acciones y construcción de la figura realizada. Con la retroacción ofrecida por

el medio, se observa que el grupo de trabajo reconoce que las acciones y el razonamiento que había utilizado no lo llevó a la respuesta correcta, es entonces que procede a corregirlo. Las respuestas escritas en el segundo momento de la primera tarea comprueban que el grupo NG2 corrige la idea que tenían respecto a la cantidad de cuadrados que debe tener el término cuatro de la secuencia, sin embargo, solo respondieron la primera pregunta.

Dado que el grupo NG2 no completó la primera tarea no es posible analizar por completo como se están desarrollando los procesos de Predicción y Construcción, sin embargo, por las líneas cuatro y veintidós del Episodio 4 se puede deducir que el grupo si desarrolla dichos procesos, reconociendo características de cada caso particular para decidir qué término podría pertenecer a la secuencia y cual no.

Por otro lado, el grupo NG3 completó la primera tarea. Por sus respuestas en la Tabla 8, a las cuatro preguntas del segundo momento de la tarea, se puede deducir que el grupo logró identificar una propiedad común para cada caso particular y probar la validez de sus ideas mediante otros términos de la secuencia. Además, reestructura casos particulares para definir otra característica específica esto cuando menciona: “que cada número de cuadros no tienen mitad”, refiriéndose a que la cantidad de cuadrados de cada término de la secuencia no tienen residuo 0 al dividirse por 2. Importa destacar que el grupo de trabajo utiliza la estrategia aditiva cuando menciona: “se le va sumando de a 2” y una estrategia funcional (función local en este caso) definidas por Zapatera (2018), dado que los estudiantes utilizan la función para hallar los elementos de un determinado término. Así mismo, se puede notar una generalización empírica porque el grupo acumula ejemplos para detectar la regularidad, esto al encontrar que la cantidad de cuadrados no tiene mitad; además que presentan indicios de una generalización verbal. En conclusión, es evidente que el grupo NG3 utilizó todos los procesos que se involucran en la generalización, es decir, Descripción, Representación,

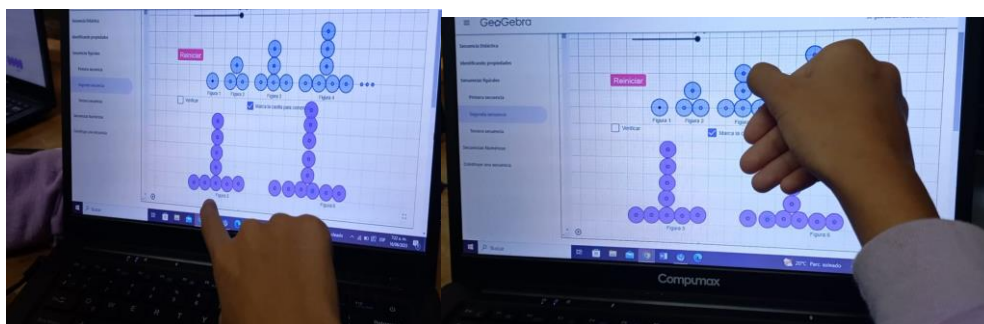
Predicción y Construcción, según lo planteado en el análisis a priori, y sin duda se contribuyó al desarrollo del pensamiento algebraico.

***Episodio 5.***

- [001] Profesor: ¿Qué acaba de hacer?
- [002] Grupo NG1: Hice la figura cinco y la figura seis (las señala en la pantalla)
- [003] Profesor: ¿Por qué las hizo?
- [004] Grupo NG1: Porque el programa me la pedía, aquí ya está la figura uno, la figura dos, la figura tres, la figura cuatro, los tres puntitos para hacer la figura cinco y la figura seis.
- [005] Profesor: Perfecto. ¿Cómo la construyó?
- [006] Grupo NG1: Acá (señalando la pantalla del pc) la figura uno tiene uno, la figura dos tiene dos acá abajo, la figura tres tiene acá tres y la figura cuatro tiene acá cuatro, entonces la figura cinco debe tener cinco acá (señalando la parte inferior de la figura) y la figura seis tendría seis. Y acá va aumentando, uno, dos, tres, cuatro, cinco (señalando los círculos que se ubican de forma vertical).
- [007] Profesor: ¿Cómo encuentra los círculos?
- [008] Grupo NG1: Le voy sumando, acá van tres (señalando la figura cuatro) y le sumo uno para que me de cuatro.
- [009] Profesor: ¿Cómo puede verificar si la respuesta está bien o está mal?
- [010] Grupo NG1: Eh, contando.
- [011] Profesor: Contando... ¿Cuántos círculos debería tener la figura cinco?
- [012] Grupo NG1: Cinco acá abajo y acá arriba son cuatro.
- [013] Profesor: Entonces ¿Cuántos serían?
- [014] Grupo NG1: Nueve.
- [015] Profesor: ¿Cuántos serían para la figura seis?
- [016] Grupo NG1: Seis acá (señalando la parte inferior) y cinco acá (señalando los círculos verticales) once.
- [017] Profesor: Entonces, ¿en cuánto van aumentando?
- [018] Grupo NG1: En dos.

**Figura 35**

*Descripción de la construcción de los términos 5 y 6.*



*Nota.* El grupo NG1 está explicando, usando sus manos, cómo se organizan los círculos en cada figura.

En la línea seis del Episodio 5, se puede apreciar el razonamiento que el grupo NG1 utilizó para identificar la cantidad de círculos que debe tener un término de la secuencia en la parte horizontal y vertical según el número del término al que corresponda, mostrando el proceso de Descripción. Continuando con el razonamiento del grupo NG1, en la conversación que se realiza en las líneas nueve, once, doce, quince y dieciséis del Episodio 5, se puede observar cómo se reestructuraron los casos particulares que los lleva a construir la conclusión de la línea seis y con ello deducir cómo serán los términos de la secuencia, lo cual es evidencia de los procesos de Predicción y Construcción.

Continuando con las respuestas del grupo NG1 en el segundo momento de la tarea, según la transcripción es posible deducir que utilizaron una estrategia funcional como la define Zapatera (2018). Es decir, la forma para hallar cualquier término de la secuencia es la relación que establece el grupo con el número del término y el número de círculos que tienen que ir en la parte de “abajo”; restando uno a esa cantidad para los círculos que van en la parte de “arriba”, dicho en palabras del grupo. Por otra parte, el grupo NG1 menciona en su respuesta a la tercera pregunta de la Tabla 9, que para responder a las dos anteriores consideraba el término anterior a la de la pregunta en cuestión, lo cual es característico de las

estrategias aditivas como el recuento recursivo, (Zapatera, 2018). Además, en la respuesta de la pregunta cuatro, se refleja la manera como el grupo de trabajo transformó y simplificó la secuencia en una relación entre el número del término y la cantidad de círculos para construirla. Así mismo, en la línea seis del Episodio 5 se puede identificar que el grupo NG1 usa el tipo de generalización empírica, ya que mediante identificar la regularidad en la secuencia, utilizan ejemplos como prueba de la forma en que encontraron el patrón que determina la cantidad de círculos que tiene cualquier término. Continuando con el análisis de las respuestas proporcionadas, el grupo utiliza una generalización verbal para intentar construir una expresión verbal desde el lenguaje natural, esto a través de la relación que establecen entre el número del término y los círculos que conforman su base.

En términos generales, todos los grupos completaron con éxito el primer momento de la segunda tarea. El diseño del applet ayudó a los estudiantes a responder las preguntas como se planteó en el análisis a priori, donde la casilla “Verificar”, el botón “Reiniciar” y el deslizador ayudaron a los estudiantes a observar casos particulares para identificar regularidades e ir formulando hipótesis y corregirlas si fuera necesario.

En cuanto al segundo momento, la mayoría de los grupos respondieron correctamente a las dos primeras preguntas, las cuales se relacionan con el proceso de Predicción, por lo que se puede deducir que los grupos lograron reconocer una noción general de la sucesión. Para las dos últimas preguntas se destacan las respuestas de los grupos NG2, NG3 y NG4. Empezando con el grupo NG2, el cual constata el uso de la estrategia aditiva, específicamente en el recuento iterativo, dado que para justificar sus hipótesis utilizan como ejemplo todos los términos de la secuencia, desde el primero. De la misma forma se puede asegurar que los estudiantes utilizaron una generalización empírica mediante la acumulación de ejemplos, y con la expresión “en torre” que se puede observar en la Tabla 9 podrían estar mostrando indicios de una generalización verbal dado que identificaron una propiedad común de la

secuencia, en este caso a través de la ubicación de los elementos. Por su parte, el grupo NG3 también utiliza una estrategia aditiva enmarcada en el recuento iterativo como se evidencia en la expresión “se le van sumando de 2 en 2”. Por último, el grupo NG4 utiliza una estrategia funcional, en este caso una función local, identificando la forma y cantidad de círculos necesarios para construir un término considerando la cantidad de círculos que tiene la base; además de utilizar una generalización empírica acumulando ejemplos para detectar una regularidad.

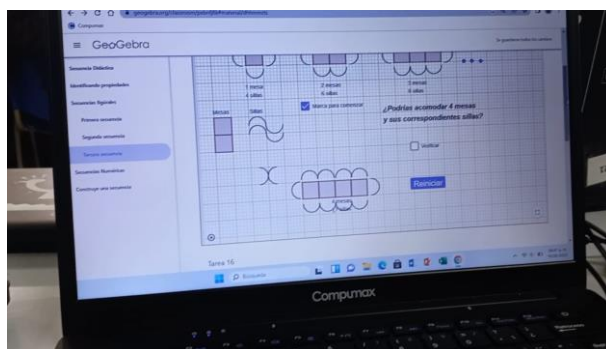
### ***Episodio 6.***

- [001] Profesor: Veo que construyeron la figura número cuatro, ¿cuántas mesas y cuántas sillas tiene?
- [002] Grupo NG5: Tiene cuatro mesas y diez sillas.
- [003] Profesor: ¿Cómo encontraron la cantidad de mesas y la cantidad de sillas?
- [004] Grupo NG5: Viendo la figura tres encontramos esta (señala la construcción que hicieron) que le teníamos que sumar uno.
- [005] Profesor: ¿Por qué le tienen que sumar uno?
- [006] Grupo NG5: Porque acá (señalando las figuras anteriores) se suma solamente uno
- [007] Profesor: Y el número de sillas...
- [008] Grupo NG5: Las sillas se van sumando de a uno también, conforme van cambiando las mesas cambian las sillas.
- [009] Profesor: ¿En cuánto van incrementando las mesas?
- [010] Grupo NG5: De uno en uno.
- [011] Profesor: Y ¿las sillas?
- [012] Grupo NG5: De uno en uno, porque las mesas cambian y las sillas cambian.
- [013] Profesor: ¿Seguros?
- [014] Grupo NG5: Si.
- [015] Profesor: Vamos a hacer algo, vamos a contar cuántas mesas tiene la figura uno.
- [016] Grupo NG5: Una.
- [017] Profesor: Y ¿sillas?
- [018] Grupo NG5: Cuatro.
- [019] Profesor: Ahora vamos a contar cuántas mesas tiene la figura dos.
- [020] Grupo NG5: Dos.

- [021] Profesor: Y ¿cuántas sillas?
- [022] Grupo NG5: Seis.
- [023] Profesor: Pero, ustedes me dijeron que aumentaba en uno la cantidad de mesas, estamos viendo que es correcto, pero la cantidad de sillas no está aumentando en uno.
- [024] Grupo NG5: Aumenta de dos en dos, porque si aumenta una mesa hay una silla arriba y una abajo entonces aumenta de dos en dos. Y la de los lados no aumenta.

### Figura 36

*Construcción del grupo de NG5 para la tercera tarea.*



El grupo NG5 desarrolló con éxito el primer momento de la tercera tarea, mediante la separación del término en sillas y mesas lograron identificar una regularidad en las mesas, pero no en las sillas como se observa en las líneas diez y doce del Episodio 6. Después del proceso de devolución que se realiza en las líneas diecisiete, veintiuno y veintitrés del Episodio 6, el grupo logra construir una variación correcta de los dos objetos que componen cualquier término de la secuencia. Es interesante cómo este grupo mediante el proceso de Construcción, enfocando cada caso particular solo en sillas y mesas, logra identificar características específicas de cada caso, pero fallan en el proceso de Representación, ya que no logra comunicar correctamente esas ideas.

En cuanto a las preguntas del segundo momento, a la primera pregunta los estudiantes respondieron correctamente, pero a las tres siguientes no como se puede observar en la Tabla 10. Con lo expresado por el grupo en el primer momento de la tarea se podía deducir que

lograron establecer regularidades en los términos de la secuencia, por lo que resulta desconcertante que en el segundo momento demostraran lo contrario. Por las expresiones de las líneas cuatro y seis que se evidencian en el Episodio 6, se puede observar el apoyo en las representaciones que brinda el applet para responder en las preguntas. Es posible que esto les permita responder correctamente a la primera pregunta del segundo momento, ya que tenían las herramientas para construir los dos términos de la pregunta. Por otro lado, las siguientes preguntas se relacionaban con figuras que eran imposibles de construir en el applet, no tener ese apoyo sea posiblemente la razón de sus respuestas erróneas. Además, se puede deducir, también por las líneas cuatro y seis del Episodio 6, que los estudiantes analizaron una estrategia aditiva mediante el recuento iterativo del patrón de crecimiento para hallar la cantidad de mesas, lo cual refuerza la idea de que, al no tener los términos previos a los relacionados en las preguntas, no pudieron aplicar esa estrategia para responder correctamente.

Todos los otros grupos completaron el primer momento de la actividad y el diseño del applet permitió la verificación y corrección de las construcciones. En cuanto a las respuestas del segundo momento, vale la pena mencionar los aportes de los otros grupos de trabajo.

Comenzando con el grupo NG1, con respecto a las preguntas del segundo momento que se pueden observar en la Tabla 10, se encuentran tanto respuestas correctas como incorrectas, demostrando una inconsistencia en el análisis que realizaron los estudiantes. Por ejemplo, en la primera pregunta, que trataba de los términos 5 y 6 de la secuencia, respondieron correctamente sobre el término 5, pero no sobre el término 6. Lo anterior no refleja con exactitud el uso de los procesos de Predicción, pero sí el de Construcción ya que transformaron la secuencia en tan solo calcular las sillas de la parte superior o inferior para calcularlas todas. Por otra parte, con expresiones como “arriba y abajo son el mismo número” y “las sillas a los lados se suman con las de arriba y abajo” se evidencia una estrategia

funcional (en este caso función global) para encontrar el número de sillas correspondientes a un término cualquiera, además del uso de una generalización verbal y evidenciando el proceso de Descripción.

El grupo NG2, responde correctamente las dos primeras preguntas, que se relacionan con generalización cercana, pero la tercera pregunta no; esta trata de la generalización lejana. Los resultados en la pregunta tres puede deberse a una comprensión errónea de la pregunta, por lo que tomando en cuenta las respuestas correctas, se puede evidenciar que los procesos de Predicción y Construcción están presentes cuando el grupo concluyó una relación entre la organización de las sillas y la cantidad que debe tener un término de la secuencia dependiendo de la cantidad de mesas. En la respuesta a la última pregunta, el grupo expresa lo siguiente: “siempre se tiene que sumar lo de arriba, abajo y los lados”, lo cual muestra, que al igual que el grupo NG1, utilizan una estrategia funcional para hallar el número de sillas, además, emplean una generalización verbal.

El grupo NG3, responde correctamente todas las preguntas del segundo momento. En la última pregunta el grupo establece que el número del término es igual a la cantidad de mesas, que a su vez es la cantidad de sillas que van arriba o abajo, mientras que las de los lados no cambian. Esa relación es producto de los procesos de Predicción y Construcción. Además, de evidenciar el uso de una estrategia funcional (al igual que en los otros casos una función global), que está acompañada de una generalización verbal. Por último, el grupo NG4, responde correctamente las preguntas del segundo momento, además, utilizan la misma estrategia que el grupo NG1 y NG2 para dar respuesta a la pregunta cuatro.

**Actividad 3.** Por cuestiones de falta de tiempo, en la Actividad 3 solo la primera tarea fue completada por todos los grupos, mientras que las otras dos tareas solo fueron parcialmente completadas por dos grupos. Por lo tanto, a continuación, se presenta un análisis

de la primera tarea y breves episodios de algunas situaciones que se dieron durante la implementación de las otras dos tareas.

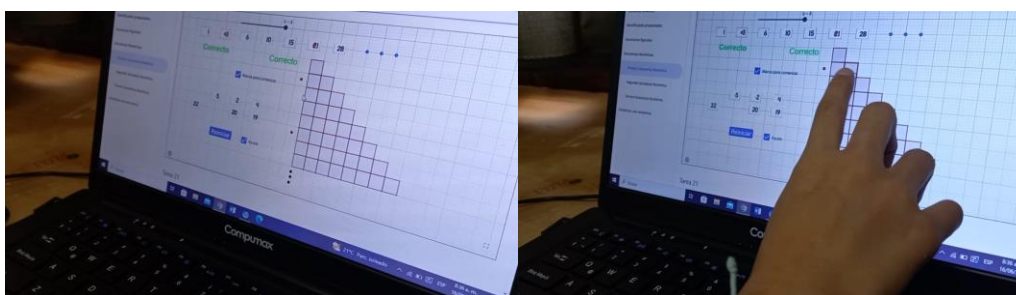
### ***Episodio 7.***

- [001] Profesor: Ubicó el número tres en el primer punto rojo y el programa le dice que está bien.
- [002] Grupo NG1: Si.
- [003] Profesor: Y en el primer punto rojo de la pirámide, ¿dónde encuentras un tres?
- [004] Grupo NG1: Acá (moviendo el cursor y señalando el primer cuadrado de las tres primeras filas) uno, dos y tres.
- [005] Profesor: Ese tres no me gusta. ¿Puede encontrar otro número tres? Por ejemplo, sin pasarse del punto rojo ¿cómo se puede encontrar el número tres? (haciendo referencia en la pirámide)
- [006] Grupo NG1: Contando acá esto (señala la pantalla con el dedo y cuenta los cuadros de las dos primeras filas) uno, dos, tres.
- [007] Profesor: Perfecto. ¿Será que en el segundo punto rojo encuentras el número 21?
- [008] Grupo NG1: (después de pensar por un momento) Si
- [009] Profesor: ¿Ya los contó y da 21?
- [010] Grupo NG1: Si.
- [011] Profesor: Es decir, si nos ubicamos en la primera fila de la pirámide y contamos los cuadros ¿cuántos habría?
- [012] Grupo NG1: Uno.
- [013] Profesor: Y ¿cuál es el primer número de la secuencia?
- [014] Grupo NG1: El número uno.
- [015] Profesor: En la segunda fila ¿cuántos cuadros habría?
- [016] Grupo NG1: Dos.
- [017] Profesor: Y si le sumas el cuadro anterior ¿cuántos cuadros habría?
- [018] Grupo NG1: Tres.
- [019] Profesor: Y ¿cuál es el número que va en la secuencia?
- [020] Grupo NG1: El número tres.
- [021] Profesor: Si nos paramos en la tercera fila ¿cuántos cuadros tendríamos en total?
- [022] Grupo NG1: Nueve.
- [023] Profesor: ¿Nueve?

- [024] Grupo NG1: (se detiene a contar los cuadrados de la pirámide) Seis.  
[025] Profesor: ¿Cuál es el tercer número de la secuencia?  
[026] Grupo NG1: El número seis.  
[027] Profesor: Y si continuamos así ¿qué estamos hallando?  
[028] Grupo NG1: Mmmmm ya. Los valores de la secuencia.

### Figura 37

*Explicación de un estudiante del grupo NG1 en la tarea 1 de la tercera actividad.*



En el Episodio 7, se puede ver que el estudiante, aunque utiliza la casilla “Ayuda”, no se apoya en la representación gráfica de la secuencia numérica para justificar por qué el número tres debería ir en esa posición. Esto se deduce a partir de la línea cuatro, donde el estudiante se apoya en la representación gráfica de la secuencia para responder la pregunta del profesor en la línea tres. La pregunta del profesor va dirigida para que el estudiante exprese una relación entre la secuencia numérica y la representación gráfica que se proporciona como ayuda. Sin embargo, el estudiante no logra crear dicha relación, dado que al intentar responder la pregunta cuenta los tres primeros cuadros de forma vertical. A partir de ese momento, el profesor comienza el proceso de devolución realizando preguntas para que el estudiante vaya construyendo la relación entre los dos tipos de representaciones que se están trabajando. Aunque al revisar la respuesta que este grupo proporcionó en el applet que se puede visualizar en la Tabla 11, se concluye que los estudiantes no llegaron a una idea sólida a partir de la conversación con el profesor pues el grupo de trabajo contestó: “va en 1 en 1” para intentar justificar la pregunta del segundo momento.

También, las respuestas que proporcionaron los otros grupos de trabajo evidencian que no lograron estructurar una regla general de crecimiento que sea correcta. Algunos grupos consideraron que el aumento de término a término era constante, otros aseguraron que para hallar cada término se debían sumar diferentes cantidades, pero no lograron realizar una descripción específica sobre esas cantidades.

Con base a las respuestas de los grupos, se puede concluir que la casilla “Ayuda” no brindó la herramienta necesaria para que los estudiantes pudieran identificar el patrón de la secuencia como se planteó en el análisis a priori. Por ejemplo, se ve en la línea cuatro del Episodio 7 que el grupo no encontró alguna relación entre la secuencia numérica y la figura de ayuda. Debido a no relacionar la secuencia numérica con la representación gráfica que se proporcionaba como ayuda, los estudiantes no lograron evidenciar el proceso de Descripción, dado que no lograron identificar algo común en los términos de la secuencia. Por lo tanto, no se evidenciaron los procesos de Predicción ni Construcción.

En cuanto a la segunda tarea de la actividad 3, solamente dos grupos proporcionaron una respuesta, el primero, el grupo NG1 responde lo siguiente: “se va sumando y así da el resultado de cada uno”, sin poder especificar adecuadamente qué es lo que se tiene que sumar. Por otra parte, el grupo NG2 menciona: “1 más 1 da 2 más 3 da 5 más 3 da 8 más 5 da 13 más 21 da 34”, haciendo referencia a una suma continua identificando la esencia de la sucesión de Fibonacci. Esto evidencia una estrategia funcional (en este caso función local), dado que los estudiantes reconocen que un determinado término es la suma de los dos anteriores, pero solamente lo ejemplifica para los casos que se presentan en pantalla limitándose a una generalización empírica.

Para la tercera tarea, nuevamente dos grupos proporcionaron una respuesta, pero no llegaron a nada en concreto. Esto último es de entender pues como se mencionó en el análisis a priori era posible que los estudiantes no lograran identificar un patrón dentro de la

secuencia. Además, los dos grupos completaron la secuencia numérica por medio del apoyo brindado por el applet.

Aunque el principal objetivo de las tareas era que los estudiantes aplicaran los procesos definidos para la generalización de patrones, lo que ocurrió fue la otra situación planteada en el análisis a priori donde la mayoría de estudiantes no lograron identificar algún patrón en las secuencias de las tres tareas. Por lo tanto, la actividad no logró contribuir al desarrollo del pensamiento algebraico de la forma en que se había planteado. Sin embargo, ante la no comprensión de las secuencias, se generaron espacios en cada grupo donde se debatían las ideas de posibles patrones comparando ejemplos con casos particulares, lo cual es parte del proceso de Descripción y los grupos intentando relacionar la secuencia numérica con las figuras de ayuda se relaciona con el proceso de Construcción.

**Actividad 4.** A continuación, se presenta una breve descripción de algunas situaciones que se dieron durante la implementación de la secuencia didáctica en la actividad 4 y posteriormente el análisis respectivo.

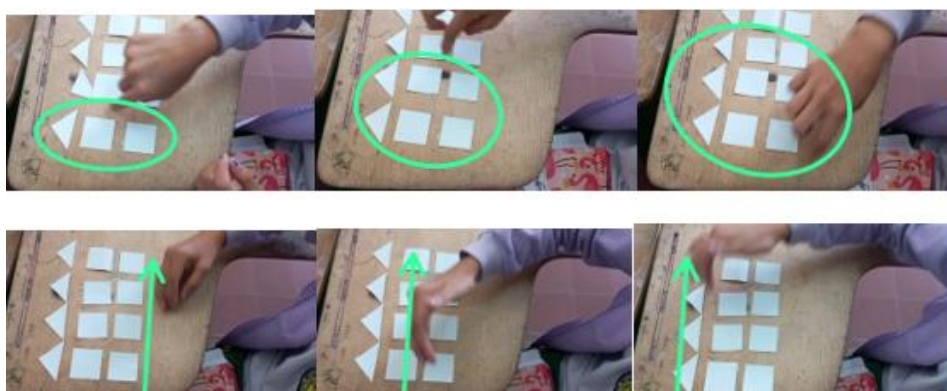
### *Episodio 8.*

- [001] Profesor: ¿Cómo encontró la figura número 4?
- [002] Grupo NG1: La encontré porque creo que va aumentando de uno en uno, porque la figura uno tiene uno, la figura dos tiene dos, la figura tres tiene tres y ya la cuatro tiene cuatro.
- [003] Profesor: Me puede explicar mejor cómo es ese proceso.
- [004] Grupo NG1: A esta figura se le pone uno para que de la figura dos (separando con las manos un conjunto de objetos)
- [005] Profesor: Me podría señalar con su dedo cuál es la figura a la que se está refiriendo.
- [006] Grupo NG1: (La señala con el dedo) Esta.
- [007] Profesor: ¿Para usted esa es una figura?
- [008] Grupo NG1: Si, y esta es dos y esta es tres (señalando con el dedo).
- [009] Profesor: Entonces, ¿Qué deberíamos tener en cuenta para construir cualquiera de las figuras? Tanto con los cuadrados y los triángulos.

- [010] Grupo NG1: De triángulos 10, de cuadrados acá 10 y 10 da 20.
- [011] Profesor: Y si pregunto para una figura más grande, por ejemplo, la figura 100, ¿la podría encontrar?
- [012] Grupo NG1: Si, acá 100, acá 100, son 200 (señalando las filas de cuadrados de la figura 4) y acá los triángulos da 100.

### Figura 38

*Acciones que realiza el estudiante del grupo NG1 para explicar la tarea 1 de la cuarta actividad.*



En el Episodio 8, se evidencia como el estudiante emplea una estrategia aditiva, específicamente utilizando el recuento iterativo para construir el término cuatro de la secuencia y con el argumento que da el estudiante en la línea dos se puede identificar una generalización empírica. Aunque en principio, la idea del estudiante no es clara, a medida que fluye la conversación se identifica lo que para ella es una figura, o término de la secuencia. Por otra parte, cuando se pregunta sobre una generalización lejana, el caso del término número 100, utiliza una estrategia funcional, una función local para determinar el número de cuadrados y triángulos que componen a la figura.

#### ***Episodio 9.***

- [001] Profesor: ¿Cómo construyó la figura cuatro?
- [002] Grupo NG2: La tres tenía 3 cuadrados, le sumamos un cuadrado, la tres tenía 8 triángulos, le sumamos 2 más.

- [003] Profesor: ¿Por qué agregaron un cuadrado y 2 triángulos?
- [004] Grupo NG2: Porque en la figura 3 había 8 triángulos y le sumamos 2 para que nos diera 10.
- [005] Profesor: ¿Por qué le tiene que dar 10?
- [006] Grupo NG2: Prácticamente porque ahí (señalando a las tres figuras en el tablero) se está sumando de a un cuadro y dos triángulos.
- [007] Profesor: En ese caso, ¿cuántos cuadrados y triángulos se necesitan para construir la figura 30?
- [008] Grupo NG2: 30 cuadrados y  $30 + 30 + 2$ , 62 triángulos.
- [009] Profesor: Entonces, ¿Qué deberíamos tener en cuenta para construir cualquiera de las figuras? Tanto con los cuadrados y los triángulos.
- [010] Grupo NG2: Pues multiplicar, por ejemplo, la figura 36 entonces  $36 \times 1 = 36$  cuadrados y los triángulos se multiplican por 2, que sería 72 y siempre hay dos a los lados, o sea 74.

### Figura 39

*Construcciones de la figura 4 del grupo NG2.*



Como se puede observar en la línea cuatro del Episodio 9, el grupo NG2 muestra la relación que encontraron entre las figuras de la secuencia, pero después de unas preguntas en un proceso de devolución, se va desarrollando el proceso de Descripción logrando expresar en la línea seis del Episodio 9 una característica general que determina los términos de la secuencia. En un principio el grupo utilizó una estrategia aditiva, ya que realizaban un recuento recursivo para responder preguntas sobre determinados términos; por ejemplo, en la línea dos y cuatro del Episodio 9, que para construir el término cuatro debían primero construir el tres. Después del proceso de devolución pasaron a una estrategia funcional,

mediante una función global, donde para encontrar los elementos de cualquier término bastaba con conocer el número del término. Con el paso a una estrategia funcional, en el proceso de Predicción, bastaba con tomar distintos términos de la secuencia para probar sus hipótesis en casos particulares.

Como se planteó en el análisis a priori, en las dos primeras tareas se presentaron momentos donde los estudiantes de cada grupo pudieron expresar y comparar sus hipótesis, esto es el proceso de Descripción, para finalmente, mediante la Representación, escribir el patrón que encontraron. Además, como se ve en los Episodios 8 y 9, los estudiantes tuvieron la oportunidad de comprobar la validez de las hipótesis, esto mediante los procesos de Predicción, y mediante el proceso de Construcción algunos estudiantes establecen diferentes relaciones, como el grupo NG2 en el Episodio 9 y las multiplicaciones que hacen según el número del término.

### ***Episodio 10.***

- [001] Profesor:           ¿Qué hizo en esta actividad?
- [002] Grupo NG1:       Hacer la figura uno que lleva dos y después hice la figura dos que lleva cuatro, ya le sume dos y luego hice la figura tres que lleva estos seis. (Señalando la secuencia de casas que elaboró).
- [003] Profesor:           ¿Cuántos triángulos y cuadrados va a tener la figura número 100?
- [004] Grupo NG1:       200 cuadrados y 200 triángulos.
- [005] Profesor:           ¿Cómo se pueden encontrar esos números de la figura 100?
- [006] Grupo NG1:       Porque los cuadrados se van sumando dos en dos y la cantidad de triángulos es la misma de cuadrados.

**Figura 40**

*Explicación de la estudiante del grupo NG1 en la tarea 3 de la cuarta actividad.*



En el Episodio 10, se puede ver en la línea dos que los estudiantes proponen: “Hacer la figura uno que lleva dos”, no especifica exactamente qué son esos dos que está llevando la secuencia figural que elaboró, pero en el transcurso de la explicación se identifica que un objeto para ella es una casa completa, cuadrado y triángulo. Además, es clara la regla de crecimiento que el grupo emplea en la secuencia figural representando de manera gráfica la secuencia de los números pares. Así mismo, cuando se le pregunta sobre una generalización lejana como la cantidad de cuadrados y triángulos del término 100, ella responde utilizando una estrategia funcional (función local) y con la respuesta que se puede observar en la línea seis, se puede identificar un tipo de generalización verbal. En la secuencia que construyó el grupo de trabajo, se puede encontrar una similitud con la primera tarea de esta sección por la forma en la que se están ubicando los cuadrados y triángulos.

***Episodio 11***

- [001] Profesor: ¿Exactamente qué fue lo que construyó?
- [002] Grupo NG3: Dibujé unos cuadrados, por ejemplo, aquí dos (señalando la primera figura) y aquí ya le fui aumentando horizontal uno y vertical uno y así voy aumentando.
- [003] Profesor: ¿Tiene alguna forma de encontrar la cantidad de cuadros de una figura?
- [004] Grupo NG3: Si, vamos a encontrar la figura cinco, aquí (señalando la figura

- cuatro) hago lo mismo, o sea hago la misma figura cuatro lo que pasa es que aquí dibujó un cuadrado y aquí otro.
- [005] Profesor: Espera, la figura uno ¿cuántos cuadrados tiene en su secuencia?
- [006] Grupo NG3: Dos.
- [007] Profesor: La figura dos ¿Cuántos cuadrados tiene?
- [008] Grupo NG3: Cuatro.
- [009] Profesor: La figura tres ¿Cuántos cuadrados tiene?
- [010] Grupo NG3: Seis.
- [011] Profesor: La figura cuatro ¿Cuántos cuadrados tiene?
- [012] Grupo NG3: Ocho.
- [013] Profesor: La figura cinco ¿Cuántos cuadrados tiene?
- [014] Grupo NG3: Diez.
- [015] Profesor: La figura Diez ¿Cuántos cuadrados tiene?
- [016] Grupo NG3: (Después de pensar por un tiempo) veinte.

### Figura 41

*Explicación del estudiante del grupo NG3 en la tarea 3 de la cuarta actividad*



En la situación que se presenta en el Episodio 11, se puede identificar que el estudiante del grupo NG3 al igual que su compañera del grupo NG1, decide representar la secuencia de los números pares a partir de dos cuadrados que van aumentando de manera vertical y horizontal. En la pregunta que realiza el profesor en la línea tres, se esperaba que el estudiante mencionara una propiedad común de la secuencia con la cual se encontrara la cantidad de cuadrados de un determinado término, pero la respuesta que proporciona el estudiante en la línea cuatro, explica la posición en donde se deben ubicar los siguientes dos elementos para poder construir la figura cinco. Esta situación lleva al profesor, mediante el proceso de devolución, a cuestionar sobre la cantidad de cuadrados de cada uno de los

términos de la secuencia que dibujó el estudiante. Para ir acumulando ejemplos utilizando una estrategia aditiva específicamente un recuento iterativo, de esta forma se establece una generalización empírica. Cabe destacar que los dos estudiantes realizaron secuencias figurales con apoyo tabular que, aunque no se estaba limitando que se realizará así el grupo de investigación supone que lo hicieron de esta forma dado que todas las secuencias que se presentaron en el transcurso de la secuencia didáctica tienen dicha característica.

Ambos grupos mediante el proceso de Descripción le expresaron al profesor la regla general de las secuencias creadas y escribieron la forma con la que se puede encontrar y construir cualquier término de sus secuencias, siendo el proceso de Representación. Además, aprovechando que los estudiantes tienen una noción general de su secuencia, se realizan las preguntas que se pueden observar en los Episodios 10 y 11, para que el estudiante utilice casos particulares y pruebe la validez de sus ideas, lo cual como se mostró en los mismos Episodios ocurrió, de esta forma se evidencia el proceso de Predicción.

Finalmente, cabe mencionar que la intención de la secuencia didáctica era potenciar el pensamiento algebraico, por lo que la mayoría de los estudiantes al finalizar todas las actividades no tenían una idea clara de lo que es una secuencia. Eso se demostró durante las actividades que se les pedía que crearan una secuencia, como en la prueba diagnóstica y actividad 4, además de dibujar figuras agregan preguntas como las que había en las tareas de las actividades 2 y 3, por lo que para ellos una secuencia es un ejercicio similar a las tareas.

## 5. Conclusiones

La pregunta que impulsa esta investigación es: ¿Qué tipo de actividad matemática debe promoverse en el aula para potenciar el pensamiento algebraico en estudiantes de quinto de primaria? Para intentar dar respuesta a la pregunta formulada se diseñó una secuencia didáctica enfocada en la generalización de patrones, en este apartado se profundiza en los objetivos específicos en relación al análisis a posteriori del capítulo anterior. En esta investigación se tuvo en cuenta las rutas de acceso al pensamiento algebraico que describen Butto Zarzar y Rojano Ceballos (2010), centrando la atención en el proceso de generalización que se puede trabajar a través de secuencias figurales y numéricas. Además, como se mencionó en el análisis preliminar, el proceso de generalización se puede llevar a cabo bajo el desarrollo de acciones específicas que potencien los procesos de Descripción, Construcción, Predicción y Representación, que no necesariamente surgen de manera conjunta. De allí parte la idea de la organización y estructura de la secuencia didáctica que se presentó en esta investigación para promover el pensamiento algebraico.

Comenzando con el primer objetivo, que incluye factores epistemológicos, cognitivos y didácticos de los estudiantes referentes al proceso de generalización. Para lo cual se diseñaron una serie de actividades compuestas por tareas a partir de los criterios: estrategias de generalización, tipos de generalización y los procesos Descripción, Representación, Predicción y Construcción. A continuación, se presentan conclusiones de cada una de las actividades que componen a la secuencia didáctica.

### 5.1. Actividad 1.

En esta actividad se esperaba que los estudiantes identificaran dos tipos de características en un conjunto de cuatro elementos, una característica general que cumplan la mayoría de los elementos que pertenecen al conjunto y una particular que sólo cumpliera un

elemento. Esto con la finalidad de promover las acciones que potencien el desarrollo de los procesos de Descripción y Representación de los estudiantes. En una primera instancia, las retroacciones que proporcionó el medio para estas tareas fueron comprendidas rápidamente por los estudiantes, a tal nivel que algunos grupos notaron que no era necesario oprimir el botón “Reinicio” para continuar con la tarea. Por otra parte, en este tipo de tarea se considera que faltaron retroacciones didácticas como las discrimina Pérez (2017), en el sentido de que como no se tenía una respuesta correcta, los estudiantes daban por terminada la tarea cuando discriminaban un solo elemento. Por lo tanto, el grupo de investigación realizó intervenciones para instruir a los participantes y buscar diferentes características para discriminar los otros elementos. Estas retroacciones didácticas se dividen en cuatro roles, pero se hace referencia a las retroacciones para la gestión y articulación de tareas. En cuanto a los resultados de los estudiantes en esta actividad, se cumplió la hipótesis de que las primeras respuestas de los participantes iban a ser poco detalladas, pero mediante el proceso de devolución que se presentó por parte de los investigadores se logró comprometer a algunos estudiantes con el desarrollo de las tareas. El proceso de Descripción tuvo relevancia porque se encontraron justificaciones detalladas sobre las características que el grupo de trabajo encontraba sobre algún elemento del conjunto con el que contaba la tarea, aunque no en todos los casos, se presentaron respuestas en las cuales no se tenía coherencia entre los argumentos que se utilizaban. Por otra parte, el proceso de Representación solo se vio reflejado en la comunicación escrita, esto porque el applet estaba limitado por la falta de retroacciones como se mencionó anteriormente, aunque en el desarrollo de la actividad nunca se limitó al estudiante a trabajar solamente en el applet.

## 5.2. Actividad 2.

En esta actividad, se cumplió casi de manera total el objetivo, este es que los estudiantes resolvieran las indicaciones del primer momento, construyendo el siguiente o siguientes elementos de la secuencia figural dependiendo del caso. Asimismo, cada grupo de trabajo tuvo la oportunidad de validar su construcción con la retroacción que se diseñó para cada una de las tareas de la actividad, concretando una situación a-didáctica en donde los grupos de trabajo podían continuar con el segundo momento de la tarea, si se aseguraban de que el proceso que habían desarrollado era correcto o realizaban las correcciones adecuadas en caso contrario. En cuanto al segundo momento, el proceso de Predicción de los estudiantes se concretó en la medida que los grupos de trabajo reconocían el cambio y variación entre los términos identificando un valor constante con el que se iba aumentando. Dependiendo de la pregunta del segundo momento se pudo evidenciar el uso de diferentes estrategias en la resolución de problemas de generalización de patrones, es decir, en las preguntas que se hacía referencia a una generalización cercana destacaba la estrategia aditiva con el recuento iterativo y el recuento recursivo, pero no se identificó el recuento sobre el dibujo. En las preguntas de generalización lejana se destaca la estrategia funcional específicamente la función local y en las dos últimas preguntas donde se buscaba que el estudiante comunicara sus ideas y señalara características de cada caso particular de la secuencia, se resalta nuevamente la estrategia funcional, pero con una función global representada en lenguaje natural. En estas dos últimas preguntas se esperaba que los argumentos que utilizaron los estudiantes fueran similares, pero se presentaron casos en los que se utilizaron diferente estrategia para dar solución a la pregunta. Asimismo, el uso de estrategias lleva a los tipos de generalización que son utilizados por los estudiantes, siendo la generalización empírica y la generalización verbal las más utilizadas por los participantes. Las estrategias proporcionales no se identificaron en la producción de los estudiantes dado que ninguno utilizó la

proporcionalidad directa para hallar un determinado término de la secuencia. Además, no se presentó una generalización gráfica y tampoco una generalización algebraica por parte de los estudiantes.

### **5.3. Actividad 3.**

En esta actividad, los grupos de trabajo que alcanzaron a interactuar con las tres tareas de esta sección completaron las secuencias numéricas correctamente. Esto dado que la retroacción del applet era directa para comprobar la respuesta del primer momento y de esta forma centrar la atención en el segundo momento de las tareas. Las respuestas presentadas por los estudiantes en la primera tarea, muestran diferentes explicaciones de cómo los grupos de trabajo visualizaron la secuencia de los números triangulares, pero ningún grupo identificó el patrón de crecimiento. En la segunda tarea, solamente un grupo identificó la esencia de la sucesión de Fibonacci a través del recuento iterativo como estrategia aditiva, pero se limitaron a explicar los elementos que se presentaban en el applet y no en toda la secuencia evidenciando una generalización empírica. En la tercera tarea, solo dos grupos de estudiantes intentaron dar respuesta, pero no consiguieron explicar la secuencia; esto último era de esperarse por la complejidad de la tarea, pero se presentó porque fue una iniciativa del grupo de investigación para determinar qué podía ocurrir en esta situación. Además, en las dos primeras secuencias se esperaba que los participantes activaran las ayudas en el applet, pero no todos los grupos lo hicieron.

### **5.4. Actividad 4.**

En esta actividad, los grupos de trabajo resolvieron las dos primeras tareas sin dificultad, encontrando los términos cuatro y cinco de la secuencia utilizando el recuento iterativo como estrategia aditiva, detallando mediante una generalización verbal la ubicación de los cuadrados y triángulos de las dos secuencias. Además, algunos estudiantes utilizaron

una estrategia funcional, exactamente una función local, para calcular la cantidad de cuadrados y de triángulos que puede tener un determinado término de la secuencia evidenciando un proceso de Descripción eficiente para la solución de las tareas y promoviendo un tipo de generalización verbal. En cuanto a la tercera tarea, algunos estudiantes construyeron secuencias figurales un poco parecidas a las presentadas en el transcurso de la investigación. En general, los estudiantes estuvieron en la capacidad de describir correctamente el patrón de crecimiento de la secuencia construida, mostrando una representación gráfica acorde a la explicación y respondiendo correctamente las preguntas sobre generalización lejana evidenciando un proceso de Predicción eficiente para la tarea.

Por otra parte, durante la implementación de la secuencia didáctica se identificó que todos los participantes presentaban la misma característica, sobre la expresión verbal y escrita que utilizaban. Es decir, al observar las respuestas que proporcionaban los estudiantes en los applets y cuestionarlos sobre la tarea que estaban realizando, los estudiantes expresaban ideas diferentes en los dos tipos de representación, en muchos casos la expresión oral que utilizaban los participantes explicaba correctamente cada una de las tareas solicitadas, pero al intentar escribir esas ideas en el applet se perdía la coherencia entre los argumentos. Asimismo, se presentaron errores comunes en las respuestas escritas, como, por ejemplo, errores ortográficos o de acentuación, pero en la mayoría de los casos se podían entender las ideas.

Por último, de los documentos de referencia que se tomaron para diseñar los applets de las secuencias figurales, se tenía en cuenta una pregunta sobre la expresión alfanumérica que describe el comportamiento de cada una de las secuencias. Sin embargo, en esta investigación no se tuvo en cuenta dado que es de interés, por parte del grupo de investigación, mostrar que es posible promover el pensamiento algebraico sin necesidad de contar con expresiones alfanuméricas, centrando la atención en la noción de variación y

cambio que se presenta en cada una de las actividades planteadas en la secuencia didáctica. Por ende, no se presentó algún tipo de generalización algebraica por parte de los estudiantes, dado que no se tenían preguntas a las que hiciera referencia ese tipo de generalización, aunque no se descarta la idea de que los estudiantes estuvieran en condiciones para elaborar una expresión alfanumérica que explique el comportamiento de la secuencia, porque en los casos donde los estudiantes utilizaron las estrategias funcionales se podía notar el potencial para crear una expresión simbólica.

## 6. Reflexiones Finales

Para promover el desarrollo del pensamiento algebraico en los estudiantes, es posible plantear actividades que involucran conceptos como la variación y el cambio, y la generalización de patrones que definen secuencias. Las secuencias deben ser tanto numéricas como geométricas, ya que con ello el estudiante podría analizar de mejor manera lo que cambia, lo que se mantiene constante y así definir un patrón de construcción. La secuencia didáctica debe estar estructurada de manera que las actividades de generalización sean coherentes entre sí y de esta forma se produzca un aprendizaje, desde la perspectiva de este proyecto, por adaptación. Además, esta investigación toma como propuesta al álgebra temprana ya que su interés está en promover experiencias en estudiantes de primaria que fomenten el desarrollo del pensamiento algebraico.

Usando como base la teoría de las Situaciones Didácticas y la Ingeniería Didáctica para diseñar y analizar los resultados de la implementación de la secuencia didáctica, los diseños de este proyecto se presentan como un aporte para que los docentes se interesen en promover en sus clases actividades que atiendan a desarrollar los procesos de Descripción, Predicción, Representación y Construcción propios de las matemáticas y en particular del pensamiento algebraico. Además de contribuir a desligar al álgebra de la idea de que esta se relaciona exclusivamente con los procesos algorítmicos y de emplear una escritura usando letras y números. También, se espera lograr crear un material didáctico que se pueda utilizar en un aula virtual que sirva de apoyo a los docentes a la hora de desarrollar sus clases. Específicamente actividades planteadas en un software de forma que al docente le será más cómodo atender a las producciones matemáticas de sus estudiantes, y a estos últimos les permitirá explorar con mayor facilidad sus propias ideas y fomentar en ellos la reflexión constante sobre los conocimientos adquiridos.

De manera muy general se desea empezar a desarrollar en estudiantes de quinto grado de primaria habilidades más abstractas típicas del pensamiento algebraico y propiciar al docente herramientas que le enriquezcan sus prácticas pedagógicas y lograr potenciar así el trabajo en el aula.

### Referencias

- Acosta, M., Monroy, L. y Rueda K. (2010). *Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando Cabri como medio*. Revista integración, (28), 173-189.  
<https://revistas.uis.edu.co/index.php/revistaintegracion/article/view/2174>
- Artigue, M. (1995). Ingeniería didáctica. En P. Gómez (Ed.), *Ingeniería didáctica en educación matemática* (pp. 33-59). Grupo Editorial Iberoamérica.
- Brousseau, G. (2007). *Iniciación al estudio de la teoría de las situaciones didácticas*. Libros del Zorzal.
- Butto, Z. y Rojano, T. (2010). Pensamiento algebraico temprano: El papel del entorno logo. *Educación Matemática*, 22(3), 55-86.  
<https://www.scielo.org.mx/pdf/ed/v22n3/v22n3a4.pdf>
- Callejo, L., García, A. y Fernández, C. (2016). Pensamiento algebraico temprano de estudiantes de educación primaria (6-12 años) en problemas de generalización de patrones lineales. *Avances de Investigación en Educación Matemática N° 10*. 5-25.  
<http://rua.ua.es/dspace/handle/10045/59875>
- Cañadas, C., Castro, E. y Castro, E. (2012). *Diferentes formas de expresar la generalización en problemas de sucesiones*. La Gaceta de la RSME, 15(3), 561-573.  
<http://funes.uniandes.edu.co/1922/>
- Castro, E. (2012). Dificultades en el aprendizaje del álgebra escolar. *Investigación en Educación Matemática XVI*, 75-94.  
<http://funes.uniandes.edu.co/11199/2/Castro2012Dificultades.pdf>
- Davydov, V. (1995). *Introduction to the Grade 1 Teacher Manual*.
- Di Pietro, G., Biagi, F., Dinis Mota Da Costa, P., Karpinski, Z. y Mazza, J. (2020). *The likely impact of COVID-19 on education: Reflections based on the existing literature and recent international datasets*. European Union.

- Departamento Administrativo Nacional de Estadística. (2019). *Encuesta Nacional de Calidad de Vida (ECB) 2019*. Bogotá: Departamento Administrativo Nacional de Estadística.
- García, J. (1989). *El proceso de generalización desarrollado por alumnos de secundaria en problemas de generalización lineal* (Tesis doctoral no publicada). Universidad de la Laguna. <https://riull.ull.es/xmlui/handle/915/21182>
- Godino, J., Aké, L., Gonzato, M. y Wilhelmi, M. (2014). Niveles de Algebrización de la Actividad Matemática Escolar. Implicaciones para la Formación de Maestros. *Enseñanza de las Ciencias*, 32(1), 199-219.  
<https://www.raco.cat/index.php/Ensenanza/article/view/287515>
- González, E. (2012). *Del lenguaje natural al lenguaje algebraico. Una propuesta didáctica basada en el planteamiento y resolución de problemas*. [Tesis de maestría inédita]. Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/10835>
- Hewitt, D. (2016). Designing Educational Software: The Case of Grid Algebra. *Digital Experiences in Mathematics Education*, 2(2), 167-198.  
<https://link.springer.com/article/10.1007/s40751-016-0018-4>
- Kaput, J. (1998). Teaching and learning a new algebra with understanding. Dartmouth, MA: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J. (2000). Transforming algebra from an engine of inequity to an engine of mathematical power by «algebrafying» the K-12 curriculum. Dartmouth, ma: National Center for Improving Student Learning and Achievement in Mathematics and Science.
- Kaput, J. (2008). What is Algebra? What is Algebraic Reasoning?. En J. Kaput, D. Carragher, & M. Blanton (Eds.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 5-17). Routledge.

<https://www.taylorfrancis.com/chapters/edit/10.4324/9781315097435-2/1-algebra-algebraic-reasoning-james-kaput>

Kieran, C. (2004). Algebraic Thinking in the Early Grades: What is it? *The Mathematics Educator*, 8(1), 139-151.

[https://www.researchgate.net/publication/228526202\\_Algebraic\\_thinking\\_in\\_the\\_early\\_grades\\_What\\_is\\_it](https://www.researchgate.net/publication/228526202_Algebraic_thinking_in_the_early_grades_What_is_it)

Lannin, J., Barker, D. y Townsend, B. (2006). Algebraic generalization strategies: factors influencing student strategy selection. *Mathematics Education Research Journal*, 18(2), 3-28. <https://link.springer.com/article/10.1007/BF03217440>

Ministerio de Educación Nacional. (2006). *Estándares Básicos de Competencias en Lenguaje, Matemáticas, Ciencias y Ciudadanas Guía sobre lo que los estudiantes deben saber y saber hacer con lo que aprenden*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Ministerio de Educación Nacional. (1998). *Lineamientos Curriculares Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Molina, M. (2009). Una propuesta de cambio curricular: integración del pensamiento algebraico en educación primaria. *PNA*, 3(3), 135-156.

<https://revistaseug.ugr.es/index.php/pna/article/view/6186>

Moreno, G. (2015). *Una Aproximación al Álgebra Temprana por Medio de una Secuencia de Tareas Matemáticas de Patrones Numéricos* (Trabajo de grado). Universidad del Valle. <http://funes.uniandes.edu.co/11561/1/Moreno2015Una.pdf>

National Council of Teachers of Mathematics. (2000). *Principios y Estándares para la Educación Matemática*. (Trad. M. Fernández). [Principles and Standards for School Mathematics]. Sociedad Andaluza de Educación Matemática Thales.

- Olaya, L. (2014). *Procesos de generalización en situaciones que involucran secuencias numéricas y geométricas. Una propuesta didáctica*. [Tesis de maestría inédita]. Universidad Nacional de Colombia. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/54419>
- Pérez, L. (2017). *Situaciones Adidácticas Para La Enseñanza De La Homotecia Usando Cabri Elem Como Medio* (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander.
- Pólya, G. (1954). *Patterns of Plausible Inference*. Princeton University Press
- Radford, L. (2008). Iconicity and contraction: a semiotic investigation of forms of algebraic generalizations of patterns in different contexts. *The International Journal on Mathematics Education (ZDM)*, 40(1), 83–96.  
[https://www.researchgate.net/publication/227092412\\_Iconicity\\_and\\_contraction\\_A\\_semiotic\\_investigation\\_of\\_forms\\_of\\_algebraic\\_generalizations\\_of\\_patterns\\_in\\_different\\_contexts](https://www.researchgate.net/publication/227092412_Iconicity_and_contraction_A_semiotic_investigation_of_forms_of_algebraic_generalizations_of_patterns_in_different_contexts)
- Radford, L. (2013). Entorno a tres problemas de la Generalización. En L. Rico, M. Cañadas, J. Gutiérrez & M. Molina (Coords.), *Investigación en didáctica de la matemática. Homenaje a Encarnación Castro* (pp. 3-12). Comares.  
[https://www.researchgate.net/publication/319057529\\_En\\_torno\\_a\\_tres\\_problemas\\_de\\_la\\_generalizacion](https://www.researchgate.net/publication/319057529_En_torno_a_tres_problemas_de_la_generalizacion)
- Ramírez, S. (2017). *Generalización de Patrones: Una forma de desarrollar el pensamiento algebraico* (Tesis de maestría). Universidad Distrital Francisco José de Caldas.  
<https://repository.udistrital.edu.co/handle/11349/7009>
- Rivera, F. (2013). *Teaching and Learning Patterns in School Mathematics*. Springer.
- Rodríguez, J., Melo-Becerra, L., Ramos-Forero, J. y Zárate-Solano, H. (2021). *Efecto de la pandemia sobre el sistema educativo: El caso de Colombia*. Borradores de Economía.
- Rojas, P., Rodríguez, J., Romero, J., Castillo, E. y Mora. (1999). *La transición aritmética-algebra*. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.

- Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalizing problems. *Educational Studies in Mathematics*, 20(2), 147-164. <https://www.jstor.org/stable/3482495>
- Tobón, S., Pimienta, J. y García, J. (2010). *Secuencias Didácticas: Aprendizaje y Evaluación de Competencias*. Pearson Education.
- Trigueros, M., Sandoval, I. y Lozano, D. (2020). Ways of Acting When Using Technology in the Primary School Classroom: Contingencies and Possibilities for Learning. the international journal on mathematics education 52(2). DOI:10.1007/s11858-020-01171-9
- UNESCO-CEPAL. (2020). *La educación en tiempos de pandemia*.
- Vergel, R. (2016). Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria. Universidad Distrital Francisco José de Caldas.
- Zapatera, A. (2018). Cómo alumnos de educación primaria resuelven problemas de generalización de patrones. Una trayectoria de aprendizaje. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 21(1), 87-114. <https://dx.doi.org/10.12802/relime.18.21144>.
- Zapatera, A. (2022). La generalización de patrones como herramienta para introducir el pensamiento algebraico en educación primaria. *Educación Matemática*, 32(2), 134-152. [https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S2448-80892022000200134&script=sci\\_abstract](https://www.scielo.org.mx/scielo.php?pid=S2448-80892022000200134&script=sci_abstract)

### **Anexos**

En esta sección se presentan las respuestas que todos los participantes proporcionaron en los applets de secuencias figurales y numéricas. Así mismo, se presenta el formato de la prueba diagnóstico que se utilizó en esta investigación y el formato del consentimiento informado. Además, se presentan algunas imágenes de los espacios y equipos de cómputo que se tenían a disposición para llevar a cabo esta investigación. Si el lector está interesado en visualizar las actividades en el software de GeoGebra puede ingresar al siguiente link para interactuar de forma directa. [www.geogebra.org/classroom/pxbnfj8k](http://www.geogebra.org/classroom/pxbnfj8k)

## Anexo A

Tabla 14

*Respuestas de los estudiantes en la actividad de secuencias figurales*

| Estudiantes       | ¿Completó la secuencia?  | Preguntas del segundo momento | Respuestas  |
|-------------------|--|-------------------------------|---|
| Primera secuencia |  |                               |   |
| G1                | Completaron la secuencia y verificaron la respuesta con el applet    | 1                             | 17 cuadros.   |
|                   |  | 2                             | 199 cuadros.  |
|                   |  | 3                             | 7 cuadros.  |
|                   |  | 4                             | Analizar mucho, concentrarse y sume de a 2.   |
| G2                | Completaron la secuencia y verificaron la respuesta con el applet    | 1                             | Se puede formar con 18 cuadros.   |
|                   |  | 2                             | Se puede formar con 199 cuadros.  |
|                   |  | 3                             | Sumamos en 9 en 9 hasta llegar a 199.   |
|                   |  | 4                             | Le podemos explicar a nuestro compañero que no fue hoy a clases y estamos haciendo tareas con computadores. |
| G3                | Completaron la secuencia y verificaron la respuesta con el applet    | 1                             | 19 porque le agrega 12 cuadros a la posición 4.   |
|                   |  | 2                             | 199 porque le agrego 180 cuadros.   |
|                   |  | 3                             | Sumar en dos los cuadros para llegar a la posición 100.   |
|                   |  | 4                             | Dígale al profesor y el profesor te dirá todo.  |
| G4                | Completaron la secuencia y no verificaron la respuesta con el applet | 1                             | Con 7 cuadros.  |
|                   |  | 2                             | Con 117 cuadros.  |
|                   |  | 3                             | Sume y multiplique estos números como 90, 10 y 17 para que nos dé el resultado.                             |
|                   |  | 4                             | Sin responder.  |
| G5                | Completaron la secuencia y verificaron la respuesta con el applet    | 1                             | 17 cuadro para poder formar las 9 posiciones porque a 9 le sumo 9.  |
|                   |  | 2                             | 190 cuadros para armar 100 posiciones porque le multiplico de 10 en 10.                                     |
|                   |  | 3                             | Sumando y multiplicando.  |
|                   |  | 4                             | Sin responder.  |

|                   |                            |   |  |
|-------------------|----------------------------|---|--|
| G6                | Completaron la             | 1 | Con 17 cuadros.  |
|                   | secuencia y                | 2 | Con (no continuaron escribiendo).  |
|                   | verificaron la             | 3 | Sin responder.   |
|                   | respuesta con el<br>applet | 4 | Sin responder.   |
| G7                | Completaron la             | 1 | 17 cuadros.  |
|                   | secuencia y                | 2 | 199 cuadros.   |
|                   | verificaron la             | 3 | Colocando 100 cuadros abajo y arriba 99.   |
|                   | respuesta con el<br>applet | 4 | Siga una secuencia.  |
| G8                | Completaron la             | 1 | 17 cuadros.  |
|                   | secuencia y                | 2 | Sin responder.   |
|                   | verificaron la             | 3 | Sin responder.   |
|                   | respuesta con el<br>applet | 4 | Sin responder.   |
| G9                | Completaron la             | 1 | Se puede formar con 17 cuadros por que se le van sumando 2 en 2.   |
|                   | secuencia y                | 2 | Se puede formar con 199 cuadros.   |
|                   | verificaron la             | 3 | Haciendo un analice, de pensamiento ya que cada número de cuadros no tienen mitad. Así que daría resultado a 199 cuadros ya que no tiene mitad igual al resto, por eso es la respuesta correcta.   |
|                   | respuesta con el<br>applet | 4 | Bueno yo se lo explicaría diciéndole...que a cada fase se le va sumando de a 2 y que los cuadros no tienen mitad de número. Por ejemplo, la fase 1 la cantidad de cuadrados es 1 que no tiene mitad así sucede con la fase 2,3,4,5,6,7,8,9, etc.<br>El resultado lo encontramos multiplicando 2 por 100 pero tiene mitad y la mitad no es necesaria y le restamos 1 y dio 199. |
| Segunda secuencia |                            |   |  |
|                   | Completaron la             | 1 | 14 arriba y 15 abajo.  |
|                   | secuencia y                | 2 | 100 abajo y 99 arriba.   |

|    |                  |   |  |
|----|------------------|---|--|
| G1 | verificaron la   | 3 | Porque arriba se suma de a uno y abajo es        |
|    | respuesta con el |   | completo.  |
|    | applet           | 4 | Pensar mucho y que sume cada figura.             |
|    | Completaron la   | 1 | La figura tiene 15 tienen 72 círculos.           |
|    | secuencia y      | 2 | La figura 100 da para 198 círculo.               |
| G2 | verificaron la   | 3 | lo hicimos sumando de dos en dos hasta llegar    |
|    | respuesta con el |   | a 198.   |
|    | applet           | 4 | Compañero anti ayer vimos matemáticas            |
|    |                  |   | español etc..                                    |
|    |                  | 1 | 29 por 15 abajo y 14 arriba.                     |
|    | Completaron la   | 2 | 180 por 100 abajo y 90 arriba.                   |
|    | secuencia y no   | 3 | Me puse hacer como decía y encontré la           |
| G3 | verificaron la   |   | forma.   |
|    | respuesta con el | 4 | Venga todos los días para que pase a sexto.      |
|    | applet           |   |  |
|    | No completaron   | 1 | Sin responder.                                   |
|    | la secuencia     | 2 | Sin responder.                                   |
| G4 |                  | 3 | Sin responder.                                   |
|    |                  | 4 | Sin responder.                                   |
|    | Completaron la   | 1 | 29 círculos tienen 15 abajo y 14 arriba porque   |
|    | secuencia y      |   | en la figura 6 tiene lo mismo 6 y la figura 15   |
| G5 | verificaron la   |   | pues tiene 15 abajo y arriba se le quita uno y   |
|    | respuesta con el |   | así sacamos la figura 15.                        |
|    | applet           |   |  |
|    |                  | 2 | La figura 100 tienen 199 círculos 100 a bajo y   |
|    |                  |   | arriba 99 porque en las anteriores figura como   |
|    |                  |   | la 6 tienen 6 círculos abajo y le quita uno      |
|    |                  |   | arriba y así sería 5 y siguiendo el ejemplo de 6 |
|    |                  |   | sacamos el resultado de la 100.                  |
|    |                  | 3 | Pues nos guiamos en la 6 y así sacamos el        |
|    |                  |   | resultado de 15 y 100.                           |
|    |                  | 4 | querida amiga esto se resuelve con el ejemplo    |
|    |                  |   | de figura 1 2 3 4 5 6 y así podemos resolver     |
|    |                  |   | cualquier figura que te pida como la 15 o la     |

|    |   |   |   |
|----|---|---|---|
|    |   |   | 100 con los ejemplos 1 2 3 4 5 6.   |
| G6 | Completaron la secuencia y verificaron la respuesta con el applet | 1 | Abajo tendrían 15 arriba 14 lo sumamos $15+14 = 29$ y lo encontré con la figura 14.   |
|    |   | 2 | Abajo 100 y arriba 99 y lo sumo $100+99=199$ da este resultado igual lo encontré con la figura 99.  |
|    |   | 3 | Pues la figura 15 la encontré con la figura 14 la 14 tiene 13 arriba entonces la 15 tiene 14 arriba y la figura 100 la encontré con la 99 la 99 tiene 98 arriba y 100 abajo la figura, por ejemplo 4 tiene 4 abajo y 3 arriba el número de figuras coinciden con la parte de abajo. |
|    |   | 4 | Querido amigo lo que tiene que hacer es esto porque se perdió la clase y es mas fácil el número de figuras es igual a lo de abajo y arriba solo se le resta 1.  |
| G7 | Completaron la secuencia y verificaron la respuesta con el applet | 1 | 29.   |
|    |   | 2 | 199.  |
|    |   | 3 | Sin responder.  |
|    |   | 4 | Sin responder.  |
| G8 | Completaron la secuencia y verificaron la respuesta con el applet | 1 | 29 porque tiene 15 abajo y 14 arriba.   |
|    |   | 2 | 199 porque tiene 100 abajo y 99 arriba.   |
|    |   | 3 | sumando lo de arriba y los de abajo.  |
|    |   | 4 | En la figura uno hay un círculo y en la figura dos hay dos círculos abajo y uno arriba entonces va sumando de a uno abajo y de a uno de arriba y en torre.  |
| G9 | Completaron la secuencia y verificaron la respuesta con el applet | 1 | Abajo se le colocan 15 y arriba 14.   |
|    |   | 2 | tiene 199.  |
|    |   | 3 | Pues viendo que las figuras del 1 al 4 se le ban sumando de a 2. y también porque son números impares.  |
|    |   | 4 | Pues que mire cada figura y la analice y que  |

---

haga las figuras con respecto a las demás.

| Tercera secuencia |                                |  |  |
|-------------------|--------------------------------|--|--|
| G1                | Completaron la                 | 1  | 10 sillas porque se suman de a dos.  |
|                   | secuencia y                    | 2  | 36 sillas para 18 mesas.   |
|                   | verificaron la                 | 3  | 42 porque las mesas se suman de a uno.   |
|                   | respuesta con el<br>applet     | 4  | Que las mesas se suman de a uno y las sillas de a dos.   |
| G2                | Completaron la                 | 1  | Son 12 silla.  |
|                   | secuencia y no                 | 2  | 18 estudiante somos 23 estudiantes.  |
|                   | verificaron la                 | 3  | Necesita 50 silla y 50 mesas.  |
|                   | respuesta con el<br>applet     | 4  | 20 mesas y 20 sillas.  |
| G3                | Completaron la                 | 1  | Sin responder.   |
|                   | secuencia y no                 | 2  | Sin responder.   |
|                   | verificaron la                 | 3  | Sin responder.   |
|                   | respuesta con el<br>applet     | 4  | Sin responder.   |
| G4                | No completaron<br>la secuencia | 1  | La mesa cinco tiene 12 sillas y la mesa 6 tiene 14 sillas.   |
|                   |                                | 2  | En el salón hay 18 mesas y 20 sillas.  |
|                   |                                | 3  | Pues se necesitan 42 mesas y sillas para el cumpleaños.  |
|                   |                                | 4  | sin responder.   |
| G5                | Completaron la                 | 1  | Alrededor de 5 mesas podemos colocar 12 silla y alrededor de 6 mesas podemos colocar 14 sillas.  |
|                   | secuencia y                    |  |  |
|                   | verificaron la                 |  |  |
|                   | respuesta con el<br>applet     | 2  | hay 18 sillas disponible porque nos guiamos del resultado de la 3 porque 3 mesas y arriba tienen 3 sillas y abajo 3 sillas entonces uno sumo 18 arriba y 18 abajo y 2 a los lados porque 3 también tiene 2 a los lados y nos dio 38. |
|                   | 3                              | Hay que poner 20 mesas para que de 48 porque 20 arriba y 20 a abajo y 2 a los lados y así va 42. |  |
|                   | 4                              | La regla es sumar lo de arriba lo de abajo y los   |  |

|    |   |   |   |
|----|---|---|---|
|    |   |   | de a los lados y, por ejemplo 10 mesas y las sillas serian 10 arriba y 10 a bajo y 2 a los lados y el resultado es 22 |
|    |   |   | porque sume 10 de arriba 10 de abajo y 2 los dados.   |
| G6 | Completaron la secuencia y verificaron la respuesta con el applet | 1 | 12 sillas y a 16 22.  |
|    |   | 2 | Pues $18 + 18$ ya que son 18 mesas arriba y abajo $18 + 18 = 36$ sumando arriba y abajo y a los lados da 38.          |
|    |   | 3 | Se necesitan 42 ya que arriba hay 42 sillas pues mesas 42 no lo sé explicar muy bien, pero creo q se entiende.        |
|    |   | 4 | Que arriba y abajo son el mismo número de mesas al igual las sillas a los lados se suman con las de arriba y abajo.   |
| G7 | Completaron la secuencia y verificaron la respuesta con el applet | 1 | 14 sillas.  |
|    |   | 2 | 20 sillas.  |
|    |   | 3 | 42 mesas.   |
|    |   | 4 | 5 mesas y 12 sillas.  |
| G8 | Completaron la secuencia y verificaron la respuesta con el applet | 1 | en 5 mesas podemos colocar 12 sillas y alrededor 6 mesas es 14 sillas.  |
|    |   | 2 | 34 sillas se encuentran sumando $18 + 18 + 2$ .   |
|    |   | 3 | 42 mesas y 84 sillas porque sume lo de arriba y los de abajo y el de los lados.                                       |
|    |   | 4 | Siempre tiene que sumar lo de arriba el de abajo y el de los lados.   |
| G9 | Completaron la secuencia y verificaron la respuesta con el applet | 1 | Del 5 se le ponen 12 sillas, y de las seis 14 sillas.   |
|    |   | 2 | Se pueden sentar 38 estudiantes. y encontré la respuesta sumando a los lados y arriba y abajo.                        |
|    |   | 3 | Se necesitan 20 mesas para 42 niños. pues porque en 20 mesas ay 42 sillas.  |
|    |   | 4 | Pues las sillas por abajo y por arriba es la misma cantidad de mesas y por los lados no.                              |

---

Las mesas representan el número de la figura y las sillas de abajo le sigue a las mesas y las de arriba igual.

---

*Nota.* Esta tabla muestra las respuestas que los participantes escribieron en el software de GeoGebra.

**Anexo B****Tabla 15***Respuestas de los estudiantes en la actividad de secuencias numéricas.*

| <b>Estudiantes</b> | <b>¿Completo la primera secuencia?</b>            | <b>Respuestas</b>   |
|--------------------|---|---|
| Primera secuencia  |   |   |
| G1                 | Completaron la secuencia y activó la ayuda.       | Sin responder.  |
| G2                 | Completaron la secuencia y activó la ayuda.       | Confirman contando de tres en tres.   |
| G3                 | No completaron la secuencia y no activó la ayuda. | Sin responder.  |
| G4                 | Completaron la secuencia y activó la ayuda.       | Porque los números pueden poner diferentes números y pueden sumar como de 2 en 2 o de 3 en 3 o más números.   |
| G5                 | Completaron la secuencia y activó la ayuda.       | lo encontramos porque nos dimos cuenta que la primera es el 3 porque es la mita del 6 y el 21 lo encontramos porque suma en dos en dos.   |
| G6                 | Completaron la secuencia y activó la ayuda.       | va en 1 en 1.   |
| G7                 | Completaron la secuencia y activó la ayuda.       | Porque probamos con el numero 3 y si nos di el resultado y después probamos con el numero 21 y si nos dio.  |
| G8                 | Completaron la secuencia y activó la ayuda.       | Poque uno más 5 da 6 más 4 da 10 más 5 da 15 más 6 da 21 más 7 da 28 y así sigue sumando hasta llegar a un millón.  |
| G9                 | Completaron la secuencia y activó la ayuda.       | Porque en cada número se le suma n diferentes cantidades, por ejemplo, en el 1 se pasa a 3 se le suman y después del 3 pasa al 6 y del 6 al 10 se le suman 4, o sea que en cada número es diferente cantidad la que se le |

| suma.             |  |  |
|-------------------|--|--|
| Segunda secuencia |  |  |
| G1                | No completaron la secuencia y no activó la ayuda.  | Sin responder.   |
| G2                | Completaron la secuencia y activó la ayuda.  | La confirma sumando de tres en tres.                         |
| G3                | No completaron la secuencia y no activó la ayuda.  | Sin responder.   |
| G4                | No completaron la secuencia y no activó la ayuda.  | Sin responder.   |
| G5                | No completaron la secuencia y no activó la ayuda.  | Sin responder.   |
| G6                | Completó el primer término de la secuencia, el segundo que se solicitaba no lo completo y activo la ayuda. | Se va sumando y así da el resultado de cada uno.             |
| G7                | Completaron la secuencia y no activó la ayuda.   | Porque hay si necesitamos la ayuda de la secuencia numérica. |
| G8                | Completaron la secuencia y activó la ayuda.  | 1 más 1 da 2 más 3 da 5 más 3 da 8 más 5 da 13 más 21 da 34. |
| G9                | No completaron la secuencia y no activó la ayuda.  | Sin responder.   |
| Tercera secuencia |  |  |
| G1                | No completaron la secuencia.   | Sin responder.   |

|    |                              |   |
|----|------------------------------|---|
| G2 | Completaron la secuencia.    | Puedo confirmar tres en tres 1 más 2 son 3 más 3 dan 6.               |
| G3 | No completaron la secuencia. | Sin responder.  |
| G4 | No completaron la secuencia. | Sin responder.  |
| G5 | No completaron la secuencia. | Sin responder.  |
| G6 | Completaron la secuencia.    | Van aumentando y así da el resultado o sea suma.                      |
| G7 | No completaron la secuencia. | Sin responder.  |
| G8 | Completaron la secuencia.    | 1 + 1 da 2 + 3 da 5 más 2 da 7 y más 4 da 11 más 4 da 15 más 7 da 22. |
| G9 | No completaron la secuencia. | Sin responder.  |

---


*Nota.* Esta tabla muestra las respuestas que los participantes escribieron en el software de GeoGebra.

**Anexo C**


Prueba Diagnóstico

**Figura 42**



*Primera tarea de la prueba diagnóstico.*



|   |  |  |
|---|--|--|
| <p><b>Prueba diagnóstica</b><br/>                 Proyecto: "Diseño e implementación de una secuencia didáctica para desarrollar pensamiento algebraico en estudiantes de quinto primaria"<br/>                 Universidad Industrial de Santander</p> |  |  |
| Nombre:   |  |  |
| Institución Educativa Jorge Eliecer Gaitán  |  | Fecha:   |

1. Observa las figuras que aparecen a la izquierda. Identifica cuál hace falta y selecciónala dentro de las opciones que aparecen a la derecha.



\_\_\_\_\_

a)  b) 

c)  d) 

Explica por qué elegiste esa figura:

**Figura 43**

*Segunda tarea de la prueba diagnóstico.*

2. Completa las siguientes secuencias colocando el término que crees que hace falta. Explica para cada secuencia el razonamiento que te lleva a colocar los términos que faltan.

a) 20 17 \_\_\_ 11 \_\_\_ 5 2

b)

Figura 1




Figura 2

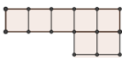


Figura 3


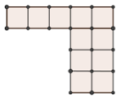


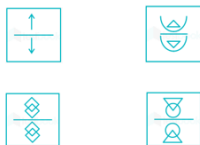
Figura 4



**Figura 44**

*Tercera tarea de la prueba diagnóstico.*

3. ¿Cuál de las siguientes figuras no pertenece al grupo? Enciérala en un círculo.



Explica con tus propias palabras por qué la figura encerrada no pertenece al grupo de figuras:

**Figura 45**

*Cuarta tarea de la prueba diagnóstico.*

4. Imagina una secuencia de figuras o números y escribela. Intenta escribir por los menos 5 términos de la secuencia. Explica con tus palabras cómo vas encontrando cada término.

**Anexo D**

Consentimiento Informado.

Proyecto: “Diseño e implementación de una secuencia didáctica para desarrollar pensamiento algebraico en estudiantes de quinto primaria”

Fecha: \_\_\_\_\_

Nosotros, Miguel Ángel Chacón Herrera identificado con cédula de ciudadanía \*\*\*\*\* , número expedida en \*\*\*\*\* y Julián David Ballesteros Cortés identificado con cédula de ciudadanía, número \*\*\*\*\* expedida en \*\*\*\*\* , por voluntad propia damos nuestro consentimiento para implementar el Plan de intervención sobre el “Diseño e implementación de una secuencia didáctica para desarrollar pensamiento algebraico en estudiantes de quinto primaria”, de manera presencial. Por tal motivo, eximimos de toda responsabilidad a la UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER.

Manifestamos que somos conscientes de la responsabilidad que nos compete en el desarrollo de este plan de intervención. Del mismo modo, recibimos todas las recomendaciones para el desarrollo de este, y las aceptamos voluntariamente.

Atentamente,

Miguel Chacón Herrera

Julián David Ballesteros Cortés

Estudiante

Estudiante

Licenciatura en Matemáticas

Licenciatura en Matemáticas

Universidad Industrial de Santander

Universidad Industrial de Santander

## CONSENTIMIENTO INFORMADO

Proyecto: “Diseño e implementación de una secuencia didáctica para desarrollar pensamiento algebraico en estudiantes de quinto primaria”

Con el propósito de formarnos como futuros docentes sobre la responsabilidad de enseñar matemáticas a todos los estudiantes, teniendo en cuenta las características diferenciadas de aprendizaje y siguiendo el objetivo de nuestra investigación, buscamos aplicar los fundamentos teóricos y metodológicos estudiados mediante la implementación de una secuencia didáctica para promover el pensamiento algebraico.

Hecha esta salvedad, se solicita de forma responsable y atenta la autorización para implementar dicho plan de intervención con su

hijo(a) \_\_\_\_\_, identificado con Tarjeta de

Identidad No. \_\_\_\_\_ expedida en \_\_\_\_\_.

Así mismo, manifiesta que recibió explicación del objetivo del plan de intervención y del propósito de la realización. De igual forma, está al tanto de la manera en cómo se utilizarán los resultados y sobre los principios de anonimato y confidencialidad en los que se delimita el proyecto de investigación. Además, está de acuerdo con los horarios establecidos para cada sesión, los cuales se presentan a continuación:

| Sesión | Tiempo estimado | Actividad general | cronograma |
|--------|-----------------|-------------------|------------|
|--------|-----------------|-------------------|------------|

|         |        |                    |  |
|---------|--------|--------------------|--|
| Primera | 60 min | Prueba diagnóstico |  |
|---------|--------|--------------------|--|

|         |         |                           |  |
|---------|---------|---------------------------|--|
| Segunda | 120 min | Identificando Propiedades |  |
|---------|---------|---------------------------|--|

|         |         |                      |  |
|---------|---------|----------------------|--|
| Tercera | 120 min | Secuencias Figurales |  |
|---------|---------|----------------------|--|

|        |         |                      |  |
|--------|---------|----------------------|--|
| Cuarta | 120 min | Secuencias Numéricas |  |
|--------|---------|----------------------|--|

|        |        |                         |  |
|--------|--------|-------------------------|--|
| Quinta | 60 min | Construye una secuencia |  |
|--------|--------|-------------------------|--|

Así mismo, autoriza la grabación de entrevistas y recolección de evidencia fotográfica por medio de diferentes dispositivos para el análisis de las sesiones propuestas por el grupo de

investigación, cabe aclarar que toda la información como grabaciones, audios y fotografías de las sesiones propuestas, tienen fines netamente académicos y serán destruidos cuando finalice la investigación.

Dicho lo anterior, soy consciente de que los resultados del proceso tendrán solos fines académicos e investigativos.

Leído y autorizado por,

\_\_\_\_\_

\_\_\_\_\_

Firma del padre/madre o acudiente

Nombre del participante

C.C. \_\_\_\_\_

T.I. \_\_\_\_\_

**Anexo E****Figura 46**

*Sala de cómputo donde se llevó a cabo la investigación*



*Nota.* Se contaba con los equipos necesarios para que los estudiantes respondieran todas las actividades de la secuencia didáctica.

**Figura 47**

*Grupo de estudiantes con los que se llevó a cabo la investigación.*



**Figura 48**

*Estudiantes trabajando en la actividad 4*

