

ANÁLISIS TEÓRICO DE UN PROBLEMA DE CONTROL ÓPTIMO ASOCIADO A UN
SISTEMA DE REACCIÓN-DIFUSIÓN TIPO SCHNAKENBERG.

Andrés Felipe Ortiz Flórez

Trabajo de Grado para optar al título de
Magíster en Matemática Aplicada

Director

Dr. Juan Carlos López Ríos

Codirector

Dr. Diego Armando Rueda Gómez

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

2025

Tabla de Contenido

Introducción	3
1. Preliminares	9
2. Esquema numérico para el problema sin control	16
2.1. Definiciones preliminares	16
2.2. Definición del esquema numérico	19
2.3. Propiedades del esquema numérico	20
2.4. Simulación numérica	24
3. Existencia de solución fuerte	26
3.1. Existencia de solución, caso $N = 3$	27
3.2. Existencia de solución, caso $N = 2$	37
4. Problema de control óptimo	40
4.1. Existencia de una solución óptima global	41
4.1.1. Caso $N = 3$	41
4.1.2. Caso $N = 2$	45

4.2. Existencia de multiplicadores de Lagrange	48
4.2.1. Caso $N = 3$	50
4.2.2. Caso $N = 2$	60
4.3. Regularidad de los multiplicadores	66
4.3.1. Caso $N = 3$	66
4.3.2. Caso $N = 2$	73
5. Simulación numérica del problema de control óptimo	80
5.1. Descripción del esquema numérico	80
5.2. Resultados numéricos	81
6. Conclusiones y Trabajos futuros	84
6.1. Conclusiones	84
6.2. Trabajos futuros	85
ANEXO	89

Índice de figuras

Figura 1.	Relación entre $\text{diam}(K)$ y $\rho(K)$ para un triángulo $K \subset \mathbb{R}^2$	17
Figura 2.	Evolución temporal del activador u	25
Figura 3.	Evolución temporal del inhibidor v	25
Figura 4.	Resultados numéricos para la especie u	82
Figura 5.	Resultados numéricos para la especie v	83

Resumen

Título: Análisis teórico de un problema de control óptimo asociado a un sistema de reacción difusión tipo Schnakenberg. *

Autor: Andrés Felipe Ortiz Flórez **

Palabras clave: Difusión cruzada, Elementos finitos, Solución global, Condición de optimalidad, Ecuación parabólica, Ecuación de reacción-difusión.

Descripción: En este trabajo estudiamos un problema de control óptimo bilineal asociado a un sistema acoplado de ecuaciones de reacción–difusión de tipo Schnakenberg con difusión cruzada. Primero, realizamos un análisis numérico de la ecuación de estado, correspondiente al sistema sin términos de control. Proponemos un esquema numérico basado en el método de los elementos finitos con mass lumping para aproximar sus soluciones y demostramos que el esquema está bien planteado y preserva la positividad de las soluciones discretas. Desde el punto de vista teórico, demostramos la existencia y unicidad de soluciones fuertes para el sistema controlado en dimensiones dos y tres. Posteriormente, probamos la existencia de una solución óptima global para un problema de control óptimo bilineal en el que el control actúa sobre una de las variables del sistema. Además, derivamos condiciones de optimalidad de primer orden haciendo uso de un teorema de existencia de multiplicadores de Lagrange en espacios de Banach. Finalmente, desarrollamos un esquema de aproximación numérica para el sistema de optimalidad basado en el método del gradiente y validamos su efectividad mediante experimentos computacionales que ilustran la influencia del control sobre la dinámica del modelo.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Física. Director: Juan Carlos López Ríos, Doctor en Ciencias de la Ingeniería, mención Modelamiento Matemático. Codirector: Diego Armando Rueda Gómez, Doctor en Matemáticas.

Abstract

Title: Theoretical analysis of an optimal control problem associated with a Schnakenberg-type reaction-diffusion system. *

Author: Andrés Felipe Ortiz Flórez **

Keywords: Cross-diffusion, Finite elements, Global solution, Optimality condition, Parabolic equation, Reaction–diffusion equation.

Description: In this work, we study a bilinear optimal control problem associated with a coupled reaction–diffusion system of Schnakenberg type with cross-diffusion. First, we perform a numerical analysis of the state equation, corresponding to the system without control terms. We propose a finite element scheme with mass lumping to approximate its solutions and we prove that the scheme preserves positivity and it is well-posed. From a theoretical perspective, we prove the existence and uniqueness of strong solutions for the controlled system in two and three dimensions. Subsequently, we prove the existence of a global optimal solution for a bilinear optimal control problem in which the control acts on one of the variables of the system. Moreover, we derive first-order optimality conditions through a Lagrange multiplier theorem in Banach spaces. Finally, we develop a numerical approximation scheme for the optimality system based on the gradient method and we validate its effectiveness through computational experiments that illustrate the influence of the control on the model’s dynamics.

* Master’s thesis

** Faculty of Sciences. School of Physics. Advisor: Juan Carlos López Ríos, Ph.D. in Engineering Sciences, specialization in Mathematical Modeling. Co-advisor: Diego Armando Rueda Gómez, Ph.D. in Mathematics.

Introducción

Los sistemas de reacción-difusión representan una clase destacada de modelos matemáticos que desempeñan un papel central en la modelización de una diversidad de fenómenos biológicos y químicos (Murray (1982)). Estos modelos se caracterizan por la capacidad de capturar interacciones espaciales y temporales entre dos o más especies, componentes o cantidades en un entorno continuo. Los sistemas de reacción-difusión encuentran aplicaciones en diversos dominios como biología (Britton (1986)), química (Vanag and Epstein (2009)), ecología (Kaneko and Yamada (2011)), física (Rao et al. (2023)), entre otros; ofreciendo una vía para comprender cómo las sustancias se difunden en el espacio y cómo las reacciones químicas o biológicas interactúan para originar estructuras y patrones notables. En particular, estos sistemas pueden generar patrones regulares y repetitivos, conocidos como patrones de Turing (Chen and Buceta (2019)), que representan una autoorganización espacial.

En Gambino et al. (2016) se considera el siguiente sistema de reacción difusión que describe la evolución de dos sustancias químicas en un espacio tridimensional. Este modelo ha sido propuesto para investigar la formación de patrones espaciales en sistemas químicos, y es dado por el siguiente sistema acoplado de ecuaciones diferenciales parciales (EDP)

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial t} &= D_u \Delta u + D_{uv} \Delta v + \gamma g_1(u, v), \\ \frac{\partial v}{\partial t} &= D_v \Delta v + D_{vu} \Delta u + \gamma g_2(u, v),\end{aligned}\tag{1}$$

donde u y v representan las concentraciones de dos sustancias químicas en un dominio espacial

Ω , con D_u y D_v siendo los coeficientes de difusión de u y v . Además, D_{uv} y D_{vu} representan los coeficientes de difusión cruzada entre las sustancias, y γ es una constante positiva que describe la influencia relativa de las reacciones químicas y puede interpretarse como la fuerza de reacción.

La reacción química que describe el sistema es de tipo Schnackenberg, ver Gaffney et al. (2016), la cual es dada por las fuentes g_1 y g_2 definidas por

$$g_1(u, v) = k_1 a_1 - k_2 u + k_3 u^2 v,$$

$$g_2(u, v) = k_4 b_1 - k_3 u^2 v.$$

El modelo determina el comportamiento de un químico activador u en presencia de un químico inhibidor v . En este sistema, el término no lineal $k_3 v u^2$ en g_1 representa la producción autocatalítica de u en presencia de v , es decir, la presencia de u acelera la velocidad de la reacción que conduce a su formación, mientras que en g_2 representa el consumo de v en presencia de u . El término $-k_2 u$ corresponde a la degradación de u , y los términos constantes $k_1 a_1$ y $k_4 b_1$ son fuentes de producción para las sustancias u y v , respectivamente. La novedad del sistema (1) respecto a un sistema de reacción difusión de tipo Schnackenberg es dada por la inclusión de los términos de difusión cruzada en el sistema; en efecto, recientemente se ha prestado atención a los efectos de difusión cruzada en modelos en los cuales el gradiente de densidad de una especie induce un flujo de otra especie, ver Madzvamuse et al. (2015). Se ha demostrado que, en una amplia clase de cinéticas depredador-presa o competitivas sin un término autocatalítico (Tulumello et al. (2014)), la difusión cruzada es responsable de la inestabilidad de Turing y favorece la formación de patrones. Con la introducción de términos de difusión cruzada lineal en el modelo de Schnackenberg, se

produce la desestabilización del estado constante, ver Madzvamuse et al. (2015).

Desde el punto de vista teórico, en relación al sistema (1), se ha estudiado su estabilidad y el mecanismo de formación de patrones en Gambino et al. (2016). Sin embargo, no se conocen resultados teóricos acerca de la existencia de soluciones para este sistema, ni de estudios sobre problemas de control óptimo con una ecuación de estado definida por este sistema. Desde el punto de vista numérico, aunque en Gambino et al. (2016) se han realizado simulaciones del sistema (1), lo que incluye la evaluación de la influencia de los términos de difusión cruzada en la estabilidad y el estudio de bifurcaciones numéricas, no se dispone de resultados teóricos relacionados con propiedades cualitativas de las soluciones discretas.

Tomando como base el sistema (1), en esta investigación abordamos un sistema de ecuaciones de reacción-difusión parabólicas que describe la interacción entre dos sustancias químicas. Definimos el sistema de la siguiente manera

$$\begin{cases} u_t - D_u \Delta u = D_{uv} \Delta v + \gamma g_1(u, v), & x \in \Omega, t > 0, \\ v_t - D_v \Delta v = \gamma g_2(u, v), & x \in \Omega, t > 0. \end{cases} \quad (2)$$

En este sistema, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ es un dominio con frontera suave para $N = 2, 3$; u y v también representan las concentraciones de dos sustancias químicas con coeficientes de difusión D_u y D_v , D_{uv} es el coeficiente de difusión cruzada y el coeficiente D_{vu} se considera siendo cero. Los términos de

reacción g_1 y g_2 están dados por

$$g_1 = a - u + v|u|^p,$$

$$g_2 = b - v|u|^p,$$

que es un modelo similar al de Schnackenberg, en donde a y b representan términos fuente y $-u$ un término de consumo. Además, la parte no lineal k_3vu^2 ha sido sustituida por $v|u|^p$. En este modelo, esta expresión hace que el sistema sea no lineal y también representa la producción autocatalítica (es decir, la presencia de u estimula o acelera la velocidad de su formación) de u en presencia de v , mientras que en la función g_2 representa el consumo de v en presencia de u . Completamos el sistema (2) con los siguientes datos iniciales y condiciones de no flujo en la frontera

$$\begin{cases} [u(0), v(0)] = [u_0, v_0], \quad v_0 \geq 0, \quad x \in \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0, \quad \text{sobre } \partial\Omega, \quad t \in (0, T), \end{cases} \quad (3)$$

donde ν denota el vector normal unitario hacia afuera de $\partial\Omega$.

Nuestro primer objetivo es proponer un esquema numérico completamente discreto, basado en una discretización de Euler semi-implícita en el tiempo y una discretización usando el método de los elementos finitos con *mass lumping* en espacio, para aproximar las soluciones del modelo (2). Específicamente, buscamos demostrar su buen planteamiento, así como propiedades cualitativas como la preservación de la positividad. Finalmente, realizamos experimentos numéricos para verificar el buen comportamiento del esquema, incluyendo la captura de la formación de patrones de

Turing.

Nuestro segundo objetivo es realizar el análisis matemático de un problema de control óptimo dado por la minimización de un funcional de costo general sujeto a restricciones, donde las ecuaciones de estado están dadas por el sistema (2). Para esto, consideramos el siguiente sistema controlado

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - D_u \Delta u = D_{uv} \Delta v + \gamma(a - u + v|u|^p) \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t v - D_v \Delta v = \gamma(b - v|u|^p) + f 1_{\Omega_c} v \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega. \end{array} \right. \quad (4)$$

En $\Omega \times (0, T)$, f es un control que actúa sobre la sustancia química inhibidora v en un subdominio $\Omega_c \subset \Omega$. El término $f 1_{\Omega_c} v$ puede interpretarse como un mecanismo de proliferación o degradación de v , dependiendo del signo de f en Ω_c . Aquí, 1_{Ω_c} denota la función característica asociada al conjunto Ω_c . Así pues, nuestro objetivo es analizar un problema de control óptimo de forma que cualquier estado admisible sea una solución fuerte de (4). Específicamente, el problema de control bilineal que analizaremos está dado por

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } [u, v, f] \in \mathcal{A} \times \mathcal{F} \text{ que minimice el funcional objetivo} \\ J([u, v, f]) = \frac{\gamma_u}{2} \int_0^T \|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\gamma_v}{2} \int_0^T \|v - v_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\gamma_f}{q} \int_0^T \|f\|_{L^q(\Omega_c)}^q dt \\ + \frac{\beta_1}{2} \int_{\Omega} |u(T) - u_T|^2 d\mathbf{x} + \frac{\beta_2}{2} \int_{\Omega} |v(T) - v_T|^2 d\mathbf{x}, \\ \text{bajo la restricción de que } [u, v] \text{ sea solución fuerte del sistema (4) con dato } f. \end{array} \right. \quad (5)$$

En (5), \mathcal{A} denota el espacio de estados admisibles el cual será definido explícitamente en el Capítulo 4. Además, $\mathcal{F} \subset L^q(0, T; L^q(\Omega)) := L^q(Q)$ representa el espacio de los controles admisibles, con $q = 3$ si $N = 3$, y $q = 2+$ si $N = 2$, el cual se asume que es un conjunto cerrado, convexo y no vacío. Acá, en general $p+ = p + \varepsilon$, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño. Además, las funciones $u_d, v_d \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, $u_T \in L^2(\Omega)$, y $v_T \in L^2(\Omega)$, representan estados deseados y $\gamma_u, \gamma_v, \beta_1, \beta_2$ y γ_f son parámetros reales no negativos (no todos cero) que miden el costo de los estados y del control, respectivamente. El funcional J describe la desviación de las concentraciones del activador u y del inhibidor v respecto a sus estados deseados u_d y v_d , respectivamente, más el costo del control en la norma $L^q(Q)$. Los dos últimos términos en la definición de J miden la distancia en norma L^2 entre las concentraciones finales $u(T)$ y $v(T)$ y los estados finales deseados u_T y v_T . La inclusión de estos términos puede ser útil en la práctica, ya que, de lo contrario, las soluciones pueden alejarse significativamente de los estados finales deseados cerca de $t = T$. Deseamos demostrar la solubilidad y unicidad del sistema de estados y, a continuación, analizamos un problema de control óptimo relacionado y establecemos condiciones de optimalidad de primer orden a través de la existencia y regularidad de los multiplicadores de Lagrange.

El presente trabajo está dividido en cinco capítulos cuyos contenidos han sido organizados de la siguiente manera: En el Capítulo 1, introducimos algunas notaciones básicas y resultados preliminares. En el Capítulo 2, analizamos numéricamente la ecuación de estado sin control, para lo cual proponemos un esquema basado en el método de los elementos finitos con mass lumping que está bien planteado y preserva la positividad de las soluciones discretas. En el Capítulo 3, planteamos la definición de solución fuerte y demostramos la existencia de soluciones fuertes de (4), para los

casos $N = 3$ y $N = 2$. En el Capítulo 4, analizamos la existencia de soluciones óptimas y derivamos las condiciones de optimalidad de primer orden. Finalmente, en el Capítulo 5, presentamos algunas simulaciones numéricas proporcionadas por un esquema de aproximación del sistema de optimalidad basado en el método del gradiente, que ilustra la dinámica de las variables controladas.

1. Preliminares

El objetivo de este capítulo es presentar los preliminares y establecer la notación que utilizaremos a lo largo de este documento. Sea Ω un dominio acotado de \mathbb{R}^N , $N = 2, 3$, con frontera $\partial\Omega$ de clase C^2 ; asumimos esta regularidad específica debido a que emplearemos frecuentemente un resultado de regularidad parabólica (véase el Teorema 1.1 más adelante). Consideramos los espacios de Sobolev clásicos $W^{k,p}(\Omega) = \{u \in L^p : \|\partial^\alpha u\|_{L^p} < \infty, \forall |\alpha| \leq k\}$ y los espacios de Lebesgue $L^p(\Omega)$, $1 \leq p \leq +\infty$, junto con sus respectivas normas $\|\cdot\|_{W^{k,p}}$ y $\|\cdot\|_{L^p}$. En particular, denotamos $W^{k,2}(\Omega) = H^k(\Omega)$, y representamos el producto interno en $L^2(\Omega)$ por (\cdot, \cdot) . Si Y es un espacio de Banach, llamamos $L^p(Y)$ al espacio de funciones valuadas en Y , definidas en el intervalo $[0, T]$, que son integrables en el sentido de Bochner, y denotamos su norma por $\|\cdot\|_{L^p(Y)}$. En particular, cuando Y es un espacio de Lebesgue $L^q(\Omega)$ o un espacio de Sobolev $W^{k,q}(\Omega)$, escribimos $L^p(Y)$ de forma abreviada como $L^p(L^q)$ o $L^p(W^{k,q})$, respectivamente. De igual forma, definimos $L^p(Q) := L^p(0, T; L^p(\Omega))$ para $1 \leq p \leq \infty$, y usamos $\|\cdot\|_{L^p(Q)}$ para denotar su norma. Designamos por $C([0, T]; Y)$ al espacio de funciones continuas desde $[0, T]$ hacia un espacio de Banach Y , con norma $\|\cdot\|_{C(Y)}$. El dual topológico de un espacio de Banach Y lo denotamos por Y' , y representamos la dualidad entre un par Y y Y' por $\langle \cdot, \cdot \rangle_{Y'}$. Además, utilizamos \xrightarrow{c} para indicar la inmersión compacta entre espacios. Las letras C , K y K_ε las empleamos para representar constantes positivas

independientes del estado (u, v) y del control f , aunque su valor pueda cambiar de una línea a otra.

Para estudiar las propiedades de existencia y regularidad de soluciones del sistema (4), consideremos los espacios

$$\widehat{W}^{2-2/p,p}(\Omega) := \begin{cases} W^{2-2/p,p}(\Omega) & \text{si } p < 3, \\ W_v^{2-2/p,p}(\Omega) & \text{si } p > 3, \end{cases}$$

donde

$$W_v^{k,p}(\Omega) := \left\{ u \in W^{k,p}(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial v} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}.$$

A continuación, enunciaremos el teorema de regularidad parabólica, que aplicaremos con frecuencia en los análisis posteriores.

Teorema 1.1 (*Feireisl and Novotný (2009), Teorema 10.22.*) *Sea Ω un dominio de clase C^2 y $1 < q < +\infty$, ($q \neq 3$), $u_0 \in \widehat{W}^{2-2/q,q}(\Omega)$, y $g \in L^q(Q)$. Entonces el problema*

$$\begin{cases} \partial_t u - \Delta u = g & \text{en } Q, \\ u(0, \cdot) = u_0 & \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial v} = 0 & \text{sobre } (0, T) \times \partial\Omega, \end{cases}$$

admite una única solución u tal que

$$u \in C\left([0, T]; \widehat{W}^{2-2/q,q}\right) \cap L^q\left(W_v^{2,q}\right), \quad \partial_t u \in L^q(Q).$$

Además, existe una constante positiva $C := C(p, \Omega, T)$ de modo que

$$\|u\|_{C(\widehat{W}^{2-2/q,q})} + \|\partial_t u\|_{L^q(Q)} + \|u\|_{L^q(W^{2,q})} \leq C (\|g\|_{L^q(Q)} + \|u_0\|_{\widehat{W}^{2-2/q,q}}).$$

Observación 1.0.1 El Teorema 1.1 continúa siendo válido para el caso $q = 3$, reemplazando el espacio $C([0, T]; \widehat{W}^{2-2/q,q})$ por $C([0, T]; Z_q)$, siendo Z_q el espacio de interpolación real entre $W_v^{2,q}(\Omega)$ y $L^q(\Omega)$ (ver detalles en Feireisl and Novotný (2009)).

En lo que sigue, utilizaremos la siguiente notación para referirnos a espacios de Banach específicos:

$$\begin{aligned} X &:= \left\{ u \in C(L^2(\Omega)) \cap L^2(H^1(\Omega)) : \partial_t u \in L^2\left((H^1(\Omega))'\right) \right\}, \\ \widehat{X} &:= \{u \in X : u(0) = 0\}, \\ X_p &:= \left\{ u \in C(\widehat{W}^{2-2/p,p}) \cap L^p(W^{2,p}) : \partial_t u \in L^p(Q) \right\}, \\ \widehat{X}_p &:= \left\{ v \in X_p : v(0) = 0, \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \right\}, \\ \widehat{X}_{p+} &:= \left\{ v \in X_{p+} : v(0) = 0, \frac{\partial v}{\partial \nu} \Big|_{\partial \Omega} = 0 \right\}, \end{aligned} \tag{6}$$

en el caso particular $p = 3$, emplearemos la notación

$$X_3 := \{u \in C(Z_3) \cap L^3(W^{2,3}) : \partial_t u \in L^3(Q)\},$$

donde Z_q denota el espacio de interpolación real entre $W_v^{2,q}(\Omega)$ y $L^q(\Omega)$. Usaremos el teorema de punto fijo de Leray-Schauder en varias ocasiones para demostrar la existencia de solución para

algunos problemas de EDP no lineales. Además definimos el espacio $L^{\infty-}(\Omega)$ como

$$L^{\infty-}(\Omega) := \bigcap_{1 \leq r < \infty} L^r(\Omega).$$

Teorema 1.2 (*Teorema de punto fijo de Leray-Schauder*). Sea \mathcal{X} un espacio de Banach y $\Gamma : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{Y}$ un operador compacto y continuo. Si el conjunto

$$\mathcal{T}_\beta := \{x \in \mathcal{X} : x = \beta \Gamma x \text{ para } 0 \leq \beta \leq 1\}$$

es acotado, entonces Γ tiene (como mínimo) un punto fijo.

Teorema 1.3 (*Lions, 1969, Teorema 5.1.*) Consideremos \mathcal{X} , \mathcal{B} , y \mathcal{Y} como espacios de Banach reflexivos tales que $\mathcal{X} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{Y}$, con inclusión compacta $\mathcal{X} \xrightarrow{c} \mathcal{B}$ e inclusión continua $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{Y}$. Si definimos

$$W = \{w : w \in L^{p_0}(0, T; \mathcal{X}), \partial_t w \in L^{p_1}(0, T; \mathcal{Y})\}$$

para un $T > 0$ finito y $p_0, p_1 \in (1, +\infty)$, entonces la inyección de W sobre $L^{p_0}(0, T; \mathcal{B})$ es compacta.

Teorema 1.4 (*Simon, 1987, Corolario 4.*) Supongamos que \mathcal{X} , \mathcal{B} , y \mathcal{Y} son espacios de Banach tales que $\mathcal{X} \subset \mathcal{B} \subset \mathcal{Y}$, con inclusión compacta $\mathcal{X} \xrightarrow{c} \mathcal{B}$ e inclusión continua $\mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{Y}$. Sea F un conjunto acotado en $L^\infty(0, T; \mathcal{X})$ tal que el conjunto $\partial_t F = \left\{ \frac{\partial f}{\partial t}; f \in F \right\}$ es acotado en $L^r(0, T; \mathcal{Y})$ para algún $r > 1$. Entonces F es relativamente compacto en $C([0, T]; \mathcal{B})$.

A lo largo de este trabajo, usaremos con frecuencia desigualdades clásicas en espacios de Lebesgue y espacios de Sobolev, entre las que incluimos la desigualdad de Hölder, la desigualdad de Gagliardo-Nirenberg y la desigualdad de Gronwall, entre otras.

Teorema 1.5 (*Desigualdad de Gronwall*). Sea I un intervalo de la recta real de la forma $[a, \infty)$ o $[a, b]$ o $[a, b)$ con $a < b$. Sean α , β y u funciones de valor real definidas en I . Supongamos que β y u son continuas y que la parte negativa de α es integrable en cada subintervalo cerrado y acotado de I .

- Si β es no negativa y si u satisface la desigualdad integral

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \beta(s)u(s)ds, \quad \forall t \in I,$$

entonces

$$u(t) \leq \alpha(t) + \int_a^t \alpha(s)\beta(s) \exp\left(\int_s^t \beta(r)dr\right) ds, \quad t \in I.$$

- Además, si la función α es no decreciente, entonces

$$u(t) \leq \alpha(t) \exp\left(\int_a^t \beta(s)ds\right).$$

Teorema 1.6 (*Desigualdad de Hölder*). Sean $p, q \in [1, \infty]$, tales que $1/p + 1/q = 1$. Si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$ entonces $fg \in L^1(\Omega)$ y $\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}$.

Teorema 1.7 (*Nirenberg, 1959, Desigualdad de interpolación de Gagliardo-Nirenberg*.) Sea $\Omega \subset$

\mathbb{R}^N un dominio medible y acotado con frontera Lipschitz. Sean $1 \leq q \leq +\infty$, j y m enteros no negativos tales que $j < m$, $1 \leq r \leq +\infty$, $p \geq 1$ y $\theta \in [0, 1]$ donde

$$\frac{1}{p} = \frac{j}{N} + \theta \left(\frac{1}{r} - \frac{m}{N} \right) + \frac{1-\theta}{q}, \quad \frac{j}{m} \leq \theta \leq 1.$$

Entonces $\|D^j u\|_{L^p(\Omega)} \leq C \|D^m u\|_{L^r(\Omega)}^\theta \|u\|_{L^q(\Omega)}^{1-\theta} + C \|u\|_{L^\sigma(\Omega)}$,

donde $u \in L^q(\Omega)$ tal que $D^m u \in L^r(\Omega)$ y σ es arbitraria, con un caso excepcional:

- Si $r > 1$ y $m - j - \frac{N}{r}$ es un entero no negativo, entonces la hipótesis adicional $\frac{j}{m} \leq \theta < 1$ (note la desigualdad estricta) es necesaria.

En cualquier caso, la constante $C > 0$ depende de los parámetros j, m, N, q, r, θ y el dominio Ω , pero no de u .

Teorema 1.8 (Inmersiones de Sobolev). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con frontera de clase C^1 , $m \in \mathbb{N}$, $1 \leq p < +\infty$. Si $R = \frac{1}{p} - \frac{m}{N}$ entonces valen los siguientes enunciados con inmersiones continuas:

- Si $R > 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, donde $q = \frac{1}{R}$.
- Si $R = 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, donde $q \in [p, +\infty)$.
- Si $R < 0$ entonces $W^{m,p}(\Omega) \hookrightarrow L^\infty(\Omega)$.

Teorema 1.9 (Adams and Fournier, 1975, Teorema 6.3). Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ un dominio acotado con

frontera de clase C^1 . Si $0 < N - mp$ y $j + m - \frac{N}{p} \geq j - \frac{N}{q}$, entonces la inmersión de Sobolev

$$W^{j+m,p}(M) \hookrightarrow W^{j,q}(M),$$

es compacta.

Lema 1.10 *Supongamos $r, s > 0$, $1 < p < 2$ y $\Omega \subset \mathbb{R}^d$; entonces tenemos la siguiente inmersión entre espacios de Sobolev:*

$$W^{r,p}(\Omega) \hookrightarrow H^s(\Omega), \quad \text{con } s = d \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{p} \right) + r.$$

Lema 1.11 *(Lions and Magenes, 1968, Teorema 9.6). Sean $p, p_1, p_2 \geq 1$ y $s_1, s_2 \geq 0$ tales que*

$$s = (1 - \theta)s_1 + \theta s_2, \quad \frac{1}{p} = \frac{1 - \theta}{p_1} + \frac{\theta}{p_2}, \quad \text{con } \theta \in [0, 1].$$

Entonces, $L^{p_1}(H^{s_1}) \cap L^{p_2}(H^{s_2}) \hookrightarrow L^p(H^s)$.

El siguiente resultado se puede deducir usando las inmersiones de Sobolev y la desigualdad de Gagliardo–Nirenberg.

Lema 1.12 *Sean $p, q, p_1, p_2, q_1 \geq 1$ tales que*

$$\frac{1}{q} = \frac{1 - \theta}{q_1} + \theta \left(\frac{1}{p_1} - \frac{r}{N} \right), \quad \frac{1}{p} = \frac{\theta}{p_2}, \quad \text{con } r > 0 \text{ y } \theta \in [0, 1].$$

Entonces, $L^\infty(L^{q_1}) \cap L^{p_2}(W^{r,p_1}) \hookrightarrow L^p(L^q)$.

Deducimos el siguiente corolario del Lema 1.12.

Corolario 1.13 Si $N = 3$, $L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1) \hookrightarrow L^{10/3}(Q)$ y $L^\infty(H^1) \cap L^2(H^2) \hookrightarrow L^{10}(Q)$.

Obtenemos el siguiente resultado como consecuencia de los Lemas 1.10-1.12.

Proposición 1.14 Sea Ω un dominio Lipschitz acotado en \mathbb{R}^N . Si $N = 3$, entonces:

- Si $q \in [1, \frac{5}{2})$, se tiene que $X_q \subset L^{\frac{5q}{5-2q}}(Q)$.
- Si $q = \frac{5}{2}$, entonces $X_q \subset L^\infty(L^r)$ para todo $r \in [1, \infty)$, o bien $X_q \subset L^\infty(L^{\infty-})$.
- Si $q > \frac{5}{2}$, entonces $X_q \subset L^\infty(Q)$.

Si $N = 2$, entonces:

- Si $q \in [1, 2)$, se tiene que $X_q \subset L^{\frac{q+2}{2-q}}(Q)$.
- Si $q = 2$, entonces $X_q \subset L^\infty(L^r)$ para todo $r \in [1, \infty)$, o bien $X_q \subset L^\infty(L^{\infty-})$.
- Si $q > 2$, entonces $X_q \subset L^\infty(Q)$.

2. Esquema numérico para el problema sin control

En este capítulo, planteamos un esquema numérico para aproximar las soluciones del modelo matemático (2).

2.1. Definiciones preliminares

Para la discretización temporal, consideramos una partición de $[0, T]$ con paso de tiempo $\Delta t = T/N$, donde definimos $t_n = n\Delta t$ para $n = 0, \dots, N$. Para la discretización espacial, utilizamos una familia de triangulaciones cuasiuniformes de $\overline{\Omega}$, que denotamos por $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$. Esta familia

está formada por símplies K (triángulos en 2D o tetraedros en 3D) cuyos ángulos interiores son menores o iguales que $\pi/2$ (triangulaciones no obtusas), de manera que

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{K \in \mathcal{T}_h} K.$$

Definimos h como $h = \max_{K \in \mathcal{T}_h} h_K$, donde h_K representa el diámetro del símplex K . Recordemos que denominamos “cuasiuniforme” a una triangulación $\{\mathcal{T}_h\}_{h>0}$ de Ω si existen constantes positivas C_1 y C_2 tales que, para cada $K \in \mathcal{T}_h$,

$$C_1 h \leq \rho(K) \quad \text{y} \quad \text{diam}(K) \leq C_2 h,$$

donde $\rho(K)$ es el radio del mayor círculo inscrito en K y $\text{diam}(K)$ es el diámetro del menor círculo que contiene a K .

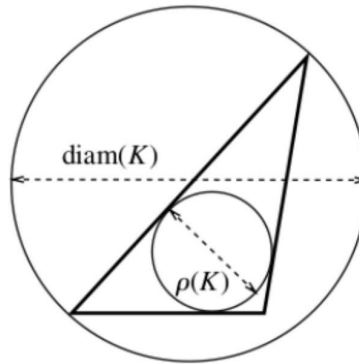


Figura 1. Relación entre $\text{diam}(K)$ y $\rho(K)$ para un triángulo $K \subset \mathbb{R}^2$.

Consideramos el siguiente espacio elementos finitos para u y v

$$\mathcal{X} = \{u \in C(\bar{\Omega}) : u|_K \in \mathbb{P}_1 \forall K \in \mathcal{T}_h\} \subset H^1(\Omega),$$

donde denotamos por \mathbb{P}_1 el conjunto de polinomios de grado menor o igual que 1. Así mismo, denotamos el conjunto de nodos de \mathcal{T}_h por $\mathcal{N}_h = \{a_j\}_{j \in J}$, y usamos $\{\varphi_{a_j}\}_{j \in J}$ para referirnos a las funciones base estándar de \mathcal{X} . Definimos el operador de interpolación nodal $I_h : C(\bar{\Omega}) \rightarrow \mathcal{X}$ como

$$I_h(m(\mathbf{x})) = \sum_{j \in J} m(a_j) \varphi_{a_j}(\mathbf{x}).$$

Introducimos el semi-producto interno en $C(\bar{\Omega})$, conocido en la literatura como “mass lumping” (el cual sí constituye un producto interno en \mathcal{X}), junto con su semi-norma inducida

$$(m_1, m_2)^h := \int_{\Omega} I_h(m_1 m_2) d\mathbf{x} = \sum_{j \in J} m_1(a_j) m_2(a_j) \int_{\Omega} \varphi_{a_j}(\mathbf{x}) d\mathbf{x}, \quad (7)$$

$$|m|_h := \sqrt{(m, m)^h}.$$

Usamos los elementos finitos \mathbb{P}_1 en \mathcal{X} , junto con el operador “mass lumping” definido en (7), para obtener una formulación discreta adecuada que garantice la no negatividad de las soluciones discretas $[u_h, v_h]$. Así mismo, introducimos el operador de proyección $Q_h : L^2(\Omega) \rightarrow \mathcal{X}$, definido para cada $z \in L^2(\Omega)$ por

$$(Q_h z, \bar{z})^h = (z, \bar{z}), \quad \forall \bar{z} \in \mathcal{X}. \quad (8)$$

Observación 2.1.1 En \mathcal{X} y \mathcal{X} , las normas $|\cdot|_h$ y $\|\cdot\|_{L^2}$ son uniformemente equivalentes con respecto a h .

2.2. Definición del esquema numérico

Proponemos el siguiente esquema numérico de primer orden en el tiempo, lineal y desacoplado (en general, denotaremos $\delta_t a_h^n = \frac{a_h^n - a_h^{n-1}}{\Delta t}$ y $a_+ = \max\{a, 0\} \geq 0$):

- **Inicialización:** Tomamos

$$[u_h^0, v_h^0] = [Q_h u_0, Q_h v_0] \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}.$$

- **Paso 1:** Dados $[u_h^{n-1}, v_h^{n-1}] \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, computamos $v_h^n \in \mathcal{X}$ tal que, para todo $\bar{v} \in \mathcal{X}$,

$$(\delta_t v_h^n, \bar{v})^h + D_v(\nabla v_h^n, \nabla \bar{v}) - \gamma(b, \bar{v}) + \gamma(v_h^n |u_h^{n-1}|^p, \bar{v})^h = 0. \quad (9)$$

- **Paso 2:** Dados $[u_h^{n-1}, v_h^n] \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, computamos $u_h^n \in \mathcal{X}$ tal que, para todo $\bar{u} \in \mathcal{X}$,

$$(\delta_t u_h^n, \bar{u})^h + D_u(\nabla u_h^n, \nabla \bar{u}) + D_{uv}(\nabla v_h^n, \nabla \bar{u}) - \gamma(a, \bar{u}) + \gamma(u_h^n, \bar{u})^h - \gamma(v_h^n |u_h^{n-1}|^p, \bar{u})^h = 0. \quad (10)$$

Observación 2.2.1 Si $u_0, v_0 \geq 0$, entonces $u_h^0, v_h^0 \geq 0$. De hecho, de (8) tenemos que

$$(u_h^0, \bar{u})^h = (Q_h u_0, \bar{u})^h = (u_0, \bar{u}), \quad \forall \bar{u} \in \mathcal{X}.$$

Tomamos $\bar{u} = I_h([u_h^0]_-) \in \mathcal{X}$, donde $[u_h^0]_- = \min\{u_h^0, 0\} \leq 0$, y obtenemos

$$\int_{\Omega} I_h([u_h^0]_-^2) d\mathbf{x} = (u_0, I_h([u_h^0]_-)) \leq 0,$$

lo que implica que $I_h([u_h^0]_-) = 0$, y por tanto concluimos que $u_h^0 \geq 0$. Un razonamiento análogo muestra que $v_h^0 \geq 0$.

2.3. Propiedades del esquema numérico

En esta sección demostramos el buen planteamiento del esquema numérico definido en (9)–(10), así como la propiedad de no negatividad para las soluciones discretas u_h^n y v_h^n . Específicamente, probamos que la solución v_h^n de (9) es no negativa, mientras que solo garantizamos esta propiedad para u_h^n en el caso $D_{uv} = 0$. En el caso general $D_{uv} \neq 0$, no está clara la no negatividad de u_h^n . De ahora en adelante, usamos la notación $a_- = \min\{a, 0\} \leq 0$.

Lemma 2.3.1 (Positividad de v_h^n) *Sea $(v_h^n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por el esquema (9). Si $v_h^{n-1} \geq 0$, entonces $v_h^n \geq 0$.*

Demostración. Supongamos que $v_h^{n-1} \geq 0$ y tomemos $\bar{v} = I_h((v_h^{n-1})_-)$ en (9). Estimamos primero el término temporal de la siguiente manera

$$\begin{aligned} (\delta_t v_h^n, I_h((v_h^n)_-))^h &= \int_{\Omega} I_h \left(\frac{v_h^n - v_h^{n-1}}{\Delta t} \cdot (v_h^n)_- \right) d\mathbf{x} \\ &= \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} [I_h((v_h^n)_-^2) - I_h(v_h^{n-1}(v_h^n)_-)] d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (11)$$

Como I_h preserva el signo, $v_h^{n-1} \geq 0$ y $(v_h^n)_- \leq 0$, entonces $-I_h(v_h^{n-1}(v_h^n)_-) \geq 0$. Por lo tanto, teniendo en cuenta que $(I_h(v))^2 \leq I_h(v^2)$ para todo $v \in C(\bar{\Omega})$, obtenemos

$$\begin{aligned} (\delta_t v_h^n, I_h((v_h^n)_-))^h &\geq \frac{1}{\Delta t} \int_{\Omega} I_h((v_h^n)_-^2) d\mathbf{x} \\ &\geq \frac{1}{\Delta t} \|I_h((v_h^n)_-)\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Ahora estimamos el término de difusión. Usando el hecho de que

$$v_h^n = I_h((v_h^n)_+) + I_h((v_h^n)_-),$$

tenemos que

$$(\nabla v_h^n, \nabla I_h((v_h^n)_-)) = (\nabla I_h((v_h^n)_+), \nabla I_h((v_h^n)_-)) + \|\nabla I_h((v_h^n)_-)\|_{L^2}^2. \quad (12)$$

Podemos expresar el primer término del lado derecho de (12) como

$$\int_{\Omega} \nabla I_h((v_h^n)_+) \cdot \nabla I_h((v_h^n)_-) d\mathbf{x} = \sum_{i,j \in J} (v_h^n)_+(x_i) (v_h^n)_-(x_j) \int_{\Omega} \nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j d\mathbf{x}.$$

Si $i = j$, entonces el producto $(v_h^n)_+(x_i) \cdot (v_h^n)_-(x_j)$ es cero. Si $i \neq j$, entonces $(v_h^n)_+(x_i) (v_h^n)_-(x_j) \leq 0$, además usando la proposición 2.5 de Guillén-González and Gutiérrez-Santacreu (2019) deducimos que $\nabla \phi_i \cdot \nabla \phi_j \leq 0$. Por lo tanto,

$$(\nabla I_h((v_h^n)_+), \nabla I_h((v_h^n)_-)) \geq 0. \quad (13)$$

Así, de (12) y (13) tenemos que

$$D_v(\nabla v_h^n, \nabla I_h((v_h^n)_-)) \geq D_v \|\nabla I_h((v_h^n)_-)\|_{L^2}^2. \quad (14)$$

Ahora estimamos el término de reacción no lineal

$$\begin{aligned} (|u_h^{n-1}|^p v_h^n, I_h((v_h^n)_-))^h &= \int_{\Omega} I_h (|u_h^{n-1}|^p v_h^n (v_h^n)_-) d\mathbf{x} \\ &= \int_{\Omega} I_h (|u_h^{n-1}|^p (v_h^n)_-^2) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (15)$$

Finalmente, estimamos el término fuente lineal

$$-\gamma(b, \bar{v}) = -\gamma(b, I_h((v_h^n)_-)) \geq 0, \quad (16)$$

ya que $b > 0$ y $I_h((v_h^n)_-) \leq 0$. Por lo tanto, de (11)-(16) llegamos a

$$\frac{1}{\Delta t} \|I_h((v_h^n)_-)\|_{L^2}^2 + D_v \|\nabla I_h((v_h^n)_-)\|_{L^2}^2 + \gamma \int_{\Omega} I_h (|u_h^{n-1}|^p (v_h^n)_-^2) d\mathbf{x} \leq 0,$$

lo que implica que $\|I_h((v_h^n)_-)\|_{L^2}^2 = 0$, y así, $(v_h^n)_- = 0$. Por lo tanto, $v_h^n \geq 0$. \square

Lemma 2.3.2 (Positividad condicionada de u_h^n) Sea $(u_h^n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión definida por el esquema

(10). Si $D_{uv} = 0$ y $u_h^{n-1} \geq 0$, entonces $u_h^n \geq 0$.

Demostración. Tomamos $\bar{u} = I_h((u_h^n)_-) \in \mathcal{X}$ en (10) y obtenemos

$$\begin{aligned} (\delta_t u_h^n, I_h((u_h^n)_-))^h + D_u (\nabla u_h^n, \nabla I_h((u_h^n)_-)) \\ - \gamma(a, I_h((u_h^n)_-)) + \gamma(u_h^n, I_h((u_h^n)_-))^h - \gamma(v_h^n |u_h^{n-1}|^p, I_h((u_h^n)_-))^h = 0. \end{aligned} \quad (17)$$

Luego, usando el hecho de que $a, v_h^n \geq 0$ y procediendo análogamente como en (11) - (16), dedu-

mos que $u_h^n \geq 0$. □

Lemma 2.3.3 (Buena postura del esquema (9)–(10)) *Dado $[u_h^{n-1}, v_h^{n-1}] \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, existe una única solución $[u_h^n, v_h^n] \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$ del esquema (9)–(10).*

Demostración. Dado que (9)–(10) es un sistema algebraico lineal, basta demostrar la unicidad.

Primero, fijado $[u_h^{n-1}, v_h^{n-1}]$, supongamos que $v_{h,1}^n, v_{h,2}^n \in \mathcal{X}$ son dos soluciones de (9). Entonces

$v_h^n = v_{h,1}^n - v_{h,2}^n \in \mathcal{X}$ satisface

$$\frac{1}{\Delta t} (v_h^n, \bar{v})^h + D_v (\nabla v_h^n, \nabla \bar{v}) + \gamma (v_h^n |u_h^{n-1}|^p, \bar{v})^h = 0, \quad \forall \bar{v} \in \mathcal{X}. \quad (18)$$

Tomamos $\bar{v} = v_h^n$ y usando la Observación 2.1.1, tenemos que existe una constante $c > 0$ tal que

$$\left(\frac{c}{\Delta t}\right) \|v_h^n\|_{L^2}^2 + D_v \|\nabla v_h^n\|_{L^2}^2 + \int_{\Omega} I_h ((v_h^n)^2 |u_h^{n-1}|^p) d\mathbf{x} \leq 0. \quad (19)$$

Como todos los términos del lado izquierdo de (19) son no negativos, deducimos que $\|v_h^n\|_{L^2}^2 = 0$,

es decir, $v_{h,1}^n = v_{h,2}^n$. Ahora, fijado $[u_h^{n-1}, v_h^n]$, supongamos que $u_{h,1}^n, u_{h,2}^n \in \mathcal{X}$ son dos soluciones de

(10). Entonces $u_h^n = u_{h,1}^n - u_{h,2}^n \in \mathcal{X}$ satisface

$$\frac{1}{\Delta t} (u_h^n, \bar{u})^h + D_u (\nabla u_h^n, \nabla \bar{u}) + \gamma (u_h^n, \bar{u})^h = 0, \quad \forall \bar{u} \in \mathcal{X}. \quad (20)$$

Tomamos $\bar{u} = u_h^n$ y usamos nuevamente la Observación 2.1.1 para concluir que existe una constante

$c_2 > 0$ tal que

$$\left(\frac{c_2}{\Delta t}\right) \|u_h^n\|_{L^2}^2 + D_u \|\nabla u_h^n\|_{L^2}^2 + \gamma \int_{\Omega} I_h((u_h^n)^2) d\mathbf{x} \leq 0. \quad (21)$$

Como todos los términos son no negativos, concluimos que $\|u_h^n\|_{L^2}^2 = 0$, lo que implica $u_{h,1}^n = u_{h,2}^n$.

□

2.4. Simulación numérica

En esta sección presentamos una simulación numérica usando el esquema (9)-(10) con el fin de ilustrar la evolución temporal del activador u y del inhibidor v . Obtuvimos todos los resultados numéricos utilizando el software FreeFem++. Para este experimento, consideramos el dominio cuadrado $\Omega = (0, 100)^2 \subset \mathbb{R}^2$, discretizado mediante una malla uniforme de 80×80 elementos. Para la discretización temporal utilizamos un paso de tiempo $\Delta t = 0.01$. Como condiciones iniciales tomamos las funciones

$$u_0(x, y) = a + b + \mathcal{U}(0, 1), \quad v_0(x, y) = \frac{b}{(a + b)^2} + \mathcal{U}(0, 1),$$

donde $\mathcal{U}(0, 1)$ representa una perturbación aleatoria uniforme en el intervalo $(0, 1)$. Fijamos los parámetros en $D_u = 1$, $D_v = 40$, $D_{uv} = 0$, $a = 0.1$, $b = 0.9$, $\gamma = 1$, $p = 2$. En la Figura 2 mostramos la evolución temporal del activador u , mientras que en la Figura 3 presentamos el comportamiento del inhibidor v .

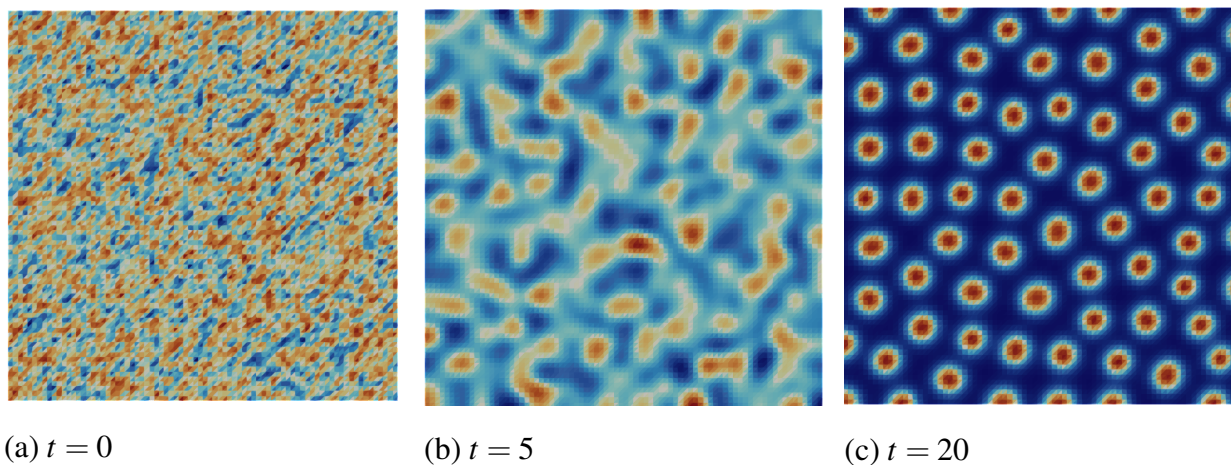


Figura 2. Evolución temporal del activador u .

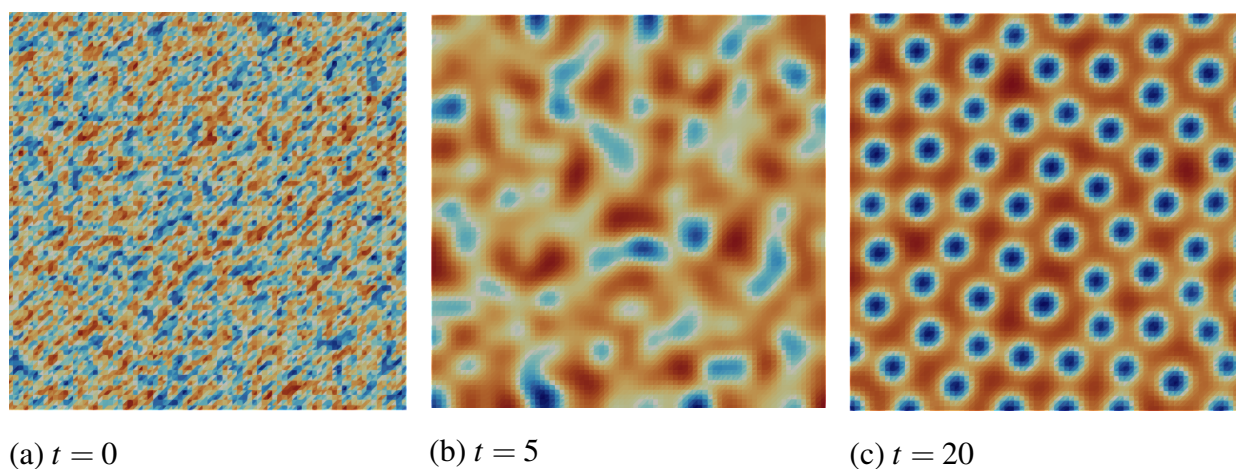


Figura 3. Evolución temporal del inhibidor v .

En las Figuras 2 y 3 mostramos cómo evoluciona temporalmente el activador u y el inhibidor v del modelo de Schnakenberg. Las simulaciones revelan la formación de patrones de Turing en forma de estructuras circulares, como se espera en este tipo de modelo. Además, los resultados reflejan directamente la interacción entre ambas especies químicas: en las regiones donde aumenta la concentración de u , disminuye la de v , y viceversa, reproduciendo el comportamiento característico

del sistema.

3. Existencia de solución fuerte

En este capítulo presentamos una definición de solución fuerte asociada al sistema (4) y mostramos algunos resultados de existencia y unicidad de soluciones para los casos $N = 3$ y $N = 2$.

Definición 3.1 (*Solución fuerte*) Sea Ω un dominio Lipschitz acotado en \mathbb{R}^N .

- Sean $N = 3$, $0 < T < \infty$, $p \in [1, \frac{7}{3})$, $f \in L^3(Q)$, $u_0, v_0 \in \widehat{W}^{\frac{4}{3}, 3}(\Omega)$ tales que $v_0 \geq 0$ en Ω .

Llamamos solución fuerte de (4) a una dupla $[u, v]$ de funciones tales que $v \geq 0$ c.t.p. en $(0, T) \times \Omega$,

$$u, v \in \{u \in C(Z_3) \cap L^3(W^{2,3}) : \partial_t u \in L^3(Q)\},$$

y que verifican el sistema (4).

- Sean $N = 2$, $0 < T < \infty$, $p \in [1, \frac{10}{3})$, $f \in L^{2+}(Q)$, $u_0, v_0 \in \widehat{W}^{1+, 2+}(\Omega)$ tales que $v_0 \geq 0$ en Ω .

Llamamos solución fuerte de (4) a una dupla $[u, v]$ de funciones tales que $v \geq 0$ c.t.p. en $(0, T) \times \Omega$,

$$u, v \in X_{2+} := \left\{ u \in C\left(\widehat{W}^{1+, 2+}\right) \cap L^{2+}(W^{2, 2+}) : \partial_t u \in L^{2+}(Q) \right\},$$

y que verifican el sistema (4).

3.1. Existencia de solución, caso $N = 3$

En esta sección, demostramos que el sistema (4) tiene solución fuerte para el caso de dimensión $N = 3$, haciendo uso del Teorema de punto fijo de Leray-Schauder. Además, demostramos que la solución es única.

Teorema 3.2 *Sea $N = 3$. Existe una solución fuerte de (4) en el sentido de la Definición 3.1.*

Demostración. Consideremos el espacio

$$X_{u,v} := L^\infty \left(W_{3,3}^4 \right) \cap L^2 \left(H^2 \right),$$

y el operador

$$\Gamma : X_{u,v} \times X_{u,v} \longrightarrow X_3 \times X_3$$

$$[\bar{u}, \bar{v}] \longrightarrow \Gamma([\bar{u}, \bar{v}]) = [u, v],$$

donde $[u, v]$ es la solución del sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - D_u \Delta u = D_{uv} \Delta v + \gamma(a - \bar{u} + \bar{v} |\bar{u}|^p) \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t v - D_v \Delta v = \gamma(b - \bar{v} |\bar{u}|^p) + f 1_{\Omega_c} \bar{v} \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega. \end{array} \right. \quad (22)$$

Verifiquemos que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.2.

Paso 1: Γ está bien definido.

Sea $[\bar{u}, \bar{v}] \in X_{u,v} \times X_{u,v}$. En primer lugar, de la Proposición 1.14 tenemos que $X_{u,v} \hookrightarrow L^\infty(Q)$. Como $f \in L^3(Q)$, concluimos que $f1_{\Omega_c} \bar{v} \in L^3(Q)$. Además, como $\bar{v}|\bar{u}|^p \in L^\infty(Q)$, aplicamos el Teorema 1.1 y obtenemos una única solución $v \in X_3$ de la ecuación (22)₂ y la estimativa

$$\|v\|_{X_3} \leq K \left(\|v_0\|_{\widehat{W}_{3,3}^{4,3}} + \|\gamma(b - \bar{v}|\bar{u}|^p) + f1_{\Omega_c} \bar{v}\|_{L^3} \right). \quad (23)$$

Por otra parte, como $v \in X_3$, concluimos que $D_{uv}\Delta v \in L^3(Q)$. Además, dado que $\gamma\bar{v}|\bar{u}|^p \in L^\infty(Q)$, deducimos que $D_{uv}\Delta v + \gamma(a - \bar{u} + \bar{v}|\bar{u}|^p) \in L^3(Q)$. Por lo tanto, al aplicar nuevamente el Teorema 1.1, obtenemos una única solución $u \in X_3$ de (22)₁ y la siguiente estimativa

$$\begin{aligned} \|u\|_{X_3} &\leq K \left(\|u_0\|_{\widehat{W}_{3,3}^{4,3}} + \|D_{uv}\Delta v + \gamma(a - \bar{u} + \bar{v}|\bar{u}|^p)\|_{L^3} \right) \\ &\leq K \left(\|u_0\|_{\widehat{W}_{3,3}^{4,3}} + D_{uv}\|v\|_{X_3} + \|\gamma(a - \bar{u} + \bar{v}|\bar{u}|^p)\|_{L^3} \right). \end{aligned} \quad (24)$$

Por lo tanto, dado $[\bar{u}, \bar{v}] \in X_{u,v} \times X_{u,v}$, concluimos que existe un único par $[u, v] \in X_3 \times X_3$ que satisface (22); es decir, el operador Γ está bien definido.

Paso 2: Γ es un operador compacto.

Veamos que $X_3 \xhookrightarrow{c} X_{u,v}$. Del Teorema 1.9 se sigue que $\widehat{W}^{2,3}(\Omega) \xhookrightarrow{c} H^1(\Omega)$. Usando el Teorema 1.3 y el Corolario 1.4, deducimos que $X_3 \xhookrightarrow{c} X_{u,v}$. De este modo, concluimos que Γ es compacto.

Paso 3: El conjunto de puntos fijos de $\beta\Gamma$, $\beta \in [0, 1]$ es acotado en $X_{u,v} \times X_{u,v}$.

Consideramos $\beta \in (0, 1]$ (el caso $\beta = 0$ es claro). Si $[u, v]$ es un punto fijo de $\beta\Gamma$, entonces $[u, v] =$

$\beta\Gamma([u, v])$ satisfice

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - D_u \Delta u = D_{uv} \Delta v + \gamma a - \beta \gamma u + \beta \gamma v |u|^p \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t v - D_v \Delta v = \gamma b - \beta \gamma v |u|^p + \beta f 1_{\Omega_c} v \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega. \end{array} \right. \quad (25)$$

A continuación, deseamos acotar la dupla $[u, v]$ en $X_{u,v} \times X_{u,v}$ independiente de $\beta \in (0, 1]$. Probaremos primero que $v \geq 0$. Sea $v_- = \min\{v, 0\} \leq 0$. Puesto que $v_- = 0$ si $v \geq 0$, y $\nabla v_- = \nabla v$ si $v \leq 0$, multiplicando (25)₂ por v_- e integrando sobre Ω , obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_-\|_{L^2}^2 + D_v \|\nabla v_-\|_{L^2}^2 = \int_{\Omega} \gamma b v_- d\mathbf{x} - \beta \gamma \int_{\Omega} v_-^2 |u|^p d\mathbf{x} + \int_{\Omega} f v_-^2 d\mathbf{x}.$$

Aplicamos las desigualdades de Hölder, Young y Gagliardo-Nirenberg y obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_-\|_{L^2}^2 + D_v \|\nabla v_-\|_{L^2}^2 &\leq \int_{\Omega} f 1_{\Omega_c} v_-^2 d\mathbf{x} \\ &\leq \beta \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}} \|v_-\|_{L^{\frac{10}{3}}}^2 \\ &\leq \beta K \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}} \left(\|v_-\|_{L^2}^{\frac{4}{5}} \|\nabla v_-\|_{L^2}^{\frac{6}{5}} + \|v_-\|_{L^2}^2 \right) \\ &\leq \left(K_{\varepsilon} \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}}^2 + \beta K \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}} \right) \|v_-\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\nabla v_-\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

de lo cual, tomando $\varepsilon < D_v$ concluimos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v_-\|_{L^2}^2 \leq \left(K_\varepsilon \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}}^2 + \beta K \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}} \right) \|v_-\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\nabla v_-\|_{L^2}^2.$$

Aplicamos la desigualdad de Gronwall y concluimos que $v_- = 0$, ya que $v(0) \geq 0$ y $f \in L^3(Q)$.

Por lo tanto, $v \geq 0$. Para probar que $v \in L^\infty(L^{\infty-}) \cap L^2(H^1)$, tomamos $r \in [2, \infty)$, multiplicamos la ecuación (25)₂ por $\frac{1}{r-1} v^{r-1}$, integramos en Ω y obtenemos

$$\frac{1}{r(r-1)} \frac{d}{dt} \|v^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 + \frac{4D_v}{r^2} \|\nabla v^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 = \frac{\gamma}{r-1} \int_{\Omega} (bv^{r-1} - \beta v^r |u|^p) d\mathbf{x} + \frac{1}{r-1} \int_{\Omega} f \left(v^{\frac{r}{2}}\right)^2 d\mathbf{x},$$

y como $v \geq 0$, aplicamos las desigualdades de Hölder, Young y Gagliardo-Nirenberg para obtener

$$\begin{aligned} \frac{1}{r(r-1)} \frac{d}{dt} \|v^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 + \frac{4D_v}{r^2} \|\nabla v^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 &\leq \frac{\gamma}{r-1} \int_{\Omega} \left(\frac{b^r}{r} + \frac{r-1}{r} v^r \right) d\mathbf{x} + \frac{1}{r-1} \int_{\Omega} f \left(v^{\frac{r}{2}}\right)^2 d\mathbf{x} \\ &\leq \frac{\gamma}{r(r-1)} \left(|\Omega| b^r + (r-1) \|v^{\frac{r}{2}}\|_2^2 \right) + \beta \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}} \|v^{\frac{r}{2}}\|_{L^{\frac{10}{3}}}^2 \\ &\leq \beta K \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}} \left(\|v^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{\frac{4}{3}} \|\nabla v^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^{\frac{4}{3}} + \|v^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 \right) \\ &\quad + \frac{\gamma}{r(r-1)} \left(|\Omega| b^r + (r-1) \|v^{\frac{r}{2}}\|_2^2 \right) \\ &\leq \left(\frac{\gamma}{r} + K_\varepsilon \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}}^2 + \beta K \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}} \right) \|v^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\nabla v^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \frac{\gamma |\Omega| b^r}{r(r-1)}, \end{aligned}$$

lo que implica que

$$\begin{aligned} \frac{1}{r(r-1)} \frac{d}{dt} \|v^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 + \left(\frac{4D_v}{r^2} - \varepsilon \right) \|\nabla v^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 \leq & \left(\frac{\gamma}{r} + K_\varepsilon \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}}^2 + \beta K \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}} \right) \|v^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{\gamma|\Omega|b^r}{r(r-1)}. \end{aligned} \quad (26)$$

Tomando $\varepsilon < \frac{4D_v}{r^2}$ concluimos que

$$\frac{d}{dt} \|v^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 \leq r(r-1) \left(\frac{\gamma}{r} + K_\varepsilon \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}}^2 + \beta K \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}} \right) \|v^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 + \gamma|\Omega|b^r. \quad (27)$$

Aplicando la desigualdad de Gronwall a (27) y como $\|v^{\frac{r}{2}}\|_{L^2}^2 = \|v\|_{L^r}^r$, obtenemos

$$\|v(t)\|_{L^r}^r \leq \gamma|\Omega|b^r \|v_0\|_{L^r}^r \exp \left(\int_0^T r(r-1) \left(K_\varepsilon \|f\|_{L^2(L^{5/2})}^2 + \beta K \|f\|_{L^1(L^{5/2})} + \frac{\gamma}{r} \right) ds \right).$$

Como $f \in L^3(Q)$, deducimos que $v \in L^\infty(L^r)$ para todo $r \in [2, \infty)$, y obtenemos la estimación

$$\|v(t)\|_{L^r} \leq \gamma|\Omega|b^r \|v_0\|_{W_{3,3}^{4,3}} \exp \left(r(r-1) \left(K_\varepsilon \|f\|_{L^2(L^{5/2})}^2 + \beta K \|f\|_{L^1(L^{5/2})} + T \frac{\gamma}{r} \right) \right).$$

Por lo tanto, $v \in L^\infty(L^{\infty-})$. Al tomar $r = 2$ en (26), integrar en $(0, T)$ y usar que $v \in L^\infty(L^{\infty-})$, deducimos que $\nabla v \in L^2(L^2)$, es decir, $v \in L^2(H^1)$. Así obtenemos que

$$v \in L^\infty(L^{\infty-}) \cap L^2(H^1), \quad (28)$$

con la estimación

$$\|v\|_{L^\infty(L^r) \cap L^2(H^1)} \leq C_v \left(r, \|v_0\|_{W^{\frac{4}{3}, \frac{5}{2}}}, \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}(Q)} \right).$$

Por otra parte, definimos $w = v + u$ y sumamos las ecuaciones (25)₁ y (25)₂ para obtener

$$w_t - D_u \Delta w = (D_{uv} + D_v - D_u) \Delta v + \beta f 1_{\Omega_c} v + \gamma(a + b - \beta w + \beta v).$$

Al multiplicar esta ecuación por w , obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2}^2 + D_u \|\nabla w\|_{L^2}^2 \leq |\alpha| \int_{\Omega} |\nabla w \cdot \nabla v| dx + \int_{\Omega} |\beta f 1_{\Omega_c} v + \gamma(a + b - \beta w + \beta v)| |w| dx,$$

y al aplicar las desigualdades de Hölder y Young, llegamos a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|w\|_{L^2}^2 + D_u \|\nabla w\|_{L^2}^2 &\leq \varepsilon \|\nabla w\|_{L^2}^2 + C_\varepsilon \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \frac{\beta}{2} \|f 1_{\Omega_c} v\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \left(\frac{\beta}{2} + \left| \frac{1}{2} - \frac{\beta\gamma}{2} \right| \right) \|w\|_{L^2}^2 + |\Omega| \frac{\gamma^2}{2} (a + b)^2 + \frac{\beta\gamma}{2} \|v\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Integrando en $(0, t)$ obtenemos

$$\begin{aligned} \|w(t)\|_{L^2}^2 + 2(D_u - \varepsilon) \int_0^t \|\nabla w(s)\|_{L^2}^2 ds &\leq (2C_\varepsilon + \beta\gamma) \|v\|_{L^2(H^1)}^2 + \beta \|f 1_{\Omega_c} v\|_{L^2(Q)}^2 + \|w(0)\|_{L^2}^2 \\ &\quad + |\Omega| T \gamma^2 (a + b)^2 + \int_0^t (\beta + |1 - \beta\gamma|) \|w(s)\|_{L^2}^2 ds. \end{aligned} \tag{29}$$

Como $v \in L^\infty(L^{\infty-}) \cap L^2(H^1)$ y $f \in L^3(Q)$, deducimos que $f 1_{\Omega_c} v \in L^{3-}(Q) \hookrightarrow L^2(Q)$. Al tomar

$\varepsilon < D_u$ y aplicar la desigualdad de Gronwall, concluimos que

$$\|w(t)\|_{L^2}^2 \leq e^{(\beta+|1-\beta|)T} \left((2C_\varepsilon + \beta\gamma)\|v\|_{L^2(H^1)}^2 + \beta\|f1_{\Omega_c}v\|_{L^2(Q)}^2 + \|w(0)\|_{L^2}^2 + |\Omega|T\gamma^2(a+b)^2 \right).$$

Por lo tanto, $w \in L^\infty(L^2)$, y de (29) deducimos que $w \in L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)$. Como $w = v + u$ y $v \in L^\infty(L^{\infty-}) \cap L^2(H^1)$, concluimos que $u \in L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1) \hookrightarrow L^{\frac{10}{3}}(Q)$, y existe una constante C_u tal que

$$\|u\|_{L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)} \leq C_u \left(\|v_0\|_{W^{\frac{4}{3},3}}, \|u_0\|_{W^{\frac{4}{3},3}}, \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}(Q)} \right). \quad (30)$$

Ahora, aplicamos la Proposición 6.1 del Anexo y la Proposición 1.14 para deducir que $u, v \in X_{\frac{17}{7}} \hookrightarrow L^{85}(Q)$. En consecuencia, concluimos que $\gamma b - \beta\gamma v|u|^p + \beta f 1_{\Omega_c} v \in L^{3-}(Q)$. Luego, al aplicar el Teorema 1.1 obtenemos que $v \in X_{3-} \hookrightarrow L^\infty(Q)$. Por lo tanto $\gamma b - \beta\gamma v|u|^p + \beta f 1_{\Omega_c} v \in L^3(Q)$. Al volver a aplicar el Teorema 1.1, deducimos que $v \in X_3$. Como $v \in X_3$, evaluamos el término $D_{uv}\Delta v + \gamma a - \beta\gamma u + \beta\gamma v|u|^p$ y verificamos que pertenece a $L^3(Q)$. Por lo tanto, al aplicar nuevamente el Teorema 1.1 con $q = 3$, deducimos que $u \in X_3$. Además, existe una constante C , que depende de $\|v_0\|_{W^{\frac{4}{3},3}}, \|u_0\|_{W^{\frac{4}{3},3}}$ y $\|f\|_{L^{\frac{5}{2}}(Q)}$, tal que se cumple la estimación

$$\|[u, v]\|_{X_3 \times X_3} < C \left(\|v_0\|_{W^{\frac{4}{3},3}}, \|u_0\|_{W^{\frac{4}{3},3}}, \|f\|_{L^{\frac{5}{2}}(Q)} \right). \quad (31)$$

Como $X_3 \hookrightarrow X_{u,v}$, concluimos que el conjunto de puntos fijos de $\beta\Gamma$, con $\beta \in [0, 1]$, es acotado en $X_{u,v} \times X_{u,v}$.

Paso 4: Γ es continuo.

Sea $\{[\bar{u}_m, \bar{v}_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $X_{u,v} \times X_{u,v}$ tal que $[\bar{u}_m, \bar{v}_m]$ converge a $[\bar{u}, \bar{v}]$ en $X_{u,v} \times X_{u,v}$ cuando m tiende a ∞ . A partir del *Paso 1* (ver (23) y (24)) deducimos que $[u_m, v_m] = \Gamma([\bar{u}_m, \bar{v}_m])$ es acotado en $X_3 \times X_3$. Por consiguiente, existe una subsucesión de $\{[u_m, v_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$, denotada también por $\{[u_m, v_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$, de manera que $[u_m, v_m] \longrightarrow [\hat{u}, \hat{v}]$ débilmente en $X_3 \times X_3$ y fuertemente en $X_{u,v} \times X_{u,v}$. De la definición de Γ , $[u_m, v_m]$ es solución del siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u_m - D_u \Delta u_m = D_{uv} \Delta v_m + \gamma(a - \bar{u}_m + \bar{v}_m |\bar{u}_m|^p) \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t v_m - D_v \Delta v_m = \gamma b - \gamma \bar{v}_m |\bar{u}_m|^p + f 1_{\Omega_c} \bar{v}_m \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ u_m(0) = u_0, v_m(0) = v_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u_m}{\partial \nu} = \frac{\partial v_m}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega. \end{array} \right. \quad (32)$$

A continuación, realizaremos el paso al límite del sistema (32) cuando m tiende a ∞ . De las convergencias $[\bar{u}_m, \bar{v}_m] \longrightarrow [\bar{u}, \bar{v}]$ y $[u_m, v_m] \longrightarrow [\hat{u}, \hat{v}]$ fuerte en $X_{u,v} \times X_{u,v}$ y débil en $X_3 \times X_3$, tenemos que (ver Anexo, Proposición 6.3)

$$\gamma \bar{v}_m |\bar{u}_m|^p \longrightarrow \gamma \bar{v} |\bar{u}|^p \quad \text{débil en } L^3(Q),$$

$$f \bar{u}_m \longrightarrow f \bar{u} \quad \text{débil en } L^3(Q).$$

Por otra parte, ya que $[u_m, v_m] \rightarrow [\hat{u}, \hat{v}]$ débil en $X_3 \times X_3$, obtenemos las siguientes convergencias:

$$\partial_t u_m - D_u \Delta u_m - D_{uv} \Delta v_m \rightarrow \partial_t \hat{u} - D_u \Delta \hat{u} - D_{uv} \Delta \hat{v} \quad \text{débil en } L^3(Q),$$

$$\partial_t v_m - D_v \Delta v_m \rightarrow \partial_t \hat{v} - D_v \Delta \hat{v} \quad \text{débil en } L^3(Q),$$

por lo tanto $\Gamma([\bar{u}, \bar{v}]) = [\hat{u}, \hat{v}]$, lo cual implica la continuidad del operador Γ .

Finalmente, en virtud de los *Pasos 1, 2, 3 y 4*, aplicamos el Teorema de Leray-Schauder para concluir que (4) tiene una solución fuerte $[u, v] \in X_3 \times X_3$. \square

A continuación, demostramos la unicidad de la solución encontrada en el Teorema 3.2.

Proposición 3.3 *La solución fuerte $[u, v] \in X_3 \times X_3$ del sistema (4), encontrada en el Teorema 3.2, es única.*

Demostración. Para mostrar la unicidad, suponemos que existen $[u_1, v_1], [u_2, v_2] \in X_3 \times X_3$ dos soluciones fuertes de (4). Denotando por $u := u_1 - u_2$, y $v := v_1 - v_2$, tenemos que $[u, v] \in X_3 \times X_3$ satisface el siguiente sistema:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - D_u \Delta u = D_{uv} \Delta v + \gamma(v |u_1|^p + v_2 (|u_1|^p - |u_2|^p)) \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t v - D_v \Delta v = -\gamma(v |u_1|^p + v_2 (|u_1|^p - |u_2|^p)) + f 1_{\Omega_c} v \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ u(0) = 0, v(0) = 0 \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega. \end{array} \right. \quad (33)$$

Multiplicando (33)₂ por $v \in X_3$, de la desigualdad de Hölder y la Proposición 6.2 del Anexo tenemos que existe una constante $C > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{L^2}^2 + D_v \|\nabla v\|_{L^2}^2 &= -\gamma \int_{\Omega} v^2 |u_1|^p d\mathbf{x} + \gamma \int_{\Omega} v v_2 (|u_1|^p - |u_2|^p) d\mathbf{x} + \int_{\Omega} f 1_{\Omega_c} v^2 d\mathbf{x} \\
&\leq \gamma \int_{\Omega} |v| |v_2| \left| |u_1|^p - |u_2|^p \right| d\mathbf{x} + \int_{\Omega} f 1_{\Omega_c} v^2 d\mathbf{x} \\
&\leq \gamma \int_{\Omega} |v| |v_2| |u|^p \left| |u_1|^{p-1} - |u_2|^{p-1} \right| d\mathbf{x} + \int_{\Omega} f 1_{\Omega_c} v^2 d\mathbf{x} \\
&\leq p \|v\|_{L^2} \|v_2\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \left\| |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1} \right\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^3} \|v\|_{L^6} \|v\|_{L^2}.
\end{aligned}$$

Por lo tanto, de las desigualdades de Young y Gagliardo-Nirenberg tenemos que existe una constante C tal que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{L^2}^2 \leq C \left(\|v_2\|_{L^\infty} \left\| |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1} \right\|_{L^\infty} \right) \|u\|_{L^2}^2 + C (\|f\|_{L^3}^2 + 1) \|v\|_{L^2}^2 + C \|f\|_{L^3}^2 \|\nabla v\|_{L^2}^2. \quad (34)$$

De manera análoga, multiplicando (33)₂ por $-\Delta v$, de las desigualdades de Young, Hölder y Gagliardo-Nirenberg obtenemos que existe una constante que también denotaremos por C tal que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v\|_{L^2}^2 + D_v \|\Delta v\|_{L^2}^2 &\leq \gamma \|\Delta v\|_{L^2} \|v\|_{L^2} \|u_1^p\|_{L^\infty} + p \|\Delta v\|_{L^2} \|v_2\|_{L^\infty} \|u\|_{L^2} \left\| |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1} \right\|_{L^\infty} \\
&\quad + \|f\|_{L^3} \|v\|_{L^6} \|\Delta v\|_{L^2} \\
&\leq C (\|u_1^p\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^3}^2) \|v\|_{L^2}^2 + C \|v_2\|_{L^\infty}^2 \left\| |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1} \right\|_{L^\infty}^2 \|u\|_{L^2}^2 \\
&\quad + C \|f\|_{L^3}^2 \|\nabla v\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\Delta v\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Tomando $0 < \varepsilon < D_v$, tenemos que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla v\|_{L^2}^2 \leq C (\|u_1^p\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^3}^2) \|v\|_{L^2}^2 + C \|v_2\|_{L^\infty}^2 \left\| |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1} \right\|_{L^\infty}^2 \|u\|_{L^2}^2 + C \|f\|_{L^3}^2 \|\nabla v\|_{L^2}^2 \quad (35)$$

Análogamente, multiplicando (33)₁ por $u \in X_3$, de las desigualdades de Young, Hölder y Gagliardo-Nirenberg tenemos que existe una constante C tal que

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u\|_{L^2}^2 \leq C_\varepsilon \|\nabla v\|_{L^2}^2 + C \left(\|u_1^p\|_{L^\infty} + \|v_2\|_{L^\infty} \left\| |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1} \right\|_{L^\infty} \right) (\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2). \quad (36)$$

De las desigualdades (34)-(36), para alguna constante C tenemos lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|u\|_{L^2}^2 + \|v\|_{L^2}^2 + \|\nabla v\|_{L^2}^2) &\leq C \left(\|u_1^p\|_{L^\infty} + \|v_2\|_{L^\infty} \left\| |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1} \right\|_{L^\infty} \right) \|u\|_{L^2}^2 \\ &\quad + \left(\|u_1^p\|_{L^\infty} + \|v_2\|_{L^\infty} \left\| |u_1|^{p-1} + |u_2|^{p-1} \right\|_{L^\infty} + \|f\|_{L^3}^2 + 1 \right) \|v\|_{L^2}^2 \\ &\quad + C (1 + \|f\|_{L^3}^2) \|\nabla v\|_{L^2}^2. \end{aligned}$$

Como $u_1, u_2, v_1, v_2 \in X_3 \hookrightarrow L^\infty(Q)$, todos los términos que acompañan a $\|u\|_{L^2}^2$, $\|v\|_{L^2}^2$ y $\|\nabla v\|_{L^2}^2$ están acotados. Además, se cumple que $u(0) = v(0) = 0$. Por lo tanto, aplicando la desigualdad de Gronwall, concluimos la unicidad. \square

3.2. Existencia de solución, caso $N = 2$

En esta sección demostramos que el sistema (4) tiene única solución fuerte, cuando la dimensión es $N = 2$.

Teorema 3.4 *Sea $N = 2$. Existe una única solución fuerte del sistema (4) en el sentido de la Definición 3.1.*

Demostración. Consideremos el espacio

$$X_{u,v} := L^\infty(Q),$$

y el operador

$$\begin{aligned} \Gamma : X_{u,v} \times X_{u,v} &\longrightarrow X_{2+} \times X_{2+} \\ [\bar{u}, \bar{v}] &\longrightarrow \Gamma([\bar{u}, \bar{v}]) = [u, v], \end{aligned}$$

donde $[u, v]$ es la solución del sistema lineal:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - D_u \Delta u = D_{uv} \Delta v + \gamma(a - \bar{u} + \bar{v} |\bar{u}|^p) \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t v - D_v \Delta v = \gamma(b - \bar{v} |\bar{u}|^p) + f \mathbf{1}_{\Omega_c} \bar{v} \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega. \end{array} \right. \quad (37)$$

Verifiquemos que se cumplen las hipótesis del Teorema 1.2.

Paso 1: Γ está bien definido.

Sea $[\bar{u}, \bar{v}] \in X_{u,v} \times X_{u,v}$. En primer lugar, como $u, v \in L^\infty(Q)$ y $f \in L^{2+}(Q)$, del Teorema 1.1 con-

cluimos que existe una única $v \in X_{2+}$ solución de la ecuación $(37)_2$. Como $v \in X_{2+}$, entonces $D_{uv}\Delta v + \gamma(a - \bar{u} + \bar{v}|\bar{u}|^p) \in L^{2+}(Q)$. Por lo tanto, aplicando nuevamente el Teorema 1.1, deducimos que la ecuación $(37)_1$ tiene solución única $u \in X_{2+}$. De lo anterior concluimos que el operador Γ está bien definido.

Paso 2: Γ es un operador compacto.

De manera análoga al caso $N = 3$ probamos que $X_2 \xrightarrow{c} X_{u,v}$. De este modo, concluimos que Γ es compacto.

Paso 3: El conjunto de puntos fijos de $\beta\Gamma$, $\beta \in [0, 1]$ es acotado en $X_{u,v} \times X_{u,v}$.

Consideramos $\beta \in (0, 1]$ (el caso $\beta = 0$ es claro). Si $[u, v]$ es un punto fijo de $\beta\Gamma$, entonces $[u, v] = \beta\Gamma([u, v])$ satisface

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t u - D_u \Delta u = D_{uv} \Delta v + \gamma a - \beta \gamma u + \beta \gamma v |u|^p \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t v - D_v \Delta v = \gamma b - \beta \gamma v |u|^p + \beta f v \quad \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ u(0) = u_0, v(0) = v_0 \quad \text{en } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial \nu} = \frac{\partial v}{\partial \nu} = 0 \quad \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega. \end{array} \right. \quad (38)$$

A continuación, deseamos acotar la dupla $[u, v]$ en $X_{u,v} \times X_{u,v}$ independiente de $\beta \in (0, 1]$. Multiplicando $(38)_2$ por v_- obtenemos $v \geq 0$. Ahora, tomamos $r \in [2, \infty)$, multiplicamos la ecuación $(38)_2$ por $\frac{1}{r-1} v^{r-1}$, integramos sobre Ω y obtenemos la estimativa

$$\|v\|_{L^\infty(L^r) \cap L^2(H^1)} \leq C,$$

para alguna constante C que depende r , $\|v_0\|_{W^{1,2}}$ y $\|f\|_{L^{2+}(Q)}$. Es decir, obtenemos $v \in L^\infty(L^{\infty-}) \cap L^2(H^1)$. Por otra parte definimos $w = v + u$ y sumamos las ecuaciones (38)₁ y (38)₂ para obtener

$$w_t - D_u \Delta w = (D_{uv} + D_v - D_u) \Delta v + \beta f 1_{\Omega_c} v + \gamma(a + b - \beta w + \beta v).$$

Al multiplicar esta ecuación por w , obtenemos $w \in L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)$. Como $w = v + u$ y $v \in L^\infty(L^{\infty-}) \cap L^2(H^1)$, concluimos que $u \in L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1) \hookrightarrow L^4(Q)$. Mediante un argumento de tipo “bootstrapping” análogo al caso de dimensión $N = 3$ deducimos que $u, v \in X_{2+} \times X_{2+} \hookrightarrow X_{u,v} \times X_{u,v}$.

Paso 4: Continuidad del operador Γ .

La continuidad del operador Γ se demuestra de forma análoga al caso $N = 3$.

Del Teorema de punto fijo de Leray-Schauder concluimos la existencia de solución fuerte para el sistema (4) en el sentido de la Definición 3.1. Siguiendo la demostración de la Proposición 3.3 obtenemos la unicidad de la solución fuerte obtenida.

□

4. Problema de control óptimo

En este capítulo, planteamos un problema de control óptimo asociado al sistema (4). Demostramos que dicho problema admite una solución óptima global y derivamos condiciones de optimalidad de primer orden para esa solución.

4.1. Existencia de una solución óptima global

4.1.1. Caso $N = 3$. En esta subsección, formulamos el problema de control bilineal en estudio. Asumimos que

$$\mathcal{F} \subset L^3(Q_c) = L^3(0, T; L^3(\Omega_c))$$

es un conjunto no vacío, cerrado y convexo, donde $\Omega_c \subset \Omega$ denota el dominio de control. Así mismo, definimos el conjunto de soluciones admisibles del problema (39) como

$$S_{ad} := \left\{ [u, v, f] \in X_3 \times X_3 \times \mathcal{F} : [u, v] \text{ sea solución fuerte de (4) con dato } f \right\}.$$

Ahora, definimos el siguiente problema de minimización restringida asociado al sistema (4):

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Encontrar } [u, v, f] \in S_{ad} \text{ que minimice el funcional objetivo} \\ J([u, v, f]) = \frac{\gamma_u}{2} \int_0^T \|u - u_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\gamma_v}{2} \int_0^T \|v - v_d\|_{L^2(\Omega)}^2 dt + \frac{\gamma_f}{3} \int_0^T \|f\|_{L^3(\Omega_c)}^3 dt \\ + \frac{\beta_1}{2} \int_{\Omega} |u(T) - u_T|^2 d\mathbf{x} + \frac{\beta_2}{2} \int_{\Omega} |v(T) - v_T|^2 d\mathbf{x}, \\ \text{bajo la restricción de que } [u, v] \text{ sea solución fuerte del sistema (4) con dato } f. \end{array} \right. \quad (39)$$

Aquí, $[u_d, v_d] \in L^2(Q) \times L^2(Q)$ define los estados deseados, y los parámetros no negativos $\gamma_u, \gamma_v, \gamma_f, \beta_1, \beta_2$ cuantifican los costos asociados a los estados y al control, respectivamente. Decimos que $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ constituye una *solución óptima global* de (39) si

$$J([\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}]) = \min_{[u, v, f] \in S_{ad}} J([u, v, f]).$$

Teorema 4.1 Sea $0 < T < \infty$, con $f \in L^3(Q)$ y $u_0, v_0 \in \widehat{W}^{4/3,3}(\Omega)$ tales que $v_0 \geq 0$ en Ω . Si $\gamma_f > 0$ o bien \mathcal{F} es limitado en $L^3(Q_c)$, entonces el problema de control óptimo bilineal (39) admite al menos una solución óptima global $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}]$.

Demostración. Del Teorema 3.2 deducimos que el conjunto S_{ad} es no vacío. Como J está acotado inferiormente, podemos tomar una sucesión minimizante

$$\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}} = \{[u_m, v_m, f_m]\} \subset S_{ad}$$

tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(s_m) = \inf_{s \in S_{ad}} J(s).$$

De la definición del conjunto S_{ad} , para toda $m \in \mathbb{N}$, $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ satisface (4) en el sentido de la Definición 3.1. A partir de la definición de J y teniendo en cuenta la suposición de que $\gamma_f > 0$ ó \mathcal{F} es acotado en $L^3(Q_c)$, concluimos que $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ está acotada en $L^3(Q_c)$. Por otro lado, a partir de la demostración del Teorema 3.2 (ver desigualdades (31)), la sucesión $\{[u_m, v_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$ es acotada en $X_3 \times X_3$. Por lo tanto, recordando que \mathcal{F} es un subconjunto cerrado y convexo de $L^3(Q_c)$ (por ende, débilmente cerrado en $L^3(Q_c)$), para alguna subsucesión de $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, también denotada por

$\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, existe un vector límite $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}]$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} [u_m, v_m] \longrightarrow [\tilde{u}, \tilde{v}] \text{ débil en } X_3 \times X_3, \\ [u_m, v_m] \longrightarrow [\tilde{u}, \tilde{v}] \text{ débil en } L^3(W^{2,3}) \times L^3(W^{2,3}), \\ [\partial_t u_m, \partial_t v_m] \longrightarrow [\partial_t \tilde{u}, \partial_t \tilde{v}] \text{ débil en } L^3(Q) \times L^3(Q), \\ f_m \longrightarrow \tilde{f} \text{ débil en } L^3(Q_c), \text{ y } \tilde{f} \in \mathcal{F}. \end{array} \right. \quad (40)$$

Del paso 2 de la demostración del Teorema 3.2, tenemos que $X_3 \xrightarrow{c} X_{u,v}$. En consecuencia $[u_m, v_m] \longrightarrow [\tilde{u}, \tilde{v}]$ fuerte en $X_{u,v} \times X_{u,v}$. Teniendo en cuenta la Proposición 6.2 del Anexo, concluimos que

$$\begin{aligned} \|v_m |u_m|^p - \tilde{v} |\tilde{u}|^p\|_{L^3(Q)} &\leq \| |u_m|^p \|_{L^\infty(Q)} \|v_m - \tilde{v}\|_{L^3(Q)} + \|\tilde{v}\|_{L^\infty(Q)} \| |u_m|^p - |\tilde{u}|^p \|_{L^3(Q)} \\ &\leq \| |u_m|^p \|_{L^\infty(Q)} \|v_m - \tilde{v}\|_{L^3(Q)} \\ &\quad + p \|\tilde{v}\|_{L^\infty(Q)} \| |u_m|^{p-1} + |\tilde{u}|^{p-1} \|_{L^\infty(Q)} \|u_m - \tilde{u}\|_{L^3(Q)}. \end{aligned}$$

Puesto que la sucesión $\{[u_m, v_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$ es acotada en $X_3 \times X_3 \hookrightarrow L^\infty(Q)$, los términos $\| |u_m|^p \|_{L^\infty(Q)}$ y $\|\tilde{v}\|_{L^\infty(Q)} \| |u_m|^{p-1} + |\tilde{u}|^{p-1} \|_{L^\infty(Q)}$ son acotados. Además, de la convergencia $[u_m, v_m] \longrightarrow [\tilde{u}, \tilde{v}]$ fuerte en $X_{u,v} \times X_{u,v}$ se deduce que

$$|u_m|^p v_m \longrightarrow |\tilde{u}|^p \tilde{v} \quad \text{fuerte en } L^3(Q). \quad (41)$$

A partir de las convergencias dadas en (40) y (41), es posible obtener las siguientes convergencias:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_m - D_u \Delta u_m - D_{uv} \Delta v_m \longrightarrow \partial_t \tilde{u} - D_u \Delta \tilde{u} - D_{uv} \Delta \tilde{v} & \text{d\u00e9bil en } L^3(Q), \\ \partial_t v_m - D_v \Delta v_m \longrightarrow \partial_t \tilde{v} - D_v \Delta \tilde{v} & \text{d\u00e9bil en } L^3(Q), \\ |u_m|^p v_m \longrightarrow |\tilde{u}|^p \tilde{v} & \text{fuerte en } L^3(Q), \\ f_m u_m \longrightarrow \tilde{f} \tilde{u} & \text{d\u00e9bil en } L^3(Q). \end{array} \right. \quad (42)$$

Adem\u00e1s, de la convergencia $[u_m, v_m] \longrightarrow [\tilde{u}, \tilde{v}]$ fuerte en $X_{u,v} \times X_{u,v}$, se sigue que

$$[u_{0,m}, v_{0,m}] \longrightarrow [\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)] \text{ fuerte en } L^3(\Omega) \times L^3(\Omega),$$

y ya que $u_{0,m} = u_0$ y $v_{0,m} = v_0$ para toda $m \in \mathbb{N}$, entonces $[\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)] = [u_0, v_0]$, esto es, $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}]$ satisface (22)₃. Por tanto, teniendo en cuenta las convergencias (40) y (41), tomando el l\u00edmite en (22) (reemplazando $[u, v]$ por $[u_m, v_m]$) cuando m tiende a $+\infty$, concluimos que $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}]$ es una soluci\u00f3n fuerte de (22), es decir, $\tilde{s} \in S_{ad}$. Entonces,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(s_m) = \inf_{s \in S_{ad}} J(s) \leq J(\tilde{s}). \quad (43)$$

Finalmente, como J es d\u00e9bilmente semicontinuo inferior en S_{ad} , tenemos que

$$J(\tilde{s}) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} J(s_m). \quad (44)$$

De (43) y (44) concluimos lo siguiente

$$J([\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}]) = \min_{[u,v,f] \in S_{ad}} J([u, v, f]).$$

□

4.1.2. Caso $N = 2$. En esta subsección, demostramos que el problema de control (39) tiene una solución óptima global en el caso de dimensión $N = 2$. Para esto, asumimos que

$$\mathcal{F} \subset L^{2+}(Q_c) = L^{2+}(0, T; L^{2+}(\Omega_c))$$

es un conjunto no vacío, cerrado y convexo, donde $\Omega_c \subset \Omega$ denota el dominio de control. Así mismo, definimos el conjunto de soluciones admisibles del problema (39) como

$$S_{ad} := \left\{ [u, v, f] \in X_{2+} \times X_{2+} \times \mathcal{F} : [u, v] \text{ sea solución fuerte de (4) con dato } f \right\}.$$

Teorema 4.2 *Sea $0 < T < \infty$, con $f \in L^{2+}(Q)$ y $u_0, v_0 \in \widehat{W}^{1+,2+}(\Omega)$ tales que $v_0 \geq 0$ en Ω . Si $\gamma_f > 0$ o bien \mathcal{F} es limitado en $L^{2+}(Q_c)$, entonces el problema de control óptimo bilineal (39) admite al menos una solución óptima global $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}]$.*

Demostración. Del Teorema 3.4 deducimos que el conjunto S_{ad} es no vacío. Como J está acotado inferiormente, podemos tomar una sucesión minimizante

$$\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}} = \{[u_m, v_m, f_m]\} \subset S_{ad}$$

tal que

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(s_m) = \inf_{s \in S_{ad}} J(s).$$

De la definición del conjunto S_{ad} , para todo $m \in \mathbb{N}$, s_m satisface (4) en el sentido de la Definición 3.1. A partir de la definición de J y teniendo en cuenta la suposición de que $\gamma_f > 0$ ó \mathcal{F} es acotado en $L^{2+}(Q_c)$, concluimos que $\{f_m\}_{m \in \mathbb{N}}$ está acotada en $L^{2+}(Q_c)$. Por otro lado, a partir de la demostración del Teorema 3.4, la sucesión $\{[u_m, v_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$ es acotada en $X_{2+} \times X_{2+}$. Por lo tanto, recordando que \mathcal{F} es un subconjunto cerrado y convexo de $L^{2+}(Q_c)$ (por ende, débilmente cerrado en $L^{2+}(Q_c)$), para alguna subsucesión de $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, también denotada por $\{s_m\}_{m \in \mathbb{N}}$, existe un vector límite $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}]$ tal que

$$\left\{ \begin{array}{l} [u_m, v_m] \longrightarrow [\tilde{u}, \tilde{v}] \text{ débil en } X_{2+} \times X_{2+} \\ [\partial_t u_m, \partial_t v_m] \longrightarrow [\partial_t \tilde{u}, \partial_t \tilde{v}] \text{ débil en } L^2(Q) \times L^2(Q), \\ f_m \longrightarrow \tilde{f} \text{ débil en } L^{2+}(Q_c), \text{ y } \tilde{f} \in \mathcal{F}. \end{array} \right. \quad (45)$$

Del paso 2 de la demostración del Teorema 3.4, tenemos que $X_{2+} \xrightarrow{c} X_{u,v} = L^\infty(Q)$. En consecuencia $[u_m, v_m] \longrightarrow [\tilde{u}, \tilde{v}]$ fuerte en $X_{u,v} \times X_{u,v}$. Teniendo en cuenta la Proposición 6.2 del Anexo, concluimos que

$$\begin{aligned} \|v_m |u_m|^p - \tilde{v} |\tilde{u}|^p\|_{L^2(Q)} &\leq \| |u_m|^p \|_{L^\infty(Q)} \|v_m - \tilde{v}\|_{L^2(Q)} + \|\tilde{v}\|_{L^\infty(Q)} \| |u_m|^p - |\tilde{u}|^p \|_{L^2(Q)} \\ &\leq \| |u_m|^p \|_{L^\infty(Q)} \|v_m - \tilde{v}\|_{L^2(Q)} \\ &\quad + p \|\tilde{v}\|_{L^\infty(Q)} \| |u_m|^{p-1} + |\tilde{u}|^{p-1} \|_{L^\infty(Q)} \|u_m - \tilde{u}\|_{L^2(Q)}. \end{aligned}$$

Puesto que la sucesión $\{[u_m, v_m]\}_{m \in \mathbb{N}}$ es acotada en $X_{2+} \times X_{2+} \hookrightarrow L^\infty(Q)$, los términos $\| |u_m|^p \|_{L^\infty(Q)}$ y $\|\tilde{v}\|_{L^\infty(Q)} \| |u_m|^{p-1} + |\tilde{u}|^{p-1} \|_{L^\infty(Q)}$ son acotados. De la convergencia $[u_m, v_m] \rightarrow [\tilde{u}, \tilde{v}]$ fuerte en $X_{u,v} \times X_{u,v}$ se deduce que

$$|u_m|^p v_m \rightarrow |\tilde{u}|^p \tilde{v} \quad \text{fuerte en } L^2(Q). \quad (46)$$

A partir de las convergencias dadas en (45) y (46), es posible obtener las siguientes convergencias:

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t u_m - D_u \Delta u_m - D_{uv} \Delta v_m \rightarrow \partial_t \tilde{u} - D_u \Delta \tilde{u} - D_{uv} \Delta \tilde{v} & \text{d\u00e9bil en } L^2(Q), \\ \partial_t v_m - D_v \Delta v_m \rightarrow \partial_t \tilde{v} - D_v \Delta \tilde{v} & \text{d\u00e9bil en } L^2(Q), \\ |u_m|^p v_m \rightarrow |\tilde{u}|^p \tilde{v} & \text{fuerte en } L^2(Q), \\ f_m u_m \rightarrow \tilde{f} \tilde{u} & \text{d\u00e9bil en } L^2(Q). \end{array} \right. \quad (47)$$

Adem\u00e1s, de la convergencia $[u_m, v_m] \rightarrow [\tilde{u}, \tilde{v}]$ fuerte en $X_{u,v} \times X_{u,v}$, se sigue que

$$[u_{0,m}, v_{0,m}] \rightarrow [\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)] \quad \text{fuerte en } L^2(\Omega) \times L^2(\Omega),$$

y ya que $u_{0,m} = u_0$ y $v_{0,m} = v_0$ para toda $m \in \mathbb{N}$, entonces $[\tilde{u}(0), \tilde{v}(0)] = [u_0, v_0]$, esto es, $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}]$ satisface (22)₃. Por tanto, teniendo en cuenta las convergencias (45) y (46), tomando el l\u00edmite en (22) (reemplazando $[u, v]$ por $[u_m, v_m]$) cuando m tiende a $+\infty$, concluimos que $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}]$ es una soluci\u00f3n fuerte de (22), es decir, $\tilde{s} \in S_{ad}$. Entonces,

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J(s_m) = \inf_{s \in S_{ad}} J(s) \leq J(\tilde{s}). \quad (48)$$

Finalmente, como J es débilmente semicontinuo inferior en S_{ad} , tenemos que

$$J(\tilde{s}) \leq \liminf_{m \rightarrow \infty} J(s_m). \quad (49)$$

De (48) y (49) concluimos lo siguiente

$$J([\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}]) = \min_{[u,v,f] \in S_{ad}} J([u, v, f]).$$

□

4.2. Existencia de multiplicadores de Lagrange

En esta sección derivamos condiciones necesarias de optimalidad de primer orden para una solución óptima local $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}]$ del problema (39). Usaremos un Teorema de existencia de multiplicadores de Lagrange en espacios de Banach, que Zowe y Kurcyusz demostraron en Zowe and Kurcyusz (1979) dentro de un marco funcional abstracto. Para ello, consideremos \mathbb{X}, \mathbb{Y} espacios de Banach, \mathbb{M} un subconjunto convexo, cerrado y no vacío de \mathbb{X} , $J : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional y $G : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ un operador de restricción. Entonces, formulamos el siguiente problema de optimización:

$$\min_{s \in \mathbb{M}} J(s) \quad \text{sujeto a} \quad G(s) = 0. \quad (50)$$

Denominamos conjunto admisible a $S_{ad} = \{s \in \mathbb{M} : G(s) = 0\}$. Llamamos funcional Lagrangiano al operador

$$\mathcal{L} : \mathbb{X} \times \mathbb{Y}' \longrightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}([s, \zeta]) = J(s) - \langle \zeta, G(s) \rangle_{\mathbb{Y}'},$$

correspondiente al problema (50).

Definición 4.3 (Mínimo local) Decimos que un elemento $\tilde{s} \in S_{ad}$ constituye una solución óptima local para el problema (50) si existe $\varepsilon > 0$ tal que, para todo $s \in S_{ad}$ con $\|s - \tilde{s}\|_{\mathbb{X}} \leq \varepsilon$, se cumple la desigualdad

$$J(\tilde{s}) \leq J(s).$$

Definición 4.4 (Multiplicador de Lagrange) Sea $\tilde{s} \in S_{ad}$ una solución óptima local del problema (50). Supongamos que J y G son Fréchet diferenciables en \tilde{s} , con derivadas denotadas por $J'(\tilde{s})$ y $G'(\tilde{s})$, respectivamente. Entonces llamamos $\zeta \in \mathbb{Y}'$ un multiplicador de Lagrange para el problema (50) en el punto \tilde{s} si se cumplen las condiciones siguientes:

$$\begin{cases} \langle \zeta, G(\tilde{s}) \rangle_{\mathbb{Y}'} = 0, \\ \mathcal{L}'_s([\tilde{s}, \zeta])[r] := J'(\tilde{s})[r] - \langle \zeta, G'(\tilde{s})[r] \rangle_{\mathbb{Y}'} \geq 0 \quad \forall r \in \mathcal{C}(\tilde{s}), \end{cases} \quad (51)$$

donde $\mathcal{C}(\tilde{s}) := \{\delta(s - \tilde{s}) : s \in \mathbb{M}, \delta \geq 0\}$ es el casco cónico de \tilde{s} en \mathbb{M} .

Definición 4.5 (Punto regular) Sea $\tilde{s} \in S_{ad}$ una solución óptima local del problema (50). Decimos que \tilde{s} es un punto regular si

$$G'(\tilde{s})[\mathcal{C}(\tilde{s})] = \mathbb{Y}. \quad (52)$$

El siguiente Teorema garantiza la existencia de multiplicadores de Lagrange para el problema de optimización abstracto (50).

Teorema 4.6 ((Zowe and Kurcyusz, 1979, Teorema 3.1) y (Troltzsch, 2010, Teorema 6.3, p. 330))

Sea $\tilde{s} \in S_{ad}$ una solución óptima local del problema (50). Suponga que J es Fréchet diferenciable en \tilde{s} y que G es continuamente Fréchet diferenciable en \tilde{s} . Si \tilde{s} es un punto regular, entonces existe al menos un multiplicador de Lagrange para el problema (50) en el sentido de la Definición 4.4.

4.2.1. Caso $N = 3$. Observe que podemos replantear el problema de control óptimo (39) dentro del marco del problema abstracto (50); para ello, elegimos los siguientes espacios de Banach:

$$\begin{aligned}\mathbb{X} &:= \widehat{X}_3 \times \widehat{X}_3 \times L^3(Q_c), \\ \mathbb{Y} &:= L^3(Q) \times L^3(Q) \times \widehat{W}^{\frac{4}{3},3}(\Omega) \times \widehat{W}^{\frac{4}{3},3}(\Omega),\end{aligned}$$

donde

$$\widehat{X}_3 := \left\{ u \in X_3 : \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}.$$

Además, consideramos el operador $G = [G_1, G_2, G_3, G_4] : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, con componentes

$$G_1 : \mathbb{X} \rightarrow L^3(Q), \quad G_2 : \mathbb{X} \rightarrow L^3(Q), \quad G_3 : \mathbb{X} \rightarrow \widehat{W}^{\frac{4}{3},3}(\Omega), \quad G_4 : \mathbb{X} \rightarrow \widehat{W}^{\frac{4}{3},3}(\Omega),$$

que, en cada punto $s = [u, v, f] \in \mathbb{X}$, se definen por:

$$G_1(s) = \partial_t u - D_u \Delta u - D_{uv} \Delta v - \gamma(a - u + v|u|^p),$$

$$G_2(s) = \partial_t v - D_v \Delta v - \gamma(b - v|u|^p) - f \mathbf{1}_{\Omega_c} \bar{v},$$

$$G_3(s) = u(0) - u_0,$$

$$G_4(s) = v(0) - v_0.$$

En consecuencia, reformulamos el problema de control óptimo (39) como sigue:

$$\min_{s \in \mathbb{M}} J(s) \quad \text{sujeto a} \quad G(s) = 0,$$

donde el conjunto \mathbb{M} (un subconjunto cerrado y convexo de \mathbb{X}) lo definimos como

$$\begin{aligned} \mathbb{M} &:= [\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{f}] + \widehat{X}_3 \times \widehat{X}_3 \times (\mathcal{F} - \widehat{f}) \\ &= \left\{ [\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{f}] + [u, v, f] : [u, v, f] \in \widehat{X}_3 \times \widehat{X}_3 \times (\mathcal{F} - \widehat{f}) \right\}, \end{aligned} \tag{53}$$

siendo $[\widehat{u}, \widehat{v}, \widehat{f}]$ una solución fuerte de (4). Reescribimos el conjunto admisible del problema (39)

como

$$S_{ad} = \{s = [u, v, f] \in \mathbb{M} : G(s) = 0\}.$$

Definimos el lagrangiano asociado al problema de control óptimo (39) mediante el funcional

$$\mathcal{L} : \mathbb{X} \times L^{\frac{3}{2}}(Q) \times L^{\frac{3}{2}}(Q) \times \left(\widehat{W}^{\frac{4}{3}, 3}(\Omega) \right)' \times \left(\widehat{W}^{\frac{4}{3}, 3}(\Omega) \right)' \longrightarrow \mathbb{R},$$

dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([s, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4]) := & J(s) - \langle \sigma_1, G_1(s) \rangle_{L^{\frac{3}{2}}} - \langle \sigma_2, G_2(s) \rangle_{L^{\frac{3}{2}}} \\ & - \langle \sigma_3, G_3(s) \rangle_{\left(\widehat{W}^{\frac{4}{3},3}(\Omega)\right)'} - \langle \sigma_4, G_4(s) \rangle_{\left(\widehat{W}^{\frac{4}{3},3}(\Omega)\right)'}. \end{aligned}$$

En los siguientes lemas, presentamos las derivadas de Fréchet del funcional J y del operador G . Obtenemos la demostración de estos resultados mediante argumentos clásicos, por lo cual las omitimos.

Lema 4.7 *El funcional $J : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{R}$ es Fréchet diferenciable y su derivada en $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}] \in \mathbb{X}$ en la dirección $r = [U, V, F] \in \mathbb{X}$ es dada por*

$$\begin{aligned} J'(\tilde{s})[r] = & \gamma_u \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{u} - u_d)U + \gamma_v \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{v} - v_d)V + \gamma_f \int_0^T \int_{\Omega_c} \text{sgn}(\tilde{f})|\tilde{f}|^2 F \\ & + \beta_1 \int_{\Omega} (\tilde{u}(T) - u_T)U(T) + \beta_2 \int_{\Omega} (\tilde{v}(T) - v_T)V(T). \end{aligned}$$

Lema 4.8 *El operador $G : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$ es continuamente Fréchet diferenciable y su derivada en $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}] \in \mathbb{X}$ en la dirección $r = [U, V, F] \in \mathbb{X}$ está dada por el operador lineal $G'(\tilde{s})[r] = (G'_1(\tilde{s})[r], G'_2(\tilde{s})[r], G'_3(\tilde{s})[r], G'_4(\tilde{s})[r])$ donde,*

$$\left\{ \begin{array}{l} G'_1(\tilde{s})[r] = \partial_t U - D_u \Delta U - D_{uv} \Delta V + \gamma U - \gamma |\tilde{u}|^p V - p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u}) \tilde{v} U, \\ G'_2(\tilde{s})[r] = \partial_t V - D_v \Delta V + \gamma |\tilde{u}|^p V + p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u}) \tilde{v} U - f 1_{\Omega_c} \tilde{v} - \tilde{f} V, \\ G'_3(\tilde{s})[r] = U(0), \\ G'_4(\tilde{s})[r] = V(0). \end{array} \right. \quad (54)$$

De la definición de punto regular deducimos que $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ es un punto regular si el operador definido en (54) es sobreyectivo. Es decir, para cualquier $[g_u, g_v, U_0, V_0] \in \mathbb{Y}$ existe $r = [U, V, F] \in \widehat{X}_3 \times \widehat{X}_3 \times \mathcal{C}(\tilde{f})$ tal que

$$G'(\tilde{s})[r] = [g_u, g_v, U_0, V_0].$$

Por lo tanto, para un punto fijo $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ y dado $[g_u, g_v, U_0, V_0] \in \mathbb{Y}$ arbitrario, basta demostrar la existencia de $[U, V] \in \widehat{X}_3 \times \widehat{X}_3$ que resuelva el siguiente sistema lineal:

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t U - D_u \Delta U - D_{uv} \Delta V + \gamma U - \gamma |\tilde{u}|^p V - p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u}) \tilde{v} U = g_u, \\ \partial_t V - D_v \Delta V + \gamma |\tilde{u}|^p V + p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u}) \tilde{v} U - \tilde{f} V = g_v, \\ U(0) = U_0, \quad V(0) = V_0, \\ \frac{\partial U}{\partial \nu} = 0 = \frac{\partial V}{\partial \nu} \quad \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega. \end{array} \right. \quad (55)$$

Teorema 4.9 *Si $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}] \in S_{ad}$, entonces \tilde{s} es un punto regular.*

Demostración. Como ya dijimos, basta demostrar que existe $[U, V] \in \widehat{X}_3 \times \widehat{X}_3$ que resuelva el sistema (55). Dado que (55) es un sistema parabólico lineal, argumentamos formalmente que cualquier

solución suficientemente regular permanece acotada en $\widehat{X}_3 \times \widehat{X}_3$. Para esto, multiplicamos (55)₁ por U , integramos en Ω y aplicamos las desigualdades de Hölder y Young para obtener lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|_{L^2}^2 + D_u \|\nabla U\|_{L^2}^2 &\leq D_{uv} \|\nabla V\|_{L^2} \|\nabla U\|_{L^2} + \gamma \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty} \|U\|_{L^2} \|V\|_{L^2} \\
&\quad + p\gamma \|\tilde{u}|^{p-1} \tilde{v}\|_{L^\infty}^2 \|U\|_{L^2}^2 + \|U\|_{L^2} \|g_u\|_{L^2} + \gamma \|U\|_{L^2}^2 \\
&\leq K_\varepsilon \|V\|_{H^1}^2 + \varepsilon \|\nabla U\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma}{2} \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}^2 \|U\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{\gamma}{2} \|V\|_{L^2}^2 + p\gamma \|\tilde{u}|^{p-1} \tilde{v}\|_{L^\infty}^2 \|U\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{1}{2} \|U\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|g_u\|_{L^2}^2 + \gamma \|U\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|_{L^2}^2 + (D_u - \varepsilon) \|\nabla U\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2} \|g_u\|_{L^2}^2 + \left(K_\varepsilon + \frac{\gamma}{2}\right) \|V\|_{H^1}^2 \\
&\quad + \left(\frac{\gamma}{2} \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}^2 + p\gamma \|\tilde{u}|^{p-1} \tilde{v}\|_{L^\infty}^2 + \frac{1}{2} + \gamma\right) \|U\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{56}$$

Análogamente, multiplicamos (55)₂ por $-\Delta V$ y, de nuevo, aplicando las desigualdades de Hölder y Young obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla V\|_{L^2}^2 + D_v \|\Delta V\|_{L^2}^2 &\leq \gamma \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty} \|\Delta V\|_{L^2} \|V\|_{L^2} + \|\Delta V\|_{L^2} \|g_v\|_{L^2} \\
&\quad + p\gamma \|\tilde{u}|^{p-1} \tilde{v}\|_{L^\infty} \|U\|_{L^2} \|\Delta V\|_{L^2} + \|\tilde{f}\|_{L^3} \|V\|_{L^6} \|\Delta V\|_{L^2} \\
&\leq \varepsilon \|\Delta V\|_{L^2}^2 + K_\varepsilon \|g_v\|_{L^2}^2 + p\gamma K_\varepsilon \|\tilde{u}|^{p-1} \tilde{v}\|_{L^\infty}^2 \|U\|_{L^2}^2 \\
&\quad + (K_\varepsilon \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}^2 + K_\varepsilon \|\tilde{f}\|_{L^3}^2) \|V\|_{H^1}^2.
\end{aligned}$$

De este modo, concluimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla V\|_{L^2}^2 + (D_v - \varepsilon) \|\Delta V\|_{L^2}^2 &\leq K_\varepsilon \|g_v\|_{L^2}^2 + p\gamma K_\varepsilon \|\tilde{u}\|^{p-1} \tilde{v} \|U\|_{L^2}^2 \\ &+ (K_\varepsilon \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}^2 + K_\varepsilon \|\tilde{f}\|_{L^3}^2) \|V\|_{H^1}^2. \end{aligned} \quad (57)$$

Análogamente, multiplicando (55)₂ por V , de las desigualdades de Hölder y Young tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|V\|_{L^2}^2 + (D_v - \varepsilon) \|\nabla V\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2} \|g_v\|_{L^2}^2 + \frac{p}{2} \gamma \|\tilde{u}\|^{p-1} \tilde{v} \|U\|_{L^2}^2 \\ &+ \left(\gamma \|\tilde{u}\|^p \|L^\infty + \gamma + \|\tilde{f}\|_{L^3} + \frac{1}{2} \right) \|V\|_{H^1}^2. \end{aligned} \quad (58)$$

Sumando las desigualdades (56)-(58) obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|V\|_{H^1}^2 + \|U\|_{L^2}^2) + (D_u - \varepsilon) \|\nabla U\|_{L^2}^2 + (D_v - \varepsilon) \|\nabla V\|_{L^2}^2 + (D_v - \varepsilon) \|\Delta V\|_{L^2}^2 \\ \leq \frac{1}{2} \|g_u\|_{L^2}^2 + \left(K_\varepsilon + \frac{1}{2} \right) \|g_v\|_{L^2}^2 + \left(\frac{1}{2} + K_\varepsilon + \frac{3\gamma}{2} + K_\varepsilon \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty} + \gamma \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty} + K_\varepsilon \|\tilde{f}\|_{L^3}^2 + \|\tilde{f}\|_{L^3} \right) \|V\|_{H^1}^2 \\ + \left(\frac{\gamma}{2} \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}^2 + \frac{1}{2} + p\gamma(K_\varepsilon + 2) \|\tilde{u}\|^{p-1} \tilde{v} \|L^\infty + \gamma \right) \|U\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (59)$$

Como $\tilde{u}, \tilde{v} \in X_3 \hookrightarrow L^\infty(Q)$ y $\tilde{f}, g_u, g_v \in L^3(Q)$, los términos que acompañan a $\|U\|_{L^2}^2$ y $\|V\|_{H^1}^2$ en la desigualdad (59) están acotados, al igual que el término $\frac{1}{2} \|g_u\|_{L^2}^2 + (K_\varepsilon + \frac{1}{2}) \|g_v\|_{L^2}^2$. Por lo tanto, integrando en tiempo en la desigualdad (59) y tomando ε lo suficientemente pequeño, de la desigualdad de Gronwall deducimos que existe una constante que C que depende de T, U_0, V_0 ,

$\|\tilde{u}\|_{X_3}$, $\|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}$, $\|\tilde{v}\|_{X_3}$, $\|g_u\|_{L^3(Q)}$, $\|g_v\|_{L^3(Q)}$ y $\|\tilde{f}\|_{L^3(Q)}$ tal que

$$\|(U, V)\|_{L^\infty(0, T; L^2 \times H^1) \cap L^2(0, T; H^1 \times H^2)} \leq C. \quad (60)$$

A continuación, usamos un argumento de tipo “bootstrapping” para incrementar la regularidad de U y V .

- Como $(U, V) \in L^\infty(0, T; L^2 \times H^1) \cap L^2(0, T; H^1 \times H^2) \hookrightarrow L^{\frac{10}{3}}(Q) \times L^6(Q)$ y $\tilde{f}, g_v \in L^3(Q)$, concluimos que

$$-\gamma|\tilde{u}|^p V - p\gamma|\tilde{u}|^p \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U + \tilde{f}V + g_v \in L^2(Q).$$

Aplicando el Teorema 1.1 obtenemos que existe una constante que también denotamos por C y que depende de $\|\tilde{u}\|_{X_3}$, $\|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}$, $\|\tilde{v}\|_{X_3}$, $\|g_u\|_{L^3(Q)}$, $\|g_v\|_{L^3(Q)}$ y $\|\tilde{f}\|_{L^3(Q)}$ tal que $\|V\|_{\widehat{X}_2} \leq C$.

- Como $V \in \widehat{X}_2 \hookrightarrow L^{10}(Q)$, concluimos que

$$-\gamma|\tilde{u}|^p V - p\gamma|\tilde{u}|^p \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U + \tilde{f}V + g_v \in L^{\frac{30}{13}}(Q).$$

Aplicamos nuevamente el Teorema 1.1 y obtenemos una constante (denotada también por C) que depende de $\|\tilde{u}\|_{X_3}$, $\|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}$, $\|\tilde{v}\|_{X_3}$, $\|g_u\|_{L^3(Q)}$, $\|g_v\|_{L^3(Q)}$ y $\|\tilde{f}\|_{L^3(Q)}$ tal que $\|V\|_{\widehat{X}_{\frac{30}{13}}} \leq C$.

- Dado que $V \in \widehat{X}_{\frac{30}{13}} \hookrightarrow L^{\frac{30}{11}}(Q)$, obtenemos

$$-\gamma|\tilde{u}|^p V - p\gamma|\tilde{u}|^p \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U + \tilde{f}V + g_v \in L^{\frac{30}{11}}(Q).$$

Aplicamos el Teorema 1.1 y concluimos que $\|V\|_{\widehat{X}_{\frac{30}{11}}} \leq C$, para alguna constante C que depende de $\|\tilde{u}\|_{X_3}$, $\|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}$, $\|\tilde{v}\|_{X_3}$, $\|g_u\|_{L^3(Q)}$, $\|g_v\|_{L^3(Q)}$ y $\|\tilde{f}\|_{L^3(Q)}$.

- Como $V \in \widehat{X}_{\frac{30}{11}} \hookrightarrow L^\infty(Q)$, deducimos que

$$-\gamma|\tilde{u}|^p V - p\gamma|\tilde{u}|^p \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U + \tilde{f}V + g_v \in L^3(Q).$$

Volvemos a aplicar el Teorema 1.1, obteniendo que $\|V\|_{\widehat{X}_3} \leq C$, para alguna constante C que depende de $\|\tilde{u}\|_{X_3}$, $\|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}$, $\|\tilde{v}\|_{X_3}$, $\|g_u\|_{L^3(Q)}$, $\|g_v\|_{L^3(Q)}$ y $\|\tilde{f}\|_{L^3(Q)}$.

- Puesto que $V \in \widehat{X}_3$, sabemos que $\Delta V \in L^3(Q)$. En consecuencia,

$$D_{uv}\Delta V - \gamma U + \gamma|\tilde{u}|^p V + p\gamma|\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U - g_u \in L^3(Q).$$

Aplicamos por última vez el Teorema 1.1 y obtenemos que $\|U\|_{\widehat{X}_3} \leq C$, para alguna constante C que depende de $\|\tilde{u}\|_{X_3}$, $\|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}$, $\|\tilde{v}\|_{X_3}$, $\|g_u\|_{L^3(Q)}$, $\|g_v\|_{L^3(Q)}$ y $\|\tilde{f}\|_{L^3(Q)}$.

Así, concluimos la prueba. □

Teorema 4.10 *Sea $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ una solución local óptima para el problema de control (39). Entonces existe un multiplicador de Lagrange $\zeta = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] \in \mathbb{Y}'$ tal que para toda $[U, V, F] \in$*

$\widehat{X}_3 \times \widehat{X}_3 \times \mathcal{C}(\tilde{f})$, la siguiente desigualdad se tiene:

$$\begin{aligned}
& \gamma_u \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{u} - u_d)U + \gamma_v \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{v} - v_d)V + \gamma_f \int_0^T \int_{\Omega_c} \operatorname{sgn}(\tilde{f})|\tilde{f}|^2 F \\
& + \beta_1 \int_{\Omega} (\tilde{u}(T) - u_T)U(T) + \beta_2 \int_{\Omega} (\tilde{v}(T) - v_T)V(T) \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t U - D_u \Delta U - D_{uv} \Delta V + \gamma U - \gamma |\tilde{u}|^p V - p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U) \sigma_1 \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - D_v \Delta V + \gamma |\tilde{u}|^p V + p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U - f 1_{\Omega_c} \tilde{v} - \tilde{f}V) \sigma_2 \\
& - \int_0^T \int_{\Omega} (U(0)) \sigma_3 - \int_0^T \int_{\Omega} (V(0)) \sigma_4 \geq 0.
\end{aligned} \tag{61}$$

Demostración. Del Teorema 4.9 deducimos que $\tilde{s} \in S_{ad}$ es un punto regular. Entonces, el Teorema 4.6 garantiza la existencia de un multiplicador de Lagrange $\zeta = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4,] \in \mathbb{Y}'$ del problema (39), el cual, de acuerdo a la Definición 4.4, satisface

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}'_s([\tilde{s}, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4])[r] & := J'(\tilde{s})[r] - \langle \sigma_1, G'_1(\tilde{s})[r] \rangle_{L^{\frac{3}{2}}} - \langle \sigma_2, G'_2(\tilde{s})[r] \rangle_{L^{\frac{3}{2}}} \\
& - \langle \sigma_3, G'_3(\tilde{s})[r] \rangle_{\left(\widehat{W}^{\frac{4}{3},3}(\Omega)\right)'} - \langle \sigma_4, G'_4(\tilde{s})[r] \rangle_{\left(\widehat{W}^{\frac{4}{3},3}(\Omega)\right)'} \geq 0,
\end{aligned}$$

para toda $r = [U, V, F] \in \widehat{X}_3 \times \widehat{X}_3 \times \mathcal{C}(\tilde{f})$. La demostración concluye recordando las expresiones de las derivadas de J, G_1, G_2, G_3 y G_4 . □

Como consecuencia del Teorema 4.10 es posible derivar un sistema de optimalidad, para el cual consideramos el espacio

$$\mathcal{X}_0 := \{u \in \widehat{X}_3 : u(0) = 0\},$$

este es el contenido del siguiente resultado.

Corolario 4.11 Sea $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ una solución óptima local para el problema de control (39).

Entonces el multiplicador de Lagrange $[\sigma_1, \sigma_2] \in L^{\frac{3}{2}}(Q) \times L^{\frac{3}{2}}(Q)$, el cual proviene del Teorema 4.10, satisface el siguiente sistema para toda $[U, V] \in \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_0$:

$$\begin{aligned} \gamma_u \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{u} - u_d)U + \beta_1 \int_{\Omega} (\tilde{u}(T) - u_T)U(T) &= \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t U - D_u \Delta U + \gamma U - p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U) \sigma_1 \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U) \sigma_2, \end{aligned} \quad (62)$$

$$\begin{aligned} \gamma_v \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{v} - v_d)V + \beta_2 \int_{\Omega} (\tilde{v}(T) - v_T)V(T) &= \int_0^T \int_{\Omega} (-D_{uv} \Delta V - \gamma |\tilde{u}|^p V) \sigma_1 \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - D_v \Delta V + \gamma |\tilde{u}|^p V - \tilde{f}V) \sigma_2, \end{aligned} \quad (63)$$

y la condición de optimalidad

$$\int_0^T \int_{\Omega_c} (\gamma_f \operatorname{sgn}(\tilde{f}) |\tilde{f}|^2 + \tilde{v} \sigma_2) (f - \tilde{f}) \geq 0, \quad \forall \tilde{f} \in \mathcal{F}. \quad (64)$$

Demostración. Del Teorema 4.10, tomando $[V, F] = [0, 0]$ en (61) y notando que \mathcal{X}_0 es un espacio vectorial, obtenemos (62). Análogamente, escogiendo $[U, F] = [0, 0]$ deducimos (63). Finalmente, tomado $[U, V] = [0, 0]$, se obtiene que

$$\gamma_f \int_0^T \int_{\Omega_c} \operatorname{sgn}(\tilde{f}) |\tilde{f}|^2 F + \int_0^T \int_{\Omega_c} f 1_{\Omega_c} \tilde{v} \sigma_2 \geq 0, \quad \forall F \in \mathcal{C}(\tilde{f}).$$

Entonces, tomando $F = \delta(f - \tilde{f}) \in \mathcal{C}(\tilde{f})$ para toda $f \in \mathcal{F}$ y $\delta \geq 0$ en la última desigualdad, concluimos la condición (64). \square

4.2.2. Caso $N = 2$. A continuación, analizamos la existencia y regularidad de los multiplicadores de Lagrange para el problema de control óptimo (39) en el caso en que la dimensión es $N = 2$. Para ello, consideramos los siguientes espacios de Banach:

$$\begin{aligned}\mathbb{X} &:= \widehat{X}_{2+} \times \widehat{X}_{2+} \times L^{2+}(Q_c), \\ \mathbb{Y} &:= L^{2+}(Q) \times L^{2+}(Q) \times \widehat{W}^{1+,2+}(\Omega) \times \widehat{W}^{1+,2+}(\Omega),\end{aligned}$$

donde

$$\widehat{X}_{2+} := \left\{ u \in X_{2+} : \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \text{ sobre } \partial\Omega \right\}.$$

Además, consideramos el operador $G = [G_1, G_2, G_3, G_4] : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{Y}$, con componentes

$$G_1 : \mathbb{X} \rightarrow L^{2+}(Q), \quad G_2 : \mathbb{X} \rightarrow L^{2+}(Q), \quad G_3 : \mathbb{X} \rightarrow \widehat{W}^{1+,2+}(\Omega), \quad G_4 : \mathbb{X} \rightarrow \widehat{W}^{1+,2+}(\Omega),$$

que, en cada punto $s = [u, v, f] \in \mathbb{X}$, se definen por:

$$G_1(s) = \partial_t u - D_u \Delta u - D_{uv} \Delta v - \gamma(a - u + v|u|^p),$$

$$G_2(s) = \partial_t v - D_v \Delta v - \gamma(b - v|u|^p) - f 1_{\Omega_c} \bar{v},$$

$$G_3(s) = u(0) - u_0,$$

$$G_4(s) = v(0) - v_0.$$

Definimos el lagrangiano asociado al problema de control óptimo (39) (para $N = 2$) mediante el funcional

$$\mathcal{L} : \mathbb{X} \times L^{2-}(\mathcal{Q}) \times L^{2-}(\mathcal{Q}) \times \left(\widehat{W}^{1+,2+}(\Omega) \right)' \times \left(\widehat{W}^{1+,2+}(\Omega) \right)' \longrightarrow \mathbb{R},$$

dado por

$$\begin{aligned} \mathcal{L}([s, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4]) := & J(s) - \langle \sigma_1, G_1(s) \rangle_{L^{2-}} - \langle \sigma_2, G_2(s) \rangle_{L^{2-}} \\ & - \langle \sigma_3, G_3(s) \rangle_{\left(\widehat{W}^{1+,2+}(\Omega) \right)'} - \langle \sigma_4, G_4(s) \rangle_{\left(\widehat{W}^{1+,2+}(\Omega) \right)'}. \end{aligned}$$

En los Lemas 4.7 y 4.8, calculamos las derivadas del funcional J y del operador G , respectivamente.

A continuación, siguiendo la demostración del caso 3D, demostramos que si \tilde{s} pertenece a S_{ad} , entonces \tilde{s} es un punto regular.

Teorema 4.12 *Sea $N = 2$. Si $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}] \in S_{ad}$, entonces \tilde{s} es un punto regular.*

Demostración. De manera análoga a la demostración del Teorema 4.9, queremos demostrar que existe $[U, V] \in \widehat{X}_{2+} \times \widehat{X}_{2+}$ que resuelva el sistema (55) con $[g_u, g_v, U_0, V_0] \in \mathbb{Y} := L^{2+}(\mathcal{Q}) \times L^{2+}(\mathcal{Q}) \times \widehat{W}^{1+,2+}(\Omega) \times \widehat{W}^{1+,2+}(\Omega)$. Dado que (55) es un sistema parabólico lineal, argumentamos formalmente que cualquier solución suficientemente regular permanece acotada en $\widehat{X}_{2+} \times \widehat{X}_{2+}$. Para esto, multiplicamos (55)₁ por U , integramos en Ω , aplicamos las desigualdades de Hölder y Young, para

obtener lo siguiente

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|U\|_{L^2}^2 + (D_u - \varepsilon) \|\nabla U\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2} \|g_u\|_{L^2}^2 + \left(K_\varepsilon + \frac{\gamma}{2}\right) \|V\|_{H^1}^2 \\ &+ \left(\frac{\gamma}{2} \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}^2 + p\gamma \|\tilde{u}|^{p-1} \tilde{v}\|_{L^\infty}^2 + \frac{1}{2} + \gamma\right) \|U\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (65)$$

Ahora, multiplicamos (55)₂ por $-\Delta V$ y, de nuevo, aplicando las desigualdades Hölder y Young obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla V\|_{L^2}^2 + D_v \|\Delta V\|_{L^2}^2 &\leq \gamma \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty} \|\Delta V\|_{L^2} \|V\|_{L^2} + \|\Delta V\|_{L^2} \|g_v\|_{L^2} \\ &+ p\gamma \|\tilde{u}|^{p-1} \tilde{v}\|_{L^\infty} \|U\|_{L^2} \|\Delta V\|_{L^2} + \|\tilde{f}\|_{L^{2+}} \|V\|_{L^\infty} \|\Delta V\|_{L^2} \\ &\leq \varepsilon \|\Delta V\|_{L^2}^2 + K_\varepsilon \|g_v\|_{L^2}^2 + p\gamma K_\varepsilon \|\tilde{u}|^{p-1} \tilde{v}\|_{L^\infty}^2 \|U\|_{L^2}^2 \\ &+ (K_\varepsilon \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}^2 + K_\varepsilon \|\tilde{f}\|_{L^{2+}}^2) \|V\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

De este modo, concluimos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla V\|_{L^2}^2 + (D_v - \varepsilon) \|\Delta V\|_{L^2}^2 &\leq K_\varepsilon \|g_v\|_{L^2}^2 + p\gamma K_\varepsilon \|\tilde{u}|^{p-1} \tilde{v}\|_{L^\infty}^2 \|U\|_{L^2}^2 \\ &+ (K_\varepsilon \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}^2 + K_\varepsilon \|\tilde{f}\|_{L^{2+}}^2) \|V\|_{H^1}^2. \end{aligned} \quad (66)$$

Análogamente, multiplicando (55)₂ por V , de las desigualdades de Hölder y Young tenemos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|V\|_{L^2}^2 + (D_v - \varepsilon) \|\nabla V\|_{L^2}^2 &\leq \frac{1}{2} \|g_v\|_{L^2}^2 + \frac{p}{2} \gamma \|\tilde{u}|^{p-1} \tilde{v}\|_{L^\infty}^2 \|U\|_{L^2}^2 \\ &+ \left(\gamma \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty} + \gamma + K \|\tilde{f}\|_{L^{2+}} + K \|\tilde{f}\|_{L^{2+}}^2 + \frac{1}{2}\right) \|V\|_{H^1}^2. \end{aligned} \quad (67)$$

Sumando las desigualdades (65)-(67) obtenemos

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|V\|_{H^1}^2 + \|U\|_{L^2}^2) + (D_u - \varepsilon) \|\nabla U\|_{L^2}^2 + (D_v - \varepsilon) \|\nabla V\|_{L^2}^2 + (D_v - \varepsilon) \|\Delta V\|_{L^2}^2 \\
& \leq \frac{1}{2} \|g_u\|_{L^2}^2 + \left(K_\varepsilon + \frac{1}{2} \right) \|g_v\|_{L^2}^2 + \left(\frac{1}{2} + K_\varepsilon + \frac{3\gamma}{2} + K_\varepsilon \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}^2 + \gamma \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty} + K \|\tilde{f}\|_{L^{2+}}^2 + K \|\tilde{f}\|_{L^{2+}} \right) \|V\|_{H^1}^2 \\
& + \left(\frac{\gamma}{2} \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}^2 + \frac{1}{2} + p\gamma(K_\varepsilon + 2) \|\tilde{u}\|^{p-1} \tilde{v}\|_{L^\infty}^2 + \gamma \right) \|U\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{68}$$

Como $\tilde{u}, \tilde{v} \in X_{2+} \hookrightarrow L^\infty(Q)$ y $\tilde{f}, g_u, g_v \in L^{2+}(Q)$, los términos que acompañan a $\|U\|_{L^2}^2$ y $\|V\|_{H^1}^2$ en la desigualdad (68) están acotados, al igual que el término $\frac{1}{2} \|g_u\|_{L^2}^2 + (K_\varepsilon + \frac{1}{2}) \|g_v\|_{L^2}^2$. Por lo tanto, integrando en tiempo en la desigualdad (68) y tomando ε lo suficientemente pequeño, de la desigualdad de Gronwall deducimos que existe una constante que C que depende de $T, U_0, V_0, \|\tilde{u}\|_{X_{2+}}, \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}, \|\tilde{v}\|_{X_{2+}}, \|g_u\|_{L^2(Q)}, \|g_v\|_{L^2(Q)}$ y $\|\tilde{f}\|_{L^{2+}(Q)}$ tal que

$$\|(U, V)\|_{L^\infty(0, T; L^2 \times H^1) \cap L^2(0, T; H^1 \times H^2)} \leq C. \tag{69}$$

A continuación, usamos un argumento de tipo “bootstrapping” para incrementar la regularidad de U y V .

- Como $(U, V) \in L^\infty(0, T; L^2 \times H^1) \cap L^2(0, T; H^1 \times H^2) \hookrightarrow L^4(Q) \times L^{\infty-}(Q)$ y $\tilde{f}, g_v \in L^{2+}(Q)$, concluimos que

$$-\gamma |\tilde{u}|^p V - p\gamma |\tilde{u}|^p \operatorname{sgn}(\tilde{u}) \tilde{v} U + \tilde{f} V + g_v \in L^{2+}(Q).$$

Aplicando el Teorema 1.1 obtenemos que existe una constante que también denotamos por

C y que depende de $T, U_0, V_0, \|\tilde{u}\|_{X_{2+}}, \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}, \|\tilde{v}\|_{X_{2+}}, \|g_u\|_{L^{2+}(Q)}, \|g_v\|_{L^{2+}(Q)}$ y $\|\tilde{f}\|_{L^{2+}(Q)}$ tal que $\|V\|_{\widehat{X}_{2+}} \leq C$.

- Puesto que $V \in \widehat{X}_{2+}$, sabemos que $\Delta V \in L^{2+}(Q)$. En consecuencia,

$$D_{uv}\Delta V - \gamma U + \gamma|\tilde{u}|^p V + p\gamma|\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U - g_u \in L^{2+}(Q).$$

Aplicamos por última vez el Teorema 1.1 y obtenemos que $\|U\|_{\widehat{X}_{2+}} \leq C$, para alguna constante que depende de $T, U_0, V_0, \|\tilde{u}\|_{X_{2+}}, \|\tilde{u}^p\|_{L^\infty}, \|\tilde{v}\|_{X_{2+}}, \|g_u\|_{L^{2+}(Q)}, \|g_v\|_{L^{2+}(Q)}$ y $\|\tilde{f}\|_{L^{2+}(Q)}$.

Así, concluimos la prueba. □

Teorema 4.13 *Sea $N = 2$. Sea $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ una solución local óptima para el problema de control (39). Entonces existe un multiplicador de Lagrange $\zeta = [\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4] \in \mathbb{Y}'$ tal que para toda $[U, V, F] \in \widehat{X}_{2+} \times \widehat{X}_{2+} \times \mathcal{C}(\tilde{f})$, la siguiente desigualdad se tiene:*

$$\begin{aligned} & \gamma_u \int_0^T \int_\Omega (\tilde{u} - u_d)U + \gamma_v \int_0^T \int_\Omega (\tilde{v} - v_d)V + \gamma_f \int_0^T \int_{\Omega_c} \operatorname{sgn}(\tilde{f})|\tilde{f}|F \\ & + \beta_1 \int_\Omega (\tilde{u}(T) - u_T)U(T) + \beta_2 \int_\Omega (\tilde{v}(T) - v_T)V(T) \\ & - \int_0^T \int_\Omega (\partial_t U - D_u \Delta U - D_{uv} \Delta V + \gamma U - \gamma|\tilde{u}|^p V - p\gamma|\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U) \sigma_1 \\ & - \int_0^T \int_\Omega (\partial_t V - D_v \Delta V + \gamma|\tilde{u}|^p V + p\gamma|\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U - f 1_{\Omega_c} \tilde{v} - \tilde{f}V) \sigma_2 \\ & - \int_0^T \int_\Omega (U(0)) \sigma_3 - \int_0^T \int_\Omega (V(0)) \sigma_4 \geq 0. \end{aligned} \tag{70}$$

Demostración. La prueba es similar a la del Teorema 4.10; por lo tanto, la omitimos. □

Como consecuencia del Teorema 4.13 es posible derivar un sistema de optimalidad, para el cual consideramos el espacio

$$\mathcal{X}_0 := \{u \in \widehat{X}_{2+} : u(0) = 0\},$$

este es el contenido del siguiente resultado.

Corolario 4.14 *Sea $N = 2$. Sea $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ una solución óptima local para el problema de control (39). Entonces el multiplicador de Lagrange $[\sigma_1, \sigma_2] \in L^{2-}(Q) \times L^{2-}(Q)$, el cual proviene del Teorema 4.13, satisface el siguiente sistema para toda $[U, V] \in \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_0$:*

$$\begin{aligned} \gamma_u \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{u} - u_d)U + \beta_1 \int_{\Omega} (\tilde{u}(T) - u_T)U(T) &= \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t U - D_u \Delta U + \gamma U - p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \text{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U) \sigma_1 \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \text{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U) \sigma_2, \end{aligned} \quad (71)$$

$$\begin{aligned} \gamma_v \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{v} - v_d)V + \beta_2 \int_{\Omega} (\tilde{v}(T) - v_T)V(T) &= \int_0^T \int_{\Omega} (-D_{uv} \Delta V - \gamma |\tilde{u}|^p V) \sigma_1 \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - D_v \Delta V + \gamma |\tilde{u}|^p V - \tilde{f}V) \sigma_2, \end{aligned} \quad (72)$$

y la condición de optimalidad

$$\int_0^T \int_{\Omega_c} (\gamma_f \text{sgn}(\tilde{f})|\tilde{f}| + \tilde{v}\sigma_2)(f - \tilde{f}) \geq 0, \quad \forall \tilde{f} \in \mathcal{F}. \quad (73)$$

4.3. Regularidad de los multiplicadores

4.3.1. Caso $N = 3$. Una dupla $[\sigma_1, \sigma_2] \in L^{\frac{3}{2}}(Q) \times L^{\frac{3}{2}}(Q)$ que satisface (62) y (63) para toda $[U, V] \in \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_0$ corresponde al concepto de solución ultra débil del siguiente sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \sigma_1 + D_u \Delta \sigma_1 - \gamma \sigma_1 + p \gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u}) \tilde{v} \sigma_1 - p \gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u}) \tilde{v} \sigma_2 = -\gamma_u (\tilde{u} - u_d), & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \sigma_2 + D_v \Delta \sigma_2 - \gamma |\tilde{u}|^p \sigma_2 + f \sigma_2 + D_{uv} \Delta \sigma_1 + \gamma |\tilde{u}|^p \sigma_1 = -\gamma_v (\tilde{v} - v_d), & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \nu} = 0 = \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu}, & \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega, \\ \sigma_1(T) = \beta_1 (\tilde{u}(T) - u_T), & \text{en } \Omega, \\ \sigma_2(T) = \beta_2 (\tilde{v}(T) - v_T), & \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (74)$$

El objetivo de esta subsección consiste en mejorar la regularidad de los multiplicadores de Lagrange que proporciona el Teorema 4.10. Para ello, demostramos que el problema adjunto (74) posee una regularidad fuerte. La siguiente proposición contiene este resultado.

Proposición 4.15 *Sea $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ una solución local óptima para el problema de control (39). Entonces el problema (74) tiene una única solución $[\sigma_1, \sigma_2] \in X_2 \times X_2$.*

Demostración. Sea $s = T - t$, con $t \in (0, T)$, consideramos los cambios de variable $\tilde{\sigma}_1(s) = \sigma_1(t)$ y $\tilde{\sigma}_2(s) = \sigma_2(t)$. Entonces el sistema (74) es equivalente al siguiente

$$\left\{ \begin{array}{ll}
\partial_s \tilde{\sigma}_1 - D_u \Delta \tilde{\sigma}_1 + \gamma \tilde{\sigma}_1 - p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u}) \tilde{v} \tilde{\sigma}_1 + p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \tilde{u} \tilde{v} \tilde{\sigma}_2 = \gamma_u (\tilde{u} - u_d), & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\
\partial_s \tilde{\sigma}_2 - D_v \Delta \tilde{\sigma}_2 + \gamma |\tilde{u}|^p \tilde{\sigma}_2 - f 1_{\Omega_c} \tilde{\sigma}_2 - D_{uv} \Delta \tilde{\sigma}_1 - \gamma |\tilde{u}|^p \tilde{\sigma}_1 = \gamma_v (\tilde{v} - v_d), & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\
\frac{\partial \tilde{\sigma}_1}{\partial \nu} = 0 = \frac{\partial \tilde{\sigma}_2}{\partial \nu}, & \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega, \\
\tilde{\sigma}_1(0) = \beta_1 (\tilde{u}(T) - u_T), & \text{en } \Omega, \\
\tilde{\sigma}_2(0) = \beta_2 (\tilde{v}(T) - v_T), & \text{en } \Omega.
\end{array} \right. \tag{75}$$

Siguiendo un razonamiento análogo al de la prueba del Teorema 4.9, mostraremos que cualquier solución de (75) lo suficientemente regular está acotada en $X_2 \times X_2$. Multiplicando (75)₁ por $\tilde{\sigma}_1$ e integrando en Ω , de las desigualdades de Hölder, Young y Gagliardo-Nirenberg obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + D_u \|\nabla \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 &\leq \gamma_u \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2} \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2} + p\gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{p-1} \|\tilde{v}\|_{L^\infty} (\|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2} \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2} + \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2) \\
&\quad + \gamma \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 \\
&\leq \left(\frac{1}{2} + \gamma + \frac{1}{2} p^2 \gamma^2 \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p-2} \|\tilde{v}\|_{L^\infty}^2 + p\gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{p-1} \|\tilde{v}\|_{L^\infty} \right) \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{\gamma_u^2}{2} \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{76}$$

Por otra parte, multiplicando (75)₂ por $\tilde{\sigma}_2$ e integrando en Ω , de las desigualdades de Hölder y

Young obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 + D_v \|\nabla \tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 &\leq \gamma_v \|\tilde{v} - v_d\|_{L^2} \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2} + \gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^p \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^3} \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^3}^2 \\
&\quad + D_{uv} \int_{\Omega} \nabla \tilde{\sigma}_1 \cdot \nabla \tilde{\sigma}_2 + \gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^p \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2} \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2} \\
&\leq \left(\frac{\gamma^2}{2} \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} + \frac{1}{2} + \gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^p + K_\varepsilon \|f\|_{L^3}^2 + \|f\|_{L^3} \right) \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{\gamma_v^2}{2} \|\tilde{v} - v_d\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + K_\varepsilon \|\nabla \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\nabla \tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 + (D_v - \varepsilon) \|\nabla \tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 &\leq \left(\frac{\gamma^2}{2} \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} + \frac{1}{2} + \gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^p + K_\varepsilon \|f\|_{L^3}^2 + \|f\|_{L^3} \right) \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{\gamma_v^2}{2} \|\tilde{v} - v_d\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + K_\varepsilon \|\nabla \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2. \tag{77}
\end{aligned}$$

Análogamente, multiplicando (75)₁ por $-\Delta \tilde{\sigma}_1$ e integrando en Ω , de las desigualdades de Hölder,

Young y Gagliardo-Nirenberg obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + D_u \|\Delta \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 &\leq \left(\|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2} + p\gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{p-1} \|\tilde{v}\|_{L^\infty} (\|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2} + \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}) \right) \|\Delta \tilde{\sigma}_1\|_{L^2} \\
&\quad + \gamma_u \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2} \|\Delta \tilde{\sigma}_1\|_{L^2} \\
&\leq \varepsilon \|\Delta \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + K_\varepsilon \left(\|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + p^2 \gamma^2 \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} \|\tilde{v}\|_{L^\infty}^2 (\|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 + \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2) \right) \\
&\quad + K_\varepsilon \gamma_u^2 \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + (D_u - \varepsilon) \|\Delta \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 \leq K_\varepsilon \left(\|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + p^2 \gamma^2 \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} \|\tilde{v}\|_{L^\infty}^2 (\|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 + \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2) \right) + K_\varepsilon \gamma_u^2 \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2}^2. \quad (78)$$

De (76)-(78) deducimos que para alguna constante $K > 0$ se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\tilde{\sigma}_1\|_{H^1}^2 + \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2) + (D_u - \varepsilon) (\|\nabla \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + \|\Delta \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2) + D_v \|\nabla \tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 \\ & \leq K \left(1 + K_\varepsilon + \gamma + \frac{1}{2} p^2 \gamma^2 \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p-2} \|\tilde{v}\|_{L^\infty}^2 + p\gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{p-1} \|\tilde{v}\|_{L^\infty} + p^2 \gamma^2 \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} \|\tilde{v}\|_{L^\infty}^2 \right) \|\tilde{\sigma}_1\|_{H^1}^2 \\ & + K \left(1 + \frac{\gamma^2}{2} \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} + \frac{1}{2} + \gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^p + K_\varepsilon \|f\|_{L^3}^2 + \|f\|_{L^3} + K_\varepsilon p^2 \gamma^2 \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} \|\tilde{v}\|_{L^\infty}^2 \right) \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 \\ & + \frac{\gamma_v^2}{2} \|\tilde{v} - v_d\|_{L^2}^2 + \gamma_u^2 \left(K_\varepsilon + \frac{1}{2} \right) \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (79)$$

Integrando en tiempo en la desigualdad (79) y tomando ε lo suficientemente pequeño, de la desigualdad de Gronwall tenemos que existe una constante que C que depende de T , $\|\tilde{u}\|_{L^\infty(Q)}$, $\|\tilde{v}\|_{L^\infty(Q)}$, $\|f\|_{L^3(Q)}$, $\tilde{\sigma}_1(0)$, $\tilde{\sigma}_2(0)$ y $\gamma_u^2 (K_\varepsilon + \frac{1}{2}) \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\gamma_v^2}{2} \|\tilde{v} - v_d\|_{L^2(Q)}^2$ tal que

$$\|(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)\|_{L^\infty(0,T;H^1 \times L^2) \cap L^2(0,T;H^2 \times H^1)} \leq C. \quad (80)$$

A continuación, usamos un argumento de tipo “bootstrapping” para incrementar la regularidad de $\tilde{\sigma}_1$ y $\tilde{\sigma}_2$.

- Como $(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2) \in L^\infty(0, T; H^1 \times L^2) \cap L^2(0, T; H^2 \times H^1) \hookrightarrow L^6(Q) \times L^{\frac{10}{3}}(Q)$ y $f \in L^3(Q)$, entonces $\gamma_v(\tilde{v} - v_d) - \gamma|\tilde{u}|^p \tilde{\sigma}_2 + f 1_{\Omega_c} \tilde{\sigma}_2 + D_{uv} \Delta \tilde{\sigma}_1 + \gamma|\tilde{u}|^p \tilde{\sigma}_1 \in L^{\frac{30}{19}}(Q)$. Por lo tanto, aplican-

do el Teorema 1.1, existe una constante que denotaremos nuevamente por C y que también depende de T , $\|\tilde{u}\|_{L^\infty}$, $\|\tilde{v}\|_{L^\infty}$, $\|f\|_{L^3}$, $\tilde{\sigma}_1(0)$, $\tilde{\sigma}_2(0)$ y $\gamma_u^2(K_\varepsilon + \frac{1}{2})\|\tilde{u} - u_d\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_v^2}{2}\|\tilde{v} - v_d\|_{L^2}^2$, tal que $\|\tilde{\sigma}_2\|_{\widehat{X}_{\frac{30}{19}}} \leq C$.

- Como $\tilde{\sigma}_2 \in \widehat{X}_{\frac{30}{19}} \hookrightarrow L^{\frac{30}{7}}(Q)$, entonces $\gamma_v(\tilde{v} - v_d) - \gamma|\tilde{u}|^p\tilde{\sigma}_2 + f1_{\Omega_c}\tilde{\sigma}_2 + D_{uv}\Delta\tilde{\sigma}_1 + \gamma|\tilde{u}|^p\sigma_1 \in L^{\frac{15}{8}}(Q)$. Por lo tanto, aplicando el Teorema 1.1, existe una constante que denotaremos nuevamente por C y que también depende de T , $\|\tilde{u}\|_{L^\infty}$, $\|\tilde{v}\|_{L^\infty}$, $\|f\|_{L^3}$, $\tilde{\sigma}_1(0)$, $\tilde{\sigma}_2(0)$ y $\gamma_u^2(K_\varepsilon + \frac{1}{2})\|\tilde{u} - u_d\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_v^2}{2}\|\tilde{v} - v_d\|_{L^2}^2$, tal que $\|\tilde{\sigma}_2\|_{\widehat{X}_{\frac{15}{8}}} \leq C$.
- Como $\tilde{\sigma}_2 \in \widehat{X}_{\frac{15}{8}} \hookrightarrow L^{\frac{15}{2}}(Q)$, entonces $\gamma_v(\tilde{v} - v_d) - \gamma|\tilde{u}|^p\tilde{\sigma}_2 + f1_{\Omega_c}\tilde{\sigma}_2 + D_{uv}\Delta\tilde{\sigma}_1 + \gamma|\tilde{u}|^p\sigma_1 \in L^2(Q)$. Por lo tanto, aplicando el Teorema 1.1, existe una constante que denotaremos nuevamente por C y que también depende de T , $\|\tilde{u}\|_{L^\infty}$, $\|\tilde{v}\|_{L^\infty}$, $\|f\|_{L^3}$, $\tilde{\sigma}_1(0)$, $\tilde{\sigma}_2(0)$ y $\gamma_u^2(K_\varepsilon + \frac{1}{2})\|\tilde{u} - u_d\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_v^2}{2}\|\tilde{v} - v_d\|_{L^2}^2$, tal que $\|\tilde{\sigma}_2\|_{\widehat{X}_2} \leq C$.
- Además, $\gamma_u(\tilde{u} - u_d) + 2\gamma|\tilde{u}|\tilde{u}\tilde{v}\tilde{\sigma}_1 - 2\gamma|\tilde{u}|\tilde{u}\tilde{v}\tilde{\sigma}_2 \in L^2(Q)$. Por lo tanto, aplicando el Teorema 1.1, existe una constante que denotaremos nuevamente por C y que también depende de T , $\|\tilde{u}\|_{L^\infty}$, $\|\tilde{v}\|_{L^\infty}$, $\|f\|_{L^3}$, $\tilde{\sigma}_1(0)$, $\tilde{\sigma}_2(0)$ y $\gamma_u^2(K_\varepsilon + \frac{1}{2})\|\tilde{u} - u_d\|_{L^2}^2 + \frac{\gamma_v^2}{2}\|\tilde{v} - v_d\|_{L^2}^2$, tal que $\|\tilde{\sigma}_1\|_{\widehat{X}_2} \leq C$.

La unicidad la deducimos de forma análoga a la demostración de la Proposición 3.3; por lo tanto, la omitimos. Así, concluimos la prueba. \square

Finalmente, en el siguiente Teorema demostramos que los multiplicadores de Lagrange σ_1 y σ_2 proporcionados por el Teorema 4.10 tienen una regularidad fuerte. Hacemos énfasis en que los multiplicadores de Lagrange $[\sigma_1, \sigma_2] \in L^{\frac{3}{2}}(Q) \times L^{\frac{3}{2}}(Q)$ corresponden a la noción de solución ultra

débil del problema (74). A continuación, mejoramos su regularidad haciendo una comparación con la solución fuerte del sistema adjunto (74). Este es el contenido de la siguiente proposición.

Proposición 4.16 *Asuma las hipótesis del Teorema 4.10. Sea $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ una solución local óptima para el problema de control (39). Entonces, los multiplicadores σ_1 y σ_2 que proporciona el Teorema 4.10 son únicos y satisfacen $[\sigma_1, \sigma_2] \in X_2 \times X_2$.*

Demostración. El Teorema 4.10 garantiza la existencia de un multiplicador de Lagrange $[\sigma_1, \sigma_2] \in L^{\frac{3}{2}}(Q) \times L^{\frac{3}{2}}(Q)$. En particular, $[\sigma_1, \sigma_2]$ satisface (62)-(63). La Proposición 4.15 implica que el problema (74) admite una solución única $[\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2] \in X_2 \times X_2$. Por lo tanto, nuestro objetivo es demostrar que es posible identificar $[\sigma_1, \sigma_2]$ con $[\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2]$.

En primer lugar, para algún $[U, V] \in \widehat{X}_3 \times \widehat{X}_3$, consideramos el sistema (74) reescrito para $[\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2]$, y multiplicamos las ecuaciones (74)₁ por U y (74)₂ por V , de las que, integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \gamma_u \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{u} - u_d)U + \beta_1 \int_{\Omega} (\tilde{u}(T) - u_T)U(T) &= \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t U - D_u \Delta U + \gamma U - p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U) \tilde{\sigma}_1 \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U) \tilde{\sigma}_2, \end{aligned} \quad (81)$$

$$\begin{aligned} \gamma_v \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{v} - v_d)V + \beta_2 \int_{\Omega} (\tilde{v}(T) - v_T)V(T) &= \int_0^T \int_{\Omega} (-D_{uv} \Delta V - \gamma |\tilde{u}|^p V) \tilde{\sigma}_1 \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - D_v \Delta V + \gamma |\tilde{u}|^p V - \tilde{f}V) \tilde{\sigma}_2. \end{aligned} \quad (82)$$

Ahora, tomamos la diferencia entre las ecuaciones (62) y (81) y entre (63) y (82), y sumando las respectivas ecuaciones, deducimos lo siguiente

$$\begin{aligned}
0 &= \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t U - D_u \Delta U - p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u}) \tilde{v} U - D_{uv} \Delta V + \gamma U - \gamma |\tilde{u}|^p V) (\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1) \\
&+ \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - D_v \Delta V + \gamma |\tilde{u}|^p V - \tilde{f} V + p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u}) \tilde{v} U) (\sigma_2 - \tilde{\sigma}_2).
\end{aligned} \tag{83}$$

Por ende, como consecuencia del Teorema 4.9, si $[U, V] \in \widehat{X}_3 \times \widehat{X}_3$ es solución del sistema (55) asociado a algún $[g_u, g_v] \in L^3(Q) \times L^3(Q)$, a partir de (83), deducimos que

$$\int_0^T \int_{\Omega} g_u (\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1) + \int_0^T \int_{\Omega} g_v (\sigma_2 - \tilde{\sigma}_2) = 0.$$

Como $[\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1, \sigma_2 - \tilde{\sigma}_2] \in L^{\frac{3}{2}}(Q) \times L^{\frac{3}{2}}(Q)$, teniendo en cuenta que $\overline{C_0^{\infty} L^{\frac{3}{2}}}(\Omega) = L^{\frac{3}{2}}(\Omega)$, existe una sucesión:

$$[(\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_{\varepsilon}, (\sigma_2 - \tilde{\sigma}_2)_{\varepsilon}]_{\varepsilon > 0} \in C_0^{\infty}(\Omega) \times C_0^{\infty}(\Omega),$$

tal que

$$\left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_{\varepsilon}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sigma_2 - \tilde{\sigma}_2)_{\varepsilon} \right] = [\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1, \sigma_2 - \tilde{\sigma}_2].$$

Entonces

$$\int_0^T \int_{\Omega} g_u (\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_{\varepsilon} + \int_0^T \int_{\Omega} g_v (\sigma_2 - \tilde{\sigma}_2)_{\varepsilon} = 0, \tag{84}$$

para toda $[g_u, g_v] \in L^3(Q) \times L^3(Q)$. En particular si consideramos $[(\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_\varepsilon, (\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_\varepsilon] \in C_0^\infty(\Omega) \times C_0^\infty(\Omega)$ tenemos que

$$\int_0^T \int_\Omega |\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1|^2 + \int_0^T \int_\Omega |\sigma_2 - \tilde{\sigma}_2|^2 = 0,$$

por ende

$$\|(\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(\sigma_2 - \tilde{\sigma}_2)_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0,$$

esto implica que $[(\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_\varepsilon, (\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_\varepsilon]_{\varepsilon>0} = [0, 0]$, lo que nos permite concluir que $[\sigma_1, \sigma_2] = [\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2]$. Consecuentemente, $[\sigma_1, \sigma_2] \in X_2 \times X_2$ como resultado de la regularidad de $[\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2] \in X_2 \times X_2$. □

4.3.2. Caso $N = 2$. Una dupla $[\sigma_1, \sigma_2] \in L^{2+}(Q) \times L^{2+}(Q)$ que satisface (71) y (72)

para toda $[U, V] \in \mathcal{X}_0 \times \mathcal{X}_0$ corresponde al concepto de solución ultra débil del siguiente sistema lineal

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_t \sigma_1 + D_u \Delta \sigma_1 - \gamma \sigma_1 + p \gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u}) \tilde{v} \sigma_1 - p \gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u}) \tilde{v} \sigma_2 = -\gamma_u (\tilde{u} - u_d), & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_t \sigma_2 + D_v \Delta \sigma_2 - \gamma |\tilde{u}|^p \sigma_2 + f \sigma_2 + D_{uv} \Delta \sigma_1 + \gamma |\tilde{u}|^p \sigma_1 = -\gamma_v (\tilde{v} - v_d), & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \frac{\partial \sigma_1}{\partial \nu} = 0 = \frac{\partial \sigma_2}{\partial \nu}, & \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega, \\ \sigma_1(T) = \beta_1 (\tilde{u}(T) - u_T), & \text{en } \Omega, \\ \sigma_2(T) = \beta_2 (\tilde{v}(T) - v_T), & \text{en } \Omega. \end{array} \right.$$

(85)

El objetivo de esta subsección consiste en mejorar la regularidad de los multiplicadores de Lagrange que proporciona el Teorema 4.13. Para ello, demostramos que el problema adjunto (85) posee una regularidad fuerte. La siguiente proposición contiene este resultado.

Proposición 4.17 *Sea $N = 2$. Sea $\tilde{s} = [\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ una solución local óptima para el problema de control (39). Entonces el problema (85) tiene una única solución $[\sigma_1, \sigma_2] \in X_2 \times X_2$.*

Demostración. Sea $s = T - t$, con $t \in (0, T)$, consideramos los cambios de variable $\tilde{\sigma}_1(s) = \sigma_1(t)$ y $\tilde{\sigma}_2(s) = \sigma_2(t)$. Entonces el sistema (85) es equivalente al siguiente

$$\left\{ \begin{array}{ll} \partial_s \tilde{\sigma}_1 - D_u \Delta \tilde{\sigma}_1 + \gamma \tilde{\sigma}_1 - p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u}) \tilde{v} \tilde{\sigma}_1 + p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \tilde{u} \tilde{v} \tilde{\sigma}_2 = \gamma_u (\tilde{u} - u_d), & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \partial_s \tilde{\sigma}_2 - D_v \Delta \tilde{\sigma}_2 + \gamma |\tilde{u}|^p \tilde{\sigma}_2 - f 1_{\Omega_c} \tilde{\sigma}_2 - D_{uv} \Delta \tilde{\sigma}_1 - \gamma |\tilde{u}|^p \tilde{\sigma}_1 = \gamma_v (\tilde{v} - v_d), & \text{en } (0, T) \times \Omega, \\ \frac{\partial \tilde{\sigma}_1}{\partial \nu} = 0 = \frac{\partial \tilde{\sigma}_2}{\partial \nu}, & \text{sobre } (0, T) \times \partial \Omega, \\ \tilde{\sigma}_1(0) = \beta_1 (\tilde{u}(T) - u_T), & \text{en } \Omega, \\ \tilde{\sigma}_2(0) = \beta_2 (\tilde{v}(T) - v_T), & \text{en } \Omega. \end{array} \right. \quad (86)$$

Siguiendo un razonamiento análogo al de la prueba del Proposición 4.15, mostraremos que cualquier solución de (86) lo suficientemente regular está acotada en $X_2 \times X_2$. Multiplicando (86)₁ por $\tilde{\sigma}_1$ e integrando en Ω , de las desigualdades de Hölder y Young deducimos que existe una constante

$K > 0$ tal que

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + D_u \|\nabla \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 &\leq \gamma_u \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2} \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2} + p\gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{p-1} \|\tilde{v}\|_{L^\infty} (\|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2} \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2} + \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2) \\
&\quad + \gamma \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 \\
&\leq K \left(\frac{1}{2} + \gamma + \frac{1}{2} p^2 \gamma^2 \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p-2} \|\tilde{v}\|_{L^\infty}^2 + p\gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{p-1} \|\tilde{v}\|_{L^\infty} \right) \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{\gamma_u^2}{2} \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{87}$$

Por otra parte, multiplicando (86)₂ por $\tilde{\sigma}_2$ e integrando en Ω , de las desigualdades de Hölder y Young obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 + D_v \|\nabla \tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 &\leq \gamma_v \|\tilde{v} - v_d\|_{L^2} \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2} + \gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^p \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2} \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 \\
&\quad + D_{uv} \int_{\Omega} \nabla \tilde{\sigma}_1 \cdot \nabla \tilde{\sigma}_2 + \gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^p \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2} \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2} \\
&\leq K \left(\frac{\gamma^2}{2} \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} + \frac{1}{2} + \gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^p + K_\varepsilon \|f\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2} \right) \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{\gamma_v^2}{2} \|\tilde{v} - v_d\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + K_\varepsilon \|\nabla \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + \varepsilon \|\nabla \tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2,
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 + (D_v - \varepsilon) \|\nabla \tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 &\leq \left(\frac{\gamma^2}{2} \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} + \frac{1}{2} + \gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^p + K_\varepsilon \|f\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2} \right) \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 \\
&\quad + \frac{\gamma_v^2}{2} \|\tilde{v} - v_d\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + K_\varepsilon \|\nabla \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{88}$$

Análogamente, multiplicando (86)₁ por $-\Delta \tilde{\sigma}_1$ e integrando en Ω , de las desigualdades de Hölder,

Young y Gagliardo-Nirenberg obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + D_u \|\Delta \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 &\leq \left(\|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2} + p\gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{p-1} \|\tilde{v}\|_{L^\infty} (\|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2} + \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}) \right) \|\Delta \tilde{\sigma}_1\|_{L^2} \\
&\quad + \gamma_u \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2} \|\Delta \tilde{\sigma}_1\|_{L^2} \\
&\leq \varepsilon \|\Delta \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + K_\varepsilon \left(\|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + p^2 \gamma^2 \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} \|\tilde{v}\|_{L^\infty}^2 (\|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 + \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2) \right) \\
&\quad + K_\varepsilon \gamma_u^2 \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2}^2.
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + (D_u - \varepsilon) \|\Delta \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 &\leq K_\varepsilon \left(\|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + p^2 \gamma^2 \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} \|\tilde{v}\|_{L^\infty}^2 (\|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 + \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2) \right) \\
&\quad + K_\varepsilon \gamma_u^2 \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{89}$$

De (87)-(89) deducimos que para alguna constante $K > 0$ se cumple lo siguiente

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \frac{d}{dt} (\|\tilde{\sigma}_1\|_{H^1}^2 + \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2) + (D_u - \varepsilon) (\|\nabla \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2 + \|\Delta \tilde{\sigma}_1\|_{L^2}^2) + D_v \|\nabla \tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 \\
\leq K \left(1 + K_\varepsilon + \gamma + \frac{1}{2} p^2 \gamma^2 \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p-2} \|\tilde{v}\|_{L^\infty}^2 + p\gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{p-1} \|\tilde{v}\|_{L^\infty} + p^2 \gamma^2 \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} \|\tilde{v}\|_{L^\infty}^2 \right) \|\tilde{\sigma}_1\|_{H^1}^2 \\
+ K \left(1 + \frac{\gamma^2}{2} \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} + \frac{1}{2} + \gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^p + K_\varepsilon \|f\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2} + K_\varepsilon p^2 \gamma^2 \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} \|\tilde{v}\|_{L^\infty}^2 \right) \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 \\
+ \frac{\gamma_v^2}{2} \|\tilde{v} - v_d\|_{L^2}^2 + \gamma_u^2 \left(K_\varepsilon + \frac{1}{2} \right) \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2}^2.
\end{aligned} \tag{90}$$

Integrando en tiempo en la desigualdad (90) y tomando ε lo suficientemente pequeño, de la desigualdad de Gronwall tenemos que existe una constante que C que depende de T , $\|\tilde{u}\|_{L^\infty(Q)}$,

$\|\tilde{v}\|_{L^\infty(Q)}$, $\|f\|_{L^2(Q)}$, $\tilde{\sigma}_1(0)$, $\tilde{\sigma}_2(0)$ y $\gamma_u^2 (K_\varepsilon + \frac{1}{2}) \|\tilde{u} - u_d\|_{L^2(Q)}^2 + \frac{\gamma_v^2}{2} \|\tilde{v} - v_d\|_{L^2(Q)}^2$ tal que

$$\|(\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2)\|_{L^\infty(0,T;H^1 \times L^2) \cap L^2(0,T;H^2 \times H^1)} \leq C. \quad (91)$$

Ahora, multiplicando (86)₂ por $-\Delta\tilde{\sigma}_2$ e integrando en Ω , de las desigualdades de Hölder, Young y Gagliardo-Nirenberg deducimos que existe una constante $K > 0$ tal que

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|\nabla\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 + (D_v - \varepsilon) \|\Delta\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 &\leq K \left(\gamma^2 \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2}^2 \|\tilde{\sigma}_2\|_{L^\infty}^2 \right) \\ &\quad K \left(\gamma_v^2 \|\tilde{v} - v_d\|_{L^2}^2 + D_{uv} \|\Delta\tilde{\sigma}_1\|_{L^2} + \gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^p \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2} \right) \\ &\leq K \left(\gamma^2 \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^{2p} + \|f\|_{L^2}^2 \right) \|\tilde{\sigma}_2\|_{H^1}^2 \\ &\quad K \left(\gamma_v^2 \|\tilde{v} - v_d\|_{L^2}^2 + D_{uv} \|\Delta\tilde{\sigma}_1\|_{L^2} + \gamma \|\tilde{u}\|_{L^\infty}^p \|\tilde{\sigma}_1\|_{L^2} \right). \end{aligned} \quad (92)$$

Sumando las ecuaciones (88) y (92), de la estimativa (91) y la desigualdad de Gronwall deducimos que $\tilde{\sigma}_2 \in L^\infty(0, T; H^1) \cap L^2(0, T; H^2)$. Por lo tanto $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 \in L^\infty(0, T; H^1 \times H^1) \cap L^2(0, T; H^2 \times H^2)$, de esta estimativa y el Teorema 1.1 concluimos que $\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2 \in X_2 \times X_2$. La unicidad la deducimos de forma análoga a la demostración de la Proposición 3.3; por lo tanto, la omitimos. Así, concluimos la prueba.

□

Proposición 4.18 *Asuma las hipótesis del Teorema 4.13. Sea $[\tilde{u}, \tilde{v}, \tilde{f}] \in S_{ad}$ una solución local óptima para el problema de control (39). Entonces, los multiplicadores σ_1 y σ_2 que proporciona el Teorema 4.13 son únicos y satisfacen $[\sigma_1, \sigma_2] \in X_2 \times X_2$*

Demostración. El Teorema 4.10 garantiza la existencia un multiplicador de Lagrange $[\sigma_1, \sigma_2] \in L^{2-}(Q) \times L^{2-}(Q)$. En particular, $[\sigma_1, \sigma_2]$ satisface (71)-(72). La Proposición 4.17 implica que el problema (85) admite una solución única $[\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2] \in X_2 \times X_2$. Por lo tanto, nuestro objetivo es demostrar que es posible identificar $[\sigma_1, \sigma_2]$ con $[\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2]$.

En primer lugar, para algún $[U, V] \in \widehat{X}_{2+} \times \widehat{X}_{2+}$, consideramos el sistema (85) reescrito para $[\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2]$, y multiplicamos las ecuaciones (85)₁ por U y (85)₂ por V , de las que, integrando por partes, obtenemos

$$\begin{aligned} \gamma_u \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{u} - u_d)U + \beta_1 \int_{\Omega} (\tilde{u}(T) - u_T)U(T) &= \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t U - D_u \Delta U + \gamma U - p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U) \tilde{\sigma}_1 \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U) \tilde{\sigma}_2, \end{aligned} \quad (93)$$

$$\begin{aligned} \gamma_v \int_0^T \int_{\Omega} (\tilde{v} - v_d)V + \beta_2 \int_{\Omega} (\tilde{v}(T) - v_T)V(T) &= \int_0^T \int_{\Omega} (-D_{uv} \Delta V - \gamma |\tilde{u}|^p V) \tilde{\sigma}_1 \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - D_v \Delta V + \gamma |\tilde{u}|^p V - \tilde{f}V) \tilde{\sigma}_2. \end{aligned} \quad (94)$$

Ahora, tomamos la diferencia entre las ecuaciones (71) y (93) y entre (72) y (94), y sumando las respectivas ecuaciones, deducimos lo siguiente

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t U - D_u \Delta U - p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U - D_{uv} \Delta V + \gamma U - \gamma |\tilde{u}|^p V) (\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1) \\ &+ \int_0^T \int_{\Omega} (\partial_t V - D_v \Delta V + \gamma |\tilde{u}|^p V - \tilde{f}V + p\gamma |\tilde{u}|^{p-1} \operatorname{sgn}(\tilde{u})\tilde{v}U) (\sigma_2 - \tilde{\sigma}_2). \end{aligned} \quad (95)$$

Por ende, como consecuencia del Teorema 4.12, si $[U, V] \in \widehat{X}_{2+} \times \widehat{X}_{2+}$ es solución del sistema (55) asociado a algún $[g_u, g_v] \in L^{2+}(Q) \times L^{2+}(Q)$, a partir de (95), deducimos que

$$\int_0^T \int_{\Omega} g_u(\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1) + \int_0^T \int_{\Omega} g_v(\sigma_2 - \tilde{\sigma}_2) = 0.$$

Como $[\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1, \sigma_2 - \tilde{\sigma}_2] \in L^{2-}(Q) \times L^{2-}(Q)$, teniendo en cuenta que $\overline{C_0^{L^{2-}}}(\Omega) = L^{2-}(\Omega)$, existe una sucesión:

$$[(\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_{\varepsilon}, (\sigma_2 - \tilde{\sigma}_2)_{\varepsilon}]_{\varepsilon > 0} \in C_0^{\infty}(\Omega) \times C_0^{\infty}(\Omega),$$

tal que

$$\left[\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_{\varepsilon}, \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\sigma_2 - \tilde{\sigma}_2)_{\varepsilon} \right] = [\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1, \sigma_2 - \tilde{\sigma}_2].$$

Entonces

$$\int_0^T \int_{\Omega} g_u(\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_{\varepsilon} + \int_0^T \int_{\Omega} g_v(\sigma_2 - \tilde{\sigma}_2)_{\varepsilon} = 0, \quad (96)$$

para toda $[g_u, g_v] \in L^{2+}(Q) \times L^{2+}(Q)$. En particular si consideramos $[(\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_{\varepsilon}, (\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_{\varepsilon}] \in C_0^{\infty}(\Omega) \times C_0^{\infty}(\Omega)$ tenemos que

$$\int_0^T \int_{\Omega} |\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1|^2 + \int_0^T \int_{\Omega} |\sigma_2 - \tilde{\sigma}_2|^2 = 0,$$

por ende

$$\|(\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|(\sigma_2 - \tilde{\sigma}_2)_\varepsilon\|_{L^2(\Omega)}^2 = 0,$$

esto implica que $[(\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_\varepsilon, (\sigma_1 - \tilde{\sigma}_1)_\varepsilon]_{\varepsilon>0} = [0, 0]$, lo que nos permite concluir que $[\sigma_1, \sigma_2] = [\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2]$. Consecuentemente, $[\sigma_1, \sigma_2] \in X_2 \times X_2$ como resultado de la regularidad de $[\tilde{\sigma}_1, \tilde{\sigma}_2] \in X_2 \times X_2$. \square

5. Simulación numérica del problema de control óptimo

En este capítulo presentamos un experimento numérico en dominios bidimensionales relacionado con el problema de control óptimo que abordamos en este trabajo. Aproximamos las ecuaciones de estado y las ecuaciones adjuntas utilizando diferencias finitas en el tiempo y elementos finitos en el espacio, y empleamos el software FreeFem++ para realizar las simulaciones. El sistema de optimalidad corresponde a un problema de valor límite de dos puntos donde aplicamos las condiciones iniciales a las ecuaciones de estado (4) y las condiciones terminales al sistema adjunto (85). Además, las variables de estado evolucionan hacia adelante en el tiempo, mientras que las variables adjuntas evolucionan hacia atrás.

5.1. Descripción del esquema numérico

Para definir el esquema de aproximación de las ecuaciones de estado (4) y del sistema adjunto (85), introducimos una partición uniforme del intervalo de tiempo $(t_n = n\Delta t)_{n=0}^N$, con paso de tiempo $\Delta t = T/N$. Definimos los espacios de elementos finitos \mathcal{X} y \mathcal{Y} generados por funciones \mathbb{P}_1 continuas. Con estas construcciones, planteamos el siguiente esquema de aproximación:

- **Ecuaciones de estado:** Dado $[v_h^0, u_h^0] \in \mathcal{X} \times \mathcal{X}$, calcular, para $n = 1, \dots, N$ y para toda

$$[\bar{v}, \bar{u}] \in \mathcal{X} \times \mathcal{X},$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{[Paso 1]} (\delta_t v_h^n, \bar{v})^h + D_v(\nabla v_h^n, \nabla \bar{v}) - \gamma(b, \bar{v}) + \gamma(v_h^n |u_h^{n-1}|^p, \bar{v})^h - (f v_h^n, \bar{v}) = 0, \\ \text{[Paso 2]} (\delta_t u_h^n, \bar{u})^h + D_u(\nabla u_h^n, \nabla \bar{u}) + D_{uv}(\nabla v_h^n, \nabla \bar{u}) - \gamma(a, \bar{u}) + \gamma(u_h^n, \bar{u})^h \\ \quad - \gamma(v_h^n |u_h^{n-1}|^p, \bar{u})^h = 0. \end{array} \right.$$

- **Ecuaciones adjuntas:** Dado $\sigma_1^N = \beta_1(u_h^N - u_T)$ y $\sigma_2^N = \beta_2(v_h^N - v_T)$, calcular, para $n = N-1, \dots, 0$ y para toda $[\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2] \in \mathcal{Y} \times \mathcal{Y}$,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{[Paso 1]} (-\delta_t \sigma_1^n, \bar{\sigma}_1) + D_u(\nabla \sigma_1^n, \nabla \bar{\sigma}_1) + \gamma(\sigma_1^n, \bar{\sigma}_1) - p\gamma(|u_h^n|^{p-1} \text{sgn}(u_h^n) v_h^n \sigma_1^n, \bar{\sigma}_1) \\ \quad + p\gamma(|u_h^n|^{p-1} \text{sgn}(u_h^n) v_h^n \sigma_2^n, \bar{\sigma}_1) = \gamma_u(u_h^n - u_d, \bar{\sigma}_1), \\ \text{[Paso 2]} (-\delta_t \sigma_2^n, \bar{\sigma}_2) + D_v(\nabla \sigma_2^n, \nabla \bar{\sigma}_2) + \gamma(|u_h^n|^p \sigma_2^n, \bar{\sigma}_2) - (f \sigma_2^n, \bar{\sigma}_2) + D_{uv}(\nabla \sigma_1^n, \nabla \bar{\sigma}_2) \\ \quad - \gamma(|u_h^n|^p \sigma_1^n, \bar{\sigma}_2) = \gamma_v(v_h^n - v_d, \bar{\sigma}_2). \end{array} \right.$$

Para resolver este sistema numérico, consideraremos el método del gradiente para problemas de control óptimo (véase, por ejemplo, Gunzburger and Manservigi (2000); Gunzburger (2002)) donde la tolerancia utilizada para comprobar la convergencia del funcional es $\tau = 10^{-3}$.

5.2. Resultados numéricos

En las simulaciones, consideramos el dominio cuadrado $\Omega = (0, 100) \times (0, 100)$ y discretizamos el tiempo con $\Delta t = 0.1$ y el espacio con $h = 1/80$ (es decir, 80 nodos en cada dirección). Además, usamos los siguientes valores para los parámetros del modelo tipo Schnackenberg:

$D_v = 40$, $D_u = 1$, $D_{uv} = 0$, $a = 0.1$, $b = 0.9$, $\gamma = 1$ y $p = 2$; y, en el funcional de control óptimo, tomamos $\gamma_u = 0.4$, $\gamma_v = 2$, $\gamma_f = 5$, $\beta_1 = 0.5$ y $\beta_2 = 0.5$.

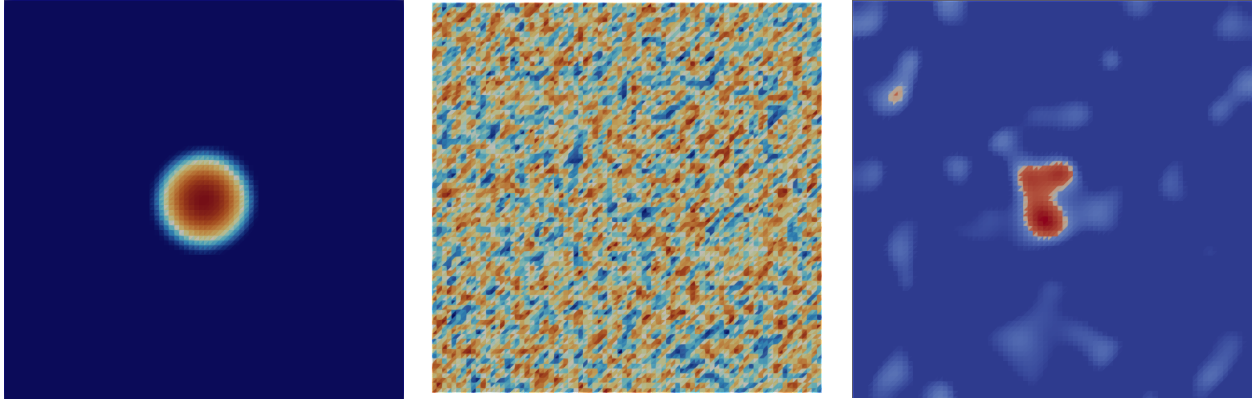
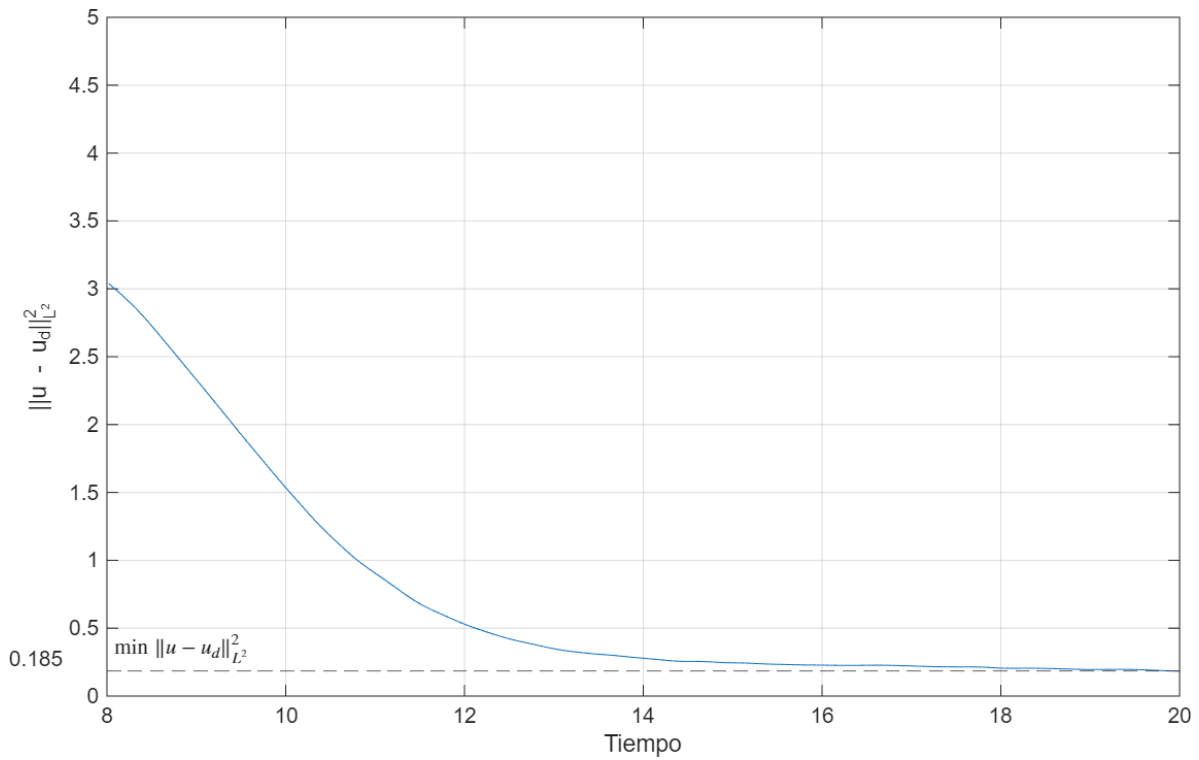
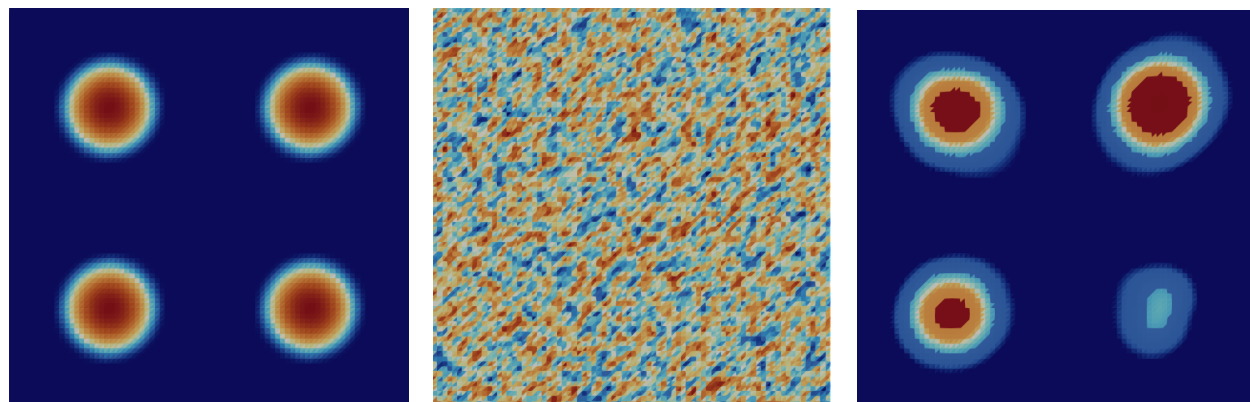
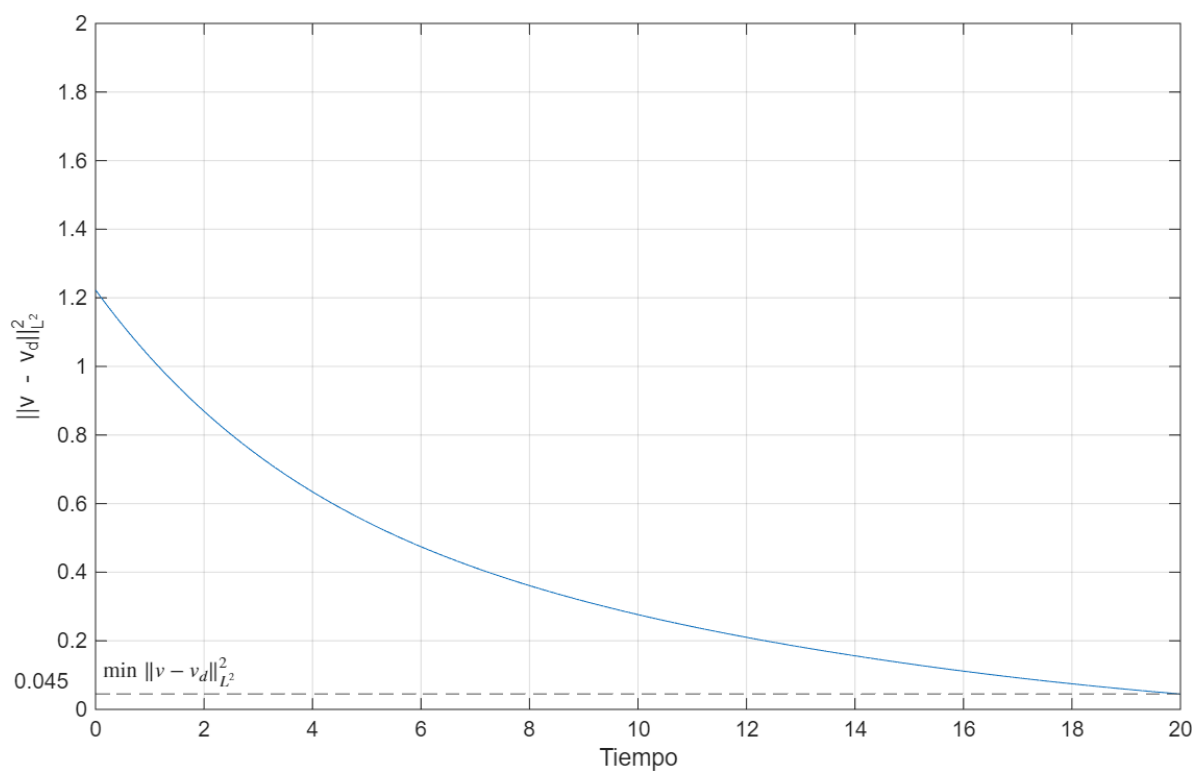
(a) Estado deseado u_d (b) Estado inicial u_0^h (c) Control óptimo u (d) Diferencia entre el estado óptimo u y el estado deseado u_d vs tiempo

Figura 4. Resultados numéricos para la especie u .

(a) Estado deseado v_d (b) Estado inicial v_0^t (c) Control óptimo v (d) Diferencia entre el estado óptimo v y el estado deseado v_d vs tiempo*Figura 5.* Resultados numéricos para la especie v .

En las Figuras 4 y 5 mostramos, para cada variable, las condiciones iniciales, los estados deseados, el estado óptimo obtenido y la norma L^2 de la diferencia entre los estados óptimo y deseado

obtenidos para diferentes tiempos, hasta el tiempo final $T = 20$. Como condiciones iniciales, consideramos las mismas que en los experimentos del Capítulo 2. observamos que los estados óptimos obtenidos se acercan a los estados objetivo en el tiempo $T = 20$, lo que demuestra que el sistema ha sido controlado satisfactoriamente. Además, en las Figuras 4(d) y 5(d) observamos el decrecimiento de las normas $\|u_n - u_d\|_{L^2}$ y $\|v_n - v_d\|_{L^2}$ y su estabilización al cabo de poco tiempo.

6. Conclusiones y Trabajos futuros

6.1. Conclusiones

- Diseñamos un esquema completamente discreto para la aproximación de las soluciones del modelo de tipo Schnackenberg, usando diferencias finitas en el tiempo y elementos finitos en el espacio. Probamos el buen planteamiento del esquema numérico y la positividad de las variables discretas.
- Realizamos un experimento numérico que validó el buen comportamiento del esquema numérico estudiado, incluyendo la captura de la formación de patrones de Turing.
- Probamos la existencia y unicidad de soluciones globales fuertes para un modelo de tipo Schnackenberg en dominios bidimensionales y tridimensionales acotados y con frontera suave.
- Planteamos un problema de control óptimo bilineal con ecuaciones de estado dadas por un sistema de tipo Schnackenberg en dos y tres dimensiones, y demostramos la existencia de una solución óptima global.
- Verificamos condiciones necesarias de optimalidad de primer orden mediante la existencia de multiplicadores de Lagrange para las soluciones óptimas locales asociadas al problema

de control óptimo.

- Propusimos un esquema de aproximación numérica del sistema de optimalidad basado en el método del gradiente y lo validamos con experimentos computacionales.

6.2. Trabajos futuros

Planteamos los siguientes posibles trabajos futuros para dar continuidad a esta investigación:

- Realizar el análisis de existencia de soluciones fuertes para el sistema (4) con términos de difusión cruzada tanto en el activador como en el inhibidor.
- Desde el punto de vista de la teoría de control óptimo, planteamos como trabajo futuro el análisis numérico del problema de control óptimo y el estudio de condiciones de optimalidad de segundo orden.

Bibliografía

- Adams, R. A. and Fournier, J. (1975). Sobolev spaces, acad. *Press, New York*, 19(5).
- Britton, N. F. (1986). *Reaction-diffusion equations and their applications to biology*. Academic Press.
- Chen, Y. and Buceta, J. (2019). A non-linear analysis of turing pattern formation. *PLoS One*, 14(8):e0220994.
- Feireisl, E. and Novotný, A. (2009). *Singular Limits in Thermodynamics of Viscous Fluids*. Springer.
- Gaffney, E., Yi, F., and Lee, S. (2016). The bifurcation analysis of turing pattern formation induced by delay and diffusion in the schnakenberg system. *Discrete and Continuous Dynamical Systems - Series B*, 22(2).
- Gambino, G., Lombardo, M. C., Lupo, S., and Sammartino, M. (2016). Super-critical and sub-critical bifurcations in a reaction-diffusion schnakenberg model with linear cross-diffusion. *Ricerche di Matematica*, 65:449–467.
- Guillén-González, F. and Gutiérrez-Santacreu, J. V. (2019). From a cell model with active motion to a hele–shaw-like system: a numerical approach. *Numerische Mathematik*, 143(1):107–137.
- Gunzburger, M. D. (2002). *Perspectives in flow control and optimization*. SIAM.

- Gunzburger, M. D. and Manservigi, S. (2000). The velocity tracking problem for navier–stokes flows with boundary control. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39(2):594–634.
- Kaneko, Y. and Yamada, Y. (2011). A free boundary problem for a reaction-diffusion equation appearing in ecology. *Advances in Mathematical Sciences and Applications*, 21(2):467.
- Lions, J. (1969). *Quelques méthodes de résolution des problèmes aux limites non linéaires*. Dunod.
- Lions, J. and Magenes, E. (1968). *Travaux et recherches mathématiques*.
- Madzvamuse, A., Ndakwo, H. S., and Barreira, R. (2015). Cross-diffusion-driven instability for reaction-diffusion systems: analysis and simulations. *Journal of Mathematical Biology*, 70(4):709–743.
- Murray, J. D. (1982). Parameter space for turing instability in reaction diffusion mechanisms: a comparison of models. *Journal of Theoretical Biology*, 98(1):143–163.
- Nirenberg, L. (1959). On elliptic partial differential equations. *Annali della Scuola Normale Superiore di Pisa*, 3(12):115–162.
- Rao, C., Ren, P., Wang, Q., Buyukozturk, O., Sun, H., and Liu, Y. (2023). Encoding physics to learn reaction–diffusion processes. *Nature Machine Intelligence*, 5(7):765–779.
- Simon, J. (1987). Compact sets in the space $l^p(0, t; b)$. *Ann. Mat. Pura Appl*, 146:65–96.
- Trotzsch, F. (2010). *Optimal Control of Partial Differential Equations. Theory, Methods and Applications*. AMS, Providence, RI.

- Tulumello, E., Lombardo, M. C., and Sammartino, M. (2014). Cross-diffusion driven instability in a predator-prey system with cross-diffusion. *Acta Applicandae Mathematicae*, 132(1):621–633.
- Vanag, V. K. and Epstein, I. R. (2009). Pattern formation mechanisms in reaction-diffusion systems. *International Journal of Developmental Biology*, 53(5-6):673–681.
- Zowe, J. and Kurcyusz, S. (1979). Regularity and stability for the mathematical programming problem in banach spaces. *Appl. Math. Optim*, 5:49–62.

ANEXO

A continuación demostramos un resultado que se usa para la prueba del Teorema 3.2.

Proposición 6.1 Sean $0 < T < \infty$, $p \in [1, \frac{7}{3})$, $f \in L^3(Q)$, y $u_0, v_0 \in \widehat{W}^{\frac{4}{3}, 3}(\Omega)$ con $v_0 \geq 0$ en Ω . Si $[u, v] \in (L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)) \times (L^\infty(L^{\infty-}) \cap L^2(H^1))$ son funciones que satisfacen (25), entonces se tiene que $u, v \in X_{\frac{17}{7}}$.

Demostración. A partir de la hipótesis $[u, v] \in (L^\infty(L^2) \cap L^2(H^1)) \times (L^\infty(L^{\infty-}) \cap L^2(H^1))$ tenemos que $u \in L^{\frac{10}{3}}(Q)$. Como $u \in L^{\frac{10}{3}}(Q)$, $v \in L^\infty(L^{\infty-})$ y $f \in L^3(Q)$, concluimos que $v|u|^p \in L^{\frac{10}{3p-}}(Q)$ y $\beta f v \in L^3(Q)$. Así obtenemos $\gamma b - \beta \gamma v|u|^p + \beta f v \in L^{\frac{10}{3p-}}(Q)$. Aplicando el Teorema 1.1 con $q = \frac{10}{3p-}$, concluimos que $v \in X_{\frac{10}{3p-}}$ y, además, existe una constante C_v tal que

$$\|v\|_{X_{\frac{10}{3p-}}} \leq C_v \left(\|v_0\|_{W^{\frac{4}{3}, 3}}, \|u_0\|_{W^{\frac{4}{3}, 3}}, \|f\|_{L^3(Q)} \right).$$

Como $v \in X_{\frac{10}{3p-}}$, tenemos que $\Delta v \in L^{\frac{10}{3p-}}(Q)$, lo que implica que $D_{uv}\Delta v + \gamma a - \beta \gamma u + \beta \gamma v|u|^p \in L^{\frac{10}{3p-}}(Q)$. Aplicando nuevamente el Teorema 1.1 con $q = \frac{10}{3p-}$, obtenemos que $u \in X_{\frac{10}{3p-}}$ y existe una constante C_u tal que

$$\|u\|_{X_{\frac{10}{3p-}}} \leq C_u \left(\|v_0\|_{W^{\frac{4}{3}, 3}}, \|u_0\|_{W^{\frac{4}{3}, 3}}, \|f\|_{L^3(Q)} \right).$$

Procedemos en dos pasos para concluir la prueba.

Paso 1. Como $u, v \in X_{\frac{10}{3p-}}$ y $\frac{10}{3p} > \frac{10}{7}$, existe un entero $n \geq 1$ tal que $u, v \in X_{\frac{10}{7} + \frac{1}{n+1}}$. Probemos que

$u, v \in X_{\frac{10}{7} + \frac{1}{n}}$ mediante un argumento de tipo “bootstrapping”.

- De la Proposición 1.14, tenemos que $X_{\frac{10}{7} + \frac{1}{n+1}} \hookrightarrow L^{\frac{5(10n+17)}{15n+1}}(Q)$. En consecuencia, $-\beta\gamma v|u|^p \in L^{\frac{5(10n+17)}{(15n+1)p}}(Q) \hookrightarrow L^{\frac{15(10n+17)}{(15n+1)^7}}(Q)$ y $\beta f v \in L^{3^-}(Q)$. Así, $\gamma b - \beta\gamma v|u|^p + \beta f v \in L^{\frac{15(10n+17)}{(15n+1)^7}}(Q)$.

Aplicando nuevamente el Teorema 1.1 con $q = \frac{15(10n+17)}{(15n+1)^7}$, concluimos que $v \in X_{\frac{15(10n+17)}{(15n+1)^7}}$.

Además, existe una constante C_v tal que

$$\|v\|_{X_{\frac{15(10n+17)}{(15n+1)^7}}} \leq C_v \left(\|v_0\|_{W^{\frac{4}{3},3}}, \|u_0\|_{W^{\frac{4}{3},3}}, \|f\|_{L^3(Q)} \right).$$

- Como $v \in X_{\frac{15(10n+17)}{(15n+1)^7}}$, se tiene que $\Delta v \in L^{\frac{15(10n+17)}{(15n+1)^7}}(Q)$, lo que implica que $D_{uv}\Delta v + \gamma a - \beta\gamma u + \beta\gamma v|u|^p \in L^{\frac{15(10n+17)}{(15n+1)^7}}(Q)$. Aplicando nuevamente el Teorema 1.1 con $q = \frac{15(10n+17)}{(15n+1)^7}$, concluimos que $u \in X_{\frac{15(10n+17)}{(15n+1)^7}}$. Además, existe una constante C_u tal que

$$\|u\|_{X_{\frac{15(10n+17)}{(15n+1)^7}}} \leq C_u \left(\|v_0\|_{W^{\frac{4}{3},3}}, \|u_0\|_{W^{\frac{4}{3},3}}, \|f\|_{L^3(Q)} \right).$$

Como $n \geq 1$, se cumple que $\frac{15(10n+17)}{(15n+1)^7} > \frac{10}{7} + \frac{1}{n}$. Por lo tanto, $u, v \in X_{\frac{10}{7} + \frac{1}{n}}$.

Paso 2. Repitiendo $n - 1$ veces un argumento análogo al del Paso 1, se obtiene que $u, v \in X_m$ para

$m = n - 1, n - 2, \dots, 1$. Así, $u, v \in X_{\frac{10}{7} + 1} = X_{\frac{17}{7}}$, lo que completa la demostración. \square

Proposición 6.2 Sean $x, y \in [0, \infty)$ y $p \in [1, \infty)$, entonces

$$|x^p - y^p| \leq p|x - y|(x^{p-1} + y^{p-1}).$$

Demostración. Si $x = y$ entonces la desigualdad es inmediata. Supongamos sin pérdida de generalidad que $x > y$, consideremos la función $f(x) := x^p$, tenemos por el teorema del valor medio que existe algún ξ con $x > \xi > y$ tal que

$$\begin{aligned}
 \frac{x^p - y^p}{x - y} &= \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \\
 &= f'(\xi) \\
 &= p\xi^{p-1} \\
 &\leq p \max\{x^{p-1}, y^{p-1}\} \\
 &< p(x^{p-1} + y^{p-1}).
 \end{aligned} \tag{97}$$

De la desigualdad (97) obtenemos lo que queremos probar.

□

A continuación demostramos un resultado de convergencia débil que se usa en la prueba del Teorema 3.2.

Proposición 6.3 *Sea $([\bar{u}_m, \bar{v}_m])_{m \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $X_{u,v}$ tal que $[\bar{u}_m, \bar{v}_m] \rightarrow [\bar{u}, \bar{v}]$ fuerte en $X_{u,v} \times X_{u,v}$, entonces*

$$\gamma \bar{v}_m |\bar{u}_m|^p \rightarrow \gamma \bar{v} |\bar{u}|^p \quad \text{débil en } L^3(Q).$$

Demostración. Sea $h \in L^{\frac{3}{2}}$, queremos mostrar que

$$\int_0^T \int_{\Omega} h \bar{v}_m |\bar{u}_m|^p \rightarrow \int_0^T \int_{\Omega} h \bar{v} |\bar{u}|^p,$$

esto es equivalente a mostrar que

$$\int_0^T \int_{\Omega} |h| |\bar{v}_m |\bar{u}_m|^p - \bar{v} |\bar{u}|^p| \longrightarrow 0.$$

De las desigualdades de Hölder y Minkowski tenemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_{\Omega} |h| |\bar{v}_m |\bar{u}_m|^p - \bar{v} |\bar{u}|^p| &\leq \|h\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathcal{Q})} \|\bar{v}_m |\bar{u}_m|^p - \bar{v} |\bar{u}|^p\|_{L^3(\mathcal{Q})} \\ &\leq \|h\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathcal{Q})} \left(\|\bar{v}_m (|\bar{u}_m|^p - |\bar{u}|^p)\|_{L^3(\mathcal{Q})} + \| |\bar{u}|^p (\bar{v}_m - \bar{v}) \|_{L^3(\mathcal{Q})} \right) \\ &\leq \|h\|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathcal{Q})} \left(\|\bar{v}_m\|_{X_{u,v}} \| |\bar{u}_m|^p - |\bar{u}|^p \|_{L^{\frac{3}{2}}(\mathcal{Q})} + \| |\bar{u}|^p \|_{X_{u,v}} \|\bar{v}_m - \bar{v}\|_{L^3(\mathcal{Q})} \right). \end{aligned} \tag{98}$$

De la desigualdad de Hölder y la Proposición 6.2 obtenemos

$$\begin{aligned} \| |\bar{u}_m|^p - |\bar{u}|^p \|_{L^3(\mathcal{Q})}^3 &= \int_0^T \int_{\Omega} | |\bar{u}_m|^p - |\bar{u}|^p |^3 \\ &\leq p \int_0^T \int_{\Omega} |\bar{u}_m - \bar{u}|^3 (|\bar{u}_m|^p + |\bar{u}|^p)^3 \\ &\leq \left(\|\bar{u}_m - \bar{u}\|_{L^3(\mathcal{Q})} \left(\|\bar{u}_m\|_{X_{u,v}} + \|\bar{u}\|_{X_{u,v}} \right) \right)^3. \end{aligned} \tag{99}$$

De las desigualdades (98) y (99) llegamos a la siguiente estimación

$$\begin{aligned}
\int_0^T \int_{\Omega} |h| |\bar{v}_m |\bar{u}_m|^p - \bar{v} |\bar{u}|^p| &\leq \|h\|_{L^{\frac{3}{2}}(Q)} \|\bar{v}_m\|_{X_{u,v}} \| |\bar{u}_m|^p - |\bar{u}|^p \|_{L^3(Q)} \\
&+ \|h\|_{L^{\frac{3}{2}}(Q)} \|\bar{u}\|_{X_{u,v}} \|\bar{v}_m - \bar{v}\|_{L^3(Q)} \\
&\leq \|h\|_{L^{\frac{3}{2}}(Q)} \|\bar{v}_m\|_{X_{u,v}} \left(\|\bar{u}_m\|_{X_{u,v}} + \|\bar{u}\|_{X_{u,v}} \right) \|\bar{u}_m - \bar{u}\|_{X_{u,v}} \\
&+ \|h\|_{L^{\frac{3}{2}}(Q)} \|\bar{u}\|_{X_{u,v}} \|\bar{v}_m - \bar{v}\|_{X_{u,v}}.
\end{aligned}$$

Como $h \in L^{\frac{3}{2}}$ y $\bar{u}_m, \bar{u}, \bar{v}_m, \bar{v} \in X_{u,v} \hookrightarrow L^{\infty}(Q)$, de la convergencia $[\bar{u}_m, \bar{v}_m] \longrightarrow [\bar{u}, \bar{v}]$ fuerte en $X_{u,v} \times$

$X_{u,v}$ se concluimos que

$$\int_0^T \int_{\Omega} |h| |\bar{v}_m |\bar{u}_m|^p - \bar{v} |\bar{u}|^p| \longrightarrow 0.$$

Por lo tanto

$$\bar{v}_m |\bar{u}_m|^p \longrightarrow \bar{v} |\bar{u}|^p \quad \text{débil en } L^3(Q).$$

□