HABILIDADES COGNITIVAS ASOCIADAS AL PROCESO DE REPRESENTACIÓN DE FENÓMENOS DE VARIACIÓN

NELSON JAVIER RUEDA RUEDA

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA
BUCARAMANGA
2016

HABILIDADES COGNITIVAS ASOCIADAS AL PROCESO DE REPRESENTACIÓN DE FENÓMENOS DE VARIACIÓN

NELSON JAVIER RUEDA RUEDA

Directora

SANDRA EVELY PARADA RICO

Doctora en Ciencias Especialidad Matemática Educativa

Codirector

JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL

Doctor en Didáctica de las Matemáticas

Trabajo de grado para optar al título de Magíster en Educación Matemética

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

MAESTRÍA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA

BUCARAMANGA

2016

DEDICATORIA

A Ángela, mi madre, quien a pesar de las dificultades que le planteó la vida me sacó adelante, me enseñó a ser una persona de bien y es hoy mi principal motivo para seguir adelante.

A mis abuelos Ana y Domingo y a mi padrino Expedito, quienes cuidan de mí desde el cielo.

AGRADECIMIENTOS

A la profesora Sandra Evely Parada por su paciencia infinita y su constante motivación para culminar este proyecto.

A los profesores Jorge Fiallo, Gabriel Yañez, Solange Roa y Sterling Castañeda por todas las enseñanzas recibidas en este proceso de formación como investigador.

A los doctores Ivonne Twiggy Sandoval y Francois Pluvinage por haber orientado el rumbo de este proyecto cuando apenas iniciaba.

A Adriana, Jenny, Doris, Jhon, Jairo, Jorge, Laura, Ana, Luis, Karina, Paola, amigos invaluables que han estado apoyándome en este proceso.

A Freddy y Mónica, quienes me acogieron y me brindaron su cariño en mi estadía en México.

A los estudiantes de quienes he sido profesor del curso de pre-cálculo, en especial a aquellos que aceptaron ser partícipes de esta investigación, sin ustedes esto no sería posible.

TABLA DE CONTENIDO

LISTA DE FIGURAS

Pág.

LISTA DE TABLAS

RESUMEN

TÍTULO: HABILIDADES COGNITIVAS ASOCIADAS AL PROCESO DE REPRESENTACIÓN DE FENÓMENOS DE VARIACIÓN.[1]

AUTOR: Nelson Javier Rueda Rueda**

PALABRAS CLAVES: Habilidades cognitivas, Pensamiento Variacional, Registros de representación, Curso de pre-cálculo, Tecnologías digitales, Resolución de problemas

RESUMEN: En este documento presentamos los resultados de una investigación de corte fenomenológico experimental que surgió a partir del desarrollo de una alternativa curricular preventiva para la problemática del bajo rendimiento de los estudiantes en la asignatura Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander. La investigación se lleva a cabo en un curso no tradicional de pre-cálculo, dirigido a estudiantes de primer ingreso a la universidad.

En esta investigación nos propusimos caracterizar habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación que pueden potenciarse mediante la resolución de problemas, en un curso de pre-cálculo mediado por tecnologías digitales. Inicialmente y teniendo en cuenta las actividades que se desarrollaron en el curso, se plantearon cinco habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación: i) el reconocimiento, ii) la interpretación, iii) la construcción, iv) la transformación y v) la coordinación.

El trabajo experimental se llevó a cabo durante dos semestres académicos en los que se video-grabaron dos casos de estudio y se recogieron sus producciones escritas. A partir de las evidencias encontradas y analizadas se caracterizan las cinco habilidades planteadas *a priori* y se desarrolla un marco conceptual en el que se identifican cinco registros de representación que son utilizados por el estudiante al momento de representar un objeto matemático: i) el simbólico motriz, ii) el lenguaje natural, iii) el tabular, iv) el algebraico y v) el gráfico.

A partir de los resultados encontrados en esta investigación se espera contribuir al desarrollo teórico de la Educación Matemática, así como afianzar una estructura curricular para el curso de pre-cálculo en el cual la investigación ha sido llevada a cabo.

---

[1]Proyecto de grado

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Directora: Sandra Evely Parada Rico, Doctora en Ciencias Especialidad Matemática Educativa.

ABSTRACT

TITLE: COGNITIVE SKILLS ASSOCIATED TO THE PROCESS OF REPRESENTATION OF VARIATION PHENOMENA.*

AUTHOR: Nelson Javier Rueda Rueda **

KEYWORDS: Cognitive skills, Variational Thinking, Representation Registers, Pre-calculus course, Digital technologies, Problem solving.

ABSTRACT: In this paper we present the results of an experimental phenomenological research that emerged from the development of a preventive curricular alternative for the problem of the low performance of students in the subject Calculus I at the Industrial University of Santander. The research is carried out in a non-traditional pre-calculus course, aimed at first-year students.

In this research we set out to characterize cognitive skills associated to the process of representation of phenomena of variation that can be enhanced by solving problems, in a pre-calculus course mediated by digital technologies.

Initially and taking into account the activities that were developed in the course, five cognitive skills associated with the representation process were considered: i) recognition, ii) interpretation, iii) construction, iv) transformation, and v) coordination. The experimental work was carried out during two academic semesters in which the cases of study were video-recorded and their written productions were recognized.

From the evidences found and analyzed, the five initial skills are characterized and a conceptual framework is developed in which five representational registers are identified as used by the students when they are representing a mathematical object: i) the symbolic, ii) natural language, iii) tabular, iv) algebraic and v) graphic.

From the results found in this research is expected to contribute to the theoretical development of Mathematics Education, as well as to strengthen a curricular structure for the pre-calculus course in which the research has been carried out.

---

* Grade Project

**Science Faculty. School of Mathematics. Director: Sandra Evely Parada Rico, PhD in Sciences Mathematics Education.

INTRODUCCIÓN

El curso de cálculo diferencial en gran cantidad de establecimientos de educación superior se ha caracterizado por ser el que mayor dificultad le causa a los estudiantes de nuevo ingreso, siendo este un fenómeno mundial, tal y como lo expresan Dávila, Flores, García y Valencia[2]; esto debido, entre otras causas, a que ellos no cuentan con pre-saberes lo suficientemente sólidos que les permita comprender los conceptos fundamentales que le son presentados en este curso.

Respecto a lo anterior Hitt[3] menciona que el cálculo está compuesto por una cantidad de subtemas que están conectados de tal manera que el déficit en el manejo de alguno de ellos no permite un desarrollo profundo de los conceptos asociados a fenómenos de variación y acumulación, mismos que actualmente estudiamos en los cursos de cálculo diferencial y cálculo integral.

Además de esto, como lo menciona Parada[4] a pesar de que los documentos orientadores del currículo en matemática, tanto a nivel nacional como internacional hacen énfasis en el desarrollo de procesos como la resolución de problemas, la modelación, la comunicación, entre otros; el desarrollo de los cursos en las instituciones de educación media y básica centra el proceso de enseñanza en el aprendizaje de contenidos y algoritmos. Las causales anteriores llevan a afectar

[2] DÁVILA, Guillermo, FLORES, Rubén, GARCÍA, Martín. & VALENCIA, Marco. *Fundamentos del cálculo*. Sonora: Editorial Garabatos, 2008.

[3] HITT, Fernando. Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. Cortés, y F. Hitt (Eds.). *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 81-107). Morelia: Morevallado Editores. 2005

[4] PARADA, Sandra. Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander. *Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas de la UIS, Bucaramanga*, 2012.

sobremanera el desempeño académico de los estudiantes en un curso de cálculo diferencial de primer semestre de la educación superior.

La Universidad Industrial de Santander (UIS), en particular, se ha visto aquejada por esta problemática, lo que ha conllevado no solamente al fracaso académico en la asignatura mencionada, sino que ha contribuido a incrementar los índices de deserción, según se ha reportado en documentos internos de la misma universidad, emitidos por la Vicerrectoría Académica de la institución (Vicerrectoría Académica, 2011). La UIS a través de profesores y directivas institucionales han planteado y llevado a cabo distintas alternativas para afrontar dicha problemática, Botello[5] menciona las que siguen:

- Prueba piloto de Cálculo I, desarrollada durante el año 2003 y fundamentada en la resolución de problemas mediante un trabajo colaborativo.

- Seis horas semanales de clase directa, desarrollada durante el año 2004.

- Unificación del plan de estudios, que se empezó a desarrollar desde el año 2009 y que aún se viene desarrollando.

Parada[6] destaca que además de las alternativas mencionadas existe la necesidad del diseño de alternativas curriculares tanto preventivas como remediales. Una de

---

[5] BOTELLO, Carolina. *Procesos de seguimiento y acompañamiento académico a estudiantes de cálculo diferencial: un aula experimental para profesores de matemáticas en formación*. Trabajo de grado Magíster en Educación Matemática. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2013, 222 p.

[6] PARADA, Sandra. Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander. *Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas de la UIS, Bucaramanga*, 2012.

las alternativas preventivas sugeridas por la misma autora es la necesidad de la creación de un curso laboratorio de pre-cálculo que coadyuve en el desarrollo de procesos matemáticos que permitan comprender fenómenos de variación, los cuales serán objeto de estudio en el curso de Cálculo Diferencial.

En muchas universidades se ha planteado la realización de un curso de pre-cálculo enfocado en el repaso de conceptos (conjuntos, álgebra, ecuaciones, inecuaciones, trigonometría, geometría analítica, entre otros), procedimientos y algoritmos que se creen necesarios para este curso. Sin embargo, el curso laboratorio de pre-cálculo que se ha venido desarrollando en la UIS desde hace más de tres años tiene características diferenciadas de otros cursos tradicionales. Éste ha tenido como propósito desarrollar en los estudiantes habilidades para comprender fenómenos de variación y resolver problemas en los que éstos se estudien (Fiallo y Parada[7]). En particular el curso apunta al desarrollo del pensamiento variacional a través del desarrollo de los procesos matemáticos, entre ellos la representación.

Algunos autores como Duval[8], Font[9] y Kaput[10] mencionan que los procesos de representación son de gran relevancia para tratar aspectos cuantitativos del mundo

---

[7] FIALLO, Jorge. & PARADA, Sandra Evely. Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento varacional. *Revista Científica*, 2014, no 20, p. 56-71.

[8] DUVAL, Raymond. *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang (sa), 1995.

[9] FONT, Vicenç, et al. Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 2000, vol. 14, p. 1-35.

[10] KAPUT, James J. Notations and representations as mediators of constructive processes. En *Radical constructivism in mathematics education*. Springer Netherlands, 1991. p. 53-74.

que nos rodea, así lo considera Moreno[11] quien afirma que "*representar un movimiento como un fenómeno de la geometría, fue una de las claves que abrió el código genético del cálculo*" (p. 92). Por tanto, un estudio en el que se analicen habilidades específicas de la representación de fenómenos de variación y acumulación podría contribuir con una mejor comprensión de estos objetos de estudio. Dicho fenómeno inspira la investigación reportada en este documento que consta de las siguientes secciones:

Capítulo 1. Planteamiento de la Investigación. En esta sección se presenta el contexto donde emerge la problemática de esta investigación a la par que se exponen la pregunta y el objetivo que la fundamentan. Además se presentan los antecedentes de la investigación en términos de cinco categorías: Investigaciones en Didáctica del Cálculo que refieren al fenómeno de estudio, Investigaciones sobre el desarrollo del Pensamiento Variacional, Investigaciones sobre los procesos de representación, Investigaciones sobre la adquisición y el desarrollo de habilidades cognitivas e Investigaciones que reportan cursos propedéuticos.

Capítulo 2. Marco Conceptual. En esta sección se presentan los aspectos teóricos expuestos de manera detallada, sobre los cuales se sustenta esta investigación en cuanto a: pensamiento variacional, representación, proceso de representación, habilidades cognitivas y la categorización de las habilidades cognitivas desarrolladas en el curso laboratorio.

Capítulo 3. Metodología. Aquí se da cuenta de la metodología empleada para la obtención de los datos; de las técnicas e instrumentos de recolección de datos que se emplearon; los casos de estudio; y la técnica de análisis de los datos.

[11] MORENO, Luis. *Educación Matemática: del signo al píxel*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. 2014

Capítulo 4. Caracterización de las Habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación. En esta sección se presentan los resultados del análisis de los datos en relación a la categorización de las habilidades cognitivas adquiridas por los estudiantes participantes del curso laboratorio de pre-cálculo.

Conclusiones. En este último apartado se sintetizan los hallazgos de la caracterización y se ofrecen algunas recomendaciones para dar continuidad a este trabajo en futuras investigaciones.

1. PLANTEAMIENTO DE LA INVESTIGACIÓN

Para comprender la problemática abordada en este estudio presentaremos a continuación el contexto en el cual se desarrolla la investigación y los antecedentes de los elementos directrices de la misma como lo son las dificultades de la enseñanza y el aprendizaje del cálculo, el pensamiento variacional, el proceso de representación, las habilidades cognitivas y los cursos propedéuticos. Estas unidades conceptuales nos permitirán formular la pregunta y el objetivo de este trabajo.

1.1 CONTEXTO DE LA INVESTIGACIÓN Y PROBLEMÁTICA

> "Una investigación central que es prioritaria es encontrar las formas para ayudar a los estudiantes a construir las conexiones entre lo que ven, hacen y expresan, investigar como los significados matemáticos son estructurados por los instrumentos disponibles para expresar las relaciones bajo estudio y bosquejar que tanto estos procesos mediados apoyan (o no) la construcción de significados matemáticos"[12]

Esta investigación fue desarrollada en el marco de un proyecto de extensión de la UIS, tendiente a afrontar la problemática de la deserción universitaria; según se reporta en documentos internos de la Universidad y que algunos autores como Botello[13] han referido, uno de los principales factores de la mencionada

[12] NOSS, Richard; HEALY, Lulu; HOYLES, Celia. The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational studies in mathematics*, 1997, vol. 33, no 2, p. 203-233.

[13] BOTELLO, Carolina. *Procesos de seguimiento y acompañamiento académico a estudiantes de cálculo diferencial: un aula experimental para profesores de matemáticas en formación*. Trabajo de grado Magíster en Educación Matemática. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2013, 222 p.

problemática es el fracaso académico de los estudiantes de nuevo ingreso en los cursos de matemáticas.

En la UIS en el primer semestre de 2013 se puso en marcha el primer curso laboratorio de pre-cálculo, del cual a la fecha se han realizado siete versiones. Este ha estado dirigido a estudiantes[14] de nuevo ingreso de las carreras de Ingeniería y Ciencias, los cuales fueron seleccionados para realizar el curso por su bajo puntaje en el área de Matemáticas de las Pruebas Saber 11[15]. A diferencia de un curso tradicional de pre-cálculo, donde predomina el carácter estático de las representaciones de los objetos matemáticos y su objetivo principal apunta al repaso de los preconceptos necesarios para el curso de Cálculo Diferencial, o de los conceptos vistos en la secundaria; en este curso, se incluyen representaciones generadas por GeoGebra y se enfatiza en el desarrollo del pensamiento variacional, a partir de un enfoque de resolución de problemas y lo que el estudiante comprende y puede hacer con el uso del software (Fiallo y Parada[16]).

Básicamente, el curso está basado en tres criterios:

- Problematizar mediante situaciones contextualizadas los objetos matemáticos de estudio del cálculo;

- Explorar fenómenos de variación con el apoyo de las tecnologías digitales y

[14]El total de estudiantes beneficiarios de los cursos de pre-cálculo por semestre ha sido el siguiente 288 en el primer semestre de 2013, 233 en el segundo semestre de 2013, 540 en el primer semestre de 2014, 300 en el segundo semestre de 2014, 300 en el primer semestre de 2015, 300 en el segundo semestre de 2015y 240 en el primer semestre de 2016.
[15] En Colombia todos los estudiantes de último grado de bachillerato deben presentar las pruebas Saber 11 que realiza el Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación (ICFES) pues es un requisito para el ingreso a la Educación Superior en el país.
[16] FIALLO, Jorge. & PARADA, Sandra Evely. Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento varacional. *Revista Científica*, 2014, no 20, p. 56-71.

- Comunicar estrategias e interpretaciones asociadas a los fenómenos de variación.

Así mismo, todas las sesiones de trabajo se desarrollan mediante las siguientes fases:

- Información y exploración libre: Planteamiento de un problema que el estudiante debe abordar desde sus conocimientos escolares, de manera intuitiva y buscando una aproximación a la solución.

- Socialización de resultados: Discusión en grupo de las estrategias utilizadas para la solución del problema planteado, aclaración de dudas y promoción de la necesidad de estrategias y soluciones matemáticamente válidas al problema planteado.

- Exploración dirigida: Exploración de un archivo de Geogebra y orientación guiada por preguntas para que el estudiante vaya encontrando respuestas al problema, plantee conjeturas y justifique matemáticamente los resultados percibidos en las diferentes representaciones que le ofrece el software.

- Explicación: Debate, discusión y reflexión de las ideas expuestas de manera que se llegue al objetivo de la actividad que es la construcción del conocimiento; en esta fase el papel del docente es la promoción del debate y la participación de los estudiantes.

- Tarea retadora: Planteamiento de una situación contextualizada donde el estudiante tiene que aplicar lo aprendido pero no de manera mecánica.

Así, ha sido de nuestro interés observar el impacto cognitivo que se ha logrado en los estudiantes mediante el curso laboratorio de pre-cálculo, para lo cual se pretende responder a la siguiente pregunta de investigación:

¿Qué habilidades cognitivas, asociadas a los procesos de representación de fenómenos de variación, se potencian mediante las actividades que se realizan en el curso de pre-cálculo en estudiantes de primer ingreso a la Universidad Industrial de Santander?

Acorde con la pregunta planteada, el objetivo de la investigación fue: **Caracterizar habilidades cognitivas asociadas a procesos de representación de fenómenos de variación que pueden potenciarse mediante la resolución de problemas mediados por tecnologías digitales, en un curso de pre-cálculo con estudiantes de nuevo ingreso a la UIS.**

Para el logro del objetivo previsto se revisaron referentes bibliográficos que nos permitieran comprender los aspectos que se interrelacionan en el estudio, estos son: habilidades cognitivas, pensamiento variacional, procesos de representación y desarrollo de procesos matemáticos mediados por software matemático interactivo. De dicha revisión se presenta en el siguiente apartado aquellos documentos que de una u otra manera han influenciado el diseño de la investigación que aquí estamos reportando.

1.2 REVISIÓN BIBLIOGRÁFICA

Para el desarrollo de esta investigación se realizó una revisión de la literatura alrededor de los aspectos que consideramos pueden fijar la dirección de la misma, hemos dividido dichos aspectos en cinco apartados a saber:

- Algunas Investigaciones en Didáctica del Cálculo que refieren al fenómeno de estudio

- Investigaciones sobre el desarrollo del Pensamiento Variacional

- Algunas investigaciones sobre los procesos de representación

- Investigaciones sobre la adquisición y el desarrollo de habilidades cognitivas

- Investigaciones que reportan Cursos propedéuticos

1.2.1 Algunas Investigaciones en Didáctica del Cálculo que refieren el problema de estudio. El cálculo, tal como lo menciona Hitt[17], reúne una gran cantidad de subtemas íntimamente relacionados, por lo cual es necesario comprender los subconceptos que de ellos se desprenden para lograr un desarrollo profundo de los conceptos centrales propios del cálculo y a su vez de las nociones alrededor de las cuales se fundamenta el mismo: la variación y la acumulación.

El papel que desempeña el docente en los procesos de enseñanza y de aprendizaje viene por lo tanto a convertirse en fundamental en dichos procesos, pero se vuelve evidente que esa enseñanza es problemática, pues como lo señala Artigue[18] se les puede enseñar a los estudiantes a desarrollar algunos procedimientos algorítmicos y a mecanizar la solución de algunos problemas estándar, pero se encuentran

[17] HITT, Fernando. Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. Cortés, y F. Hitt (Eds.). *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 81-107). Morelia: Morevallado Editores. 2005

[18] ARTIGUE, Michèle. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos..En Artigue, M. Douady, R. Moreno, L. y Gómez, P. *Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (pp. 97-140).Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

grandes dificultades para que ellos alcancen una comprensión satisfactoria de las ideas centrales de este campo de las matemáticas.

Este fenómeno ha llevado a realizar numerosas investigaciones acerca de las dificultades en el aprendizaje del cálculo, pudiéndose encontrar que aquellas que centran su interés en el nivel universitario son cada vez mayores y en particular sobre el papel de la didáctica en la enseñanza de las matemáticas universitarias. Esta investigación didáctica a nivel universitario no es novedosa, tal como lo señala Artigue[19] lleva realizándose cerca de veinte años, tiempo en el cual se ha intentado afrontar la complejidad del proceso de enseñanza desde diferentes perspectivas que han incluido a los tres componentes del sistema, currículo, estudiantes y docentes.

Los problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos de la enseñanza de los principios del cálculo son abordados por Artigue[20] quien presenta una categorización de las dificultades más evidentes del proceso de aprendizaje asociándolos a la complejidad de los objetos básicos del cálculo, a la conceptualización y formalización de la noción de límite y a las rupturas que se hacen necesarias en cuanto a los modos de pensamiento puramente algebraicos, que son los que predominan en un curso tradicional de cálculo.

En concordancia con las dificultades asociadas a los objetos básicos del cálculo Hitt[21] realizó una experimentación con nueve profesores de enseñanza media a quienes solicitó diseñar una clase del tema que ellos quisieran sin utilizar notas o libros, dos de ellos escogieron temas relacionados con cálculo (funciones y límites)

[19] ARTIGUE, Michèle. What can we learn from educational research at the university level?. En *The teaching and learning of mathematics at university level*. Springer Netherlands, 2001. p. 207-220.
[20] ARTIGUE, Op. Cit.
[21] HITT, Fernando. Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. Investigaciones en matemática Educativa, 1996, p. 245-264.

mostrando grandes dificultades y vacíos conceptuales, que el autor relaciona con una enseñanza del cálculo restringida a los aspectos algebraicos sin poner atención al uso de representaciones diferentes, lo que sin duda dificulta una comprensión profunda del cálculo: "*Es difícil concebir que un alumno pueda entender el cálculo sin haber desarrollado, por ejemplo, habilidades visuales ligadas a la construcción de conceptos del cálculo*"(Hitt)[22]

Se ha podido detectar a lo largo de muchos años de investigación que la enseñanza basada únicamente en los aspectos algebraicos trae como consecuencia, en palabras de Skemp (1980) que el estudiante aprenda el producto del pensamiento matemático mas no el proceso. Es decir que el conocimiento que adquieren los estudiantes les permite resolver problemas y ejercicios rutinarios, pero cuando deben enfrentar situaciones donde es necesaria una mayor comprensión conceptual, no encuentran una manera eficaz de abordarla.

Además de estas condiciones ligadas con el aprendizaje basado en aspectos algebraicos, el desarrollo de un curso tradicional de cálculo en el que los profesores imparten exposiciones formales y el profesor realiza el papel de transmisor de la información mientras el estudiante es un receptor pasivo hace que pocos estudiantes aprendan las ideas concernientes al cálculo la primera vez que las encuentran, haciendo que perciban al Cálculo como abstracto, aburrido y difícil de aprender. Una investigación realizada por Zhang (2003) alrededor de los cursos tradicionales de cálculo concluye que las estrategias de enseñanza centradas en el profesor tienen desventajas porque no permiten un ambiente de aprendizaje activo haciendo que el interés del estudiante disminuya y en caso de haber aprendizaje este sea superficial y enfocado en la memoria y en la reproducción. Además

[22] HITT, Fernando. Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. Cortés, y F. Hitt (Eds.). *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 81-107). Morelia: Morevallado Editores. 2005

menciona la importancia del papel activo del estudiante en los procesos de aprendizaje:

> Los estudiantes aprenden mejor si están comprometidos en el aprendizaje activo, si se ven obligados a hacer frente a las observaciones y conceptos antes que a los términos y a los hechos, y si tienen el sentido de que son parte de una comunidad de aprendices en un ambiente de clase que está muy a favor de su aprendizaje. (Zhang, 2003, p. 101. Traducido del inglés[23])

Hemos referenciado de esta forma algunas perspectivas que apuntan a dos causas centrales de nuestro problema de investigación, la enseñanza tradicional centrada en el docente como transmisor de conocimiento y la enseñanza tradicional en los cursos de cálculo, basados en aprendizajes algorítmicos centrados en el repaso de conceptos a través de un enfoque predominantemente algebraico. Ahora bien, estos indicios nos llevan a centrar nuestra atención en la dirección hacia la cual apunta el curso-laboratorio de pre-cálculo donde se abandonan los enfoques tradicionales, ampliamente criticados en los estudios antes mencionados. Es por lo tanto parte de nuestra intención el observar la ganancia en términos de aprendizaje que este nuevo enfoque de los procesos de enseñanza y aprendizaje puedan brindar al estudiante.

1.2.2 Investigaciones sobre el desarrollo del pensamiento variacional. Un estudio realizado por Blanton y Kaput[24] acerca del desarrollo del pensamiento funcional en estudiantes desde prekinder hasta quinto grado, el cual fue llevado a cabo en una escuela distrital de un programa de desarrollo profesional para docentes; presentaba tareas en las que los estudiantes analizaban relaciones

[23] Las traducciones de los textos en inglés han sido realizadas por el investigador.
[24] BLANTON, Maria; KAPUT, James. Elementary grades students' capacity for functional thinking. En *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 2004. p. 135-142.

funcionales, una de ellas fue "*Eyes and Tails*" la cual involucraba la relación entre una cantidad arbitraria de perros y el correspondiente número total de ojos o de ojos y colas. Los datos recogidos fueron analizados a partir de las formas de representación usadas por los estudiantes, la progresión en el lenguaje matemático, las operaciones empleadas y la forma en que ellos trataban a una o más cantidades que variaban.

Vale la pena incluir aquí, lo que se entiende por pensamiento funcional, el cual de alguna manera se relaciona con el Pensamiento Variacional. Al respecto, Cañadas y Fuentes[25] lo describen como una actividad cognitiva que se pone de manifiesto al construir, describir y razonar con y sobre las funciones y está construida por tópicos, procedimientos y relaciones que conciernen a las funciones, abordando las ideas de cambio, relaciones entre esos cambios y la utilización de esas relaciones para resolver problemas.

Los autores concluyen que con este tipo de tareas, incluso en estas etapas tempranas (Pre K-5) los estudiantes son capaces de desarrollar pensamiento funcional lo cual se manifiesta en el uso de tablas, articulación y simbolización de patrones, descripción y representación simbólica de patrones y cantidades que covarían.

Ahora bien, esta percepción del desarrollo del pensamiento funcional a través de cantidades que covarían y que puede construirse de manera casi intuitiva en edades tempranas parece perder significado cuando, en la educación secundaria y guiados por los libros de texto, los docentes se inclinan por definiciones conjuntistas en donde las variables y las funciones pasan de ser modelos que reflejan la variación

[25] CAÑADAS, María. C.; FUENTES, Sandra. *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio*. 2015.

concreta a conceptos matemáticos abstractos distantes de los fenómenos de movimiento que les dieron origen.

Vrancken, Engler, Giampieri y Müller[26] se muestran en desacuerdo con el modelo de presentación conjuntista del concepto de función y consideran que es importante introducir dicha noción resaltando su aspecto más fundamental, la variación. Para ello, estos autores desarrollaron una investigación en la que implementaron una secuencia de actividades para favorecer el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional en estudiantes de primer año de Ingeniería Agronómica de la Universidad Nacional del Litoral en Argentina. La secuencia constaba de seis actividades, dentro de las cuáles se pedía a los estudiantes entre otras cosas:

- Identificar qué es lo que cambia en una situación dada,
- Determinar con respecto a que cambia,
- Determinar cuáles son las variables que intervienen en una situación,
- Establecer la variable dependiente y la independiente,
- Describir fenómenos o situaciones que se pudieran representar con una función,
- Describir con palabras un fenómeno de covariación,
- Completar una tabla o realizar una gráfica.

[26] VRANCKEN, Silvia, et al. Estudio de las funciones en situaciones variacionales. Resultados de la implementación de una secuencia de actividades. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 2014, vol. 15, no 1.

Las situaciones presentadas contemplaban distintas representaciones, teniendo en cuenta la importancia del tratamiento y conversión entre ellas. Los autores concluyen que a partir de las situaciones planteadas se pudieron identificar dificultades asociadas al tratamiento del concepto de función, debido a la formación previa. Así mismo, se observó el surgimiento de argumentos variacionales, un acercamiento tanto cualitativo como cuantitativo a la noción de función y un desarrollo significativo del pensamiento y el lenguaje variacional.

De nuevo, los aprendizajes tradicionales basados en aprendizajes memorísticos, donde el registro de representación predominante es el algebraico y donde los aprendizajes no son significativos se observan como detonantes para la poca comprensión de los objetos matemáticos. Sobre este aspecto Cantoral[27] es tajante al mencionar que la enseñanza del cálculo en bachillerato carece de episodios de la vida cotidiana donde se dé el estudio del cambio o con ejemplos provenientes de la física, la química o la biología; por el contrario el discurso matemático es tradicionalista y predominan los algoritmos de tipo algebraico y algunos aspectos formales de la matemática.

Desde la perspectiva socioepistemológica propuesta por el mismo Cantoral se asume que con anterioridad al estudio del cálculo es necesaria:

> […] la adquisición de un lenguaje gráfico que posibilite, esencialmente, la transferencia de campos conceptuales virtualmente ajenos a causa de las enseñanzas tradicionales, estableciendo un isomorfismo operativo entre el álgebra básica y el estudio de curvas, mejor aún, entre el lenguaje algebraico y el lenguaje gráfico. (Cantoral y Farfán[28])

---

[27] CANTORAL, Ricardo. *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México: Secretaría de educación pública, 2013.

[28] CANTORAL, Ricardo; FARFÁN, Rosa. Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, 1998, vol. 42, no 14, p. 3.

Los autores antes citados, afirman que las actividades de construcción de formas gráficas y el desarrollo de la noción de predicción de los fenómenos de flujo apoyados en el binomio de Newton favorecen el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional. Este desarrollo está además condicionado por: i) procesos temporalmente más prolongados con respecto a los habituales, ii) el dominio de la matemática básica y de los procesos de pensamiento matemático, y iii) una ruptura con técnicas algebraicas.

De manera similar a lo presentado por Cantoral y Farfán, Dolores[29] nos presenta un reporte a grandes rasgos de varios proyectos de investigación que apuntan al desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional. Como primera medida se diseñan actividades de enseñanza, en las cuales se incluyen diferentes registros de representación y se realiza un diagnóstico del estado del pensamiento y el lenguaje variacional relativo a una noción específica que se pretende desarrollar. Luego se diseñan preguntas, problemas y ejercicios que permitan a los estudiantes moverse dentro de los diferentes registros de representación. Posteriormente las actividades son realizadas en condiciones escolares normales y finalmente se hace una valoración de las actividades teniendo en cuenta el efecto que produjeron en el desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional.

Este interés por romper con el aprendizaje tradicionalista basado en aspectos algebraicos y el planteamiento de situaciones cotidianas o de otras ciencias que resignifiquen la enseñanza del cálculo nos lleva a pensar en la inclusión en el aula de clase de los diferentes fenómenos de movimiento que originaron las nociones de función y variación. Además el requerimiento de la presentación, tratamiento y conversión de las distintas representaciones llevan a pensar en la necesidad de la

[29] DOLORES, Crisólogo. La Matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *Revista Academia*, 2000, vol. 2, p. 18.

inclusión de las tecnologías digitales en todo este proceso, lo que podría ser beneficioso en la adquisición del pensamiento y el lenguaje variacional. En particular, Viñas de la Hoz, Navarro y Ortega[30] consideran que el dominio de la tecnología brinda ventajas en el desarrollo del pensamiento variacional y presentan como ejemplo de su afirmación el trabajo realizado con la calculadora TI 92 por dos grupos de estudiantes de grado noveno de las ciudades de Barranquilla y Baranoa, consistentes en la resolución de problemas sobre funciones cuadráticas.

Las dos situaciones planteadas pedían encontrar rectángulos de área máxima bajo ciertas condiciones particulares, inicialmente los estudiantes propusieron representaciones con papel y lápiz y posteriormente realizaron múltiples exploraciones con la calculadora para poder refinar sus justificaciones en torno a las parábolas representativas de la función que modelaba la situación. La calculadora, según concluyen los autores, permitió construir los diferentes registros de representación de funciones cuadráticas, permitiendo a los estudiantes realizar un cúmulo de exploraciones a fin de ampliar su visión sobre las funciones. Esta posibilidad de interactuar con diferentes registros de representación, fue la clave para lograr en los estudiantes la fluidez representacional que facilitó la construcción y articulación de conceptos matemáticos.

Las investigaciones mencionadas en este apartado dan cuenta de la necesidad del abandono del trabajo netamente algebraico que ha sido propiciado a lo largo de muchos años de enseñanza cuasi tradicional de los conceptos y objetos asociados al cálculo, presentando como punto de convergencia el uso de situaciones contextualizadas a fin de propiciar un verdadero desarrollo del lenguaje y el pensamiento variacional. De la misma forma, muestran la necesidad del uso de

[30] VIÑAS DE LA HOZ, María; NAVARRO, Patricia; ORTEGA COLLANTE, Eugenio. La calculadora: Una fuente de exploraciones conceptuales. *Zona Próxima*, 2011, no 5.

diferentes representaciones para que la apropiación conceptual esperada sea mucho más rica y el acercamiento a los objetos matemáticos involucrados mucho más variado. Otras investigaciones que propician este último aspecto son mencionadas en el siguiente apartado.

1.2.3 Algunas investigaciones sobre el proceso de representación. De manera general en matemáticas el aprendizaje de los objetos es conceptual, así lo considera Duval[31] refiriéndose con esto a que la adquisición conceptual de un objeto pasa por adquirir representaciones por medio de signos debido a que el individuo no puede entrar en contacto con un objeto determinado sino que tiene que acceder a él por medio de una representación particular de dicho objeto. Ahora bien, las distintas representaciones de un objeto no destacan las características del mismo, sino que presentan elementos diferenciadores. Si bien, el uso de un solo tipo de representación puede ser válido para efectos de comunicación, para el caso de las matemáticas resulta necesario hacer uso de varios tipos de representaciones (Rojas[32])

Esta misma perspectiva es enfatizada en los Principios y Estándares para la Educación Matemática[33] donde enuncian que la construcción significativa de un concepto está basada en la resolución de actividades que promuevan el análisis de situaciones a través de diferentes sistemas de representación.

---

[31] DUVAL, Raymond. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2006, vol. 9, no 1, p. 143-168.

[32] ROJAS, Pedro Javier. Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 2014, vol. 12, no 1.

[33] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Principios y Estándares para la Educación Matemáticas.* Sevilla*, SAEM Thales*, 2003.

Hecklein, Engler, Vrancken y Müller[34] realizaron una experiencia centrada en el diseño e implementación de una guía de actividades que indagaba las nociones que manejaban cuarenta estudiantes de último año de una escuela secundaria de la ciudad de Esperanza, Provincia de Santa Fé en Argentina, con respecto a variables y funciones; el desarrollo de dichas actividades exigía de los estudintes identificar magnitudes cambiantes, medir los cambios y estudiar las distintas maneras de representar esas variaciones. Los diferentes enunciados presentados a los estudiantes se formulaban utilizando distintas representaciones. Dentro de las conclusiones presentadas por las autoras se destaca la dificultad que encuentran los estudiantes para presentar sus respuestas mediante representaciones analíticas, así mismo las situaciones que les eran presentadas a los estudiantes de manera verbal se hacían difíciles de interpretar y por lo tanto no lograban conectar esta representación con una representación gráfica o tabular.

Las autoras antes mencionadas reflexionan finalmente sobre la necesidad de interrelacionar los diferentes sistemas de representación, siendo ésta la base de la interpretación de temas vinculados al pensamiento variacional, objetivo que, según su percepción, parece poco alcanzable a nivel de la educación secundaria.

Consideraciones similares a la anterior son expresadas por Duval[35] quien menciona que tener la habilidad para cambiar entre registros de representación se vuelve un

[34] HECKLEIN, Marcela; ENGLER, Adriana, VRANCKEN, Silvia & MÜLLER, Daniela Variables, funciones y cambios. Exploración de las nociones que manejan alumnos de una escuela secundaria. *Revista Premisa, 49, 2011;* 23-40. Recuperado de: http://www.soarem.org.ar/Documentos/49%20Heicklein.pdf

[35] DUVAL, Raymond. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2006, vol. 9, no 1, p. 143-168.

tema crucial en la educación matemática, cuestionándose como idea inicial si el funcionamiento del pensamiento matemático es independiente del lenguaje y de otros sistemas de representación utilizados. *A priori*, Duval enuncia que la actividad matemática se realiza necesariamente en un contexto de representación, pero quien este inmerso en dicha actividad debería ser capaz de reconocer los objetos matemáticos de conocimiento en otros contextos de representación y usarlos.

Van der Meij y De Jong[36] enfatizan las ventajas que pueden desarrollarse en el aprendizaje cuando se utilizan múltiples representaciones siendo que estas se complementan una a la otra haciendo que el estudiante se beneficie de la suma de las ventajas que cada representación puede brindar. Además, los diferentes tipos de representación pueden ser útiles para diferentes propósitos, por ejemplo la expresión analítica de una función permite la focalización en un valor determinado, mientras que la gráfica explicita la variación. A su vez los autores mencionan que el trabajo con múltiples representaciones también evidencia la necesidad de mayores conexiones cognitivas pues los estudiantes se enfrentan a cuatro tareas diferentes, entender la semántica de cada representación, entender qué parte del dominio del objeto matemático está siendo representado, relacionar las representaciones entre sí y por último poder transitar entre las representaciones.

De manera similar al planteamiento anterior, Duval[37] considera la existencia de dos tareas diferentes al realizar una transformación entre las formas en que un objeto matemático puede ser representado (el tratamiento y la conversión, estos términos serán ampliamente explicados en el capítulo 2) y que dichas tareas son un todo en

[36] VAN DER MEIJ, Jan; DE JONG, Ton. Learning with multiple representations. En *Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA*. 2004.

[37] DUVAL, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, 2004.

la resolución de problemas. Sin embargo, esas dos tareas son fuente de diferentes problemas en el aprendizaje, siendo la conversión un proceso cognitivo más complejo, que "*aparece a menudo como un truco que no puede ser bien aprendido y que no es enseñado*" (Duval, 2006, p. 149).

Rojas[38] tomando como referente teórico los Registros de Representación Semiótica de Duval, plantea dos situaciones, una para estudiantes de quinto grado y otra para estudiantes universitarios, y se enfoca en las actividades de tratamiento que pueden realizar los estudiantes a partir de las representaciones iniciales que les son presentadas. De dicho estudio y a modo de conclusión cuestiona o al menos relativiza el planteamiento de Duval acerca de que las dificultades en términos del aprendizaje relacionado con las transformaciones entre representaciones de objetos matemáticos son más substanciales en las tareas tipo conversión; además categoriza las dificultades relacionadas con las transformaciones tipo tratamiento.

Habiendo considerado hasta el momento las tareas de transformación de representaciones en términos de Duval, habremos de considerar también la coordinación de representaciones como una actividad conceptual superior en la que se movilizan y articulan los registros de representación. Esta articulación comprenderá, entre otras cosas, que sea posible para el estudiante realizar una conversión entre dos registros de representación en cualquiera de los dos sentidos con la misma habilidad. Algunas investigaciones en torno a esta articulación se han enfocado en los registros de representación más comúnmente usados, dado el tipo de enseñanza varias veces mencionado en los apartados de este capítulo, el algebraico y el gráfico.

[38] ROJAS, Pedro Javier. Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 2014, vol. 12, no 1.

En particular Lozano, Haye, Montenegro y Córdoba[39] realizaron un estudio exploratorio con ciento nueve estudiantes de reciente ingreso a las carreras de ingeniería de la Universidad Nacional del Litoral en Argentina, a los cuales se les presentaron doce ejercicios con contenidos alrededor de conjuntos del plano y de la recta centrando las actividades en la conversión entre distintos registros de representación. De las doce tareas cuatro estaban enfocadas en la articulación de las representaciones en los registros gráfico y algebraico para funciones lineales y cuadráticas. En las dos primeras de ellas se daba una ecuación explícita de una función lineal o cuadrática (sin dar valores específicos para los parámetros "a" y "b") y se pedía realizar la gráfica correspondiente a dicha función. En las dos actividades siguientes se les presentaba la gráfica de una función lineal o cuadrática y se les pedía escribir la función de manera algebraica.

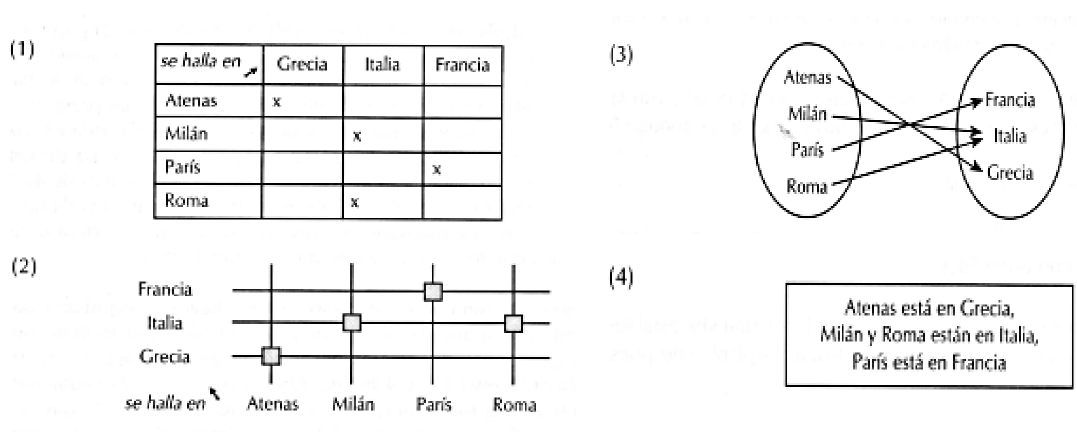
El análisis presentado por los autores da cuenta de que cerca del 40% de los estudiantes no reconoció a "$y = ax + b$" como la expresión algebraica de una recta y solo el 35% acertó en la correspondencia de las variables visuales dados los parámetros establecidos en la actividad. Para la función cuadrática el no reconocimiento estuvo cercano al 30% si bien, los porcentajes de desacierto se incrementaban al considerar los parámetros "a" y "b". En la conversión en sentido inverso, cerca del 50% de los estudiantes no logró representar algebraicamente la función lineal dada, teniendo en cuenta los parámetros y en el caso de la función cuadrática el porcentaje de desaciertos estuvo cercano al 40%.

Además de la posibilidad de realizar una conversión entre dos registros cualquiera de representación en ambos sentidos, la coordinación de los registros de

[39] LOZANO, María E., et al. Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Año XI–Número 41–Marzo 2015 Monográfico: FISEM y Sociedades que la integran ÍNDICE*, p. 20

representación es en palabras de D'Amore[40] la condición fundamental para que exista un diferenciación entre un objeto matemático y su representación. Respecto a ello, D'Amore planteó una prueba con alrededor de cuatrocientos estudiantes italianos de veinticuatro grupos, repartidos entre cuarto primaria, segundo de secundaria y de preparatoria en la cual se les presentaban cuatro hojas, cada una con una de las representaciones que se muestran en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.**[41].

Figura 1. Representaciones mostradas a los estudiantes en la prueba planteada por D'Amore.



Fuente: D'Amore (2006)

Luego de la presentación de las cuatro representaciones se les hacían una serie de preguntas a los estudiantes como las siguientes:

- Observa estas 4 hojas, ¿Qué piensas?

[40] D'AMORE, Bruno; PUGA, Angel Balderas; PINILLA, Martha Isabel Fandiño. *Didáctica de la matemática*. Cooperativa Editorial Magisterio, 2006.

[41] En el documento las figuras serán presentadas con el título correspondiente y en caso de haber sido tomadas de otros textos, presentarán la fuente respectiva. Las figuras sin fuente corresponden a Ilustraciones tomadas de las actividades del curso de pre-cálculo, producciones escritas de los estudiantes caso de estudio o producciones del investigador.

- ¿Existen dos que dicen la misma cosa?

- ¿Cuál consideras que es el mensaje más claro, significativo, leíble, comprensible?

- Si fueras un maestro de tercero de primaria queriendo hacer que tus estudiantes entiendan, ¿cuál de las cuatro hojas usarías? (Esta pregunta solo se le planteó a los estudiantes de secundaria)

El objetivo de la actividad respondía a ciertos interrogantes planteados por D'Amore de los cuales citamos los siguientes: ¿Puede un significante (representación) diferente proporcionar la misma cantidad y el mismo tipo de información? ¿Es fácil pasar de un registro a otro? ¿Qué registro representativo es visto por el estudiante en modo más inmediato? ¿Hasta qué punto el estudiante está dispuesto a admitir que no se trata de registros diferentes sino de un mismo significado-objeto relacional?

De los análisis realizados por D'Amore extraemos los siguientes: el 59% de los niños de primaria y el 60% de los estudiantes de secundaria reconoce espontáneamente o después de una pequeña ayuda que se trata de cuatro representaciones diferentes de un mismo significado-objeto. En preparatoria el 74% realiza el reconocimiento espontáneamente y cerca de la mitad de los estudiantes restantes lo hacen después de la segunda pregunta del investigador. El registro representativo más fácil de entender para los niños de primaria es el 1 con el 45% seguido del 4 con el 40%; en secundaria es el 4 con el 68% y luego el 1 con el 20%; mientras en preparatoria es el 4 con el 44% seguido del 3 con el 29%.

Adicionalmente en el caso de los niños de primaria aquellos que no reconocen que se trata de cuatro representaciones de un mismo objeto, reconocen que hay una identidad solamente entre las representaciones uno (1) y dos (2) cuando se les pide decir si existen dos que digan la misma cosa. Como hecho particular resalta D'Amore que la representación en lenguaje natural no es reconocida por algunos niños como válida en matemáticas:

> Lo dice explícitamente Ruggero: 'La 4 no tiene nada que ver con la matemática, porque por lo regular se usan números y no se escribe una cosa ya hecha, sino que pones palabras y después los números para hacer matemática'. (D'Amore[42])

Dentro de las conclusiones respecto a los estudiantes de secundaria, el autor resalta que la elección del registro representativo no es del todo neutra, sino que surgen una serie de informaciones anexas, dando a entender que las representaciones planteadas no llevan consigo solo el significado que el adulto quiere incluir en ellas sino otros que son no deseables en términos del proceso de enseñanza.

Por último para dar respuesta a algunos de sus interrogantes iniciales D'Amore concluye que de acuerdo a los resultados encontrados se puede observar que para cada estudiante es más sencillo interpretar algunos gráficos y más complicado hacerlo con otros, lo cual invita a introducir igualmente todos los registros, proponiendo a los estudiantes realizar transformaciones entre ellos. Además menciona que la elección de una representación particular trae detrás una cierta información que puede desviar al estudiante del objetivo principal de la actividad de enseñanza.

---

[42] D'AMORE, Bruno; PUGA, Angel Balderas; PINILLA, Martha Isabel Fandiño. *Didáctica de la matemática*. Cooperativa Editorial Magisterio, 2006.

Para finalizar este apartado compartimos una reflexión presentada en (D'Amore[43]) respecto a los procesos de representación:

> Sin duda, el uso de distintas representaciones y su progresiva articulación enriquecen el significado, el conocimiento, la comprensión del objeto, pero también su complejidad. El objeto matemático se presenta, en cierto sentido, como único, pero en otro sentido como múltiple (p.192).

De las investigaciones aquí citadas podemos concluir que para los fines de esta investigación debemos considerar al uso de las múltiples representaciones y al cambio (transformación, en términos de Duval) entre registros de representación como un proceso que puede permitirle al estudiante la apropiación de los objetos de estudio del cálculo: el cambio y la variación.

1.2.4 Investigaciones sobre la Adquisición y el desarrollo de habilidades cognitivas. En este apartado se ha querido hacer una revisión respecto a las "habilidades cognitivas", que no solo tome perspectivas de la educación matemática sino que dé cuenta de la visión que desde otras ciencias puedan aportar a este trabajo de investigación. Para esto debemos tomar como referentes algunos estudios que desde la psicopedagogía y la psicología se han realizado.

Gilar[44] presenta un estudio realizado con un grupo de alumnos universitarios estudiantes de Licenciatura de Psicopedagogía, en los cuales se estudian los procesos y resultados de la adquisición de un aprendizaje complejo[45], dentro de un

---

[43] D'AMORE, Bruno. Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 2006, vol. 9, no 1, p. 177-196.

[44] GILAR, Raquel. *Adquisición de habilidades cognitivas: factores en el desarrollo inicial de la competencia experta*. Tesis de grado Doctor en Psicología. Alicante: Universidad de Alicante, 2003. 437 p.

[45] Entiéndase aprendizaje complejo como una integración de conocimientos, habilidades y actitudes, además de la transferencia de lo aprendido en la escuela o entorno educativo al ámbito de la vida y el trabajo diarios. (Van Merriënboer y Kirschner 2003, p.3)

dominio específico de contenido. Dicho estudio combina distintas orientaciones metodológicas que incluyen procedimientos cualitativos y técnicas estadísticas a fin de formular un modelo explicativo de la adquisición del aprendizaje complejo y del desarrollo de la competencia experta en un dominio específico. Como parte de las conclusiones presentadas por la autora cabe destacar las siguientes:

> El desarrollo inicial de la competencia experta es el resultado de la combinación de un conjunto de elementos, presentes en las teorías y modelos sobre la expertez, que incluye la organización cualitativa del conocimiento, las habilidades intelectuales, la motivación, y el contexto de aprendizaje en el que se desarrolla.
> Las habilidades intelectuales tienen una influencia considerable en la adquisición de los conocimientos y habilidades que configuran la competencia experta.
> La organización cualitativa del conocimiento es el elemento que ejerce la influencia directa más importante sobre la adquisición de las habilidades cognitivas y la competencia. (Gilar[46])

Otro referente desde el campo de la psicología es el trabajo de Taatgen, Huss, y Anderson[47] quienes introducen un modelo de adquisición de habilidades que logra un balance entre habilidades de mayor y menor nivel usando una representación del conocimiento en el que las condiciones previas y posteriores a él, están asociadas al desarrollo de acciones. Estos autores describen un experimento en el que prueban la relación entre la estructura de las tareas y la robustez y flexibilidad de las habilidades adquiridas, lo que se refleja en la manipulación de las instrucciones recibidas; posteriormente ellos replican y extienden sus hallazgos a un segundo experimento, en el cual los problemas planteados contenían en

---

[46] GILAR, Raquel. *Adquisición de habilidades cognitivas: factores en el desarrollo inicial de la competencia experta*. Tesis de grado Doctor en Psicología. Alicante: Universidad de Alicante, 2003. 437 p.

[47] TAATGEN, Niels A., et al. The acquisition of robust and flexible cognitive skills. *Journal of Experimental Psychology: General*, 2008, vol. 137, no 3, p. 548.

ocasiones errores, esto como prueba adicional para la robustez del modelo. Los resultados del experimento uno (1) permitían predecir los resultados del experimento dos (2). El primer experimento se realizó con treinta y un estudiantes y el segundo con cuarenta estudiantes, todos ellos de la Carnegie Mellon University, en ellos se tenía que resolver una serie de problemas que iban incrementando su dificultad.

Taatgen, Huss y Anderson concluyen que el modelo de adquisición de habilidades que presentan tiene en cuenta que el control cognitivo es a la vez interno, en términos de un estado de control interno que realiza un seguimiento de los progresos, y externo en el sentido de que el medio puede provocar la acción siguiente. Así mismo, sugieren que el modelo asume que la representación de los pasos individuales que componen una habilidad consiste en una acción con condiciones previas y posteriores. Esto implica que las instrucciones que se formulan en estos términos deberían conducir a un mejor rendimiento que las instrucciones que simplemente enumeran las acciones.

La investigación presentada por Ramos, Herrera y Ramírez[48] implementada con cerca de doscientos cuarenta estudiantes de nuevo ingreso de una institución de educación superior de la ciudad de Monterrey y seis profesores de la misma institución, presenta un análisis sobre los recursos de aprendizaje móvil para identificar el desarrollo de habilidades cognitivas en los estudiantes[49]. La investigación se realizó utilizando el estudio de casos múltiples con el uso de instrumentos cuantitativos y cualitativos (entrevistas, cuestionarios auto-dirigidos,

---

[48] RAMOS, Ana., HERRERA, José., & RAMÍREZ, María. Desarrollo de habilidades cognitivas con aprendizaje móvil: un estudio de casos. *Comunicar: Revista científica iberoamericana de comunicación y educación*, 2010, no 34, p. 201-209.

[49] Estas habilidades están relacionadas con un cierto tipo de tareas que les demanda el uso de recursos online y offline de las diferentes asignaturas cursadas o impartidas y que les exigía la presentación de determinados productos como resultado de las habilidades adquiridas.

observación no intrusiva y análisis de documentos). Esta investigación enuncia una serie de habilidades cognitivas como: enfoque, obtención y recuperación de información, organización, análisis, transformación, evaluación, solución de problemas, toma de decisiones, pensamiento crítico, pensamiento creativo y "melioration"[50]; estas mismas habilidades son clasificadas en habilidades cognitivas básicas y habilidades cognitivas superiores. Los investigadores concluyen que el uso de los dispositivos móviles y los recursos implementados promovieron las habilidades cognitivas básicas, aunque no lograron promover las habilidades cognitivas superiores de pensamiento crítico, pensamiento creativo y "*melioration*".

En términos teóricos Renkl y Atkinson[51] consideran que en dominios bien estructurados como lo son las matemáticas, en la adquisición de habilidades cognitivas el aprendizaje a partir de ejemplos resueltos es una manera muy provechosa, además de que es una forma preferida por los estudiantes principiantes. Sin embargo realizan una crítica a la manera como los libros de texto en matemáticas hacen uso de esta forma de aprendizaje: "[…] *por lo general se emplean en los libros de texto de matemáticas de la siguiente manera: (a) se introduce un principio (o una regla o un teorema), (b) se proporciona un ejemplo práctico, y (c) se suministran uno o más problemas para ser resueltos*" (p. 15. Traducido del Inglés). Los autores consideran que esta fase de presentación de ejemplos resueltos debe alargarse de manera que un número considerable de ejemplos sean presentados antes de que los estudiantes participen en la resolución de problemas. En etapas posteriores de la adquisición de habilidades se requiere

---

[50] Habilidad cognitiva para escoger la mejor combinación de información desigual y conveniente e implementarla en la resolución de problemas en diferentes situaciones, dependiente del tiempo y espacio. (Ramos, Herrera y Ramírez, 2010, p. 9)

[51] RENKL, Alexander; ATKINSON, Robert K. Structuring the transition from example study to problem solving in cognitive skill acquisition: A cognitive load perspective. *Educational psychologist*, 2003, vol. 38, no 1, p. 15-22.

del aumento de la velocidad y la precisión del rendimiento, a la vez que más allá del estudio de ejemplos se trabaje sobre la resolución de problemas.

También en términos de los tiempos de respuesta es considerado el aprendizaje y la adquisición de habilidades cognitivas por Langley y Simon[52] quienes afirman que el aprendizaje se puede entender como cualquier proceso que modifique a fin de mejorar, de manera más o menos irreversible, el rendimiento posterior en la realización de una tarea o tareas de tipos similares a los ya realizados: "*Por ejemplo, si una persona resuelve el problema de la Torre de Hanoi dos veces seguidas, requiriendo menos tiempo y / o menos movimientos la segunda vez, atribuiríamos el cambio al aprendizaje"* (p. 367. Traducido del Inglés).

Van Lehn (en Renkl y Atkinson[53]) distingue tres fases en la adquisición de habilidades; una primera fase donde los aprendices tratan de obtener una comprensión básica del dominio en el cual están trabajando a través del estudio de materiales de instrucción y la indagación en ejemplos ya resueltos; una fase intermedia donde el aprendizaje está centrado en la resolución de problemas mediante el uso de principios abstractos y una fase tardía en la que la velocidad y precisión en la solución de situaciones se acentúa como producto de la práctica.

De los referentes aquí mencionados hallamos similitudes en la perspectiva que desarrollamos más adelante en el capítulo II, respecto a que las habilidades cognitivas se adquieren mediante la práctica y son susceptibles de mejora. Ahora

---

[52] LANGLEY, Pat; SIMON, Herbert A. The central role of learning in cognition. *Cognitive skills and their acquisition*, 1981, p. 361-380.

[53] RENKL, Alexander; ATKINSON, Robert K. Structuring the transition from example study to problem solving in cognitive skill acquisition: A cognitive load perspective. *Educational psychologist*, 2003, vol. 38, no 1, p. 15-22.

bien, estamos convencidos que el contexto de resolución de problemas empleado en el curso laboratorio de pre-cálculo es el mayor facilitador para la adquisición de dichas habilidades. Aunque en la mayoría de las investigaciones mencionadas se jerarquizan unas habilidades, nuestro interés no se centra en determinar una jerarquía específica para las habilidades adquiridas sino la caracterización de las mismas a partir de las acciones que las evidencien.

1.2.5 Investigaciones que reportan Cursos propedéuticos. Como se mencionó en apartados anteriores, en muchas universidades tanto a nivel nacional como internacional se ha planteado la realización de un curso de pre-cálculo[54], que en algunos casos es optativo mientras que en otros hace parte del currículo de la carrera o en otras se presenta como una asignatura de nivelación previa a la presentación de una prueba de ingreso. Fruto de la realización de dichos cursos, podemos encontrar en la literatura reportes de investigaciones que tienen como objetivo evaluar los efectos de los mismos ya sea en el desempeño académico en las asignaturas para las cuales es preparatorio o bien los resultados en el examen de ingreso.

Ejemplo de uno de estos reportes es el estudio estadístico realizado por Cantú, Arenas y Flores[55] acerca del impacto del curso de pre-cálculo en el desempeño de los estudiantes en los cursos de Cálculo Diferencial e Integral en la Universidad de Monterrey (UDEM), las autoras mencionan que la aprobación del curso planteado es uno de los criterios de selección de los estudiantes que ingresan a la universidad. El estudio fue realizado con las bases de datos del departamento de Física y Matemáticas sobre los resultados del examen de prerrequisitos y un seguimiento realizado a los alumnos después de hacer parte del curso propedéutico y cursar la

[54] En otros países estos cursos reciben el nombre de cursos propedéuticos.

[55] CANTÚ, Idalia; ARENAS, Rita; FLORES, María Teresa. Impacto de precálculo en cálculo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 2012, vol. 80, p. 135-144.

asignatura Cálculo. Las autoras concluyen que los resultados obtenidos muestran una correlación significativa entre los resultados obtenidos en el curso de pre-cálculo y el resultado en el curso de cálculo; además que los estudiantes que participaban en el curso de pre-cálculo habían logrado habilidad en la manipulación de la aritmética y el álgebra, así como que también habían reforzado o en otros casos adquirido conocimientos.

De manera similar al curso realizado en la UDEM, se realiza uno en el instituto tecnológico de Ciudad Madero; de dicho curso Alejo, Reyes y Rodríguez[56] realizan un análisis estadístico para evaluar la relación entre los resultados del curso propedéutico y el desempeño en el primer semestre, esto en estudiantes de nuevo ingreso. Para dicho trabajo de investigación los autores seleccionaron una muestra inicial de 299 estudiantes, de los que finalmente se redujo a 152 como muestra representativa de la población. Dentro de las conclusiones presentadas por los autores, estos mencionan que se encuentran temáticas que son evaluadas tanto en los cursos de cálculo como en los exámenes de diagnóstico, pero que sin embargo no son reforzadas en los cursos propedéuticos como lo son: las propiedades e los números reales, el concepto de valor absoluto, geometría analítica y el periodo de una función trigonométrica; por lo cual se hace la sugerencia de anexar dichos contenidos y evaluar las estrategias de aprendizaje utilizadas en el curso laboratorio de pre-cálculo.

Estos dos reportes que hemos presentado son un fiel reflejo de la mayoría de los cursos de pre-cálculo que pueden encontrarse en diferentes universidades, no solo a nivel de nuestro país sino a nivel Latinoamérica, la mayoría de los cuales se basan

---

[56] ALEJO, Avelina; REYES, Victoriano & RODRÍGUEZ, Verónica. Relación entre el curso propedéutico, nivelación y el examen de diagnóstico de primer semestre, en el instituto tecnológico de Cd. Madero Tamaulipas, México. *Revista Iberoamericana para la investigación y el desarrollo,* vol *10*. pp.135-144.

en el repaso de conceptos y el aprendizaje de algoritmos. Así mismo gran parte de los reportes de investigación en este ámbito son de tipo cuantitativo-comparativo y se enfocan en presentar, en términos de porcentajes, la aprobación de los cursos para los cuales son introductorios.

Ahora bien, podemos también encontrar reportes acerca de cursos de pre-cálculo que han sido planteados desde una perspectiva totalmente diferente como es el caso del realizado en el Centro Universitario Valle de Chalco, entidad de la Universidad Autónoma del Estado de México; Cuevas, Martínez y Pluvinage[57] reportan la investigación realizada a lo largo de un semestre universitario con la aplicación de experiencias didácticas mediadas por tecnologías digitales, mediante la cual lograron una mejor comprensión por parte de los estudiantes del concepto de función real de variable real. La puesta en marcha de las experiencias didácticas está basada en la realización de actividades guiadas con escenarios virtuales en los cuales hay proyectos de acción concreta, actividades autónomas en grupos, mediadas por el software CalcVisual y tareas para trabajo personal o en grupos.

Después de la aplicación de un pre-test, se desarrolla el curso de pre-cálculo mediado por escenarios didácticos interactivos. La introducción del concepto de función se realiza mediante la modelación de una situación real, de manera que el concepto de función estudiado por el alumno vaya más allá de la definición algebraica usual. El sistema de evaluación del curso corresponde a la evaluación de tipo tradicional incluyendo un examen parcial.

---

[57] CUEVAS, Armando; MARTINEZ, Magally; PLUVINAGE, François. Annales de didactique et de sciences cognitives. V. 17. p. 137-168. Promoviendo el pensamiento funcional en la enseñanza del cálculo: un experimento con el uso de tecnologías digitales y sus resultados.(Promouvoir la pensée fonctionnelle dans l'enseignement de l'analyse: une expérimentation avec usage des technologies informatiques et ses résultats.).

Finalmente los autores realizan un análisis tanto cuantitativo como cualitativo de los resultados obtenidos por los estudiantes tanto en el pre-test como en el examen parcial y concluyen que la propuesta didáctica puede producir la compensación de las posibles deficiencias con las que un alumno inicia un curso de matemáticas a nivel superior, esto como producto de la práctica regular de actividades controladas mediadas por los recursos computacionales usados en el experimento de enseñanza.

Ese último enfoque se encuentra acorde con los objetivos y con el planteamiento del curso laboratorio de pre-cálculo dentro del cual está enmarcada nuestra investigación. Si bien, las condiciones espacio-temporales en las que se realiza este último no son iguales a las planteadas por los autores y el sistema de evaluación también difiere, la planeación de las actividades y la mediación de las tecnologías son puntos de encuentro, por lo cual es este último referente un punto de comparación en términos de las deficiencias que se pueden solventar.

2. MARCO CONCEPTUAL

Como ya se ha mencionado, esta investigación requiere conceptualizar los elementos necesarios que estarán relacionados en la caracterización de las habilidades cognitivas asociadas con los procesos de representación que se puedan potenciar mediante la resolución de problemas mediados por software matemático interactivo.

De acuerdo a esto, ha sido necesario conceptualizar elementos como el pensamiento variacional, las habilidades, las habilidades cognitivas y los procesos de representación.

2.1 HABILIDADES

Uno de los ejes centrales de esta investigación es la descripción y caracterización de habilidades que se pueden desarrollar en relación con un campo determinado y bajo unas características particulares, para ello se parte de la necesidad de definir qué se entiende por habilidad. Para esto se ha recurrido a las definiciones que no solo desde la Matemática o de la Educación Matemática se han presentado a lo largo de la historia sino desde campos aún más diversos como lo son la Sociología, la Psicología, la Pedagogía y la Psicopedagogía.

Laorden, García y Sánchez[58] definen habilidad así: "*Se entiende por habilidad la acción que por la continuidad con la que la repetimos se convierte en una predisposición o hábito*" (p. 4). En esta misma dirección señala la definición dada

[58] LAORDEN, Cristina; GARCíA, Elena; SÁNCHEZ, Salvador. Integrando descripciones de habilidades cognitivas en los metadatos de los objetos de aprendizaje estandarizados. *Revista de Educación a Distancia*, 2005.

por Rosenbaum, Carlson y Gilmore[59], quienes mencionan lo siguiente: "*Cuando hablamos de una 'habilidad', queremos decir la capacidad que permite a un objetivo ser alcanzado dentro de un dominio cada vez con mayor probabilidad como resultado de la práctica*".
Esta definición relaciona el término habilidad con el término capacidad, yendo en la misma vía que lo hace el Diccionario de la Real Academia de la Lengua Española, donde los términos capacidad, habilidad y destreza son tomados como sinónimos y son descritos como la disposición, pericia, talento y aptitud para ejecutar algo correctamente.

Desde la perspectiva de la Psicología y la Psicopedagogía, Cañedo y Cáceres menciona que las habilidades son un "*sistema de acciones y operaciones dominado por el sujeto que responde a un objetivo. Es la capacidad adquirida por el hombre, de utilizar creadoramente sus conocimientos y hábitos tanto en el proceso de actividad teórica como práctica*" (p.21), es esta definición la que encontramos más acorde con los propósitos trazados en la realización del curso de pre-cálculo que es objeto de estudio en esta investigación.

2.1.1 Habilidades cognitivas. Con el fin de ser aún más precisos en la caracterización de las habilidades que se pueden potenciar mediante la resolución de problemas mediados por software matemático interactivo, es necesario hablar no solo de habilidades sino de habilidades cognitivas, para lo cual también hemos retomado conceptos desde diferentes campos de la ciencia.

Distintos autores como Piaget, Ausubel y Bandura sostienen que para poder expresar diversas habilidades del pensamiento son necesarias ciertas estructuras

[59] ROSENBAUM, David A.; CARLSON, Richard A.; GILMORE, Rick O. Acquisition of intellectual and perceptual-motor skills. *Annual review of psychology*, 2001, vol. 52, no 1, p. 453-470.

cognitivas que le permiten a las personas realizar operaciones mentales y que dichas estructuras se desarrollan a medida que sucede el ciclo evolutivo, sin que este sea un proceso espontáneo, sino que debe estar mediado por un entrenamiento y ejercitado a través de experiencias (Sarmiento[60]).

Por su parte Herrera[61] define las habilidades cognitivas de la siguiente forma:

> Hablar de habilidades cognitivas, aunque sea brevemente, nos remite al ámbito de las aptitudes e implica, en primer lugar, introducirnos en el estudio del pensamiento, como proceso o sistemas de procesos complejos que abarcan desde la captación de estímulos, hasta su almacenaje en memoria y su posterior utilización, en su evolución y su relación con el lenguaje; abordar el estudio de la inteligencia y su evolución, como herramienta básica del pensamiento; y profundizar en el estudio del aprendizaje, como cambio relativamente estable del comportamiento producido por la experiencia.(p. 1).

La Psicología Educacional también plantea que las habilidades de tipo cognitivo son aquellas que le permiten al individuo conocer, pensar, almacenar información, organizarla y transformarla para permitirle la generación de productos nuevos, realizar operaciones, establecer relaciones, formular generalizaciones, tomar determinaciones, resolver problemas y lograr aprendizajes perdurables y significativos.

---

[60] SARMIENTO, Mariela. *La enseñanza de las matemáticas y las Ntic. Una estrategia de formación permanente*. Universitat Rovira i Virgili, 2007.

[61] HERRERA, Francisco. Habilidades Cognitivas*. Notas del departamento de Psicología Evolutiva y de la educación.* Universidad de Granada. España.2001

En síntesis y como producto de la revisión de los distintos planteamientos ya enunciados podremos entender para los fines de la investigación que aquí se sustenta lo siguiente:

1. Habilidad: Conjunto de acciones secuenciales coherentes y coordinadas realizadas por un individuo, en la consecución de un objetivo. Estas acciones están mediadas por los conocimientos previos y pueden desarrollarse mediante la práctica.

2. Habilidad cognitiva: consiste en las operaciones mentales que resultan de la coordinación de acciones tendientes a la consecución de un objetivo ligado a una rama del conocimiento institucionalizado. De la misma forma consideramos habilidad cognitiva las acciones que un individuo puede desarrollar para interactuar con un objeto que el mismo puede identificar como objeto de estudio.

2.2 PENSAMIENTO VARIACIONAL

Diferentes perspectivas relacionadas con la matemática del cambio y la variación han sido englobadas bajo el término Pensamiento variacional en la investigación en Educación Matemática tal y como se reportan en Ramos y Jiménez[62]:

a) La matemática del cambio, surgido en el seno del movimiento de reforma del cálculo en EUA en los años ochenta.

[62] RAMOS, Raul & JIMÉNEZ, Rosa (2014) Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante. *Revista El cálculo y su enseñanza* 5 (5), 107-124.

b) El concepto de cálculo cualitativo, desarrollado en el seno del grupo de trabajo liderado por Kaput para la organización TERC en Estados Unidos, y en el Centro de Investigación Shell en Inglaterra.

c) El concepto de Pensamiento Variacional, desarrollado por Vasco para la reforma curricular de Colombia de finales de los noventa.

d) El concepto de Pensamiento y Lenguaje Variacional, desarrollado por Cantoral, Farfán y su equipo de colaboradores, con influencia hacia algunos grupos latinoamericanos. Departamento de Matemática Educativa, CINVESTAV.

e) El concepto de razonamiento covariacional, desarrollado por Carlson Y Thompson.

Ramos y Jiménez mencionan en su lista que el concepto de Pensamiento funcional fue acuñado por Cuevas, Pluvinage y colaboradores del Departamento de Matemática Educativa del CINVESTAV, sin embargo en entrevista con los investigadores ellos afirman que el concepto de pensamiento funcional no corresponde a ellos. El concepto que si puede asociarse con los autores mencionados es el de Estratos de competencia funcional, es decir grupos de conocimientos y métodos dotados de cierta homogeneidad en el pensamiento funcional.

Retomando algunas de estas perspectivas, podemos entender el Pensamiento y Lenguaje Variacional desde el punto de vista de Cantoral como aquel pensamiento que se encuentra estrechamente ligado al concepto de variación, entendido este como la cuantificación del cambio. Para la formación del concepto de variación se deben integrar distintos campos simbólicos, numéricos, algebraicos, analíticos, visuales, gráficos y geométricos, además de una "*adecuada comprensión de procesos matemáticos específicos, como: número, variable, constante, parámetro,* *función, límite, continuidad, derivada, integral, convergencia, representación e infinito para tener una adecuada construcción de las nociones de cambio y la variación*" (Cantoral[63]).

Por su parte el concepto de razonamiento covariacional es definido por Carlson, Jacobs, Coe, Larson y Hsu[64] como "*las actividades cognitivas implicadas en la coordinación de dos cantidades que varían mientras se atiende a las formas en que cada una de ellas cambia con respecto a la otra"* (p. 124). Este enfoque conceptual modela a través de un conjunto de acciones mentales, la forma en que los estudiantes razonan frente a eventos de covariación de manera que se reflejan distintos niveles de desarrollo del ya mencionado razonamiento. No obstante, este enfoque ha sido criticado por algunos autores al considerar que se limita únicamente a los objetos del cálculo diferencial y que no considera todas las representaciones semióticas de las ideas constitutivas del pensamiento variacional (Ramos y Jiménez)

En Colombia, el Ministerio de Educación Nacional plantea que "*el pensamiento variacional es la capacidad para darle sentido a las funciones numéricas y manejarlas en forma flexible y creativa, para entender, explicar y modelar situaciones de cambio, con el propósito de analizarlas y transformarlas*" (MEN). En los Estándares curriculares de Matemáticas (MEN) se describe el pensamiento variacional en los siguientes términos:

> […] este tipo de pensamiento tiene que ver con el reconocimiento, la percepción,

[63] CANTORAL, Ricardo. *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México: Secretaría de educación pública, 2013. p. 45.

[64] CARLSON, Marilyn, et al. Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, 2003, vol. 8, no 2, p. 121-156.

> la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos, así como con su descripción, modelación y representación en distintos sistemas o registros simbólicos, ya sean verbales, icónicos, gráficos o algebraicos.
> Uno de los propósitos de cultivar el pensamiento variacional es construir desde la Educación Básica Primaria distintos caminos y acercamientos significativos para la comprensión y uso de los conceptos y procedimientos de las funciones y sus sistemas analíticos, para el aprendizaje con sentido del cálculo numérico y algebraico y, en la Educación Media, del cálculo diferencial e integral. Este pensamiento cumple un papel preponderante en la resolución de problemas sustentados en el estudio de la variación y el cambio, y en la modelación de procesos de la vida cotidiana, las ciencias naturales y sociales y las matemáticas mismas (p. 66).

Parada plantea al Pensamiento Variacional como:

> […] el estudio de la variación y el cambio, en contextos matemáticos y no matemáticos; el cual implica adquirir habilidades para razonar, comunicar, representar y dominar algoritmos (usando o no tecnologías digitales) que permitan modelar y resolver situaciones o fenómenos que los impliquen. (En prensa, ECME 16)

Coincidimos con estas definiciones dado que centran el énfasis en la resolución de problemas que involucran el reconocimiento, la percepción, la identificación y la caracterización de la variación y el cambio en diferentes contextos; lo que implica como lo dice Vasco[65] pensar de forma dinámica, relacionando variables y magnitudes a través de diversos modelos.

Además Vasco considera que el objeto del pensamiento variacional es "*la covariación entre cantidades de magnitud, principalmente las variaciones en el*

---

[65] VASCO, Carlos Eduardo. *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos*. U. Pedagógica Nacional, 2006.

tiempo y su propósito rector es tratar de modelar los patrones que se repiten en la covariación entre cantidades de magnitud en subprocesos de la realidad" (p. 139).

Por otro lado, Vasco[66] menciona que el Pensamiento variacional requiere del pensamiento métrico y el pensamiento numérico si las mediciones superan el nivel ordinal. Requiere también el pensamiento espacial si una o varias variables son espaciales. No obstante, nosotros consideramos que el pensamiento variacional (cuando los estudiantes ingresan a la educación superior) implica que éstos a su vez hayan desarrollado cierto nivel en sus pensamientos métrico, numérico, geométrico e incluso aleatorio, y ya desde la actividad matemática que se realiza para resolver problemas de variación reconozca y transite por las nociones de cada pensamiento e identifique situaciones propias de cada contexto (el contexto numérico, el métrico, el geométrico y el aleatorio).

Diversos autores (Cantoral[67]; Nieto, Chavira y Viramontes[68]; Carrión Miranda y Pluvinage[69]) consideran que el desarrollo del Pensamiento variacional debe incluso partir de una ruptura con el pensamiento algebraico preponderante en la formación escolar y requiere de la formación de conceptos apropiados, el desarrollo de

---

[66] VASCO, Carlos Eduardo. *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos*. U. Pedagógica Nacional, 2006.

[67] CANTORAL, Ricardo. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. 2004. En: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17(1), 1–9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

[68] NIETO, Natividad; CHAVIRA, Heidi; VIRAMONTES, Juan. *Desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional con el CABRI II PLUS®*. 2011.

[69] CARRIÓN MIRANDA, Vicente. & PLUVINAGE, Francois. Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional. *Relime*, Vol. 17, Núm. 4 (II), 2014; p. 267-286

algunas habilidades y la formación de actitudes para que los estudiantes alcancen el éxito en la resolución de problemas que involucren la variación.

Ahora bien, parece importante precisar los procesos matemáticos que están inmersos dentro de ese gran proceso de resolución de problemas con los cuales los estudiantes puedan razonar, comunicar; modelar (que algunos autores o textos prefieren llamar representar); y, elaborar, comparar y ejercitar procedimientos.

Entendemos entonces la necesidad de engranar todos estos procesos (engranaje entendido como el mecanismo utilizado para transmitir potencia y dinamismo de un proceso a otro y desarrollar la actividad matemática propia del pensamiento variacional) para lograr caracterizarlos como habilidades inherentes al pensamiento variacional, inmersas en el uso de un ambiente de matemática interactiva (GeoGebra).

2.2.1 Habilidades del pensamiento variacional. Habiendo considerado desde diferentes puntos de vista lo que se entiende por pensamiento variacional, consideramos necesario identificar algunas habilidades que pueden estar relacionadas con dicho pensamiento.

El Instituto Colombiano para la Evaluación de la Educación Superior (ICFES)[70] plantea que uno de los elementos centrales del pensamiento variacional es "*la apropiación del concepto de función analizando variación y relaciones entre diferentes representaciones y su uso comprensivo a través de la modelación con funciones*" y de la misma forma sugiere que cada pensamiento desarrolla unas habilidades específicas que están relacionadas con los sistemas de representación,

---

[70] INSTITUTO COLOMBIANO PARA EL FOMENTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR. *Fundamentación conceptual área de Matemáticas.* Bogotá: Acevedo, M., Montañés, R., Huertas, C., Pérez, M. 2007. p. 29

con las estructuras conceptuales y con las formas de argumentación; para el caso del pensamiento variacional las habilidades que se mencionan son:

> […] el reconocimiento de regularidades y patrones, la identificación de variables, la descripción de fenómenos de cambio y dependencia; conceptos y procedimientos asociados a la variación directa, a la proporcionalidad, a la variación lineal en contextos aritméticos y geométricos, a la variación inversa y al concepto de función. (ICFES, 2007, p. 23)

Dolores[71] también menciona que el análisis del comportamiento de funciones es una de las habilidades básicas para el desarrollo del pensamiento variacional. Por su parte Sosa y Aparicio[72] consideran cuatro aspectos didácticos básicos (los cuáles vistos desde el punto de vista del alumno podemos identificar como habilidades) que están asociados al aprendizaje del pensamiento variacional: i) la noción de predicción, es decir determinar el valor de una variable con el paso del tiempo; ii) el estudio de la variación, qué, cómo y cuánto cambia lo que cambia; iii) el análisis e interpretación local-global, cualitativo-cuantitativo de gráficas de funciones y iv) la construcción de gráficas.

Existen propuestas acerca del reconocimiento de diferentes niveles de desarrollo del Pensamiento variacional como la realizada por Ávila, citado por Nieto, Chavira

---

[71] DOLORES, Crisólogo. Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 2004, vol. 7, no 3, p. 195-218.

[72] SOSA, Landy, APARICIO, Eddie. Interactuando con el concepto función en situaciones de modelación. 2009. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22,551-560. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

y Viramontes[73], quien plantea los siguientes: i) reconocimiento de la existencia de la variación, ii) distinción de los elementos que varían y la intensidad de los mismos, iii) relación de la variación con tablas y gráficas y iv) relación de la variación con diferentes modelos y la transferencia entre ellos.

2.3 PROCESO DE REPRESENTACIÓN

Debido a la naturaleza semiótica de los objetos matemáticos sólo es posible entrar en contacto con ellos a través de sus representaciones[74] pero, ¿qué podemos entender por representación?

Diferentes posturas han sido propuestas al respecto, rescatamos a continuación algunos aspectos relevantes de dichas posturas:

Bruner sugiere que existen principalmente tres maneras por las cuales el ser humano logra traducir su experiencia en un modelo del mundo (lo cual se entenderá como representación): la acción, el uso de los sentidos junto con el uso de imágenes que resuman dicha percepción, y el uso de palabras o símbolos. A partir de estas maneras, plantea diversas modalidades de representación:

1. Representaciones ejecutivas o enactivas, que consisten en el uso del cuerpo para la representación de un evento mediante un acto motriz.

[73] NIETO, Natividad.; CHAVIRA, Heidi.; VIRAMONTES, Juan. *Desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional con el CABRI II PLUS®*. 2011.

[74] MORENO, Luis. *Educación Matemática: del signo al píxel*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. 2014

2. Representaciones icónicas, que son representaciones mediante imágenes abstractas de eventos o situaciones reales.

3. Representaciones simbólicas, aquellas que se dan únicamente mediante símbolos.

La postura anterior es adaptada y contextualizada por Tall[75] a las representaciones utilizadas en cálculo (más específicamente a las representaciones de funciones), considerando que las representaciones simbólicas propuestas por Bruner son al mismo tiempo visuales y simbólicas. Así surgen cuatro modalidades de representación:

1. Representaciones enactivas, que identifica como las acciones humanas que dan la sensación de cambio, velocidad o aceleración.

2. Representaciones numéricas y simbólicas, que son representaciones que pueden ser manipuladas manualmente o con computadora (incluyendo la posibilidad de ser programadas por los estudiantes).

3. Representaciones visuales, son aquellas que pueden ser producidas manualmente de manera aproximada o, más precisamente, con ordenadores dinámicos.

4. Representaciones formales, las que dependen de definiciones y pruebas. [76]

---

[75] TALL, David. Functions and calculus. En *International handbook of mathematics education*. Springer Netherlands, 1996. p. 289-325.

[76] Aunque no se hace una aclaración de lo que son las representaciones numéricas y simbólicas, y de las visuales, se puede inferir por los ejemplos que presenta el artículo de Tall (1996) que por representación simbólica y numérica hace referencia a las expresiones algebraicas de funciones y a las tablas de valores de las mismas, mientras por representación visual hace referencia a representaciones de funciones mediante trazos en el plano cartesiano.

Otro punto de vista es el expresado por Moreno y Hegedus (2013) quienes consideran que los sistemas de notación han evolucionado debido a nuevas exploraciones matemáticas, que se han hecho posible gracias a mediadores semióticos como lo son los sistemas de geometría dinámica (en general el software matemático, no restringido al software de geometría). Estos mediadores semióticos permiten un nuevo tipo de representación: la digital, que puede categorizarse de la siguiente manera:

1. Representación estática inerte: La inscripción se fusiona con el medio, es decir no es manipulable en ningún sentido

2. Representación estática kinestésica-estética: esta nueva forma, aunque estática, permite una inscripción más kinestésica -dado que es fácil moverse dentro de los medios de inscripción - y un proceso estético -dado el uso del color para diferenciar entre las notaciones.

3. Representación estática computacional: las representaciones (por ejemplo, un gráfico trazado) son artefactos de una respuesta computacional a la acción de un ser humano. Los actos intencionales de un ser humano son computacionalmente refinados. El sistema de notación (por ejemplo, fichas matemáticas, gráficos, funciones) se procesa dentro del medio y se presenta como una representación estática de la entrada del usuario o la interacción con el dispositivo.

4. Representación discreta dinámica: las interacciones de los usuarios se convierten en más fluidas, el medio dentro del cual se pueden expresar notaciones se hace más plástico y maleable. Acciones discretas se traducen en expresiones observables -expresiones que son co-acciones entre el usuario y el medio- y sin embargo el medio sigue siendo dinámico, ya que es maleable, y re-anima notaciones y expresiones de entradas discretas.

5. Representaciones continúas dinámicas: Algunos programas de software permiten al usuario navegar a través de acciones continuas de un ratón y tener la percepción de propiedades de una forma o superficie matemática a través de la reorientación de su perspectiva. Por ejemplo, un usuario podría percibir la inclinación de una superficie a través de un dispositivo *háptico* de retroalimentación y moverlo a un punto de valor extremo sin preguntar al computador como calcular los extremos relativos. (Moreno y Hegedus, 2013)

A partir de estas posturas se harán algunas precisiones sobre lo que en esta investigación se considera como representación:

Entenderemos por representación a las diferentes expresiones ya sean estas simbólicas (numéricas, simbólicas y formales en términos de Tall[77]) gráficas o verbales que le permitan al estudiante apropiarse o comunicar su comprensión para sí mismo y para los demás sobre los objetos de estudio del Cálculo diferencial: cambio y variación.

De esta forma habremos de considerar cinco tipos de representación: cuatro desde el punto de vista formal: algebraica, numérica, gráfica (incluyendo en esta categoría la representación digital) y lenguaje natural; y una que desde el sentido formal de las matemáticas no es considerada como representación: las acciones motrices.

2.3.1 Registros de representación. Acorde con la teoría de Duval hablaremos en particular no de tipos de representación sino de registros de representación, entendiéndose estos como aquellos sistemas donde es posible cumplir las tres actividades cognitivas inherentes a una representación: constitución de un conjunto

---

[77] TALL, David. Functions and calculus. En *International handbook of mathematics education*. Springer Netherlands, 1996. p. 289-325.

de marcas identificables como una representación, transformación de acuerdo a las reglas internas del sistema y conversión de las representaciones a otro sistema.

Explicamos a continuación la consideración de las acciones motrices como un registro de representación particular y luego enunciamos brevemente los registros de representación formales que nos presenta la literatura.

2.3.2 Registro simbólico motriz. Como se mencionaba en los párrafos anteriores la representación de objetos matemáticos mediante el uso de acciones motrices podría no considerarse un producto de representación formal. Sin embargo, autores como Piaget (1961) han planteado que las acciones motrices exteriorizan los procesos de representación mental, incluso sin estar este hecho ligado con una etapa especifica del desarrollo.

En 1998 Goldin[78] incluye a los gestos como un tipo de representación al describir dos tipos principales de representaciones cognitivas: i) Las verbales o sintácticas: es decir las relacionadas con el uso del lenguaje natural, el vocabulario matemático y no matemático, y ii) Los sistemas figurales y gestuales, incluyendo configuraciones cognitivas espaciales y visuales, o esquemas gestuales y corporales.

[78] GOLDIN, Gerald A. Representations and the psychology of mathematics education: part II. *The Journal of Mathematical Behavior*, 1998, vol. 17, no 2, p. 135.

Otros autores como Bosch[79], Bosch y Chevallard[80] hablan sobre los objetos ostensivos es decir objetos dotados de cierta naturaleza sensible que pueden presentarse al sujeto como realidad perceptible y que funcionan para representar objetos no ostensivos como lo son los objetos matemáticos; y dentro de estos objetos ostensivos hacen referencia a los sonidos (morfemas lingüísticos), los grafismos (escritura de lenguas naturales y formales) y los gestos. Adicionalmente mencionan la actividad humana mediada por una "*pluralidad de registros ostensivos: el registro de la oralidad, el registro del trazo o el grafismo, el registro de la gestualidad*" (Bosch[81]).

Si bien, Radford (citado en Vergel[82]) admite que ciertas acciones motrices como los gestos no cumplen algunos requisitos de las definiciones clásicas de los sistemas semióticos, no podemos negar la importancia de las mismas para el aprendizaje de las matemáticas:

> En uno de los foros de investigación del Congreso Internacional del PME-2005 (International Group for the Psychology of Mathematics Education-2005) se

[79] BOSCH, Mariana. *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad.* Trabajo de grado Doctor en Ciencias Matemáticas. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, 1994. 207 p.

[80] BOSCH, Marianna; CHEVALLARD, Yves. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 1999, vol. 19, no 1, p. 77-123.

[81] BOSCH, Mariana. *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad.* Trabajo de grado Doctor en Ciencias Matemáticas. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, 1994. 207 p.

[82] VERGEL, Rodolfo. *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria*. Bogotá D.C, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 2016.

> reconoce, como objetivo principal, la importancia del gesto en los procesos de aprendizaje de las matemáticas. En el contexto del congreso, Arzarello & Edwards (2005) se interesaron en analizar de qué forma el gesto contribuye a la construcción de significado de conceptos matemáticos. La importancia del estudio del gesto reside en reconocer que por medio de él es posible materializar intenciones, además de ser un elemento integrante, no periférico, en las maneras de pensar de los estudiantes.[83]

Consideramos que si bien, el registro de representación simbólico motriz no tiene la factibilidad de convertirse en un registro formal para el campo cognitivo de la matemática, dada la dificultad que se presentaría para representar algunos objetos matemáticos a través de gestos; desde la perspectiva sociocultural, tal como lo refiere Radford (2002) y que concuerda con nuestro estudio; este sería un tipo de representación a considerar. Lo anterior porque las gesticulaciones de los estudiantes permiten construir un conjunto de marcas perceptibles que dan cuenta de las características de los objetos matemáticos involucrados en situaciones de cambio y variación; que de alguna manera se han institucionalizado dentro de la misma informalidad. Claro, bajo la premisa de que el docente formalice en algún momento de la actividad matemática del aula las posibles interpretaciones para evitar ambigüedades o confusiones que puedan convertirse en obstáculos epistemológicos (en términos de Brousseau).

Siendo así un conjunto de marcas perceptibles y dadas las condiciones más adelante enunciadas que permiten que se realicen transformaciones de las representaciones dadas mediante acciones motrices, podemos hablar entonces del Registro Simbólico Motriz como uno de los registros de representación de las situaciones de cambio y variación estudiadas en esta investigación.

---

[83] VERGEL, Rodolfo. *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria*. Bogotá D.C, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 2016. P. 68

2.3.2.1 Registro del lenguaje natural. Duval[84] menciona que, si bien, no todos los sistemas semióticos permiten las actividades cognitivas fundamentales inherentes a las representaciones, el lenguaje natural si es uno de ellos. El mismo autor afirma que el lenguaje es una herramienta común para "*producir nuevo conocimiento y no solo para comunicar cualquier representación mental*" (Duval y Sáenz-Ludlow, 2016)

Como es evidente, al trabajar el desarrollo del pensamiento variacional mediante el enfoque de resolución de problemas es necesario que la presentación de los mismos se realice a través del lenguaje natural. Ahora bien, el uso del lenguaje natural no se limita a enunciados problema o a oraciones, también hacen parte de este registro los esquemas o tablas resumen como el mostrado en la Figura 2.

Figura 2. Representación en el lenguaje natural

Magnitudes que varían: altura, anchura, profundidad y volumen.
Magnitud a determinar: volumen máximo.
Magnitudes conocidas: Largo y ancho de la hoja.

2.3.2.2 Registro Algebraico. De manera similar a lo que sucede con el lenguaje natural, Duval[85] refiere que las lenguas simbólicas también son un registro de representación pues permiten realizar las tres actividades cognitivas descritas anteriormente. El libro de texto de Stewart (2001) menciona que una de las cuatro formas de representar una función (uno de los objetos matemáticos inmersos en las situaciones de cambio y variación) es algebraicamente, es decir a través de una fórmula explícita. Así entendemos por registro algebraico aquellas representaciones

[84] DUVAL, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, 2004.

[85] Ibíd.

en las que el lenguaje simbólico (lenguaje matemático formal) es usado para dar cuenta de las características de un objeto matemático.

2.3.2.3 Registro Tabular. Siendo parte del lenguaje simbólico, en el que una determinada relación entre magnitudes presentes en una situación de cambio y variación se presenta mediante una tabla; hablaremos en particular del registro tabular numérico a las representaciones que mediante números organizados en algún arreglo particular como el mostrado en la Figura 3, nos den cuenta del comportamiento local o puntual de diversas cantidades que covarían.

Figura 3. Representación en el registro tabular

Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0,14	0,21	0,31	0,46	0,55	0,64	0,78	0,83	0,99	1,10	1,20	1,33	1,43	1,52	1,67

Es posible también hablar de otros tipos de registros tabulares como el mostrado en la figura 4, donde se expresa la relación existente entre intervalos para el dominio de una función y el signo de la derivada para dicho intervalo:

Figura 4. Representación no numérica en el registro tabular

Intervalo	$12x$	$x-2$	$x+1$	$f'(x)$	f
$x < -1$	$-$	$-$	$-$	$-$	decreciente sobre $(-\infty, -1)$
$-1 < x < 0$	$-$	$-$	$+$	$+$	creciente sobre $(-1, 0)$
$0 < x < 2$	$+$	$-$	$+$	$-$	decreciente sobre $(0, 2)$
$x > 2$	$+$	$+$	$+$	$+$	creciente sobre $(2, \infty)$

2.3.2.4 Registro Gráfico. De igual forma que las anteriores, Duval considera que los gráficos y las figuras geométricas son sistemas semióticos que permiten la constitución de marcas, y las transformaciones entre representaciones.

Dados los objetos matemáticos que están inmersos en las situaciones de cambio y variación, se considera en primera medida a los gráficos cartesianos como representaciones dadas en el registro gráfico. Si bien, no son estas las únicas representaciones consideradas en este registro, son aquellas que por el tipo de aprendizaje y la familiaridad del estudiante se observan con mayor frecuencia.

Se tendrá en cuenta que dado el contexto en que esta investigación se desarrolla y dado el uso de un mediador semiótico -Geogebra- en los términos en los que lo plantea Moreno[86] consideramos dentro del registro gráfico a las representaciones digitales, tal y como se definieron al inicio del apartado 0.

Pero más allá de la consideración teórica acerca de lo que es una representación, nos centramos en lo que la representación como proceso puede aportar para el desarrollo cognitivo del ser humano.

Al respecto los Estándares curriculares de Matemáticas (MEN, 2006) mencionan que la representación como proceso implica, entre otros aspectos, formular, plantear, transformar y resolver problemas a partir de situaciones matemáticas y no matemáticas, lo que además requiere analizar situaciones, mediante modelos mentales que las representen externamente de distintas formas. Explícitamente el MEN expone:

> Utilizar diferentes registros de representación o sistemas de notación simbólica para crear, expresar y representar ideas matemáticas; para utilizar y transformar dichas representaciones y, con ellas, formular y sustentar puntos de vista. Es decir dominar con fluidez distintos recursos y registros del lenguaje cotidiano y de los distintos lenguajes matemáticos. (2006, p. 51)

---

[86] MORENO, Luis. *Educación Matemática: del signo al píxel*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. 2014

De manera similar, es visto el proceso de representación en los estándares del NCTM[87]. Las acciones correspondientes a este proceso son:

1. Crear y usar representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas.

2. Seleccionar, aplicar y traducir representaciones matemáticas para resolver problemas.

3. Usar representaciones para modelizar e interpretar fenómenos físicos, sociales y matemáticos.

Por su parte el Programa Internacional de Evaluación de Estudiantes (PISA) de la OCDE, establece una serie de capacidades básicas o competencias, de las cuáles destacamos las dos que podemos identificar con el proceso de representación[88]:

> Representación. Comporta la capacidad de descodificar, codificar, traducir, interpretar y distinguir distintas formas de representación de objetos y situaciones matemáticos; las interrelaciones que existen entre las diversas representaciones y la elección y alternancia entre distintos tipos de representación según las situaciones y objetivos.
> Utilización de operaciones y lenguaje técnico, formal y simbólico. Comporta descodificar e interpretar el lenguaje formal y simbólico; comprender sus relaciones con el lenguaje natural; traducir del lenguaje natural al lenguaje simbólico/formal;

[87] NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Principios y Estándares para la Educación Matemáticas.* Sevilla*, SAEM Thales*, 2003.

[88] Si bien, el programa PISA no hace referencia como tal a procesos para el desempeño en el área de matemáticas, establece una serie de competencias que se encuentran a la par con los procesos establecidos por el NCTM (2000), en Murillo, Arnal y Marcos (2010) se encuentra un paralelo entre las competencias establecidas por PISA y los procesos del NCTM.

hacer uso de expresiones y asertos que contengan símbolos y fórmulas; emplear variables.[89]

Teniendo en cuenta estas perspectivas de lo que se entiende como proceso de representación, en particular para los objetivos de esta investigación se interpreta como proceso de representación:

1. La creación y uso de representaciones para organizar, registrar, y comunicar ideas matemáticas o para modelizar diferentes fenómenos y situaciones en contextos matemáticos o no matemáticos.

2. La descodificación, codificación, traducción, interpretación y distinción de las distintas formas de representación de objetos y situaciones matemáticos.

3. La descodificación e interpretación de las representaciones algebraicas, numéricas y gráficas y la comprensión de la relación de estas con las representaciones en lenguaje natural.

4. La elección y transformación de los diferentes tipos de representación según las situaciones planteadas.

2.3.3 Habilidades del proceso de representación. Una vez considerado el proceso de representación y los registros de representación que se toman en cuenta en este estudio, es necesario considerar algunas habilidades relacionadas con este proceso.

[89] MURILLO, Jesús., ARNAL, María. & MARCOS, Guillermina. Competencias en matemáticas y entornos interactivos. En *Contribuciones científicas en honor de Mirian Andrés Gómez*. Universidad de La Rioja, 2010. p. 375-401. P.383.

Duval[90] menciona que existen tres actividades cognitivas fundamentales de la representación:

1. La formación de representaciones: mediante la selección de un conjunto de caracteres pertenecientes a un registro semiótico particular, ya sea esta formación para expresar una representación mental o para evocar un objeto real.

2. El tratamiento de representaciones: es decir la transformación de una representación inicial en un registro particular, que provea una representación final en el miso registro de representación.

3. La conversión de representaciones: es decir la transformación de una representación en un registro particular, obteniendo una representación final en un registro de representación diferente al de la representación inicial.

Adicionalmente, Duval plantea la coordinación de registros como una actividad conceptual superior en la que se movilizan y articulan los registros de representación, y se discriminan las unidades significantes de cada uno de ellos (Ramírez, Romero y Oktaç[91]); además en este estadio el sujeto es capaz de "*discriminar el representante y lo representado, o la representación y el contenido conceptual que esta representación expresa*" (Duval[92]).

---

[90] DUVAL, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, 2004.

[91] RAMÍREZ, Osiel; ROMERO, César Fabián; OKTAÇ, Asuman. Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. En A. Ramírez e Y. Morales (Eds.), *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (pp. 537-547). Santo Domingo: ICEMACYC. 2013

[92] DUVAL, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, 2004. P. 63

Ahora bien, cada una de las habilidades mencionadas hasta el momento han sido presentadas asociadas a cada uno de los referentes teóricos que se abordan en esta investigación: habilidades cognitivas, habilidades del pensamiento variacional y habilidades del proceso de representación; pero de manera aislada.

Adicionalmente, las habilidades asociadas al proceso de representación han sido consideradas por sus autores como habilidades que se desarrollan en representaciones estáticas y en ningún momento mediadas por la tecnología. A la luz de las condiciones bajo las cuales se realiza este estudio surge el interrogante: ¿Qué habilidades asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación se pueden potenciar mediante la resolución de problemas mediados por tecnologías digitales?

En el siguiente apartado explicamos a partir de la teoría y la experimentación, las habilidades *a priori* del proceso de representación, específicamente de los fenómenos de variación.

2.4 HABILIDADES COGNITIVAS ASOCIADAS AL PROCESO DE REPRESENTACIÓN DE FENÓMENOS DE VARIACIÓN

Acorde con los diferentes aspectos teóricos tratados en los apartados anteriores, se ha querido plantear una primera categorización de las habilidades cognitivas que pueden estar asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación, teniendo en cuenta que estas habilidades se desarrollan o se potencian mediante un enfoque de resolución de problemas mediado por tecnologías digitales:

2.4.1 Reconocer representaciones de los objetos matemáticos. Cuando hablamos de reconocimiento, las experiencias relacionadas con la memoria podrían originar dos formas diferentes de realizar una tarea de identificación: por familiaridad (esa persona se me hace conocida) o por identificación (ese señor es el papá de mi amiga Katherine). El primero de dichos actos de reconocimiento ha sido realizado mediante un proceso directo que no precisa de un procesamiento consciente de información, la segunda es una identificación indirecta en la que se pone en juego un proceso elaborado.[93]

De manera similar a lo expuesto en el párrafo anterior, Jacoby y Dallas (en Manzanero[94]) proponen dos tipos de reconocimiento, el reconocimiento perceptivo y la memoria de reconocimiento. El primero de ellos se realiza mediante juicios de familiaridad, teniendo en cuenta información física; mientras que la memoria de reconocimiento actúa de manera similar al reconocimiento por identificación mencionado por Mandler[95], llevándose a cabo procesos de toma de decisión que implican recuperación del contexto en el cuál la información fue codificada.

Cuando para el sujeto es necesario recuperar el contexto en que la información fue codificada se llevan a cabo procesos conscientes y controlados dentro de los cuáles está la generación de candidatos y su reconocimiento, o la integración contexto-

---

[93] MANDLER, George. Recognizing: The judgment of previous occurrence. *Psychological review*, 1980, vol. 87, no 3, p. 252.

[94] MANZANERO, Antonio. Procesos automáticos y controlados de memoria: Modelo Asociativo (HAM) vs. Sistema de Procesamiento General Abstracto. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 2006, vol. 59, no 3, p. 373-412.

[95] MANDLER. Op. Cit.

información perceptiva y subsiguiente ecforía[96]. Según Anderson y Bower[97] la búsqueda que permite el reconocimiento no se realiza al azar sino que el contexto la delimita. Sin un contexto determinado los procesos de búsqueda pueden dar como resultado la recuperación de información errónea debido a la multitud de representaciones que pueden existir en el sistema, tantas como significados tengan los estímulos (Anderson y Bower, en Manzanero[98]).

De manera similar a lo planteado por los autores ya mencionados, el reconocimiento de representaciones de los objetos matemáticos se puede realizar por simple percepción de familiaridad, o bien como producto de un análisis del contexto que conlleve a procesos más elaborados como la generación de candidatos.

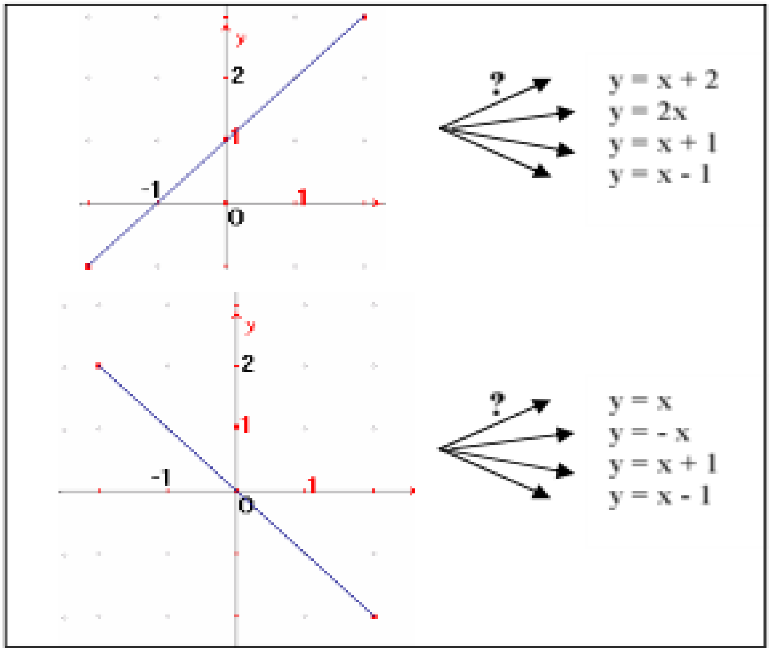
Figura 5. Actividad de Reconocimiento.

---

[96] TULVING, Endel. Memory and consciousness. *Canadian Psychology/Psychologie canadienne*, 1985, vol. 26, no 1, p. 1.

[97] ANDERSON, John R.; BOWER, Gordon H. Recognition and retrieval processes in free recall. Psychological review, 1972, vol. 79, no 2, p. 97.

[98] MANZANERO, Antonio. Procesos automáticos y controlados de memoria: Modelo Asociativo (HAM) vs. Sistema de Procesamiento General Abstracto. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 2006, vol. 59, no 3, p. 373-412.

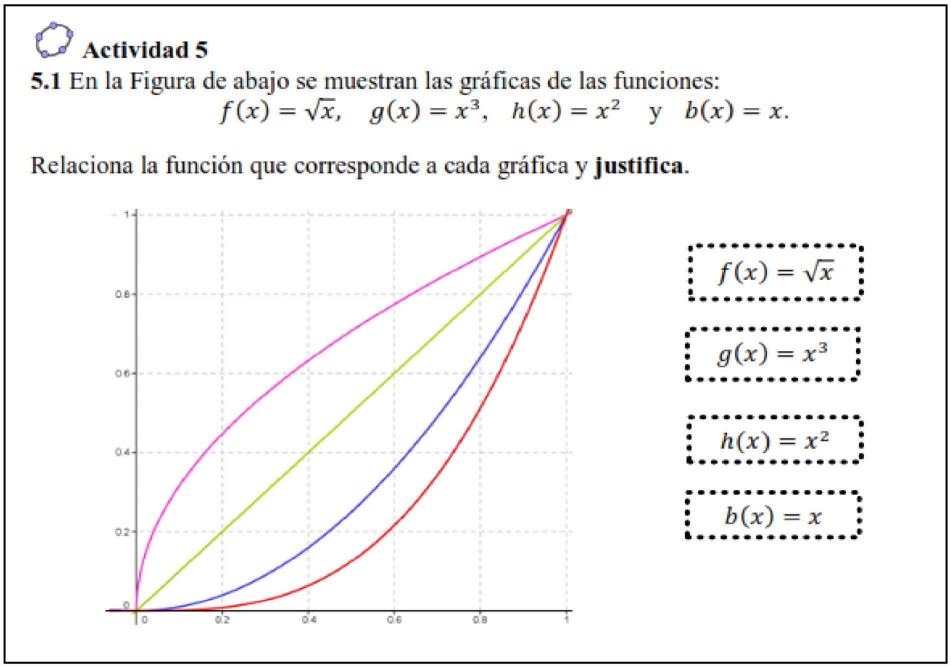


Fuente: Duval (2006) Duval y Sáenz-Ludlow (2016)

El reconocimiento como habilidad comprenderá las acciones en las que el individuo manifieste ya sea de manera verbal, escrita o gestual que puede asociar los comportamientos, situaciones presentadas, gráficos o tablas en una situación de variación o cambio con los objetos matemáticos que son propios de este tipo de situaciones (funciones, límites, derivadas, etc). Así mismo, entendemos como reconocimiento las acciones en que el individuo pueda determinar (por asociación o por recuperación del contexto de codificación) cuál o cuáles representaciones están asociadas a un objeto matemático previamente presentado.

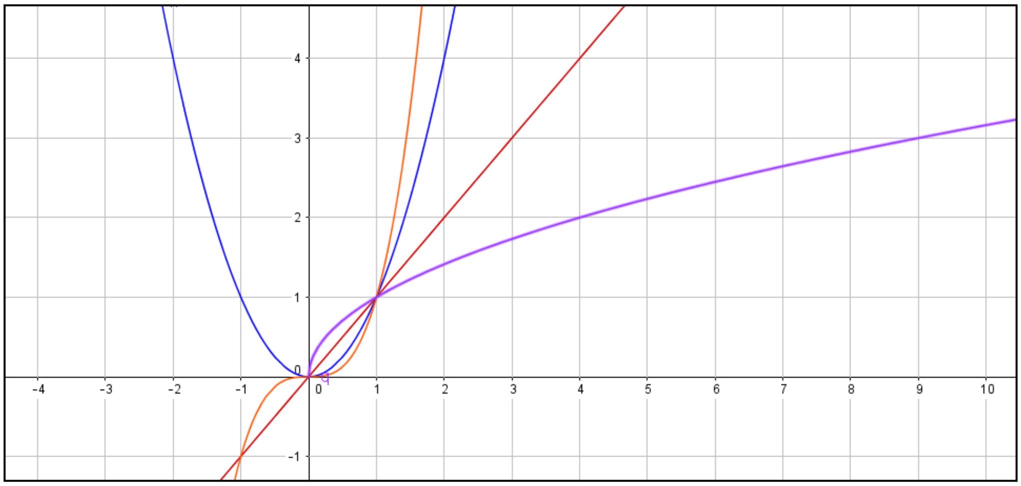
2.4.1.1 Ejemplos de Acciones de Reconocimiento

Figura 6. Actividad de reconocimiento planteada en una de las actividades del curso



En la Figura 6 se le pide al estudiante que relacione las representaciones gráficas mostradas con la representación algebraica correspondiente; esta actividad de asociación entre representaciones de distintas funciones, dadas en registros diferentes, es considerada como una actividad de reconocimiento. Aquí el reconocimiento por familiaridad puede no llegar a ser suficiente para realizar con acierto la actividad pedida, como si podría serlo si las representaciones en el registro gráfico fuesen las presentadas en la Figura 7:

Figura 7. Actividad de reconocimiento a partir de una representación gráfica con vista ampliada



2.4.2 Interpretar representaciones de los objetos matemáticos. Leinhardt, Zaslavsky y Stein[99] presentan a la interpretación como una de las tareas principales que se pueden realizar en términos de acciones sobre gráficas o sobre funciones y la definen así: "*Por interpretación nos referimos a la acción por la cual un estudiante toma sentido o gana significado a partir de un gráfico (o una parte de un gráfico), una ecuación funcional, o una situación*" (1990, p.8).

En términos de lo que pueda significar el tomar sentido o ganar significado explicitan que un estudiante puede estar decidiendo cómo y en qué cantidad varían las magnitudes involucradas, la existencia o no de la continuidad de una función, la tasa de variación; esto en términos globales o generales del comportamiento de la gráfica o función; de la misma forma que puede decidir sobre situaciones locales o específicas de la misma como la determinación de puntos máximos o mínimos, cortes, valor específico de una variable cuando la otra toma un valor determinado, etc.

---

[99] LEINHARDT, Gaea; ZASLAVSKY, Orit; STEIN, Mary Kay. Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*, 1990, vol. 60, no 1, p. 1-64.

Si bien, estas acciones están planteadas por los autores específicamente para tareas relacionadas con gráficas y funciones, consideramos que describen de manera particular lo que se podría esperar al realizar un trabajo de interpretación en las situaciones trabajadas en este estudio. Siendo así, entendemos por interpretación de representaciones a las acciones en las que el estudiante obtenga de la representación dada del objeto matemático, en cualquiera de los registros de representación, alguna información que le permita inferir, tomar decisiones, comunicar o argumentar para dar solución a una determinada actividad relacionada con situaciones de cambio y variación.

2.4.2.1 Ejemplos de Acciones de Interpretación. Al estudiante se le presenta la representación mostrada en la Figura 8 en el registro tabular numérico acerca del comportamiento de dos magnitudes que se expresan en la misma tabla.

Figura 8. Representación en el registro tabular presentada en una de las actividades del curso

Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0,14	0,21	0,31	0,46	0,55	0,64	0,78	0,83	0,99	1,10	1,20	1,33	1,43	1,52	1,67

A partir de la misma el estudiante puede determinar algunos comportamientos locales de la situación funcional presentada, así como determinar la tasa media de variación y establecer a partir de ella el modelo funcional que más se acomoda a la situación presentada; todas estas acciones de interpretación de la representación inicial dada.

2.4.3 Construir representaciones de los objetos matemáticos. La construcción de representaciones de los objetos matemáticos es otra de las tareas en términos de acciones que Leinhardt, Zaslavsky y Stein[100] presentan como principal en el trabajo con gráficas y funciones: "*Por construcción nos referimos al acto de generar algo nuevo. La construcción se refiere a la realización de una gráfica o al trazado de puntos a partir de los datos(o de una tabla)*" (Traducido del inglés).

En el caso tratado por Leinhardt, Zaslavsky y Stein la construcción de gráficas en su sentido amplio incluye la selección y etiquetado de los ejes, la selección de la escala, la identificación de la unidad y el trazado.

Si bien, nunca se parte de la nada y sea cual fuere la situación de cambio y variación presentada siempre se cuenta con una representación en alguno de los registros ya antes mencionados, la construcción de otra representación no siempre será considerada como una transformación de la representación inicial (en los términos de Duval, apartados 4 y 0) puesto que no siempre dicha construcción corresponde efectivamente al mismo objeto presentado en la representación inicial o bien, en términos del mismo Duval existen representaciones "puente" o intermediarias y otras expresiones mixtas que se obtienen por mezclas de dos registros.

2.4.3.1 Ejemplos de Acciones de construcción

Figura 9. Representación tabular de una función cuadrática

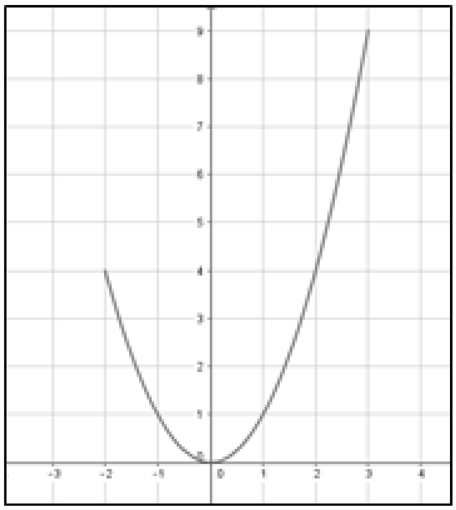
Represente gráficamente la función dada en la siguiente tabla:

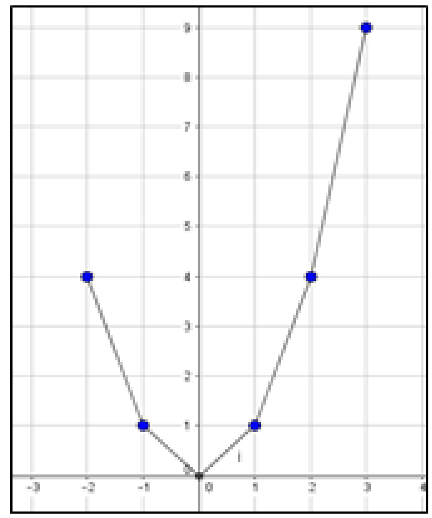
x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x) = y$	4	1	0	1	4	9

100 LEINHARDT, Gaea; ZASLAVSKY, Orit; STEIN, Mary Kay. Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*, 1990, vol. 60, no 1, p. 12

En la Figura 9 se pide como tarea representar gráficamente la función dada por la representación tabular numérica, dos productos de dicha actividad considerados como ejemplos de acciones de construcción son los presentados en la Figura 10:

Figura 10. Gráficas construidas a partir de la información en la Figura 8





2.4.4 Transformar representaciones de los objetos matemáticos. La transformación de representaciones como habilidad, comprende las acciones que un individuo realiza sobre una representación inicialmente dada para obtener una nueva representación ya sea en el mismo registro o en un registro diferente, siendo que estas nuevas representaciones conserven parte o todo el contenido de la representación inicial (Duval[101]).

De acuerdo al registro de salida de la representación habremos de distinguir entre dos tipos de transformaciones, el tratamiento y la conversión:

[101] DUVAL, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, 2004.

2.4.4.1 Tratamiento de representaciones de objetos matemáticos. Retomando los términos introducidos por Duval[102] podremos entender por tratamiento cualquier transformación de la representación inicial del objeto matemático cuando dicha transformación produce una representación en el mismo registro que la representación inicial. De esta manera y teniendo en cuenta los registros de representación considerados en esta investigación, podemos establecer que existen cinco acciones de tratamiento, que serán ejemplificadas a continuación:

Tratamiento En El Registro Simbólico Motriz. Dada la particularidad del registro simbólico motriz, en el cuál estamos considerando las manifestaciones corporales (generalmente gestos realizados con las manos, los brazos, etc.); un tratamiento en este registro corresponde a la realización de un gesto que describe un comportamiento de un objeto matemático cuando previamente se ha establecido otro gesto para representar un estado anterior de ese mismo objeto o de otro que le esté asociado.

Los tratamientos en el registro simbólico motriz no suelen ser muy comunes pues a la generación de un gesto como descriptor del comportamiento de un objeto matemático suele acompañarle por lo regular algún enunciado en lenguaje natural, de manera que se presenta otro tipo de transformación del cuál más adelante se hablará.

Un ejemplo de un tratamiento en el registro simbólico motriz puede corresponder a la siguiente situación: un estudiante identifica el comportamiento de dos variables correlacionadas para dos valores específicos y establece con sus manos la posible inclinación de la pendiente que, en términos del registro gráfico, podría representarlo. A continuación y habiendo establecido una secuencia de valores y

[102] Ibíd.

posibles pendientes, establece de nuevo con un movimiento de sus manos o entrecruzando las mismas el comportamiento general de dichas variables.

Tratamiento en el registro del lenguaje natural. En el registro del lenguaje natural una situación problema es presentada mediante un enunciado verbal del cual se debe extraer información relevante a fin de determinar una representación más acorde ya sea por fines de economía, de solución de la situación, de comunicación o de comprensión. Las representaciones en las que esta información relevante es presentada en lenguaje natural, presentan un tratamiento dentro de dicho registro.

En la Figura 11, se muestra un enunciado presentado en lenguaje natural

Figura 11. Enunciado en lenguaje natural de una situación problema

1.1 A partir de una hoja rectangular de tamaño 6 dm por 4 dm, construye una caja sin tapa recortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas, de tal manera que almacene el mayor volumen. ¿Cuáles son las dimensiones de la atura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿Por qué? **Explica** tu procedimiento y tu respuesta.

Una transformación de tratamiento para la situación planteada en la Figura 11, se muestra en la Figura 12:

Figura 12. Tratamiento en el registro lenguaje natural para la situación dada en la Figura 10

Magnitudes que varían: altura, anchura, profundidad y volumen.
Magnitud a determinar: volumen máximo.
Magnitudes conocidas: Largo y ancho de la hoja.

Tratamiento en el registro algebraico. Los tratamientos dentro del registro algebraico a diferencia de los tratamientos en los registros anteriores obedecen a reglas previamente establecidas, pues estos se realizan siguiendo propiedades de las operaciones entre números o entre expresiones algebraicas (suma, resta, multiplicación, división, factorización, etc.)

Figura 13. Representación algebraica de una función cuadrática

En tu hoja de trabajo representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$.

En el enunciado presentado en la Figura 13 se pide obtener la representación gráfica de una función a partir de su representación algebraica; es decir realizar una transformación en la cual los registros inicial y final son diferentes. Sin embargo, es posible realizar una o varias transformaciones de tratamiento, es decir dentro del mismo registro, que permitan extraer mayor información de la representación algebraica a fin de realizar la transformación pedida.

En la Figura 14 se muestra una de las posibles transformaciones de tratamiento, realizada mediante el desarrollo del cuadrado del binomio que hace parte de la representación algebraica de la función.

Figura 14. Representación algebraica obtenida por tratamiento de la representación dada en la Figura 12

$$f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$$

$$f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + 6x + 9) - 4$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{9}{2} - 4$$

$$f(x) = \frac{1}{2}x^2 + 3x + \frac{1}{2}$$

De la misma forma existen otras representaciones algebraicas que se pueden obtener por tratamiento a partir de la representación algebraica dada en la Figura 13.

Figura 15. Representaciones obtenidas por tratamiento de la representación dada en la Figura 12

$$\boxed{2(y+4) = (x+3)^2}$$

$$\boxed{f(x) = 0{,}5x^2 + 3x + 0{,}5}$$

Tratamiento en el registro tabular. La Figura 16 muestra una situación de cambio y variación en el que la información se presenta a partir de una representación tabular numérica:

Figura 16. Representación tabular numérica para una situación contextualizada

1.1 La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina en litros de un vehículo Toyota Corolla que recorre la ciudad de Bogotá en las horas pico.

Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0,14	0,21	0,31	0,46	0,55	0,64	0,78	0,83	0,99	1,10	1,20	1,33	1,43	1,52	1,67

Contesta las siguientes preguntas en tu hoja de trabajo.

a) ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer 17 km en hora pico? **Justifica** tu respuesta.

Para poder contestar a la pregunta planteada se esperaría que se pudiese generalizar la información, estableciendo un modelo que dé cuenta del consumo de combustible, no solo para el valor pedido sino para cualquier valor.

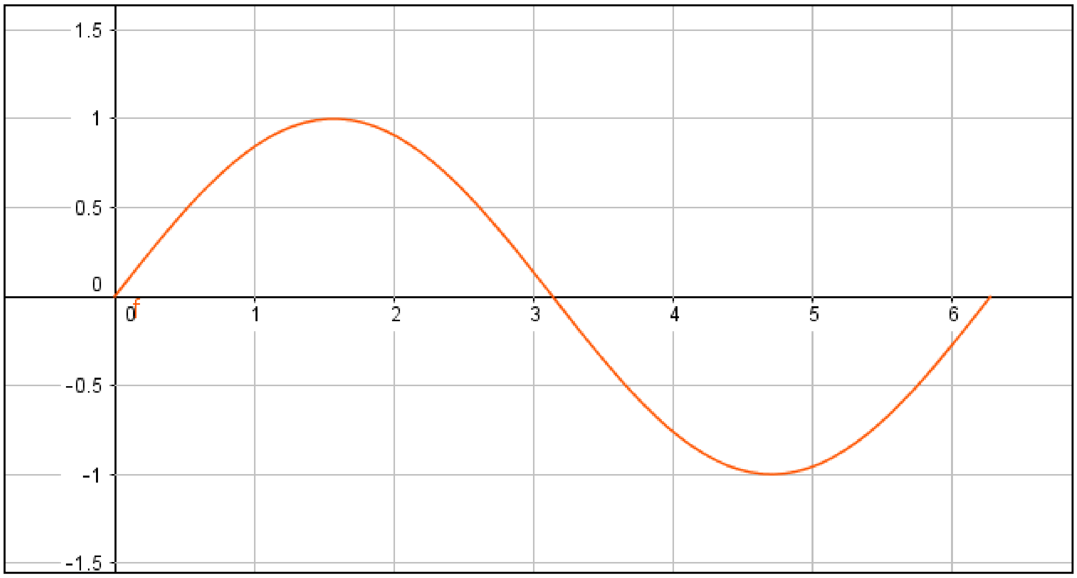
La obtención de dicho modelo puede partir de un tratamiento en el registro tabular numérico como el observado en la Figura 17, de manera que se calculen las variaciones de las dos magnitudes involucradas.

Figura 17. Tratamiento en el registro tabular numérico a partir de la representación dada en la Figura 15

Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0.14	0.21	0.31	0.46	0.55	0.64	0.78	0.83	0.99	1.10	1.20	1.33	1.43	1.52	1.67
Variación del consumo/ Variación del recorrido	-	0.07	0.10	0.15	0.09	0.09	0.14	0.05	0.016	0.11	0.10	0.13	0.10	0.09	0.15

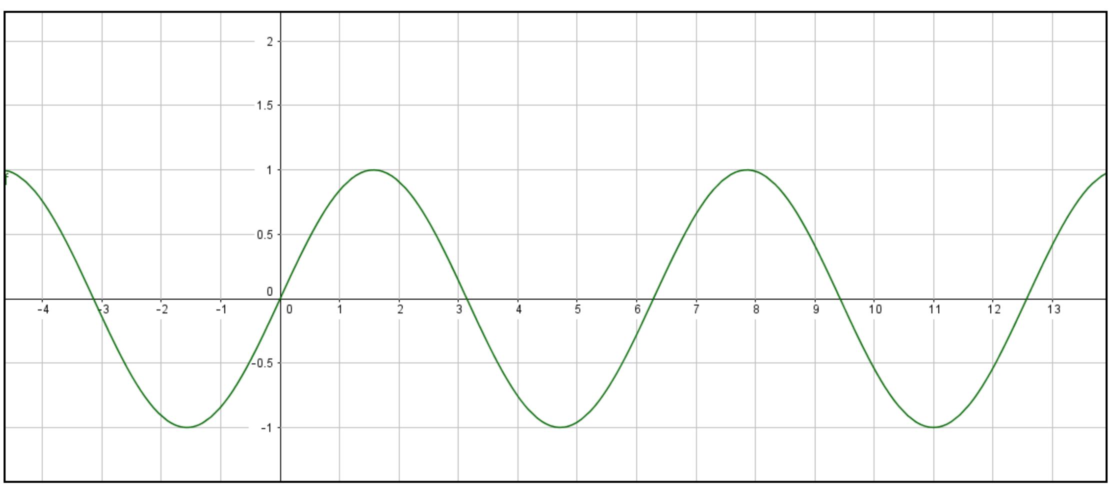
Tratamiento en el registro gráfico. En el plano cartesiano mostrado en la Figura 18 se presenta la gráfica de la función "$f(x) = sen\ x$" para un dominio determinado:

Figura 18. Representación gráfica de la función Seno (Dominio restringido)



Una transformación de dicha representación permitiría ampliar el dominio en que dicha gráfica se presenta en el plano cartesiano, pasando de observar un comportamiento local a un comportamiento global de la función:

Figura 19. Representación gráfica de la función Seno



2.4.4.2 Conversión de representaciones de objetos matemáticos. De manera similar a como se definió el tratamiento de representaciones de objetos matemáticos, a partir de los términos introducidos por Duval[103] podremos entender por conversión a cualquier transformación de la representación inicial del objeto matemático cuando dicha transformación produce una representación en un registro diferente al de la representación inicial. Es de notar que existen grandes diferencias en realizar una transformación de conversión de un registro A a un registro B y hacer una transformación de conversión en el sentido inverso. De esta manera y teniendo en cuenta los registros de representación considerados en esta investigación, podemos establecer que existen veinte acciones de conversión, que serán ejemplificadas a continuación:

Conversión del registro simbólico motriz al registro del lenguaje natural. Los movimientos de las manos del estudiante representando un crecimiento de una función en un determinado intervalo se convierten al lenguaje natural cuando éste expresa palabras como “asciende”, “crece”, “aumenta”; de manera similar se pueden asociar otras palabras y frases del lenguaje natural como “decrece”, “disminuye”, “baja”, “cóncava”, “convexa”, “se repite”, “forma un arco” para describir el comportamiento de una función que previamente se ha representado mediante un movimiento con las manos o los brazos.

Conversión del registro simbólico motriz al registro algebraico. Las acciones de crecimiento o decrecimiento de una función o parte de ella que pueden ser expresadas con el movimiento de manos y brazos son a menudo asociadas con los signos de la pendiente de una función lineal (cuando ya se tiene el conocimiento de dichos aspectos) o el comportamiento periódico representado por una secuencia de ondulaciones de las manos se traduce o se asocia con el comportamiento senoidal o cosenoidal.

[103] DUVAL, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, 2004.

Conversión del registro simbólico motriz al registro tabular. Así como en la conversión anterior las acciones de crecimiento y decrecimiento son asociadas con los signos de la pendiente de la función lineal, de la misma forma pueden asociarse valores particulares para el comportamiento de una función, cuando esta ya ha sido descrita mediante el movimiento de las manos, aun mucho más cuando estos movimientos representan una ondulación y alcanzan un punto máximo o uno mínimo.

Conversión del registro simbólico motriz al registro gráfico. De manera aún más natural que las conversiones anteriores, los movimientos de los brazos o las manos son plasmados de forma idéntica en un plano cartesiano, generando una representación en el registro gráfico que corresponde al comportamiento de una función.

Conversión del registro del lenguaje natural al registro simbólico motriz. Para el enunciado que se encuentra en la Figura 20, el estudiante incluso antes de razonar si el hecho de que ambas magnitudes aumenten le indica una proporcionalidad directa puede plantear una representación gestual que evidencia para sí mismo ese hecho, con un movimiento ascendente que le representa el comportamiento de las dos magnitudes.

Figura 20. Representación en lenguaje natural de un comportamiento funcional

> A medida que la temperatura aumenta también aumenta el volumen del gas.

Conversión del registro del lenguaje natural al registro algebraico. Este tipo de transformación se presenta en una situación como la mostrada en la Figura 21.

Figura 21. Representación en el lenguaje natural de una situación contextualizada

1.1 Una jugadora se golpeó en una rodilla jugando al voleibol y su médico prescribió un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Tenía que tomar 2 tabletas de 220 miligramos cada 8 horas durante 10 días. Si sus riñones filtraban un 60% del medicamento de su cuerpo cada 8 horas, contesta:

a) ¿Qué cantidad quedaba en su sistema circulatorio al cabo de los 10 días? **Justifica** tu respuesta.
b) ¿Y si hubiera tomado la medicina durante un año? **Justifica** tu respuesta.
c) ¿Qué ocurre con la variación de la cantidad de medicamento en el organismo conforme pasa el tiempo? **Justifica** tu respuesta.

Para responder el primer y el segundo cuestionamiento el estudiante puede valerse de diferentes estrategias que lo pueden llevar a hacer diferentes transformaciones de la representación en lenguaje natural, tanto tratamientos como conversiones. Para poder responder el literal c a partir de la información extraída del enunciado el estudiante debería obtener la expresión algebraica (sucesión) que modela la variación del medicamento en el cuerpo al transcurrir el tiempo. Ya sea que el estudiante seleccione la información relevante para obtener la sucesión que modela la situación o bien que enuncie la misma sin seleccionar previamente la información, estará haciendo una conversión del registro del lenguaje natural al registro algebraico.

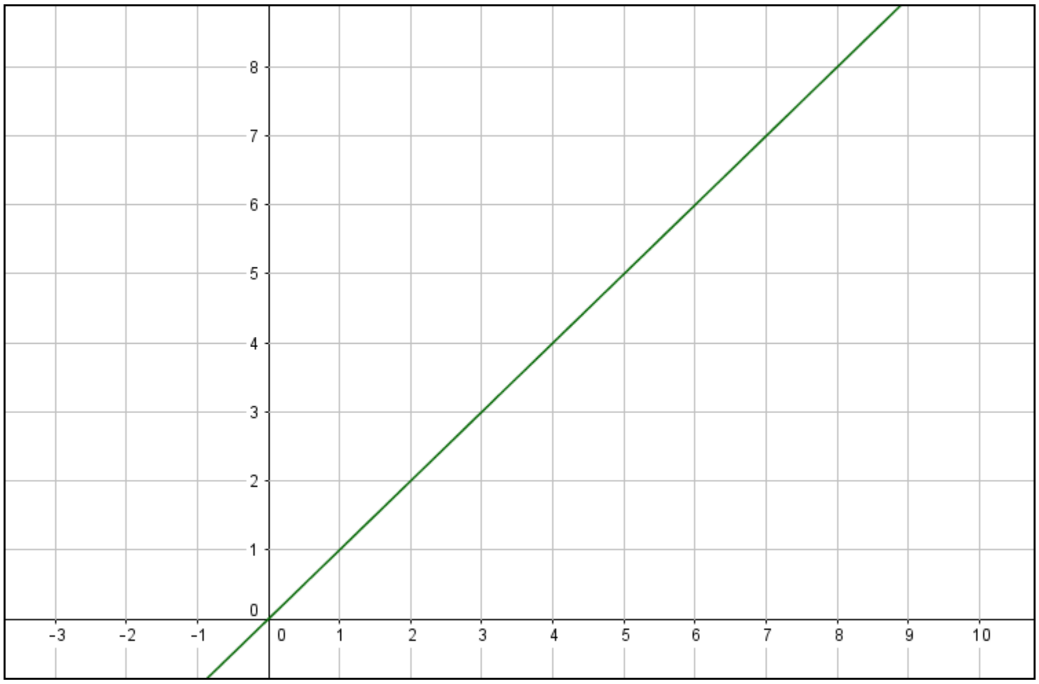
Conversión del registro del lenguaje natural al registro tabular. Expresiones como "sube hasta…", "baja hasta…", "por mucho alcanza hasta…" permiten realizar una asociación de la representación en lenguaje natural con valores determinados que pueden formar parte de la representación en el registro tabular. De la misma forma una estimación de valores para una situación que no está determinada por una expresión algebraica sino por un enunciado verbal también estará considerado como una conversión al registro tabular.

Figura 22. Relación funcional representada en el registro del lenguaje natural

A medida que la temperatura aumenta también aumenta el volumen del gas.

Conversión del registro del lenguaje natural al registro gráfico. De manera similar a como se realiza la conversión del registro del lenguaje natural al registro simbólico motriz, al plasmar este comportamiento en un plano cartesiano obtendríamos una conversión entre el registro del lenguaje natural y el registro gráfico

Figura 23. Representación gráfica obtenida a partir de la Figura 21



Conversión del registro algebraico al registro simbólico motriz. Cuando existe en el estudiante un reconocimiento de las representaciones en el registro algebraico de los objetos matemáticos más comunes y previo a la construcción de una representación en el registro gráfico, es muy común que ellos en su intención de validar su conocimiento o de comunicar a sus pares el procedimiento a realizar, muevan sus extremidades indicando ya sea la concavidad de la parábola, el crecimiento o decrecimiento de la función lineal o la ondulación senoidal o cosenoidal que se aprestan a representar en el plano cartesiano.

Figura 24. Relaciones funcionales representadas en el registro algebraico

$$y = 2x \quad y = 3x \quad y = 4x$$

Conversión del registro algebraico al registro del lenguaje natural. Expresiones como “el doble de…”, “el triple de…”, “cuatro veces eso…” son utilizadas para representar en el registro del lenguaje natural expresiones como las mostradas en la **¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** y que se encuentran en el registro algebraico.

Conversión del registro algebraico al registro tabular. Esta transformación entre el registro algebraico y el registro tabular corresponde a la actividad en la que, dependiendo el tipo de objeto matemático con el que se esté trabajando, a partir de una expresión algebraica (sea esta una función o un límite) se toma la variable (o una de ellas) y se le asigna un conjunto de valores para, mediante cálculos aritméticos, obtener el valor o valores de la otra variable.

Figura 25. Uso del registro tabular numérico a partir de una representación algebraica

Calcular el valor del siguiente límite:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1}$$

x	0,9	0,99	0,999	1	1,001	1,01	1,1
$f(x)$	2,710	2,970	2,997		3,003	3,030	3,310

En el caso de la Figura 25 se ha utilizado una conversión entre el registro algebraico y el registro tabular para poder determinar el valor del límite pedido o realizar una aproximación a él.

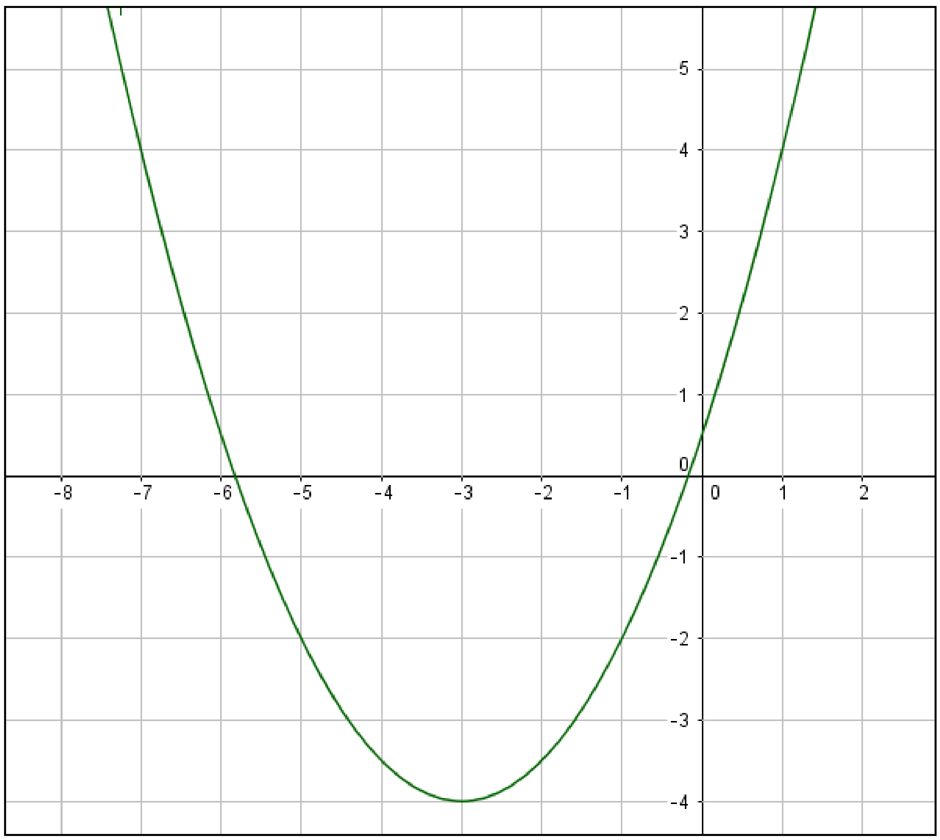
Conversión del registro algebraico al registro gráfico

Figura 26. Representación algebraica de una función cuadrática

En tu hoja de trabajo representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{2}(x + 3)^2 - 4$.

En esta actividad se pide específicamente realizar una transformación de conversión entre el registro algebraico y el registro gráfico, lo cual dará una representación como la mostrada en la Figura 27:

Figura 27 .Representación gráfica obtenida por conversión de la representación en la Figura 25



Si bien, este tipo de transformación es de uso común en las aulas, es de notar que por el tipo de enseñanza que los estudiantes reciben, la conversión entre el registro algebraico y el registro gráfico está mediada por una conversión al registro tabular, lo que en términos de Duval (2004) correspondería al uso de una representación intermediaria como puente entre dos registros de representación.

Conversión del registro tabular al registro simbólico motriz. A partir de una tabla de valores en el que se presenta el comportamiento de una función, se solicita al estudiante que realice la representación gráfica de la misma, aunque la actividad solicita una conversión específica el estudiante puede, previamente a la realización de la gráfica sobre su hoja de trabajo, introducir otra representación (en este caso en el registro simbólico motriz) como un gesto con sus manos que le dé indicios del comportamiento de la función a graficar: un movimiento ascendente o descendente para indicar el crecimiento o decrecimiento, un círculo para indicar un valor que no se encuentra incluido dentro del dominio de la función o "*un gesto ondulatorio con sus manos para referirse a la periodicidad de la función*"[104]

Conversión del registro tabular al registro del lenguaje natural. La interpretación del registro tabular numérico respecto a la forma como varían dos magnitudes puede conllevar a que se exprese en lenguaje natural la relación funcional que existe entre ellas. Al observar la Figura 28, se podría esperar como representación en el registro del lenguaje natural una expresión como: "A medida que el recorrido en kilómetros aumenta la cantidad de litros de combustible también aumenta"

Figura 28. Representación en el registro tabular presentada en una de las actividades del curso

Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0,14	0,21	0,31	0,46	0,55	0,64	0,78	0,83	0,99	1,10	1,20	1,33	1,43	1,52	1,67

[104] MORENO, Luis. *Educación Matemática: del signo al píxel*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. 2014. P. 147

Conversión del registro tabular al registro algebraico. Una situación de cambio y variación presentada en el registro tabular se muestra en la Figura 29.

Figura 29. Representación tabular numérica para una situación contextualizada

1.1 La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina en litros de un vehículo Toyota Corolla que recorre la ciudad de Bogotá en las horas pico.

Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0,14	0,21	0,31	0,46	0,55	0,64	0,78	0,83	0,99	1,10	1,20	1,33	1,43	1,52	1,67

La actividad específica la necesidad de la conversión desde el registro tabular presentado al registro algebraico tal y como se muestra en la Figura 30 que acompaña a la situación antes presentada:

Figura 30. Cuestionamiento para la actividad mostrada en la Figura 28

d) ¿Cuánto combustible se esperaría que consuma el vehículo si se dispone a recorrer x km en hora pico? **Justifica** tu respuesta.

A partir de los datos presentados en el registro tabular numérico se debe generar una expresión algebraica que modele el comportamiento del consumo de gasolina con respecto a los kilómetros recorridos.

Conversión del registro tabular al registro gráfico. Aunque la mayoría de las transformaciones de conversión carecen de unas reglas explicitadas que permitan o faciliten el cambio de registro, en este tipo de transformación existe una regla general "*la regla que asocia un punto del plano con una dupla de números, lo que permite construir con un procedimiento muy simple las representaciones gráficas*"

(Duval[105]). Así a partir de una representación tabular numérica la conversión de esta al registro gráfico pasa por dicho proceso de asociación.

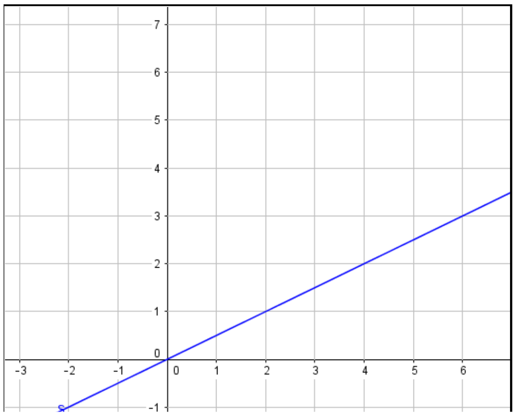
Ahora bien, el hecho de existir una regla “eficaz” para realizar esta conversión no garantiza del todo la eficacia de la misma, pues como el mismo Duval (2004) lo dice esta conversión refleja un comportamiento local del objeto matemático a tratar.

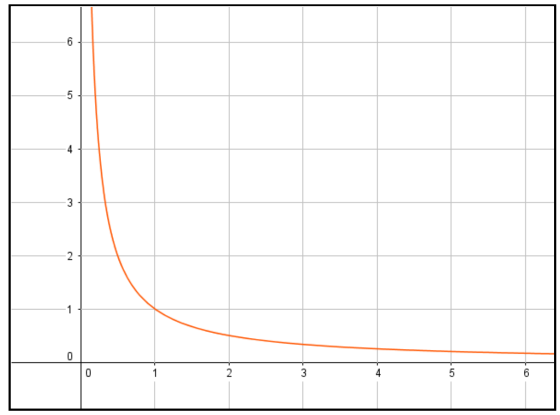
Conversión del registro gráfico al registro simbólico motriz. Una conversión del registro gráfico al registro simbólico motriz conlleva a que el estudiante represente con su cuerpo, generalmente en movimientos de sus manos la figura que le provee el registro gráfico. Este tipo de transformación podría ser considerado simplemente como un gesto de imitación o particularización de la representación gráfica dada, debido a la simplicidad implícita de la misma conversión. Sin embargo, una verdadera actividad de conversión entre estos registros se produce cuando el estudiante puede a través de sus gestos generalizar el comportamiento del objeto matemático más allá de lo que le permite visualizar la representación en el registro gráfico.

Conversión del registro gráfico al registro del lenguaje natural. En situaciones como las mostradas en la Figura 31, las representaciones en registro gráfico pueden ser asociadas con las siguientes representaciones en lenguaje natural:

Figura 31. Representaciones en el registro gráfico para situaciones funcionales

[105] DUVAL, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, 2004. P. 47

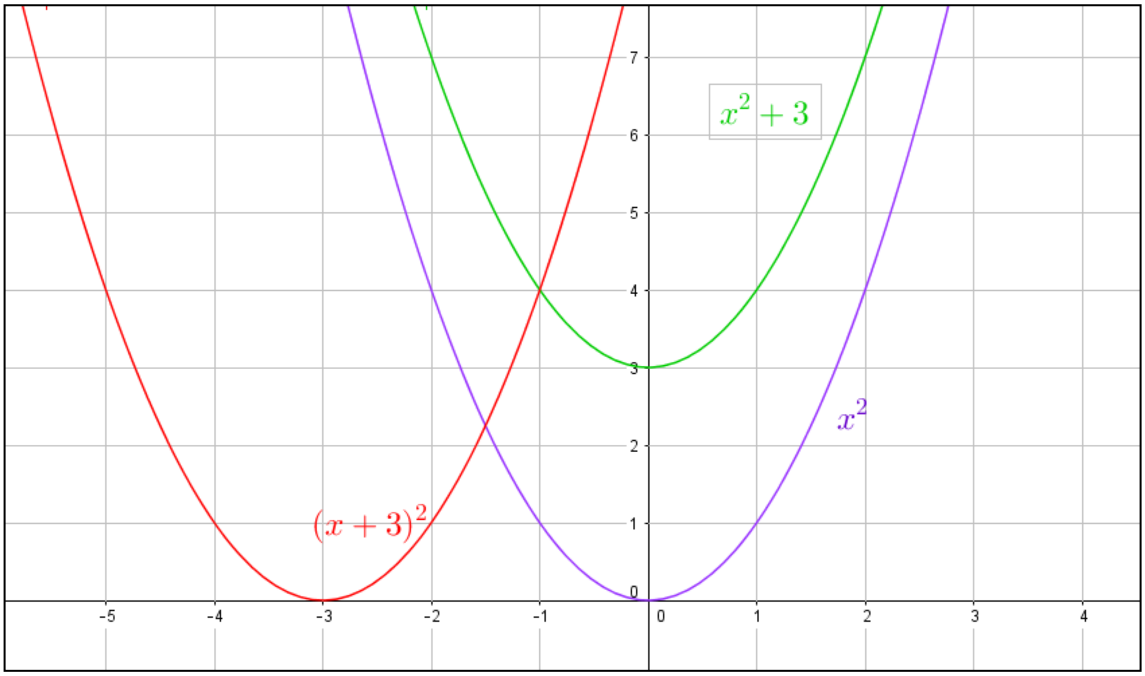




"A medida que la una aumenta la otra también, las magnitudes son directamente proporcionales", "a medida que la una aumenta la otra disminuye, las magnitudes son inversamente proporcionales"

Conversión del registro gráfico al registro algebraico. En la Figura 32 se presentan tres representaciones de funciones en el registro gráfico, cada una con su correspondiente representación en el registro algebraico, esta actividad de conversión se realiza cuando se tienen claros determinados parámetros que permiten asociar las unidades significantes del registro gráfico con las unidades significantes del registro algebraico.

Figura 32. Representaciones de funciones cuadráticas en el registro gráfico



En términos de Duval para efectuar esta conversión, dada su dificultad, es necesario que se hayan "*resaltado los diferentes valores posibles de las variables visuales pertinentes en el registro gráfico y haberlos puesto en relación con los símbolos correspondientes en la escritura algebraica*" (2004, p.48)

Conversión del registro gráfico al registro tabular. Esta es una tarea de lectura de coordenadas que está mediada por la regla que permite hacer la conversión en el orden inverso, la asociación de un punto del plano con una dupla de números. Hay que acotar que la diferencia entre esta conversión y el tránsito inverso radica en la identificación de coordenadas en la que uno de los valores (o los dos) de las mismas no sea entero o incluso sea un irracional.

Vale la pena aclarar que las transformaciones tanto de conversión como de tratamiento aquí referidas no se dan únicamente usando el lápiz y el papel, sino que también se dan mediante el uso del software, que se convierte en este caso en un facilitador de las tareas de tratamiento y conversión.

2.4.5 Coordinar representaciones de los objetos matemáticos. Para Duval la coordinación entre diferentes registros de representación semiótica es uno de los tres fenómenos que enfrenta "*el análisis del desarrollo de los conocimientos y los aprendizajes fundamentales relativos al razonamiento y a la adquisición de tratamientos lógicos y matemáticos*" (2004, p.30). Así el conocimiento de las reglas de correspondencia (cuando estas existan o estén explicitadas) entre dos registros de representación no garantiza que los registros puedan ser movilizados o usados de manera conjunta.

La coordinación de representaciones conlleva finalmente a que una o más representaciones de un objeto matemático funcionen verdaderamente como representación permitiéndole al individuo el acceso al objeto representado, con la conciencia total de la diferencia entre el objeto y la representación. Así mismo, esta coordinación entre representaciones se produce cuando el individuo es capaz de determinar, de manera espontánea y siendo consciente del tipo de información que cada representación de un objeto matemático le brinda, cuál o cuáles de los registros de representación son más útiles al momento de dar solución a una situación, para nuestro caso particular una situación de cambio y variación:

> Una persona con una buena coordinación de registros podría resolver situaciones matemáticas trabajando en un solo registro, no porque no pueda emplear otros, sino porque decidió que la manera más eficiente de llegar a la solución es trabajar en ese único registro, considerando los datos que tiene, los tratamientos que podría realizar en los diferentes registros y la solución a la que desea llegar. De esta manera no se requiere la utilización hacia el exterior de representaciones de los registros coordinados en la situación que se esté tratando.[106]

[106] RAMÍREZ, Osiel; ROMERO, César Fabián; OKTAÇ, Asuman. Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. En A. Ramírez e Y. Morales (Eds.), *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (pp. 537-547). Santo Domingo: ICEMACYC. 2013. P.6.

2.4.5.1 Ejemplos de acciones de coordinación. En la Figura 33 se muestra una situación de cambio y variación:

Figura 33. Situación contextualizada presentada mediante el registro del lenguaje natural

SITUACIÓN PROBLEMA

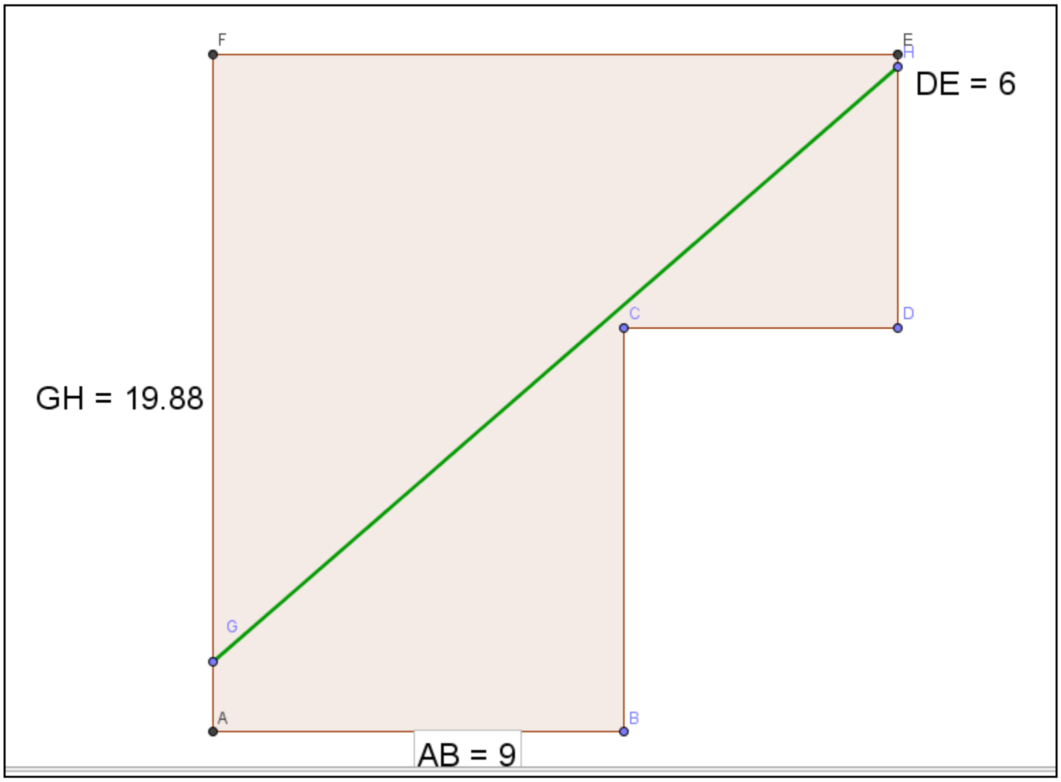
Actividad 1.1

Se está transportando un tubo de acero por un pasillo de 9 pies de ancho. Al final de éste existe una vuelta en ángulo recto hacia otro pasillo más angosto de 6 pies de ancho. Teniendo en cuenta que el tubo se debe transportar de manera horizontal, ¿Cuál es la longitud del tubo más largo que se puede hacer pasar por la esquina?

Al presentar este tipo de situaciones a un estudiante se esperaría, por la forma tradicional de enseñanza, que la respuesta sea obtenida mediante un proceso completamente algorítmico, es decir utilizando una representación algebraica de la función que representa la longitud del tubo y luego una representación algebraica de la derivada de dicha función; claro está que este problema generalmente se presenta en los libros de texto con una representación geométrica que permite visualizar las relaciones a partir de las cuales se plantea la solución algebraica.

Un estudiante que sea capaz de coordinar representaciones de los objetos matemáticos podría bien escoger las representaciones algebraicas tal y como se planteó en el párrafo anterior o bien hacer uso de una representación gráfica como la mostrada en la Figura 34 (en particular una representación digital) que le muestre la solución a la situación planteada sin necesidad de realizar las transformaciones al registro algebraico.

Figura 34. Representación gráfica ejecutable



Para cerrar este capítulo debemos mencionar que las categorías *a priori* que aquí han sido explicitadas serán las utilizadas en un inicio para el análisis de los datos emergentes, ahora bien debemos considerar la posibilidad que en dicho análisis puedan surgir nuevas categorías u otras acciones que no hemos considerado en esta categorización previa, pero que den cuenta de las categorías ya descritas.

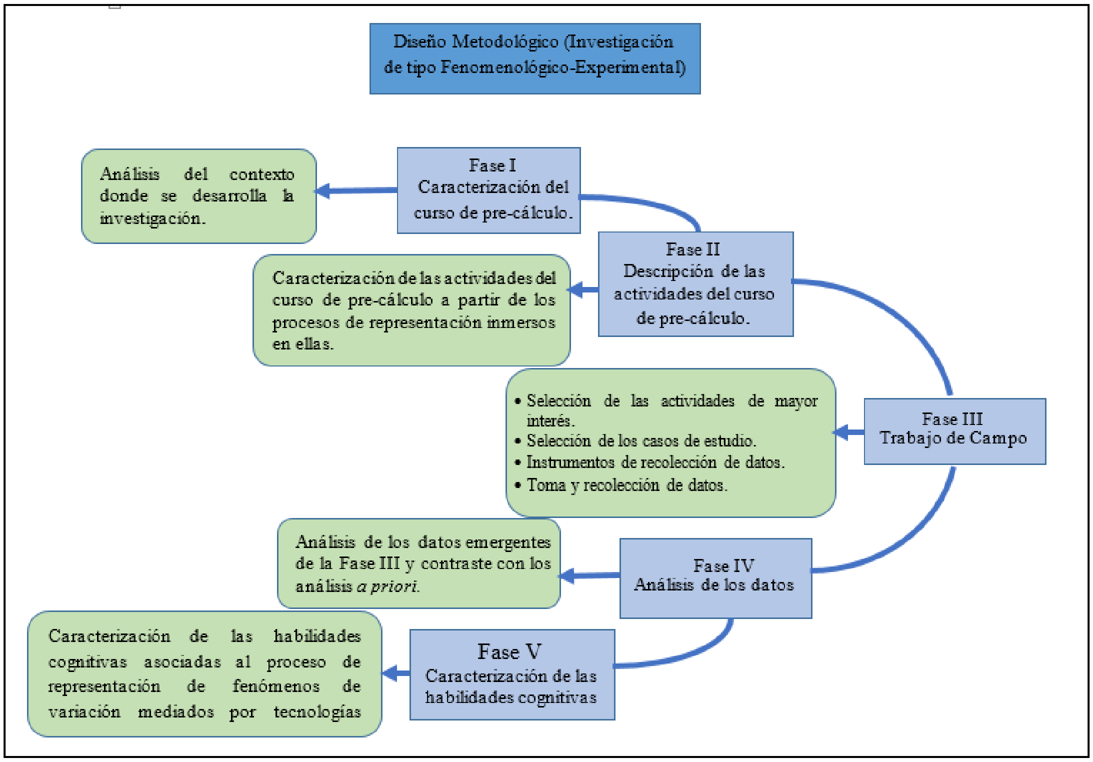
3. METODOLOGÍA

En el presente capítulo se describe el diseño metodológico de la investigación que aquí se reporta, la cual es de corte fenomenológico y de tipo experimental. Para el análisis de los datos se empleó una metodología cualitativa que nos permitiera acercarnos de manera más fidedigna a las formas de pensamiento de los estudiantes, a fin de poder caracterizar las habilidades asociadas que son objetivo de esta investigación.

El capítulo describe las fases realizadas en la investigación, los instrumentos de recolección de datos, los casos de estudio y las actividades realizadas en el curso laboratorio de pre-cálculo, descrito con anterioridad, que han sido tenidas en cuenta para la toma de los datos.

El procedimiento metodológico responde a cinco fases que inician con la caracterización del curso de pre-cálculo en el cual se encuentra inmersa esta investigación y finaliza con la caracterización de las habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación tal como se puede observar en la Figura 35. A continuación presentamos un desglose de las fases:

Figura 35. Estructura de la metodología de Investigación



3.1 FASE 1. CARACTERIZACIÓN DEL CURSO DE PRE-CÁLCULO

Para caracterizar el curso de pre-cálculo que realiza la Escuela de Matemáticas, en coordinación con el programa ASAE y el Sistema de Apoyo a la Excelencia Académica, retomamos algunos planteamientos presentados por Moreno[107] en una investigación que fue desarrollada dentro del mismo contexto. Este autor nos menciona que inicialmente el curso de pre cálculo fue desarrollado con una metodología tradicional entre los años 2009 y 2012, siguiendo el repaso de definiciones, propiedades y teoremas. Para el año 2013 se establece un cambio de

[107] MORENO, Daniel. *Procesos de interpretación y acción de profesores que participan en una comunidad de práctica en la que se realiza el diseño curricular de un curso de precálculo.* Trabajo de grado Magíster en Educación Matemática. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2015, 185 p.

paradigma a partir de las reflexiones de la comunidad de práctica que se estableció alrededor de la realización del curso.

Como se menciona en secciones anteriores de este escrito y acorde con lo planteado por Fiallo y Parada[108] el propósito del curso es:

> […] coadyuvar en el desarrollo del pensamiento matemático-variacional, orientando el trabajo en el aula como un proceso activo de resolución de problemas y con la mediación de artefactos digitales. Dicho trabajo diseñado alrededor de las dos ideas centrales del Cálculo: el cambio y la variación.[109]

De acuerdo a este nuevo paradigma en el que el trabajo en el aula está basado en un proceso de resolución de problemas, se diseñaron trece situaciones contextualizadas que son presentadas a los estudiantes en cada una de las sesiones de trabajo[110]. Estas actividades han sido modificadas, rediseñadas o reemplazadas en el transcurso de las diferentes versiones del curso de pre-cálculo a fin de resaltar diversos aspectos del desarrollo del pensamiento variacional que son el objetivo del citado curso.

Cabe resaltar que inicialmente el diseño de las actividades fue realizado a partir de situaciones o problemas típicos que se presentaban en los libros de texto, sin dejar de lado referentes teóricos al respecto, pero poco a poco se han ido modificando teniendo en cuenta un enfoque en el que las representaciones digitales mediadas

---

[108] FIALLO, Jorge. & PARADA, Sandra Evely. Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento varacional. *Revista Científica*, 2014, no 20, p. 56-71.

[109] MORENO, Daniel. *Procesos de interpretación y acción de profesores que participan en una comunidad de práctica en la que se realiza el diseño curricular de un curso de precálculo.* Trabajo de grado Magíster en Educación Matemática. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2015, 185 p.

[110] La cantidad de actividades ha variado entre 13 y 15 en las diferentes versiones del curso.

por el software GeoGebra se convierten en el medio para potencializar el desarrollo del pensamiento matemático-variacional.

3.1.1 Desarrollo de las actividades a Lápiz y papel. Gran parte de las actividades están planteadas para que el estudiante realice un primer acercamiento a la situación o problema planteado haciendo uso de los mismos recursos con los que cuenta en una clase tradicional de cálculo: lápiz y papel. En este primer acercamiento se busca que el estudiante ponga en juego sus pre-saberes y trate de solucionar la situación planteada con los conocimientos que han sido fruto del aprendizaje durante su educación básica y media.

Como producto de este primer acercamiento se puede constatar en la gran mayoría de los casos que son predominantes los aspectos algebraicos al momento de afrontar un determinado ejercicio, de manera que las representaciones más influyentes son la algebraica y en menor medida la gráfica.

Luego de esta primera aproximación a los estudiantes se les permite trabajar con un mediador semiótico (en los términos de Moreno[111]) con el fin de que puedan visualizar diferentes representaciones de la situación contextualizada que se está trabajando en la actividad.

3.1.2 Uso de tecnologías digitales. Todas las actividades del curso están diseñadas para que los estudiantes interactúen con una representación digital de la situación inicialmente planteada para el trabajo a lápiz y papel. Dicha representación digital es presentada al estudiante mediante el software GeoGebra.

[111] MORENO, Luis. *Educación Matemática: del signo al píxel*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. 2014

Retomamos una descripción del software que podemos encontrar en la web: GeoGebra es un software matemático interactivo de carácter libre, para la enseñanza y aprendizaje de geometría, álgebra y cálculo. El software está orientado a niveles de educación básica, educación media y educación a nivel universitario.

GeoGebra ofrece diferentes vistas para los objetos matemáticos como son la Vista Algebraica, Vista gráfica, Vista gráfica 3D, Vista CAS y Hoja de cálculo. Estas vistas hacen posible mostrar al estudiante diferentes representaciones de los objetos matemáticos y les permite a ellos observar las transformaciones entre las diferentes representaciones de los objetos matemáticos (Figura 36 y Figura 37).

Además de las características ya descritas, el software le posibilita al estudiante visualizar diferentes relaciones que se establecen entre las magnitudes que varían en las situaciones planteadas. Las representaciones se vuelven maleables y son producto de co-acciones entre el usuario y el medio, todo esto posible mediante los diferentes comandos del software (como Rastro, Lugar Geométrico, Registro en Hoja de Cálculo) que le proporcionan al estudiante la percepción de propiedades que en una representación estática no es posible.

Figura 36. Representación de una función cuadrática en las vistas Algebraica, Gráfica y Hoja de cálculo del software GeoGebra

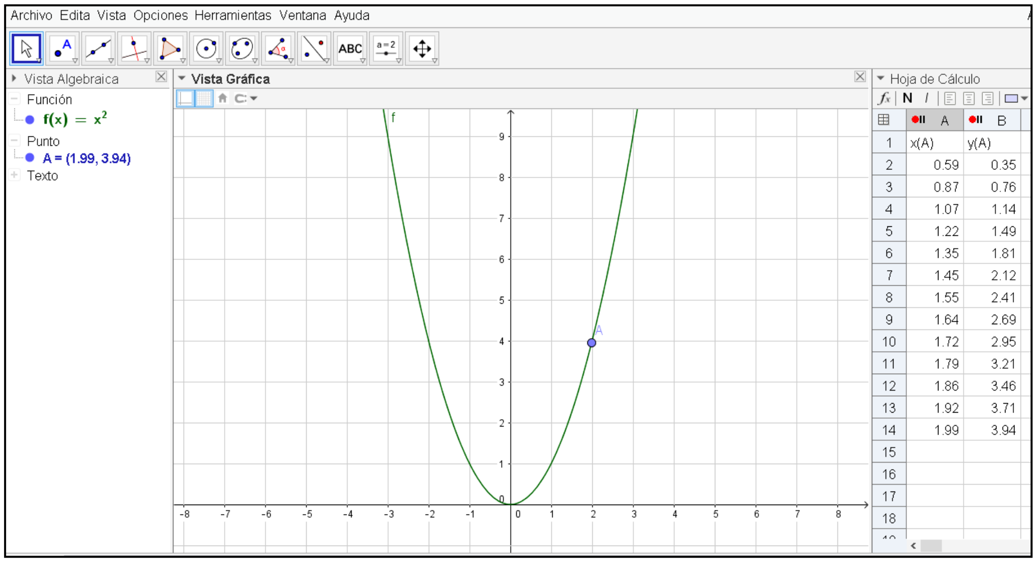
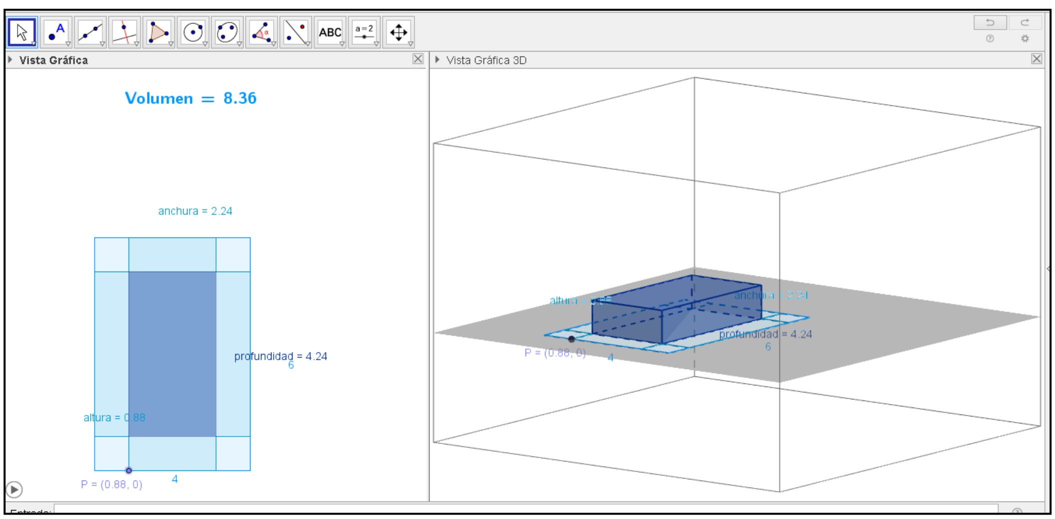
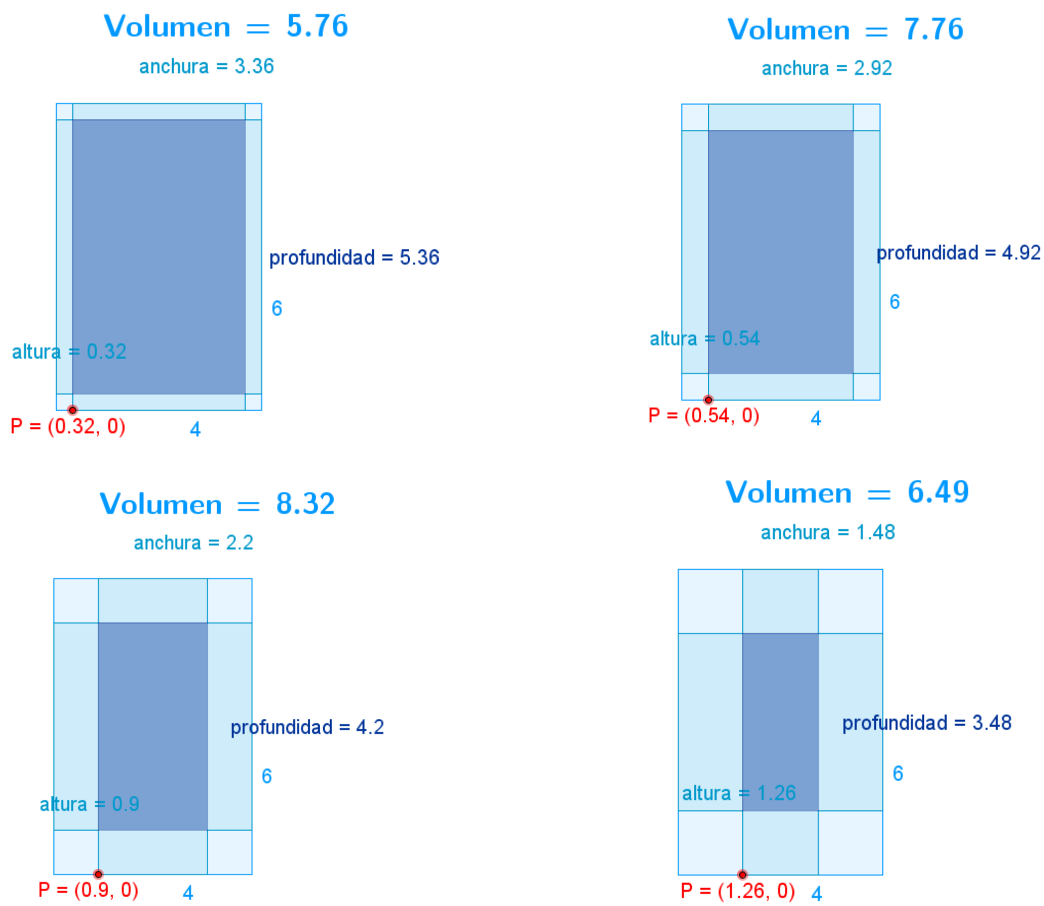


Figura 37. Situación problema presentada al estudiante en las vistas gráfica y gráfica 3D del software GeoGebra



Situaciones como la mostrada en la Figura 38, en la cual se modifica la posición del punto “P” usando el arrastre (con el mouse o con las flechas del teclado), facilitan que el estudiante visualice las magnitudes que permanecen constantes, así como el cambio y la variación de otras magnitudes allí involucradas, teniendo como referencia una representación gráfica no cartesiana de la situación presentada.

Figura 38. Variación de las magnitudes involucradas a partir del Arrastre sobre el punto “P”



3.2 FASE 2: ACTIVIDADES DEL CURSO USADAS EN EL ESTUDIO

Es de nuestro interés particular observar las características de las actividades del curso de pre-cálculo, centrándonos en los procesos de representación que se pueden ver involucrados en la solución de las situaciones contextualizadas presentadas allí. A continuación presentamos una descripción de las actividades desarrolladas en la versión del curso que han sido tomadas como fuente de datos para la investigación que aquí se reporta:

3.2.1 Actividad Tres: Sucesiones. La actividad tres inicia con una representación en lenguaje natural (ver Figura 39) donde se presenta al estudiante una situación problema para el cual debe determinar algunos comportamientos puntuales y luego debe generalizar el comportamiento de la magnitud que allí varía.

Figura 39. Situación contextualizada presentada en la Actividad 3 del curso

FILTRACIÓN DE MEDICAMENTO

Actividad 1

1.1 Una jugadora se golpeó en una rodilla jugando al voleibol y su médico prescribió un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Tenía que tomar 2 tabletas de 220 miligramos cada 8 horas durante 10 días. Si sus riñones filtraban un 60% del medicamento de su cuerpo cada 8 horas, contesta:

Se espera que el estudiante pueda inicialmente determinar comportamientos puntuales haciendo uso de una representación tabular numérica y luego pueda describir el comportamiento general de la cantidad de medicamento en el cuerpo al transcurrir el tiempo, bien sea que para ello utilice una representación gráfica, una representación en lenguaje natural o una representación algebraica.

Luego de esta primera parte de la actividad se le presenta al estudiante una representación digital en GeoGebra de la situación planteada al inicio de la actividad mediante la cual el estudiante puede verificar o reevaluar las inferencias realizadas en la primera parte.

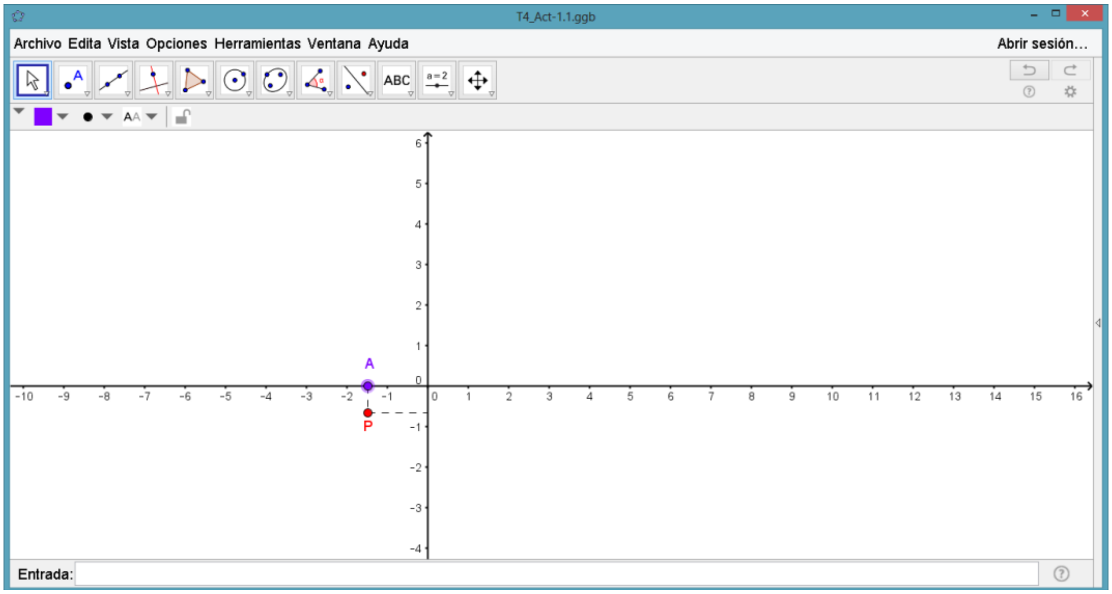
Finalmente se le presenta al estudiante un archivo Flash Player llamado “Cuerdas Vibrantes”[112] mediante el cual se explora una situación donde las magnitudes son inversamente proporcionales y se pide encontrar una representación gráfica para la situación descrita.

Esta es la primera actividad en la que el estudiante recurre a una multiplicidad de representaciones para contestar los cuestionamientos realizados, es además la primera de las actividades donde se presenta una situación de variación a partir del registro en lenguaje natural.

3.2.2 Actividad Cuatro: Interdependencia. A diferencia de la anterior esta actividad inicia con una representación digital en GeoGebra (Figura 40). Se muestran dos puntos y luego del uso de los comandos Rastro y Lugar Geométrico se pide establecer la relación existente entre los puntos “A” y “P”; esta relación es generalmente expresada por los estudiantes usando una representación en lenguaje natural o en el registro simbólico motriz. Luego se le pide al estudiante convertir esta representación en una representación algebraica para después, haciendo uso del software, obtener una representación gráfica a fin de compararla con la representación gráfica dada inicialmente mediante los comandos Rastro y Lugar Geométrico.

Figura 40. Representación digital con la cual inicia la Actividad 4 del curso

[112] Una explicación más detallada de la actividad Cuerdas Vibrantes puede ser encontrada en Conde, Parada y Fiallo (2014).



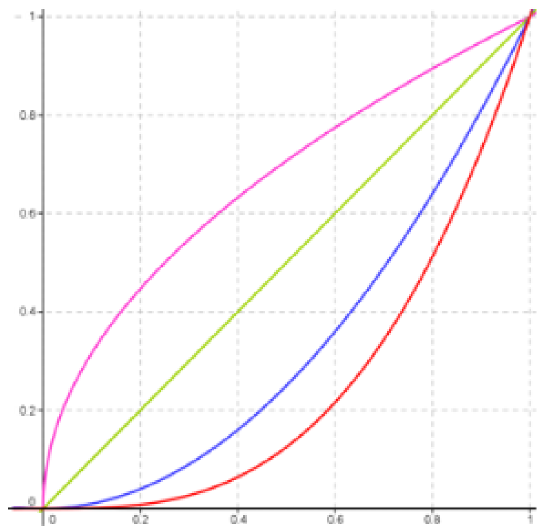
En uno de los ítems de esta actividad se pregunta a los estudiantes la relación existente entre las representaciones en los diversos registros algebraico, gráfico y tabular para la situación presentada; siendo esta la primera situación en que se confronta al estudiante respecto al reconocimiento del objeto matemático (en este caso el objeto función) y las diferentes formas de representar dicho objeto.

Posteriormente se les presenta un archivo similar y con el reconocimiento realizado en la primera actividad del objeto función, se trabaja sobre las partes constitutivas de dicho objeto: la variable dependiente y la independiente, el dominio y el recorrido. Luego se le pide generalizar algunos comportamientos de dicha función a medida que crece o decrece una de las variables.

La actividad finaliza con una tarea de reconocimiento en la que se pide relacionar la representación gráfica de cuatro funciones con su representación algebraica (Figura 41).

Figura 41. Actividad de reconocimiento planteada en la Actividad 4 del curso

Relaciona la función que corresponde a cada gráfica y **justifica**.



$f(x) = \sqrt{x}$

$g(x) = x^3$

$h(x) = x^2$

$b(x) = x$

3.2.3 Actividad Cinco: Análisis de Datos. Se presenta a los estudiantes una situación contextualizada y se muestra la representación en el registro tabular numérico asociada a la situación. (Figura 42)

Figura 42. Situación contextualizada Actividad 5 del curso

ANÁLISIS DE INFORMACIÓN

Actividad 1

1.1 La siguiente tabla muestra el consumo de gasolina en litros de un vehículo Toyota Corolla que recorre la ciudad de Bogotá en las horas pico.

Recorrido (Km)	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
Consumo (Lt)	0,14	0,21	0,31	0,46	0,55	0,64	0,78	0,83	0,99	1,10	1,20	1,33	1,43	1,52	1,67

A partir de la información mostrada, se pide al estudiante determinar un comportamiento puntual para valores del recorrido que no se encuentran en la tabla, luego se le pide realizar una representación gráfica de la situación y realizar una generalización del comportamiento de la variable litros a medida que varía el recorrido. Esta última generalización se pide en el registro algebraico.

Después de realizar la primera parte de la actividad a lápiz y papel se le pide al estudiante que utilizando el software GeoGebra realice la gráfica considerada en la primera actividad y utilizando el comando Regresión verifique la función que más se ajusta al comportamiento mostrado en la tabla. Luego se le pide responder nuevamente algunas preguntas de las propuestas en la primera actividad.

Esta situación planteada en este ítem permite contrastar los aspectos que pueden determinarse a partir de las representaciones en los diferentes registros, en este caso el comportamiento puntual que es posible observar en el registro tabular numérico para un intervalo determinado y el comportamiento global que se puede observar en el registro gráfico. Además le permite al estudiante observar que para comportamientos puntuales como los que se presentan en la tabla es posible asociar varias representaciones tanto gráficas como algebraicas que modelan la situación planteada.

Para finalizar la actividad se plantean dos situaciones similares a partir del registro tabular numérico y se pide hallar la representación algebraica que más se ajuste a los datos allí planteados teniendo en cuenta el contexto de cada situación.

3.2.4 Actividad Seis: Transformación de Funciones. La actividad de transformación de funciones inicia con la presentación al estudiante de la representación en el registro algebraico de una función específica y se le pide al estudiante que haga la representación en el registro gráfico para dicha función (Figura 43).

Figura 43. Planteamiento de la Actividad 6 del curso

TRANSFORMACIONES DE FUNCIONES

Actividad 1

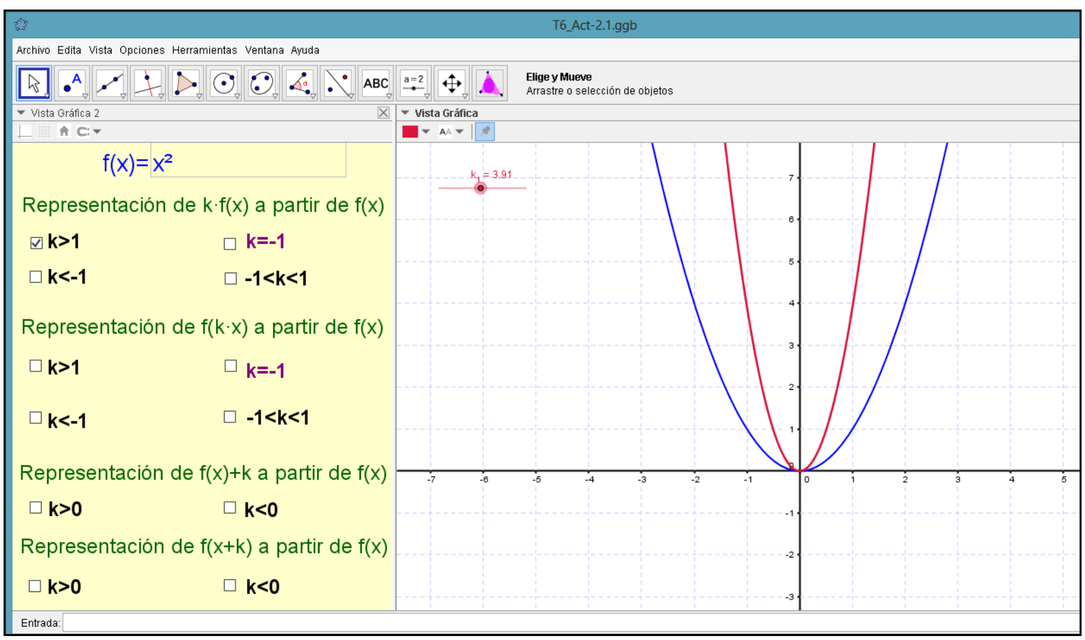
1.1 En tu hoja de trabajo representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$. **Explica** tu procedimiento.

1.2 **Discute** con tus compañeros y el profesor tu trabajo.

Una vez realizada la actividad a lápiz y papel se le presenta al estudiante una representación digital en GeoGebra (Figura 44) donde es posible modificar las unidades significantes de la representación gráfica de la función que se presenta allí, de manera que esa variación en la unidad significante pueda relacionarse con la variación de las unidades simbólicas correspondientes en la representación algebraica.

Esta actividad está enfocada en la tarea de conversión entre las representaciones en el registro algebraico y en el registro gráfico para el objeto función.

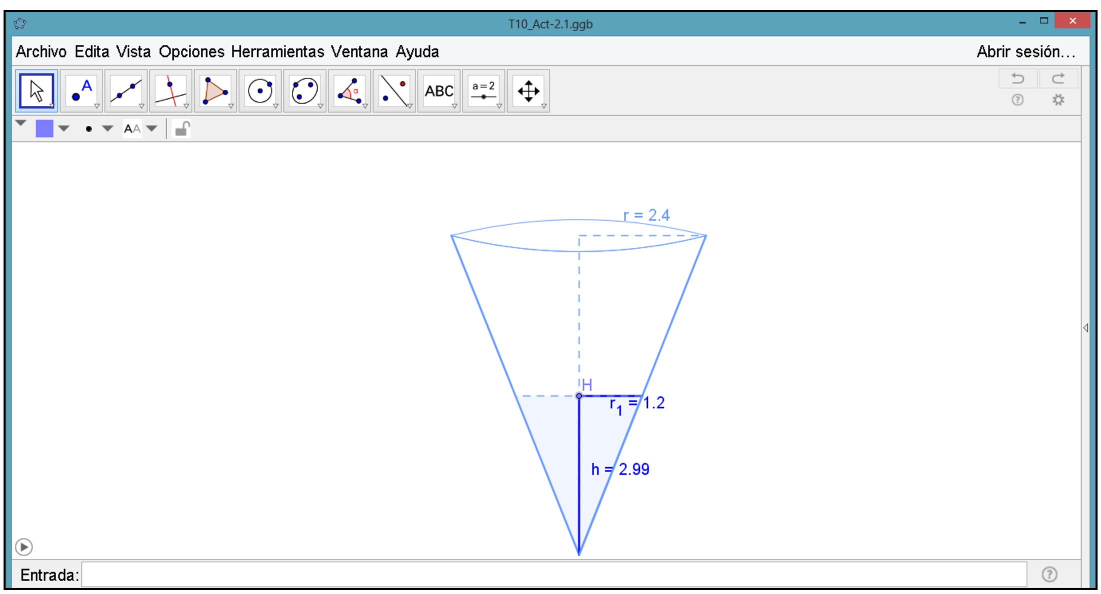
Figura 44. Representación digital con la que se realiza la Actividad 5 del curso



3.2.5 Actividad Diez: Recipientes. A diferencia de las otras actividades esta inicia con un trabajo manual por parte de los estudiantes, quienes deben construir un cilindro sin tapas a partir de una hoja tamaño carta, la idea de la tarea propuesta es que el cilindro tenga el mayor volumen posible. Los estudiantes deben realizar la construcción y justificar la elección respecto a formar el cilindro a lo largo o a lo ancho de la hoja.

Para continuar se les presenta una representación digital (Figura 45) en la que se simula el llenado de un cono con agua. La situación involucra tres magnitudes y se les pide a los estudiantes identificar cuáles son las magnitudes relacionadas, en que forma y entre que valores varían y la relación que existe entre las mismas. Luego se les pide hallar la función que representa la interdependencia entre el radio y el volumen y entre el nivel del agua y el volumen.

Figura 45. Representación digital de la situación planteada en la Actividad 10 del curso



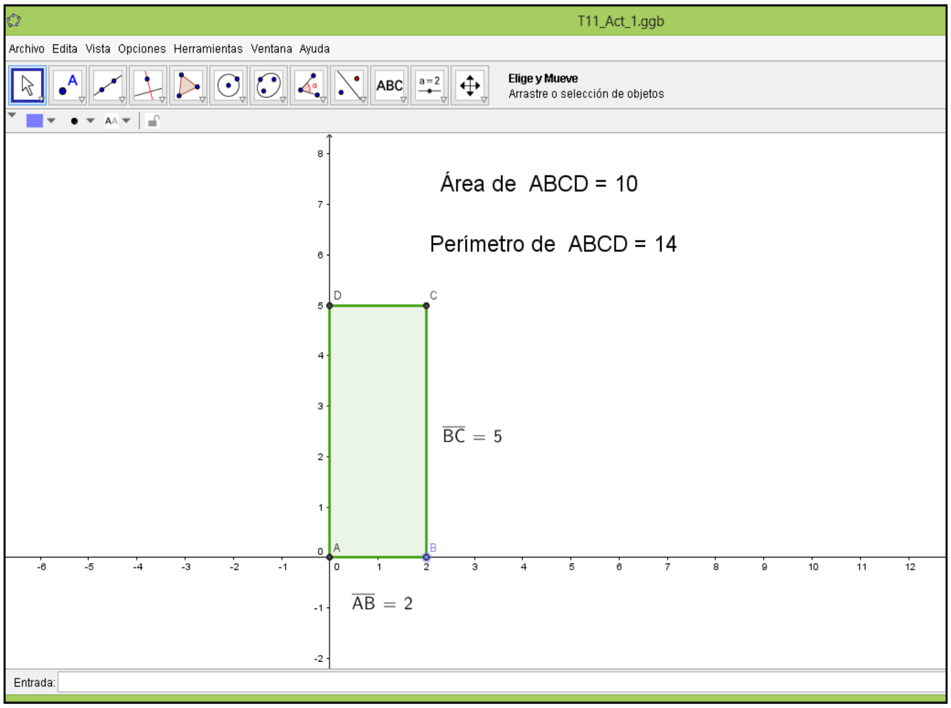
Ahora se parte de la representación digital (registro gráfico) y se pide realizar una conversión. Aunque se podría a través del software obtener la representación del comportamiento de las magnitudes en el registro tabular numérico y de allí obtener la representación algebraica, se espera que el estudiante pueda obtener representaciones en otros registros, especialmente el gráfico (en representación cartesiana) y el algebraico, a partir de la representación digital sin el uso de representaciones auxiliares.

3.2.6 Actividad Once: Máximo Rectángulo. Mediante la asignación de una tarea relativamente sencilla para el estudiante y con la presentación de la situación mediante el lenguaje natural, se le pide al estudiante obtener un rectángulo con la mayor área posible, a partir de la condición dada en que el perímetro es fijo.

Se asume que los estudiantes en este momento del curso ya cuentan con mayores recursos para plantear el ejercicio como una situación de cambio y variación para la cual disponen de diversos recursos y que ya han adquirido una cierta destreza para poder modelar la situación en los diversos registros de representación, a fin de conseguir resolver la problemática. Sin embargo la situación se presenta propicia para que los estudiantes busquen soluciones de maneras más empíricas.

Luego del desarrollo a lápiz y papel del ejercicio planteado se presenta una representación digital de la situación (Figura 46) en la que es posible manipular uno de los puntos para obtener el área máxima posible.

Figura 46. Representación digital de la situación planteada en la Actividad 11 del curso



Aquí se les pregunta a los estudiantes cuales son las magnitudes que varían, cuáles permanecen constantes, los valores que toman cada una de ellas y la relación que existe entre las mismas, y se les pide expresar una de las magnitudes en función de la otra.

Esta parte de la actividad se enfoca en el reconocimiento de magnitudes que varían a partir de una representación en el registro gráfico y luego le pide al estudiante expresar la función existente, sin ser específico cuál de los registros debe ser usado para ello; lo cual permite observar cuales son las representaciones más escogidas por los alumnos y examinar el porqué de dichas elecciones.

Finalmente se presenta una representación digital en GeoGebra haciendo que la actividad se enfoque en las representaciones gráfica y algebraica de la situación planteada inicialmente.

3.2.7 Actividad Doce: Caja. La actividad número doce se inicia con el enunciado mostrado en la Figura 47; en él se retoman ideas de actividades anteriores donde se espera que el estudiante realice una construcción tangible para resolver la situación planteada, aunque esta vez se puede contar aún con más recursos dada la actividad realizada en el día inmediatamente anterior.

Figura 47. Enunciado a partir del cual se desarrolla la Actividad 12 del curso

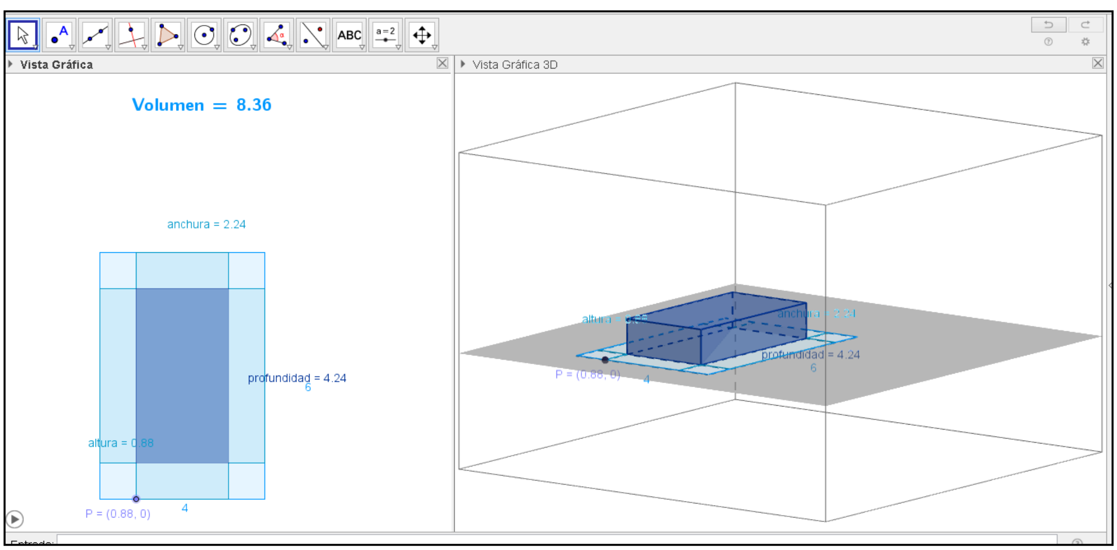
CAJA SIN TAPA

Actividad 1

1.1 A partir de una hoja rectangular de tamaño 6 dm por 4 dm, construye una caja sin tapa recortando cuadrados de igual tamaño en las cuatro esquinas, de tal manera que almacene el mayor volumen. ¿Cuáles son las dimensiones de la atura, anchura y profundidad de la caja de mayor volumen? ¿Por qué? **Explica** tu procedimiento y tu respuesta.

Luego de realizar esta primera parte se le presenta al estudiante una representación digital de la situación (Figura 48) en la que puede manipular el valor de una de las magnitudes involucradas en la situación.

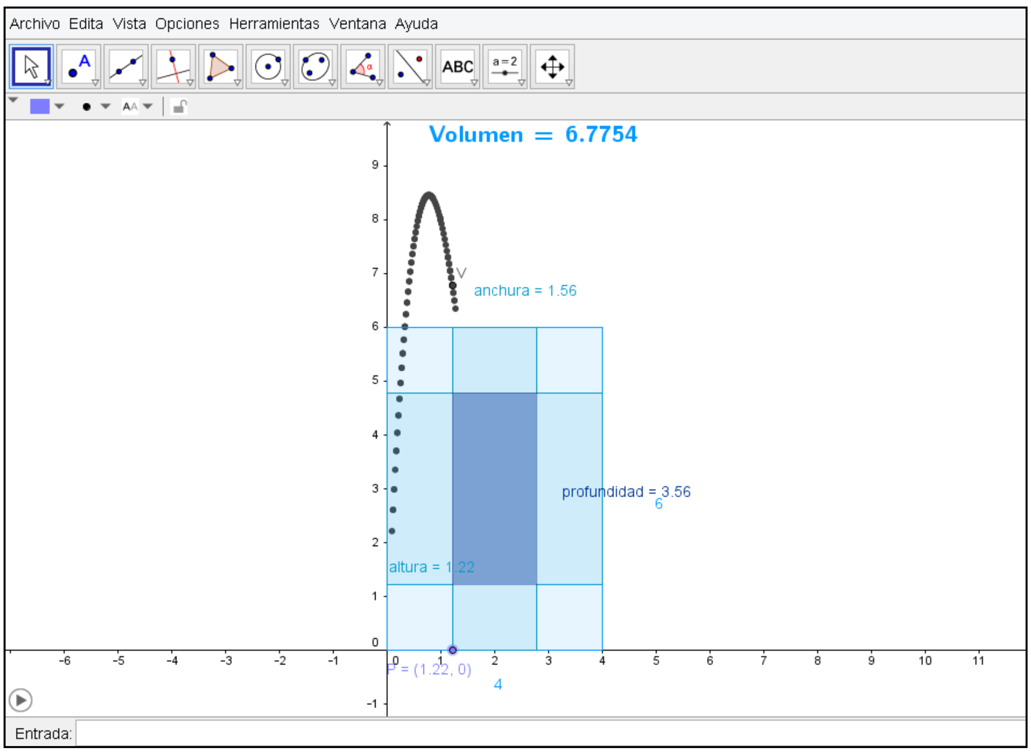
Figura 48. Representación digital de la situación planteada en la Actividad 12



De manera similar a la actividad anterior se le pide al estudiante que enuncie cuales son las magnitudes que están involucradas, cuáles de ellas varían y cuál es la relación que se establece entre las mismas.

Finalmente se presenta otra representación digital (Figura 49) en la que se asocia además la representación gráfica cartesiana y se recurre a uno de los comandos que ofrece el software para trabajar la pendiente y consecuentemente la derivada.

Figura 49. Representación digital donde se asocian dos representaciones gráficas



Hemos presentado en el transcurso de este apartado las características principales que conciernen al desarrollo de las actividades realizadas en los talleres del curso laboratorio de pre-cálculo. Una vez realizada esta caracterización del curso y mencionado las actividades de las cuales se toma registro para la presentación de evidencias que se realiza en el capítulo IV, se describe a continuación el trabajo de campo realizado.

3.3 FASE 3. TRABAJO DE CAMPO

Esta fase consta de la recolección y sistematización de datos teniendo en cuenta que se video grabaron cada una de las sesiones del curso, centrando la atención en algunos estudiantes, de los cuales se recogieron sus producciones escritas, se captaron sus expresiones orales y gestuales de manera que pudiésemos darnos cuenta de sus procesos de representación.

A continuación se detallan un poco más los procesos realizados en esta etapa:

3.3.1 Selección de las actividades del curso de pre-cálculo consideradas como centrales para este estudio. A partir de las descripciones previas de las actividades que han sido recopiladas en la primera sección de este capítulo se decidió que aunque gran parte de las actividades aportarían información valiosa para la caracterización de habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación, y por lo tanto, toda la información proveniente de dichas actividades sería tomada en cuenta para la evidencia de la investigación que aquí se reporta, serían tres las actividades en las cuáles nos enfocaríamos para la recopilación de información, tanto de la parte video grabada, como de las producciones escritas de los estudiantes. Dichas actividades serían las siguientes:

3.3.1.1 Actividad seis: Transformación de Funciones. En particular esta actividad nos llamó la atención dado que se enfoca específicamente en una de las habilidades que *a priori* fueron planteadas en el capítulo 2 (ver apartado 0), la transformación de funciones cuando los registros inicial y final de la representación son diferentes. Aunque en la actividad la transformación de funciones se realiza solo entre los registros algebraico y gráfico encontramos sustentos teóricos que dan cuenta de la importancia de este tipo de actividades.

La conversión entre la representación algebraica y la representación gráfica de una función carece de unas reglas expresamente delimitadas, sin embargo Duval (2004) sugiere que las conversiones entre las representaciones gráficas y las representaciones algebraicas de funciones se pueden plantear mediante tareas relativamente fáciles "*al menos para los objetos más simples (rectas y parábolas)*" (p. 78). Dichas tareas consisten en la identificación de:

> […] todas las variaciones cognitivamente pertinentes de una representación en un registro, de manera que una exploración según el 'método que consiste en hacer variar un solo factor a la vez, dejando a los otros sin cambio' pueda ser puesta en acto por los alumnos. (Duval, 2004, p. 78)

Esta tarea, en el caso de las funciones lineales es propuesta en Duval[113], mediante la identificación de ocho variables visuales que son unidades significantes de la escritura algebraica de la ecuación de la recta correspondiente a la función lineal. Cabe recordar que las unidades significantes son las partes más pequeñas en que se puede descomponer una representación (Ramírez, Romero & Oktac[114]).

La actividad planteada con el nombre Transformación de Funciones (tomada de la página de GeoGebra y luego rediseñada y reformulada) , retoma esta idea en la que variando un factor, o unidad significante, y dejando los demás factores sin cambio en la representación algebraica se obtiene una representación gráfica modificada de la función. En la Tabla 1 se condensan en términos de Duval las variables

---

[113] DUVAL, Raymond. Graphiques et équations. En *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1988. p. 235-253.

[114] RAMÍREZ, Osiel; ROMERO, César Fabián; OKTAÇ, Asuman. Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. En A. Ramírez e Y. Morales (Eds.), *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (pp. 537-547). Santo Domingo: ICEMACYC. 2013

visuales y las unidades simbólicas de las representaciones que se ponen en juego en esta actividad:

Tabla 1. Unidades significantes de la representación gráfica de la función cuadrática

Variables visuales	Valores	Unidades simbólicas correspondientes	
Abertura con respecto al eje x	Positiva	Coeficiente > 0	Ausencia de símbolo - Presencia de símbolo -
	Negativa	Coeficiente < 0	
Distancia focal		Coeficiente = 1	Sin coeficiente
	Abertura mayor	Coeficiente < 1	
	Abertura menor	Coeficiente > 1	
Posición sobre el eje *y*	Corte por encima de	Adición de una constante	Signo +
	Corte por debajo de	Sustracción de una constante	Signo -
	Corte en el origen	Sin corrección aditiva	
Posición sobre el eje x	Corte a la izquierda de	Adición de una constante	Signo +
	Corte a la derecha de	Sustracción de una constante	Signo -
	Corte en el origen	Sin corrección aditiva	

Fuente: Adaptación del Original en Duval (1988, p. 239)

Así a partir de la variación de cada una de las variables visuales enunciadas en la Tabla 1, y dejando sin variación las demás se hace posible que los estudiantes asocien los cambios realizados en la representación gráfica con los cambios realizados en la representación algebraica.

De la modificación de una o varias variables visuales a la vez, es posible determinar que se pueden realizar 54 representaciones gráficas estándar, correspondientes a la misma cantidad de representaciones algebraicas tal y como se presentan en la Tabla 2.

Tabla 2. Variaciones de las unidades significantes para la función cuadrática

Abertura con respecto al eje *x*	Distancia focal	Posición sobre el eje *y*	Posición sobre el eje *x*	Ejemplo
Positiva[15]	Abertura estándar	Corte por encima de	Corte a la izquierda de	$y = (x + 1)^2 + 1$
			Corte a la derecha de	$y = (x - 1)^2 + 1$
			Corte sobre el eje	$y = x^2 + 1$
		Corte por debajo de	Corte a la izquierda de	$y = (x + 1)^2 - 1$
			Corte a la derecha de	$y = (x - 1)^2 - 1$
			Corte sobre el eje	$y = x^2 - 1$
		Corte sobre el eje	Corte a la izquierda de	$y = (x + 1)^2$
			Corte a la derecha de	$y = (x - 1)^2$
			Corte sobre el eje	$y = x^2$
	Abertura mayor	Corte por encima de	Corte a la izquierda de	$y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + 1$
			Corte a la derecha de	$y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 + 1$
			Corte sobre el eje	$y = \frac{1}{2}x^2 + 1$
		Corte por debajo de	Corte a la izquierda de	$y = \frac{1}{2}(x + 1)^2 - 1$
			Corte a la derecha de	$y = \frac{1}{2}(x - 1)^2 - 1$
			Corte sobre el eje	$y = \frac{1}{2}x^2 - 1$
		Corte sobre el eje	Corte a la izquierda de	$y = \frac{1}{2}(x + 1)^2$
			Corte a la derecha de	$y = \frac{1}{2}(x - 1)^2$
			Corte sobre el eje	$y = \frac{1}{2}x^2$
	Abertura menor	Corte por encima de	Corte a la izquierda de	$y = 2(x + 1)^2 + 1$
			Corte a la derecha de	$y = 2(x - 1)^2 + 1$
			Corte sobre el eje	$y = 2x^2 + 1$
		Corte por debajo de	Corte a la izquierda de	$y = 2(x + 1)^2 - 1$
			Corte a la derecha de	$y = 2(x - 1)^2 - 1$
			Corte sobre el eje	$y = 2x^2 - 1$
		Corte sobre el eje	Corte a la izquierda de	$y = 2(x + 1)^2$
			Corte a la derecha de	$y = 2(x - 1)^2$
			Corte sobre el eje	$y = 2x^2$

3.3.1.2 Actividad once: Máximo rectángulo y Actividad doce: Caja sin Tapa. Las actividades once y doce fueron escogidas dado la multiplicidad de representaciones que se ponen en juego durante su realización. Como se explicó en el primer apartado de este capítulo, estas actividades presentan gran riqueza en cuanto a que a diferencia de otras dan una mayor libertad para que el estudiante explore diferentes representaciones para dar soluciones a las situaciones planteadas.

Adicionalmente exige como cuestionamientos iniciales a los estudiantes el reconocimiento de las magnitudes involucradas en las diversas situaciones, así como determinar si estas varían o no. Esta determinación inicial permite observar si el estudiante reconoce los objetos matemáticos que están allí inmersos, lo cual es claramente uno de los comportamientos que expresamos en el capítulo 2 (ver apartado 0) como uno de los indicadores de una de las habilidades sugeridas *a priori* asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación.

Consideramos además que durante el transcurrir del curso de pre-cálculo los estudiantes fortalecen sus conocimientos y potencian sus habilidades en parte como producto de la práctica, de manera que las últimas actividades pueden dar cuenta de manera más fidedigna de dichas habilidades.

Así como las producciones escritas son fuente de observación de los procesos esperados, las video-grabaciones aportan también información vital y para el momento del desarrollo de las últimas actividades del curso los estudiantes son menos reacios a expresar ante las cámaras las ideas que surgen para desarrollar la tarea específica que se plantea en cada actividad.

3.3.2 Selección del grupo donde se llevaría a cabo la investigación. El trabajo de campo de la investigación aquí reportada fue llevado a cabo con un grupo de estudiantes que realizó el curso de pre-cálculo en el primer semestre de 2015. Como ya se ha mencionado en apartados anteriores, el curso de pre-cálculo está dirigido a estudiantes que ingresan a primer semestre de las carreras de Ingenierías, y de la Facultad de Ciencias de la Universidad Industrial de Santander, y que a su vez no han obtenido un puntaje alto en las pruebas SABER 11, realizadas por el ICFES. Para el semestre en cuestión los grupos estaban organizados de acuerdo a los puntajes mencionados en el párrafo anterior, de manera que los estudiantes que hacían parte de un grupo tenían un puntaje muy similar al de sus compañeros. Cabe acotar que las carreras antes mencionadas tienen gran disparidad en cuanto a los puntajes de selección puesto que las Ingenierías tienen mucha más demanda que las carreras de la Facultad de Ciencias (Química, Biología, Física, Licenciatura en matemáticas y Matemática).

Se decidió que para mayor facilidad en la recolección de los datos, tanto de las producciones escritas como de las video-grabaciones el grupo escogido fuese el mismo en el que el investigador fungía como profesor.

El grupo seleccionado estaba conformado por treinta alumnos, de los cuales quince eran estudiantes de primer semestre de ingenierías y los restantes estudiantes de la Facultad de Ciencias. Estos estudiantes habían obtenido puntajes en la prueba SABER 11 entre sesenta y cuatro y sesenta y nueve sobre un total de cien puntos.

3.3.3 Selección de los casos de estudio. Una vez seleccionado el grupo en el cual se llevó a cabo la recolección de los datos, se escogieron un cierto número de estudiantes en los cuales se centró nuestra atención y de los cuales se realizó filmación constante en todas las actividades y se recogió las producciones escritas a fin de observar su desenvolvimiento tanto en el desarrollo de las actividades a lápiz y papel como de las actividades mediadas por el software.

Durante la primera sesión del curso se observaron aquellos estudiantes que participaban de manera espontánea en la solución de la actividad propuesta, esto teniendo en cuenta que durante las primeras sesiones los estudiantes son un poco reacios a compartir lo que están pensando acerca de cómo resolver los planteamientos que se les dan, unos por pena, otros por la poca familiaridad con respecto a la forma en que se desarrolla el curso, otros por desconocimiento de las temáticas que se tratan. De esta forma, el factor predominante para la elección de los sujetos caso de estudio más allá de sus respuestas acertadas o no a los planteamientos de la primera actividad, fue la asiduidad en la participación durante el desarrollo de la misma, no influyendo tampoco la facilidad en términos de lenguaje que tuvieran para expresar sus ideas.

Inicialmente las actividades del curso laboratorio de pre-cálculo están planteadas para que se desarrollen de manera individual, pero una vez los estudiantes toman confianza con sus compañeros generalmente realizan las actividades en parejas lo cual facilita, además de los procesos estudiados en esta investigación, el proceso de comunicación.

Para efectos de esta investigación los casos de estudio fueron dos parejas: la primera formada por Sebastián y Jhoan y la segunda formada por Ximena y Jessica. Además de que el trabajo en grupo facilita el proceso de comunicación tal y como se expuso en el párrafo anterior, el trabajo en parejas posibilita, como lo dice Rojas[115], que el ambiente de trabajo sea menos artificial y tenso para la persona que está siendo video-grabada en tanto que la atención del investigador no se centra de manera permanente en el trabajo de un solo individuo. Además los estudiantes caso de estudio pueden:

> […] interactuar entre sí, acoger o poner en discusión las afirmaciones y argumentos presentados por sus pares, además de tener la posibilidad de conocer, analizar y contar

[115] ROJAS, Pedro Javier. Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 2014, vol. 12, no 1.

con elementos adicionales en relación con las tareas propuestas y con los argumentos inicialmente considerados. (Rojas, 2012, p. 70)

3.3.3.1 Caso de estudio 1: Sebastián y Jhoan. La pareja conformada por Sebastián y Jhoan se caracterizó por la facilidad para expresar sus respuestas al momento de confrontar las actividades realizadas en el curso laboratorio de pre-cálculo. Además de la facilidad para expresarse ante la cámara, los dos estudiantes presentaban facilidad para escribir cada una de las cosas que iban realizando respecto a la solución de los ejercicios planteados, de manera que sus producciones escritas son una fuente profusa en términos de la cantidad de datos que se pueden extraer de ellos.

Sebastián. Sebastián es un estudiante de 17 años que ingresa al programa de Química de la UIS; culminó sus estudios en un colegio de carácter privado de la ciudad de Bogotá en el año 2014 y su primera opción como carrera para ingresar a la UIS no era Química.

Sebastián tiene facilidad para los procesos de comunicación, aun cuando el lenguaje que utiliza para comunicar sus ideas no es siempre técnico. Considera tener unas buenas bases respecto a sus conocimientos en matemáticas, no obstante en ocasiones reconoce tener desconocimiento de algunas temáticas. Los procedimientos que realiza Sebastián en la solución de las actividades del curso son en su gran mayoría producto de aprendizaje basado en algoritmos. Su desempeño en los aspectos algebraicos es bueno.

Jhoan. Jhoan es un estudiante de 16 años que ingresa al programa de Ingeniería de Sistemas; culminó sus estudios en un colegio de carácter oficial de la ciudad de Bucaramanga en el año 2014 e ingresó a la carrera que escogió como primera opción para estudiar en la UIS.

Jhoan posee gran facilidad para expresarse e incluso estructura muy bien sus argumentaciones, utilizando hasta donde le es posible lenguaje técnico. Aun cuando su aprendizaje en la educación secundaria y media, según el mismo lo expresa, estuvo plagado de falencias en cuanto a la parte matemática (falta de profesor durante largos periodos de tiempo teniendo en cuenta el carácter oficial del colegio donde estudio, profesores con estilo de enseñanza muy tradicional y apegados a los libros de texto), es un estudiante que se destaca por la forma como encara las situaciones presentadas en las actividades. Su desempeño en los aspectos algebraicos es bueno.

3.3.3.2 Caso de estudio 2: Ximena y Jessica. La pareja conformada por Ximena y Jessica, a diferencia de la pareja de Jhoan y Sebastián presentaba un poco más de dificultad para abordar las situaciones planteadas en las actividades del curso, el desarrollo de cada uno de los ítems era un poco más lento y la fluidez para expresar sus respuestas era poca.

Sus producciones escritas son bastante cortas aunque concisas, la riqueza de los datos de este caso de estudio se encuentran en los diálogos que establecían las estudiantes, entre ellas y/o con el investigador, dado que las dudas que una de las estudiantes expresaba trataban de ser contestadas por la otra.

Ximena. Ximena es una estudiante de 17 años que ingresa al programa de Matemáticas; culminó sus estudios en un colegio de carácter oficial de un municipio del Departamento de Santander en el año 2014 e ingresó a la carrera que escogió como primera opción para estudiar en la UIS.

Ximena trata de expresar al máximo las ideas que tiene para el desarrollo de las actividades, sin embargo, se le dificulta hacerlo ya que sus bases conceptuales son débiles. Ella misma reconoce que ingresó a la carrera de Matemáticas como parte de un reto personal pues aunque siempre le ha gustado la matemática, no se le ha facilitado mucho. Su desempeño en los aspectos algebraicos no es muy bueno y como compensación a ello trata de recurrir a procesos numéricos o a representaciones gráficas que le permitan acercarse a las situaciones planteadas.

Jessica. Jessica es una estudiante de 16 años que ingresa al programa de Ingeniería de Sistemas; culminó sus estudios en un colegio de carácter privado de la ciudad de Cúcuta en el año 2014 e ingresó a la carrera que escogió como primera opción para estudiar en la UIS.

A Jessica se le dificulta particularmente expresar sus ideas por iniciativa propia, pero sus aportes aunque escasos son valiosos y realiza preguntas bastante ingeniosas. Al igual que a su compañera Ximena, a Jessica siempre le ha interesado la matemática aunque no ha sido su fuerte. Su desempeño en aspectos algebraicos es regular por lo que trata de recurrir a otros tipos de representación que le sean más fáciles de manejar.

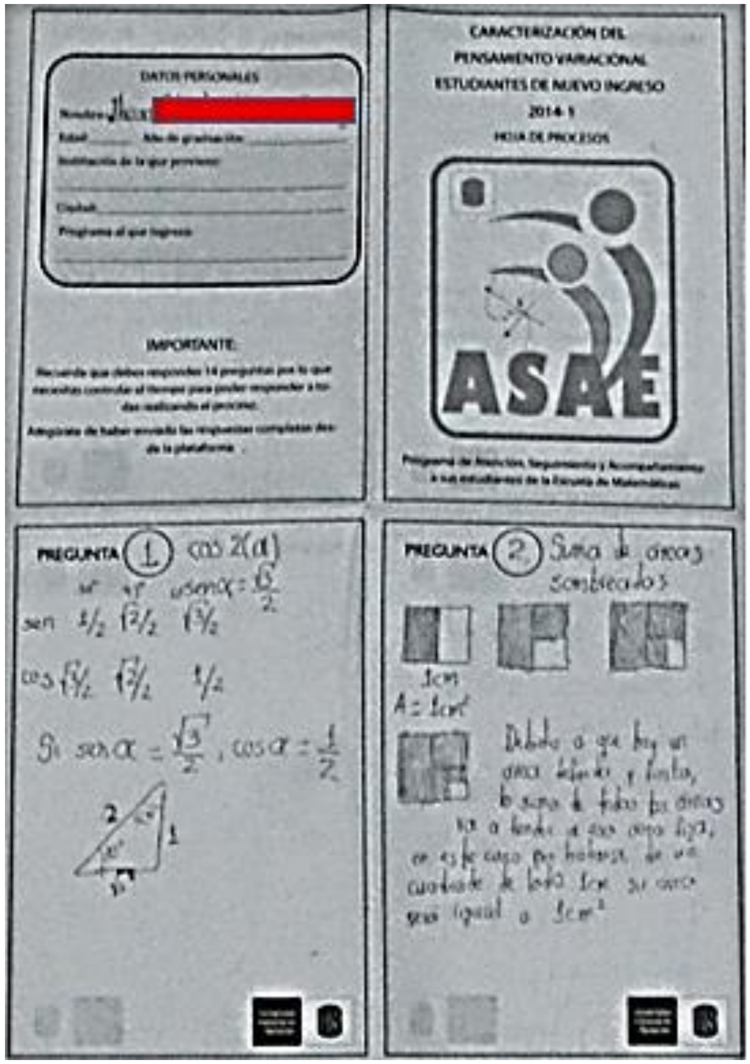
3.3.4 Instrumentos para la recolección de datos. Como se mencionó en apartados anteriores de este capítulo, la toma de datos de esta investigación se realizó mediante dos instrumentos:

- Video-grabaciones de las sesiones del curso laboratorio de pre-cálculo: Las 15 sesiones del curso fueron filmadas mediante dos cámaras instaladas en el aula donde se desarrollaba el curso para el grupo seleccionado. La videograbación se enfoca en los dos casos de estudio, aunque por la forma en que está estructurado el desarrollo del curso las interacciones de los compañeros hacen parte del material recogido. Se obtienen por lo tanto alrededor de 45 horas de grabación para cada uno de los casos de estudio.

- Producciones escritas de los estudiantes: Al inicio de cada actividad se le proveía a los estudiantes casos de estudio de hojas de bloc para que consignaran en ellas el desarrollo de cada uno de los ítems que se realizan inicialmente solo con papel y lápiz y luego con el apoyo de las representaciones digitales brindadas por el software. Adicionalmente, la tarea retadora que hace parte de la finalización de cada actividad, generalmente se dejaba como actividad extra clase, de manera que los estudiantes entregaban el desarrollo de dicha actividad de manera escrita en la clase siguiente.

Como parte de la realización del curso los estudiantes presentan una prueba final en la que deben contestar 14 preguntas, a los estudiantes casos de estudio se les facilitó un formato que se puede ver en la Figura 50 (el mismo que deben llenar los estudiantes que ingresan a las carreras de Ingenierías y Ciencias de la UIS al momento de presentar la prueba de caracterización del pensamiento variacional) en el cual consignaron los procesos realizados para contestar dicha prueba. Esa producción escrita también se tomó como parte de los datos.

Figura 50. Hoja de Procesos



3.4 FASE 4. ANÁLISIS DE DATOS

En esta etapa se caracterizan habilidades cognitivas asociadas con fenómenos de variación en el contexto de resolución de problemas que ofrece el curso laboratorio de pre-cálculo. Para ello se realiza un proceso de triangulación entre los datos encontrados, el marco conceptual de la presente investigación y múltiples referentes teóricos.

Dado que, como se mencionó en el marco conceptual, las habilidades son descritas a partir de acciones o conjuntos de acciones, se hace necesario contrastar aquellas consideradas a la luz de la teoría y de los análisis realizados *a priori* en la Fase 2 con aquellas que surgen de los datos recolectados en la Fase 3. Dicho contraste y caracterización facilitarán el desarrollo de la Fase 5 donde las habilidades cognitivas referidas se observan en torno a un proceso específico: el proceso de representación.

Para el desarrollo del análisis de los datos se plantean las categorías inicialmente descritas en el apartado 0, más las categorías que emergen a partir de la experimentación y se describen y se analizan para cada uno de los casos de estudio.

3.5 FASE 5. CARACTERIZACIÓN DE HABILIDADES COGNITIVAS

A partir del proceso metodológico expuesto en las fases anteriores y teniendo en cuenta los instrumentos de recolección de datos y los casos de estudio que se han mencionado en el presente capítulo, se presentan evidencias del proceso desarrollado que nos llevan a responder a los objetivos de investigación que aquí reportamos: la caracterización de habilidades cognitivas asociadas a procesos de representación de fenómenos de variación que pueden potenciarse mediante la resolución de problemas mediados por tecnologías digitales, en un curso de pre-cálculo con estudiantes de nuevo ingreso a la Universidad Industrial de Santander.

De igual manera en esta fase se pretende, a partir de los hallazgos encontrados, contribuir no solo al desarrollo teórico de la Educación Matemática, en particular de la línea de investigación en Didáctica del cálculo, sino también servir como referente a la aplicación en la práctica para contribuir a la disminución de la problemática enunciada al inicio de este documento.

Así mismo, esta investigación pretende coadyuvar en el afianzamiento de una estructura curricular del curso de pre-cálculo que se ofrece a los estudiantes de nuevo ingreso a la UIS, con el fin de que éstos consoliden habilidades cognitivas asociadas a procesos de representación de fenómenos de variación que les permita un buen desempeño en el curso de Cálculo Diferencial para el cual el curso laboratorio de pre-cálculo es introductorio.

4. CARACTERIZACIÓN DE LAS HABILIDADES COGNITIVAS ASOCIADAS AL PROCESO DE REPRESENTACIÓN

En este cuarto capítulo se presenta un análisis de los datos, mismo que fueron descritos en el apartado las video-grabaciones realizadas, las producciones escritas tomadas de cada uno de los talleres realizados y las hojas de procesos que utilizaron los estudiantes en la prueba que presentan al finalizar el curso. En algunos de los apartados hemos tomado, a modo de comparación, algunas hojas de procesos de estudiantes que presentaron la prueba diagnóstica previa a la realización del curso y que han sido reportadas por Barajas[116] en una investigación previa del mismo contexto de estudio.

Se han retomado las cinco habilidades cognitivas seleccionadas a priori como categorías de análisis reportadas en dos casos de estudio. En cada categoría se presentan en orden cronológico y hasta donde ha sido posible, evidencias a la par de los dos casos de estudio haciendo una comparación entre las acciones realizadas por cada uno de ellos.

4.1 RECONOCER REPRESENTACIONES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Retomando del capítulo II, consideramos que el reconocimiento como habilidad en términos de Mandler[117] está asociado con las acciones que le permiten al individuo

[116] BARAJAS, Claudia. *Dificultades del pensamiento variacional: una mirada al proceso elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos*. Trabajo de grado Magíster en Ciencias Especialidad Matemática Educativa. México: CICATA-IPN, 2015. 220 p.

[117] MANDLER, George. Recognizing: The judgment of previous occurrence. *Psychological review*, 1980, vol. 87, no 3, p. 252.

la determinación de la ocurrencia de un hecho, lo cual puede llevarse a cabo mediante dos tipos de acciones:

- La valoración por familiaridad.
- La identificación como resultado de la recuperación.

Respecto a esta habilidad, si bien las actividades del curso laboratorio de pre-cálculo no están direccionadas como tal para su trabajo, exigen del estudiante competencias mínimas de desempeño para reconocer algunas representaciones de los objetos matemáticos estudiados a lo largo de la educación básica y media vocacional[118]. No obstante, mediante las situaciones planteadas dentro del curso se pretende aportar experticia suficiente para acercarse a diferentes representaciones (en cualquier registro) de los objetos matemáticos, específicamente del Cálculo diferencial.

Iniciaremos presentado un análisis sobre las actividades que se proponen en el curso-laboratorio de pre-cálculo y las acciones que en la experimentación surgieron con los casos de estudio y que pueden estar asociadas a la habilidad de reconocimiento de representaciones. Se recupera a continuación una instrucción del taller de transformación de funciones (el cual se presentó en los apartados 0 y 0), la primera actividad del taller propone:

1. En tu hoja de trabajo representa gráficamente la función $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$

[118] La educación básica corresponde a los grados 0 a 9° y la media vocacional a los grados 10° y 11°.

Aunque la actividad propuesta apunta a identificar estrategias de solución dentro de las cuales puede estar el realizar una transformación de la representación inicial dada, el reconocimiento de la función cuadrática está implícito en el desarrollo de la actividad y puede ser detonante para que la actividad de transformación de la representación se lleve a cabo de manera adecuada o no. A continuación se presenta un diálogo entre las estudiantes Ximena y Jessica cuando realizaban una tabla de valores a fin de poder obtener la representación gráfica de la función, de acuerdo a la indicación recibida:

- Ximena: La gráfica nos va a salir grande. Pilas! porque ahí empezamos a dividir [Se está refiriendo a los valores obtenidos que muestra la tabla, en la que se puede ver que los valores de “y” se expresan de forma fraccionaria]

- Jessica: A ver en esta tabla cuanto nos da.

- Ximena: Hagámosla hasta aquí [Se refiere a la asignación de una cantidad de valores enteros (como se puede ver en la Figura 51) para los cuales se realizará la tabla de valores]

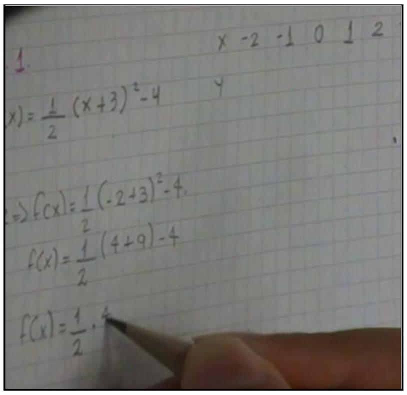
- Jessica: No, pero es que estoy viendo en qué sentido va.

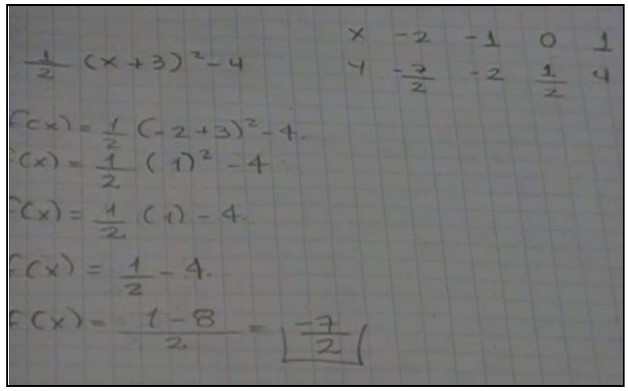
- Ximena: Pues tiende a infinito [Se refiere al comportamiento de la función, dado que los valores que han obtenido para la variable "y" van haciéndose mayores a medida que realizan el reemplazo]

- Jessica: Pues sí, ¿pero la forma?

- Ximena: Línea recta no da. Va así, o sea va subiendo. Pero no; línea recta si es; pero, entonces muy, muy diagonal, ¿si me entiendes?

Figura 51. Construcción de la tabla de valores para la función dada





De acuerdo con lo expresado por Ximena, podemos aseverar que ella no relaciona la representación gráfica con la representación algebraica presentada, es decir, no se reconoce dicha expresión algebraica como representante de la función cuadrática. Sin embargo, dicho reconocimiento si se dio cuando las estudiantes ubicaron los puntos hallados en el plano cartesiano, como lo evidenciamos en la discusión que se presenta a continuación.

- Ximena: No pero eso es…
- Jessica: Una línea.
- Ximena: Si.
- Jessica: Prácticamente, pero es que…
- Ximena: Es como una parábola, semi parábola.
- Jessica: ¿Por qué no hacemos los puntos más abajo a ver que nos da?
- Ximena: Si.

- Jessica: ¿La hacemos hasta qué? ¿hasta menos ocho? ¿o nos daría muy abajo?

- Ximena: Si.

- Jessica: Hasta menos seis.

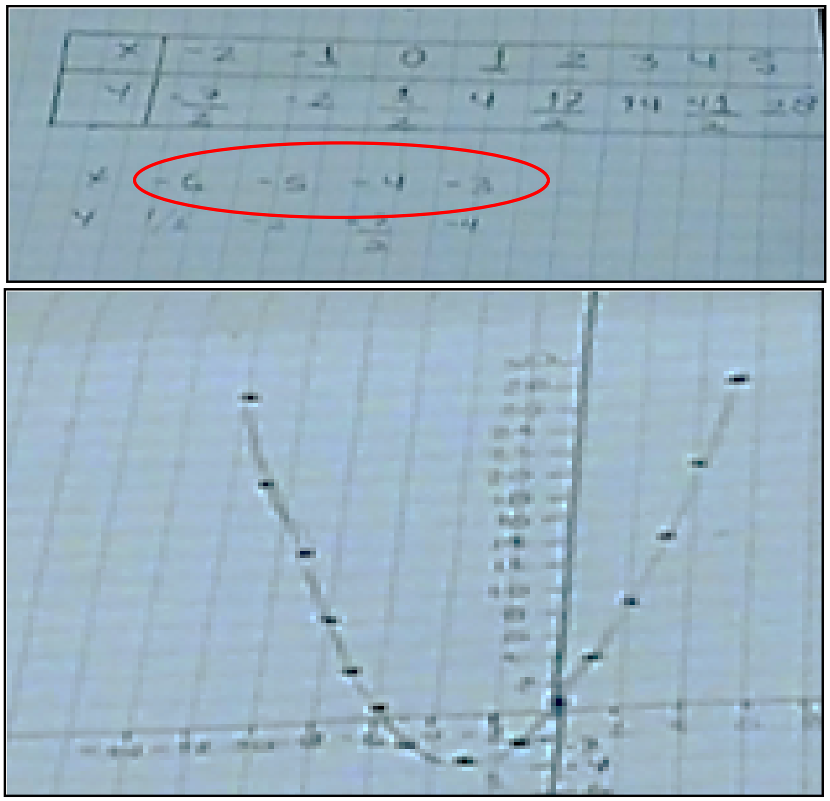
- [Luego de obtener más valores y de graficarlos en el plano cartesiano siguen conjeturando]

- Ximena: Eso es una parábola.

- Jessica: Por eso, aquí estamos [Jessica señala dos puntos de los colocados sobre el plano cartesiano]. Y esto va así [Jessica con su mano hace una indicación de la forma que tiene la parábola]. Por eso es que le agregué más valores.

Podemos inferir a partir del diálogo sostenido por las dos estudiantes que no existe una recuperación de información que les permita reconocer la representación algebraica como una representación del objeto función cuadrática. Por su parte, al realizar la representación tabular no se presenta ninguna conjetura respecto a las variaciones obtenidas; tan solo, cuando se realiza la representación en el plano cartesiano existe una evidencia de un reconocimiento de la representación gráfica como representación del objeto función cuadrática. Incluso, dicho reconocimiento no es inmediato sino resultado de un proceso de puntaje con más valores de los tomados inicialmente como se puede observar en la Figura 52.

Figura 52. Construcción de la representación gráfica adicionando valores a la tabla inicial



De manera similar es asumida la actividad por parte de los estudiantes Jhoan y Sebastián como se manifiesta en el siguiente diálogo:

- Jhoan: Tenemos que representar la siguiente función gráficamente “$f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$”, entonces lo primero que hay que hacer para hacerlo más fácil es asignarle valores a "x"

- Sebastián: Entonces hagamos una tabla de valores entre "x " e "y".

- Jhoan: Para mirar qué valores puede tomar, ¿tomamos valores entre menos cuatro y cuatro?
- Sebastián: Si. Muy amplio ¿no? Tomemos de menos tres a tres.

- [Los estudiantes construyen una tabla de valores y posteriormente dichos valores los representan en un plano cartesiano (Figura 53)]

- Jhoan: Miremos si nos da una línea recta.

- Sebastián: No, no da recta; es como una medio parábola.

- Jhoan: Miremos con el curvígrafo.

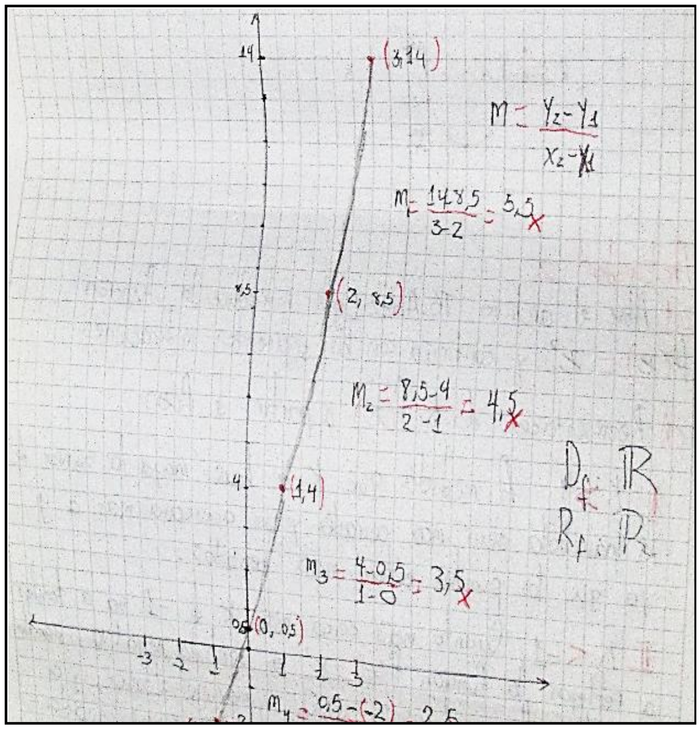
- [Jhoan y Sebastián ubican los puntos y utilizan el curvígrafo para encontrar el trazo que mejor se ajusta a dichos puntos. De la experimentación surgen las siguientes interpretaciones]

- Sebastián: Aquí sí es recto, recto, recto y se va curvando.

- [Sebastián señala que entre los puntos que han ubicado en el plano cartesiano se podrían trazar rectas, no asociando la función a una única curva suave]

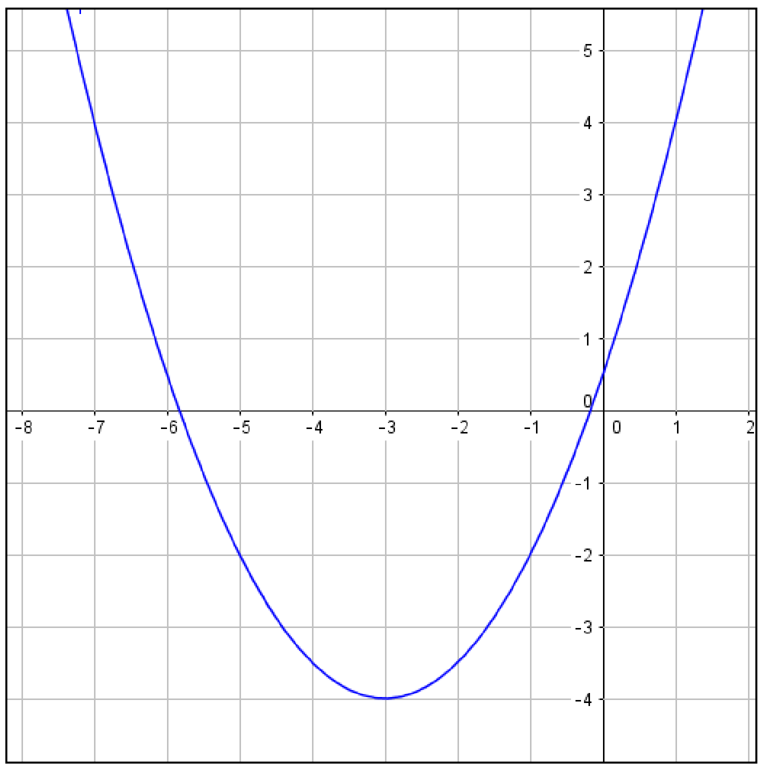
Figura 53. Tabla de valores y trazo de la gráfica

x	-3	-2	-1	0	1	2	3
y	-4	-3,5	-2	0,5	4	8,5	14



De nuevo y de manera similar a lo sucedido con las estudiantes Jessica y Ximena, no existe por parte de Sebastián, ni de Jhoan una relación entre la representación algebraica de "$f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$" con su representación gráfica (de la función cuadrática) la cual debería ser la mostrada en la Figura 54, sería de esperarse en estudiantes que van a iniciar un proceso de formación universitaria que existiese es proceso de relacionar representaciones. Parece ser que existe un reconocimiento mucho más rápido a partir de la representación gráfica con una menor cantidad de puntos graficados en el plano cartesiano en comparación con la gráfica realizada por Jessica y Ximena. Sin embargo, Sebastián y Jhoan continúan con la actividad planteando otras cosas que nos permiten inferir (del diálogo que se rescata a continuación) que a pesar de lo que ya han planteado, no tienen la seguridad para afirmar que la representación gráfica corresponda realmente a lo enunciado en un principio. Esto es, no existe un verdadero reconocimiento de la representación gráfica como representación del objeto función cuadrática.

Figura 54. Representación gráfica correspondiente a $f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$



- Sebastián: Si quiere hallamos la pendiente.

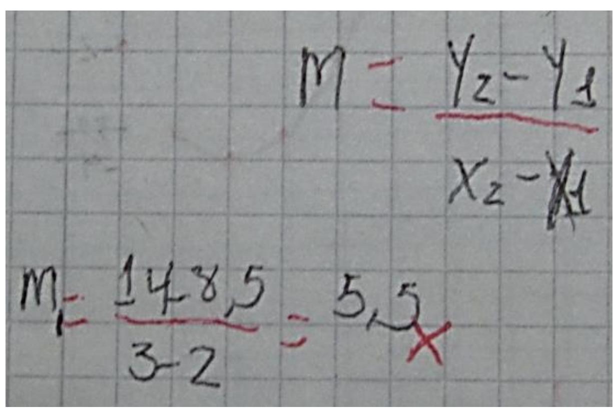
- Jhoan: ¿La pendiente? [Aquí los estudiantes asignan coordenadas a cada uno de los puntos que han ubicado sobre el plano cartesiano y se plantean hallar la pendiente entre cada uno de ellos (Figura 55)]

- Jhoan: Hallemos la pendiente entre esos dos puntos [Jhoan señala los dos últimos puntos ubicados en el plano cartesiano]
- Sebastián: No, hallemos la pendiente de toda la recta.

- Jhoan: ¿Toda la recta?

- Sebastián: Sí, tin, tin [Sebastián señala el primer y el último punto que han ubicado en el plano cartesiano; a pesar de que en algún momento el estudiante sugirió que la gráfica de la función correspondía a una parábola, en este momento asume que la gráfica realmente es una recta]

Figura 55. Cálculo de la pendiente para dos puntos ubicados en el plano cartesiano



Los estudiantes calculan la pendiente con el primer y el último punto tal y como sugiere Sebastián, obteniendo un valor de tres.

- Jhoan: Si la tomáramos como si fuera línea recta sería tres, eso significa que corta en tres en "y" , es… Aproximadamente en tres. No, pero, ¿entonces el punto de acá?

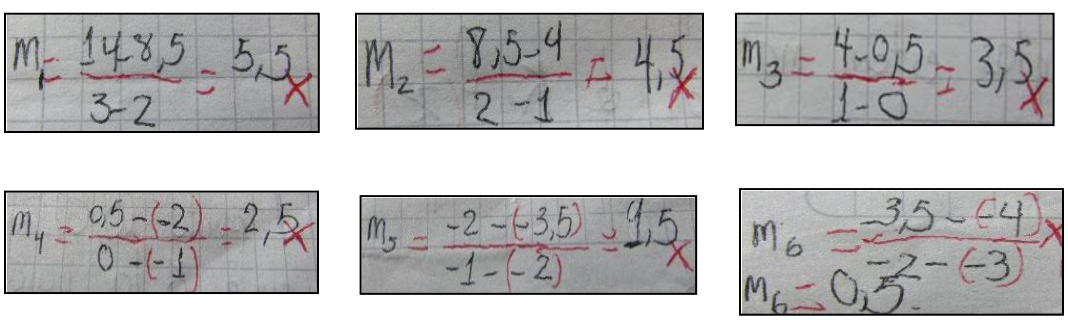
- Sebastián: Entonces si toca hallarla por partes. [Los estudiantes calculan las pendientes que habrían entre cada par de puntos encontrando que cada pendiente aumenta o disminuye en uno (Figura 56)]
- Sebastián: Esa es dos punto cinco (2,5).

- Jhoan: Dos punto cinco, sí. ¡Sigue! Entonces significa que esto si es recto. No, no es recto porque sería la misma pendiente para todos. O sea cada vez se hace… [Con la mano Jhoan hace el gesto de que la inclinación entre cada par de puntos es menor]

- Sebastián: Se va corriendo un poquito, o sea se va corriendo, va subiendo.

- Jhoan: Exacto.

Figura 56. Cálculo de las pendientes entre los puntos graficados en el plano

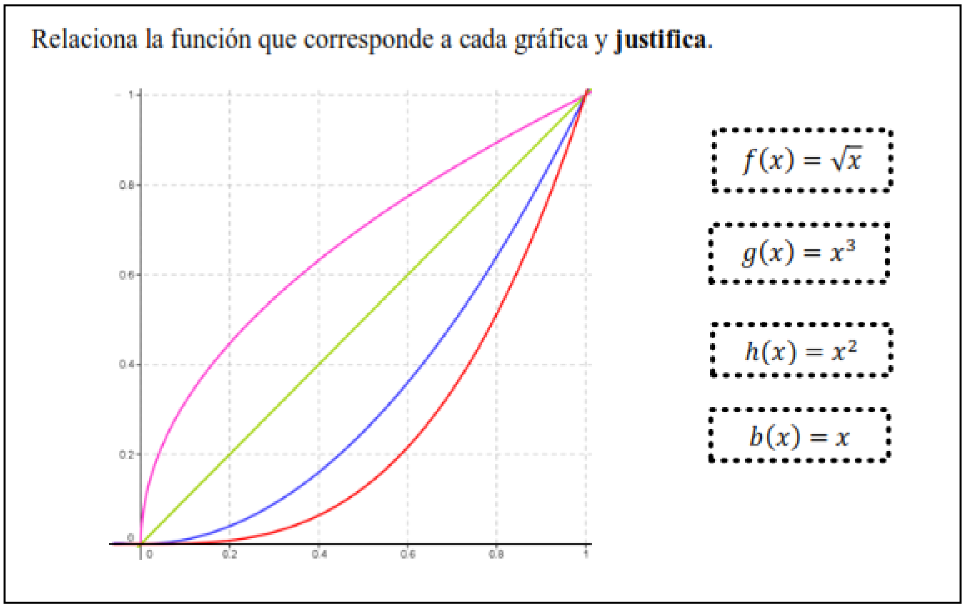


Como se ha podido notar tanto en los diálogos como en las figuras, la presentación inicial de la función cuadrática en su representación algebraica no ha sido suficiente para que los estudiantes reconozcan el objeto sobre el cual están trabajando. Habrá de considerarse que la representación "$f(x) = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$", no es la representación usual con la que los estudiantes vienen acostumbrados a trabajar durante su educación básica y media, pues normalmente tanto los docentes como los libros de texto hacen la presentación inicial de la función cuadrática a partir de expresiones del tipo: "$y = ax^2 + bx + c$", con lo cual la representación inicial dada puede no resultar familiar para el estudiante lo cual dificulta su reconocimiento.

Más allá de aquella diferencia, el reconocimiento de la representación algebraica de una función y el hecho de relacionar ésta con otro tipo de representación es una actividad que no se realiza con facilidad, aun para las funciones más elementales como lo son la lineal y la cuadrática. En una investigación realizada por Díaz, Haye, Montenegro y Córdoba (2015) con 109 alumnos, el 40% de ellos no reconoció la expresión "$y = ax + b$" como la representación algebraica de la función cuya representación gráfica es una recta; sucediendo de manera muy parecida para la función cuadrática con el 30%, aun cuando la expresión dada era la usual ($y = ax^2 + bx + c$).

Una segunda actividad en la que se exige de los estudiantes el reconocimiento de un objeto matemático se muestra en la Figura 57:

Figura 57. Actividad de reconocimiento



En esta actividad lo que se propone explícitamente es concerniente a la habilidad de reconocimiento, relacionando representaciones algebraicas y las representaciones gráficas de cuatro funciones diferentes. Recuperamos a continuación el diálogo entre Ximena y Jessica en el desarrollo de esta actividad:

- Ximena: pues la única que es línea, línea es ésta [señala la gráfica que se presenta en la Figura 57 con color verde]

- Jessica: O sea que esa es ¿Cuál?, ¿equis?

- Ximena: Si tiene que ser esa.

- Jessica: ¿Y de las otras?

- Ximena: Pues de lo que hicimos ahorita la de raíz va así hacia abajo [señala con las manos la concavidad de la función $f(x) = \sqrt{x}$]

- Jessica: Y la del cuadrado tiene que ser una cosa así [con sus manos realiza la forma de una parábola]

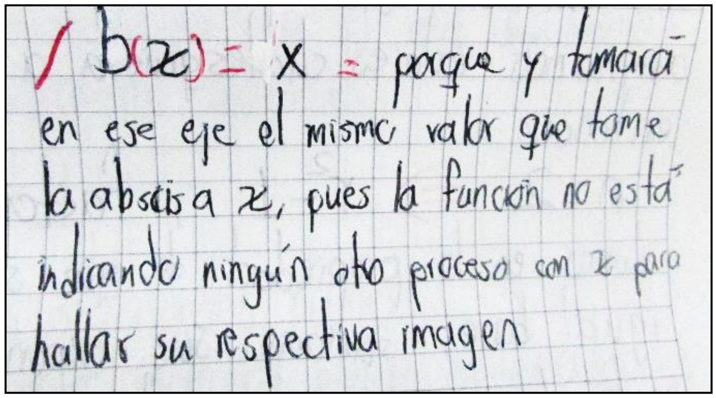
- Ximena: O sea que si es de este lado va hacia arriba, pero aquí hay dos que van hacia arriba [se refiere de nuevo a la concavidad de la función y las funciones representadas con color azul y rojo en la Figura 57

- Jessica: bueno ya hay dos, ahora es mirar las otras a ver cuál es cuál.

Se puede inferir a partir del diálogo que existe un cierto nivel de reconocimiento por asociación de las representaciones gráficas presentadas con las representaciones algebraicas, como se expuso en la anterior actividad de reconocimiento, existe un factor que facilita la tarea pedida: el hecho de que las representaciones algebraicas sean las usuales: “$f(x) = x^2$” o “$f(x) = x^3$”. Además, para poder determinar cuáles son las representaciones algebraicas de las últimas funciones mencionadas las estudiantes deben recurrir a otros métodos, es decir, la actividad de reconocimiento necesita de una acción auxiliar, pues la generación de candidatos no fue suficiente para poder realizar la manera de forma completa.

Por su parte Jhoan y Sebastián presentan argumentos mucho más elaborados al momento de responder a esta actividad, como los presentados en la Figura 58:

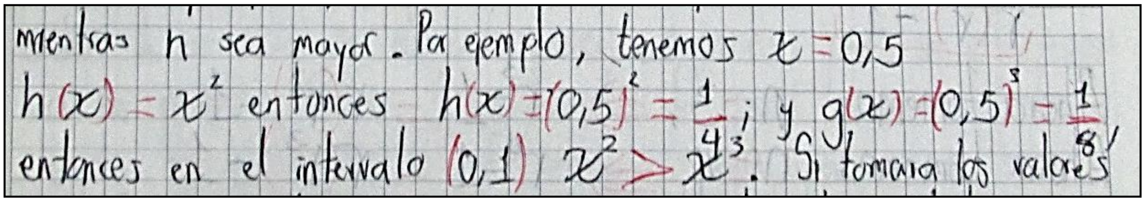
Figura 58. Justificación para la respuesta a la tarea de reconocimiento


/ $h(x) = x$ = porque y tomará en ese eje el mismo valor que tome la abscisa x, pues la función no está indicando ningún otro proceso con x para hallar su respectiva imagen

Se puede observar que justifican su elección de la función lineal a partir del argumento siguiente: "porque 'y' tomará en ese eje el mismo valor que tome la abscisa 'x', pues la función no está indicando ningún otro proceso en 'x' para hallar su respectiva imagen". De manera similar justifican la elección para las funciones "$f(x) = x^2$" y "$f(x) = x^3$" diciendo que cuando se tiene un elemento x, $0 < x < 1$, al elevar a un número menor que uno se cumplirá que $x^n < x$.

Sin embargo, la siguiente parte de la actividad no se realiza solamente como una actividad de reconocimiento pues para decidir cuál de las dos gráficas con concavidad hacia arriba representa la función "$f(x) = x^2$" y cual "$f(x) = x^3$", los estudiantes asignan valores particulares a la variable "x" y luego por comparación deciden cuál representación gráfica corresponde a cada representación algebraica, tal y como se muestra en la Figura 59.

Figura 59. Justificación para la elección de la representación algebraica correspondiente a las gráficas dadas


mientras h sea mayor. Por ejemplo, tenemos $x = 0,5$
$h(x) = x^2$ entonces $h(x) = (0,5)^2 = \frac{1}{4}$; y $g(x) = (0,5)^3 = \frac{1}{8}$
entonces en el intervalo $(0,1)$ $x^2 > x^3$. Si tomara los valores

La actividad matemática mostrada anteriormente por cada una de las parejas caso de estudio nos permite ver un comportamiento particular en términos de la habilidad de reconocimiento. Dicha habilidad se pone de manifiesto cuando la tarea de reconocimiento pasa por discriminar entre las representaciones gráficas de una función cuadrática o cúbica y la representación gráfica de otras funciones; lo que nos permite considerar que el reconocimiento por asociación es una tarea más sencilla de realizar, pues el hecho de la generación de candidatos ya está dado.

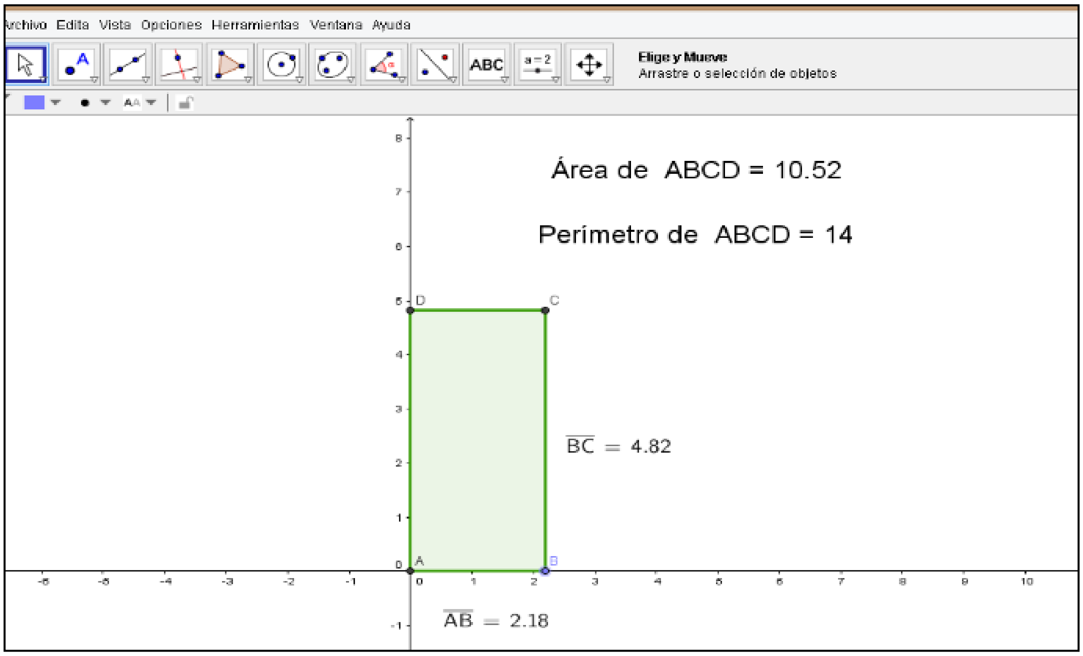
Duval hace hincapié en estos aspectos al mencionar que cuando los estudiantes se enfrentan a tareas de reconocimiento cualitativo, como el presentado en la segunda situación, se ven limitados al no poder usar la práctica habitual de trazado y lectura de los valores numéricos en las gráficas cartesianas. Además este tipo de representaciones no sirven de nada para el estudiante cuando no son capaces de reconocer "*las características visuales de las curvas notables en matemáticas*" (Duval, 2006, p.151).

Como se ha podido observar tanto de la justificación en el texto de Jhoan y Sebastián, como en el diálogo de Ximena y Jessica, existe un cierto nivel de reconocimiento que les permite a los estudiantes discriminar entre las funciones "$f(x) = x$" y "$f(x) = x^2$" o "$f(x) = x^3$" a partir del reconocimiento de una característica visual de la representación gráfica, el tipo de trazo que corresponde a cada una de ellas (línea recta o curva). Sin embargo, cuando se trata de discriminar entre las dos últimas funciones mencionadas existe mayor dificultad y los estudiantes recurren a procedimientos como la asignación de valores específicos a la variable para poder determinar cuál representación gráfica corresponde a cada una de las funciones. Este tipo de oposición visual es de índole similar al mencionado por Duval cuando se trata de discriminar entre representaciones gráficas de funciones lineales: "[…] *ciertas oposiciones visuales son más difíciles de reconocer que otras: por ejemplo, la oposición entre* $a > 1$ *o* $a <$

1*, la cual a menudo se confunde visualmente con otro contraste, es más difícil que la oposición* $a > 0 \ o \ a < 0$” (2006, p. 152).

Existen otros comportamientos que dan cuenta del reconocimiento como lo son aquéllas actividades en que el estudiante debe determinar para una situación específica, cuáles son las magnitudes que se encuentran involucradas en dicha situación y de ellas establecer cuáles varían y cuáles permanecen constantes. Tareas de este tipo pueden encontrarse en la Actividad del taller Máximo Rectángulo (la cual se presentó en los apartados 0 y 0) donde se presenta la representación digital mostrada en la Figura 60.

Figura 60. Representación digital presentada en la Actividad 11

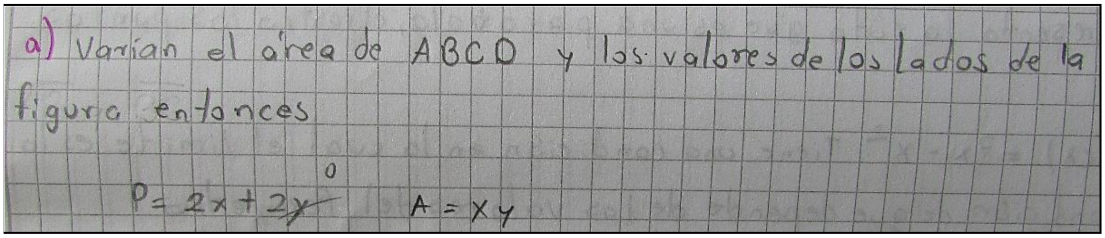


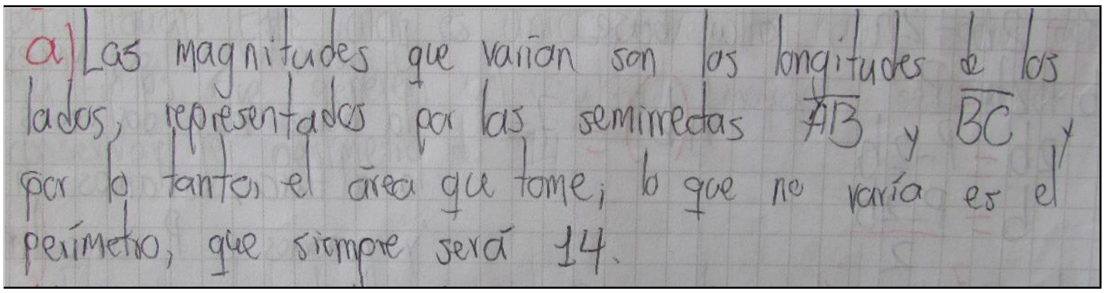
A partir de dicha representación digital los estudiantes deben contestar a los siguientes interrogantes:

- ¿Qué magnitudes varían? ¿Qué magnitudes no varían?
- ¿De qué magnitud o magnitudes variables depende el área del rectángulo?
- ¿Qué valores puede tomar la base?
- ¿Qué valores puede tomar la altura?
- ¿Qué valores puede tomar el área?

Contestar a esos interrogantes exige de los estudiantes el reconocimiento de las magnitudes que allí intervienen y como mencionamos anteriormente, determinar las magnitudes que cambian. Podemos observar en la Figura 61 la respuesta obtenida de los dos casos de estudio para el primer interrogante:

Figura 61. Reconocimiento de las magnitudes variables y constantes para la representación mostrada en Figura 66

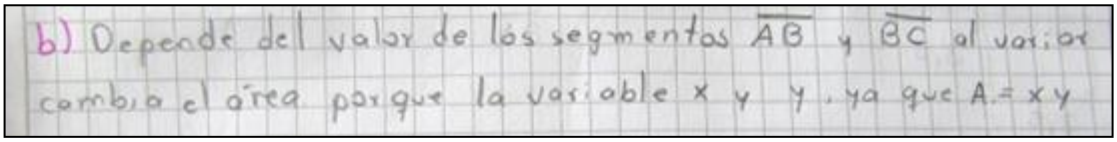




De las respuestas planteadas por los dos casos de estudio inferimos que existe reconocimiento de las magnitudes que se hallan involucradas en la situación, lo cual por supuesto puede estar influenciado por el hecho de que la representación mostrada a los estudiantes sea una representación dinámica digital. Observemos a continuación las repuestas planteadas a los demás interrogantes:

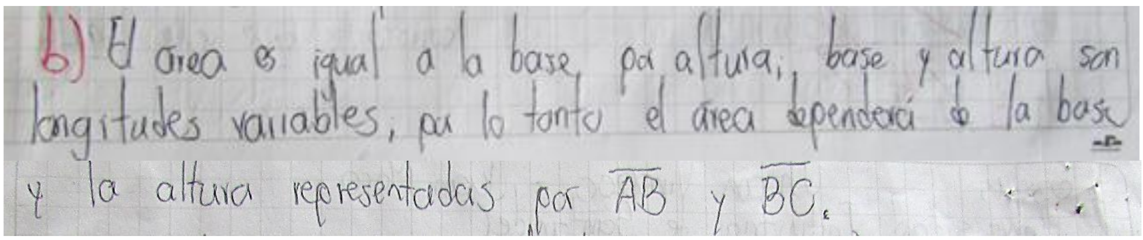
Jessica y Ximena expresan que el área del rectángulo depende del valor de los segmentos $\overline{AB}\ y\ \overline{\mathrm{BC}}$, en concordancia con lo expresado en la respuesta al primer literal, además de esto expresan la relación que se establece entre el área que están determinando y los valores de los segmentos (Figura 62)

Figura 62. Magnitudes de las que depende el área (Jessica y Ximena)



Jhoan y Sebastián por su parte presentan su respuesta de manera similar a lo hecho por Jessica y Ximena como se puede observar en la Figura 63:

Figura 63. Magnitudes de las que depende el área (Jhoan y Sebastián)



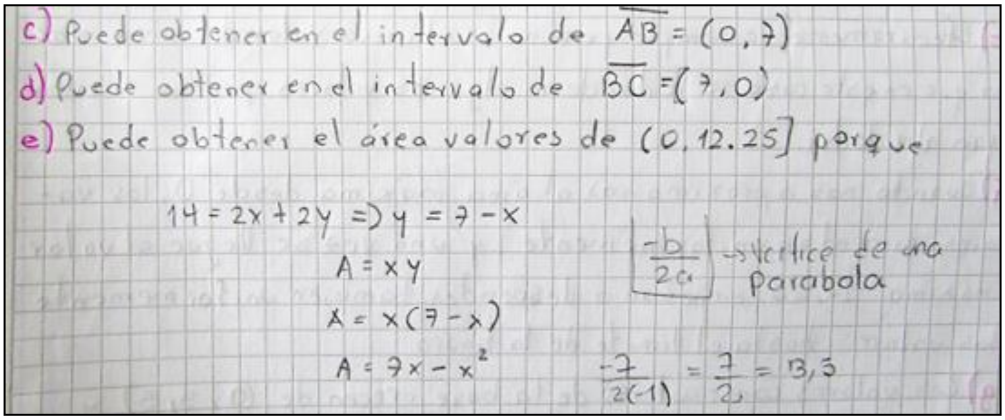
El hecho de que haya reconocimiento de las magnitudes que intervienen en la situación planteada y que puedan considerar cuales de ellas son variables y cuales constantes es un hecho sumamente valioso no solo en términos del reconocimiento sino, como lo mencionan Mesa y Villa[119], como parte del proceso de modelación viendo este como una herramienta didáctica y como el puente entre las matemáticas y el mundo real, ya que este proceso requiere: "*La determinación de los tipos de magnitud involucrados en la situación y el papel de los mismos al interior del modelo*"

Además de esa determinación, los mismos autores mencionan que dentro de ese mismo proceso también se hace importante "*la observación y cuantificación de las relaciones entre las magnitudes involucradas en la situación*" (Ídem); al respecto observamos en la Figura 64 las repuestas presentadas por Jessica y Ximena para

[119] MESA, Yadira Marcela; VILLA OCHOA, Jhony Alexánder. Elementos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 2011, vol. 1, no 21.p. 16

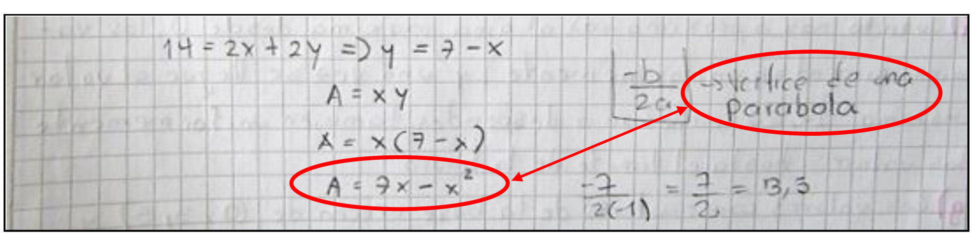
los siguientes literales de la actividad, los cuales nos dan cuenta de que no solamente se reconocen las magnitudes involucradas, sino que se determinan los valores que estas mismas magnitudes pueden tomar.

Figura 64. Respuestas para los interrogantes respecto a los valores que toman la base, la altura y el área



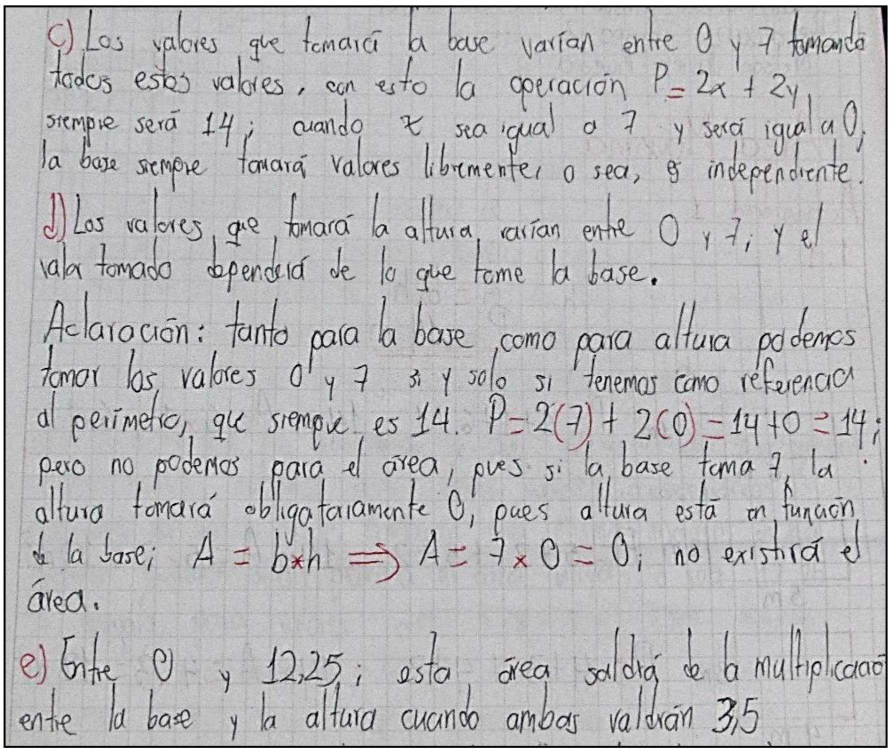
Es de notar también en este caso, que a diferencia de lo sucedido en la actividad de Transformación de funciones, al obtener la expresión algebraica que representa el área en función de uno de los lados del rectángulo se le asocia de manera inmediata una representación gráfica mediante las palabras “vértice” y “parábola” tal y como se pueden ver en la Figura 65. Esto último es un indicativo de que la habilidad de reconocimiento se ha empezado a potenciar en estas estudiantes, pues aun cuando la actividad no lo requiere, ellas ya han hecho el proceso de asociación con la representación gráfica que más adelante trabajarán dentro de la actividad.

Figura 65. Asociación de la representación algebraica con la palabra parábola que designa la representación gráfica



Por su parte Jhoan y Sebastián también realizan planteamientos similares con respecto a los valores que toman las variables base y altura y aun cuando no concluyen su planteamiento de la forma en que lo hacen Jessica y Ximena, las justificaciones son un poco más elaboradas y se usa en algunos casos un lenguaje más refinado con respecto a la actividad que se está realizando (ver Figura 66)

Figura 66. Respuestas para los interrogantes respecto a los valores que toman la base, la altura y el área



c) Los valores que tomará la base varían entre 0 y 7 tomando todos estos valores, con esto la operación $P = 2x + 2y$, siempre será 14; cuando x sea igual a 7 y será igual a 0, la base siempre tomará valores libremente, o sea, es independiente.

d) Los valores que tomará la altura varían entre 0 y 7, y el valor tomado dependerá de lo que tome la base.

Aclaración: tanto para la base como para altura podemos tomar los valores 0 y 7 si y solo si tenemos como referencia al perímetro, que siempre es 14. $P = 2(7) + 2(0) = 14 + 0 = 14$; pero no podemos para el área, pues si la base toma 7, la altura tomará obligatoriamente 0, pues altura está en función de la base; $A = b * h \Rightarrow A = 7 \times 0 = 0$; no existirá el área.

e) Entre 0 y 12,25; esta área saldrá de la multiplicación entre la base y la altura cuando ambas valdrán 3,5

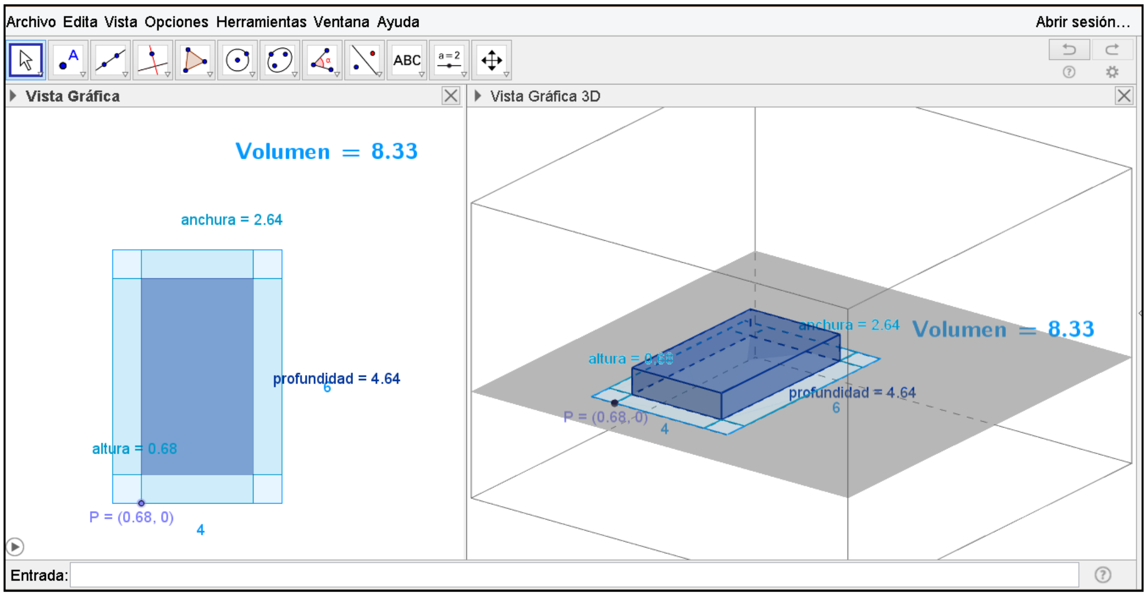
Podemos observar en la Figura 66**¡Error! No se encuentra el origen de la referencia.** que para el literal c, los estudiantes no solamente analizan los valores que puede tomar una de las variables sino que la reconocen como la variable independiente, de manera que en el literal d, además de analizar los valores que puede tomar la altura afirman que ese valor dependerá del valor que tome la base.

Este tipo de acciones que hemos descrito en los últimos párrafos, tanto para las acciones realizadas por Jessica y Ximena como para las realizadas por Jhoan y Sebastián, son consideradas por Carlson, Jacobs, Coe, Larson y Hsu[120] como acciones mentales que pueden dar cuenta del nivel en términos del razonamiento covariacional que estos estudiantes han alcanzado. Estas acciones serán las acciones mentales uno, dos y tres del marco conceptual propuesto por los autores antes mencionados y que en su orden son: *i)* coordinar el valor de una variable con los cambios en la otra, *ii)* coordinar la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra y *iii)* coordinar la cantidad de cambio de una variable con los cambios en la otra.

De igual manera acciones de este tipo son realizadas en el Taller Caja sin tapa (el cual se mostró en los apartados 3.2.7 y 3.3.2.7 y 3.3.1.2) dado que la actividad también presenta a los estudiantes una representación digital (ver Figura 67) a partir de la cual los estudiantes deben reconocer las magnitudes que se encuentran allí involucradas, así como determinar cuáles son variables y cuáles son constantes y establecer relaciones entre ellas.

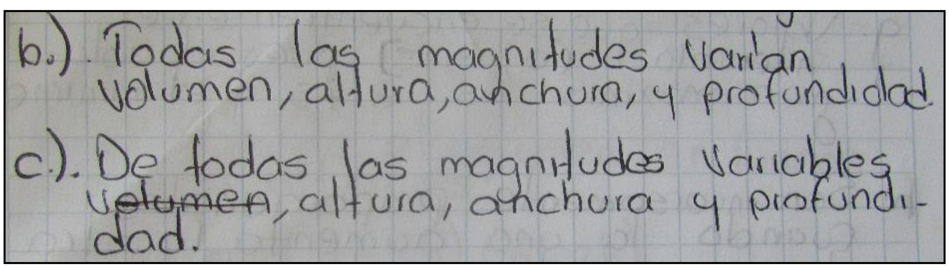
Figura 67. Representación digital mostrada en la Actividad Caja sin Tapa

[120] CARLSON, Marilyn, et al. Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, 2003, vol. 8, no 2, p. 121-156.



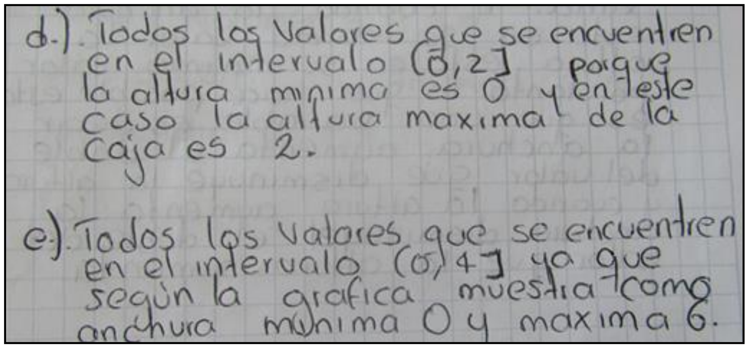
En la Figura 68 podemos observar como Ximena reconoce las magnitudes que se encuentran relacionadas en la situación de la caja y expresa que el volumen depende de las demás magnitudes.

Figura 68. Reconocimiento de las magnitudes involucradas y su condición de variables



Así mismo determina los posibles valores que pueden tomar dichas magnitudes como se puede observar en la Figura 69; cabe destacar que esta respuesta de Ximena está supeditada a la lectura que hace de la representación digital mostrada, pues se puede leer en la respuesta que: “según la gráfica muestra como anchura mínima 0 y máxima 6”. Podemos observar comportamientos similares en las respuestas presentadas por Jhoan tanto para el reconocimiento de las magnitudes involucradas (Figura 70) como para la asignación de los valores posibles que toman las variables (Figura 71).

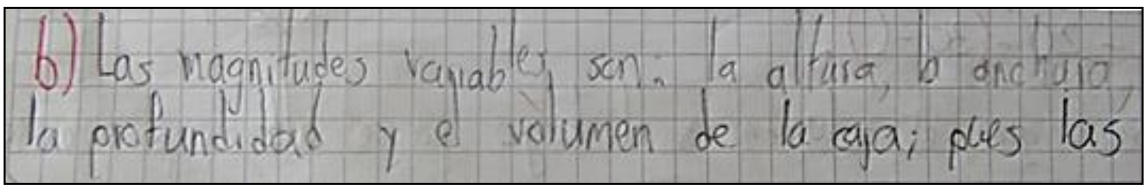
Figura 69. Determinación de los valores que pueden tomar las variables



d.) Todos los valores que se encuentren en el intervalo (0,2] porque la altura minima es 0 y en este caso la altura maxima de la caja es 2.

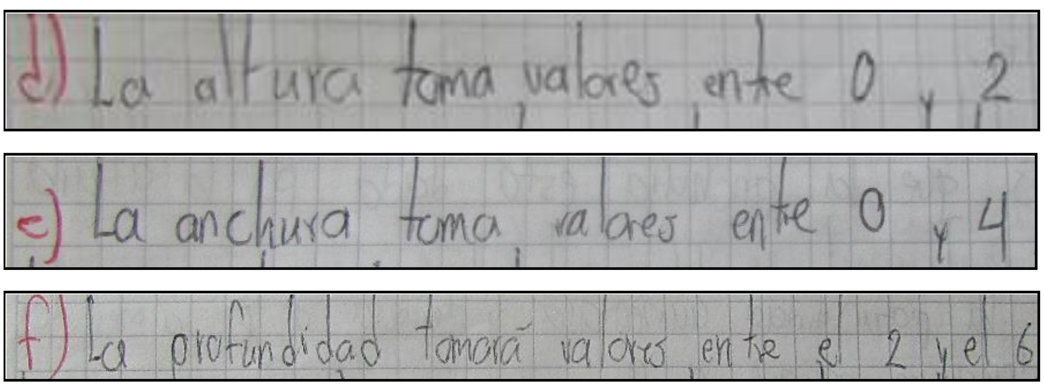
e.) Todos los valores que se encuentren en el intervalo (0,4] ya que según la grafica muestra como anchura minima 0 y maxima 6.

Figura 70. Reconocimiento de las magnitudes variables



b) Las magnitudes variables son: la altura, la anchura, la profundidad y el volumen de la caja; pues las

Figura 71. Valores que toman las magnitudes involucradas



d) La altura toma valores entre 0 y 2

e) La anchura toma valores entre 0 y 4

f) La profundidad tomara valores entre el 2 y el 6

Se evidencia con lo mostrado hasta ahora que los estudiantes que han sido nuestro caso de estudio realizan ciertas acciones relacionadas con la habilidad de reconocimiento de representaciones, tales como son el determinar las magnitudes involucradas en una situación de cambio y variación, la condición de dichas magnitudes en el sentido de si varían o permanecen constantes y la asignación de los valores posibles que pueden tomar dichas magnitudes; esto no nos sorprende puesto este tipo de trabajo se realiza con los estudiantes desde edades tempranas de su educación básica y se refuerzan en la educación media. En particular los estándares básicos de competencias del Ministerio de Educación mencionan que al terminar el séptimo grado el estudiante debe estar en la capacidad de: *“Reconocer el conjunto de valores de cada una de las cantidades variables ligadas entre sí en situaciones concretas de cambio (variación)”* (MEN, 2006, p.85).

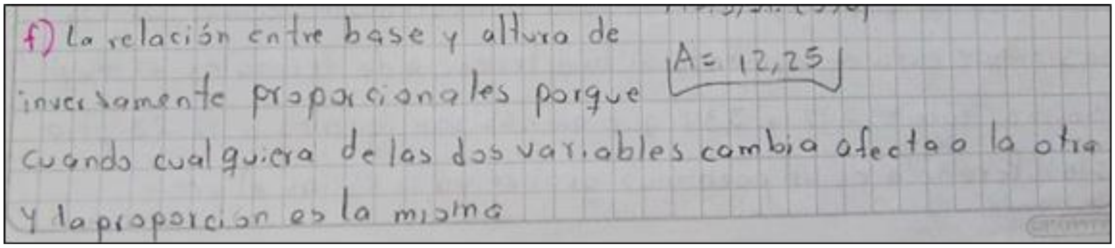
Otras acciones que los estudiantes empiezan a potenciar a estas alturas del curso son las relacionadas con la asociación entre representaciones en diferentes registros, las cuales como mostrábamos al inicio de este apartado se realizaban con cierta dificultad o eran completamente equivocadas en las actividades de inicio del curso.

4.2 INTERPRETAR REPRESENTACIONES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

En los términos mencionados en el capítulo II, las acciones que refieren la interpretación de las representaciones de los objetos matemáticos en situaciones de variación son aquellas en las que el individuo obtenga de la representación dada del objeto matemático alguna información que le permita inferir, tomar decisiones, comunicar o argumentar para dar solución a una determinada actividad. Dentro de esas acciones considerábamos el decidir cómo y en qué cantidad varían las magnitudes involucradas en una determinada circunstancia.

De estas acciones podemos referir, continuando con el taller Área Máxima que mencionamos en el apartado anterior, la descripción de la relación entre las variables base y altura que realizan Jessica y Ximena, tal y como se puede ver en la Figura 72.

Figura 72. Relación entre las variables base y altura


f) La relación entre base y altura de
inversamente proporcionales porque
cuando cualquiera de las dos variables cambia afecta a la otra
y la proporción es la misma

A= 12,25

Podemos ver que si bien se establece una relación entre las magnitudes variables involucradas ésta no corresponde a una relación funcional expresada en el lenguaje natural, sino únicamente a una interpretación de la forma en que las cantidades cambian, señalada mediante la expresión inversamente proporcional.

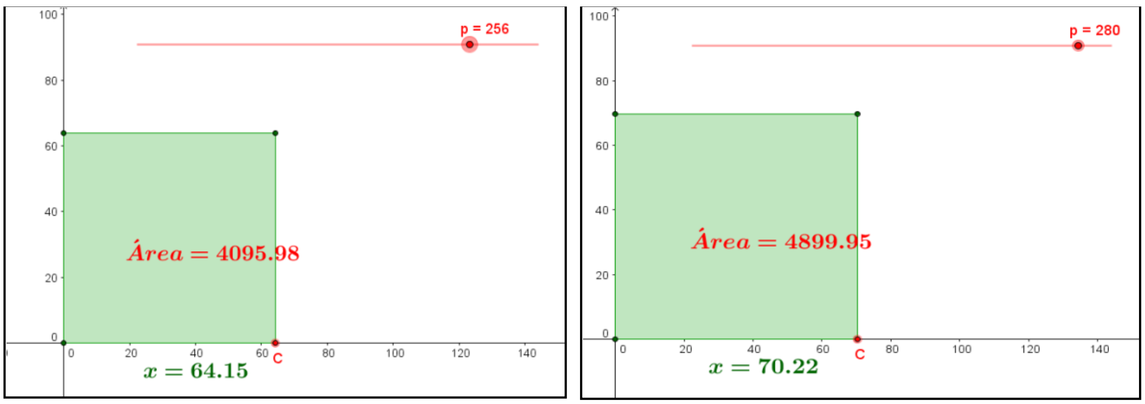
Cabe notar de lo encontrado en esta misma investigación que los conceptos de proporcionalidad no están claramente estructurados y que muchas veces los estudiantes no analizan la verdadera relación existente entre las magnitudes involucradas, sino que acuden al siguiente procedimiento: Si ambas magnitudes aumentan entonces son directamente proporcionales, si una aumenta y otra disminuye entonces son inversamente proporcionales. Esto puede ser debido a lo que menciona Ponce[121] respecto a que el tipo de trabajo que se realiza en el aula respecto a situaciones de proporcionalidad se centra en los métodos de solución y muy poco en el análisis de las condiciones de los problemas:

> En efecto, los problemas forman parte del material de trabajo, ya están seleccionados por el docente y se da por supuesto que están para ser resueltos, porque cada uno de ellos representa una relación de proporcionalidad siempre que no se señale específicamente lo contrario. En otras palabras, su condición de problema de proporcionalidad no es cuestionada ni examinada en ningún momento de la clase. (p.30)

[121] PONCE, Héctor. *Enseñar y aprender matemática: propuestas para el segundo ciclo*. Noveduc Libros, 2004.

En la actividad 2 del Taller Área Máxima se muestra la representación digital que se puede observar en la Figura 73, la cual permite modificar los valores para el perímetro y cuya instrucción es hallar el valor de “x” que convierta el área en máxima y luego pide establecer la relación existente entre el perímetro y el valor de la “x” para la cual el área es máxima.

Figura 73. Representación digital mostrada en la actividad 2 del Taller Área máxima

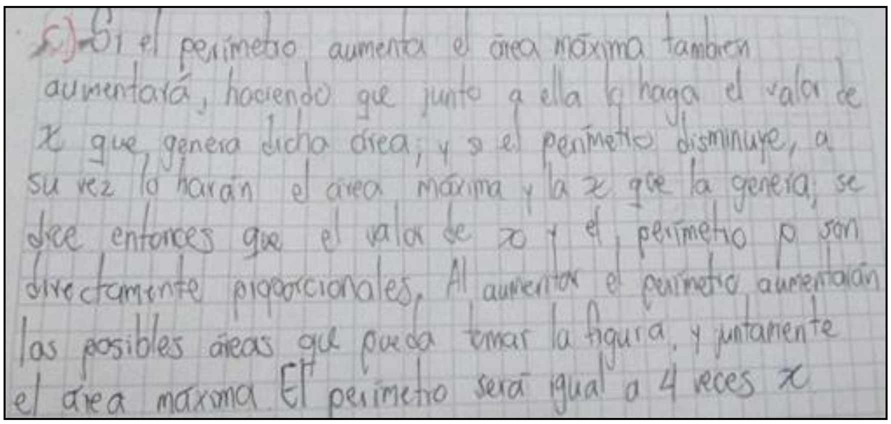


En la Figura 74, podemos ver como Jhoan y Sebastián recurren a un planteamiento similar al expresado por Jessica y Ximena para la actividad anterior siguiendo el procedimiento enunciado en cuanto al aumento o disminución de las magnitudes. Es importante reconocer que existe la interpretación correcta en términos de la variación de las magnitudes o una coordinación de la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra, si lo queremos mencionar desde el punto de vista de Carlson, Jacobs, Coe, Larson y Hsu[122] pero suele reiterarse el problema con la asignación de los conceptos de proporcionalidad. Interpretándolo desde el punto de vista de los mismos autores, no existe coordinación de la razón de cambio

[122] CARLSON, Marilyn, et al. Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, 2003, vol. 8, no 2, p. 121-156.

promedio de la función con los incrementos uniformes del cambio en la variable de entrada.

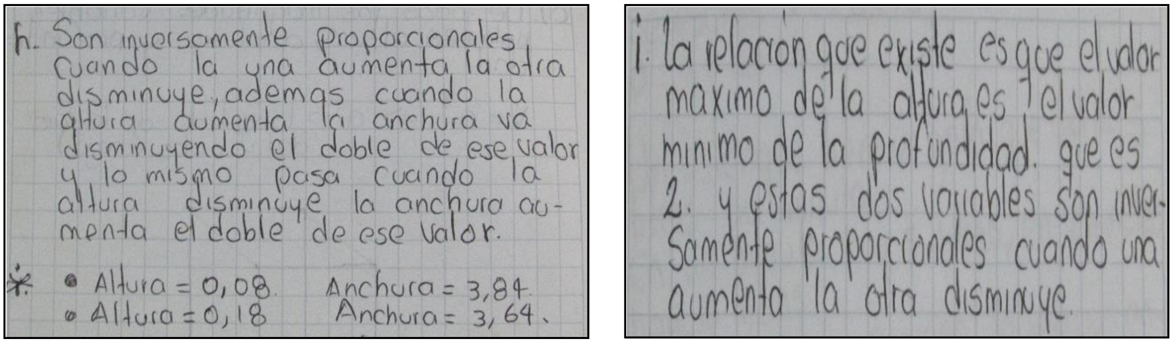
Figura 74. Relación establecida entre el perímetro y el valor de “x”



5) Si el perímetro aumenta el área máxima también aumentará, haciendo que junto a ella lo haga el valor de x que genera dicha área; y si el perímetro disminuye, a su vez lo harán el área máxima y la x que la genera; se dice entonces que el valor de x y el perímetro son directamente proporcionales. Al aumentar el perímetro aumentarán las posibles áreas que pueda tomar la figura, y juntamente el área máxima. El perímetro será igual a 4 veces x

Para planteamientos similares del taller Caja sin tapa que ya se han mencionado en apartados anteriores suelen ocurrir las mismas situaciones es decir se coordinan la dirección del cambio de una variable con los cambios en la otra, y se establecen relaciones de proporcionalidad que aunque no siempre son adecuados, en este caso si responden efectivamente a la relación entre las variables involucradas en la situación como puede observarse en la Figura 75, donde Ximena responde a los cuestionamientos acerca de las relaciones entre la anchura y la altura, y entre la profundidad y la altura:

Figura 75. Relaciones entre las variables involucradas para el taller de la Caja sin tapa

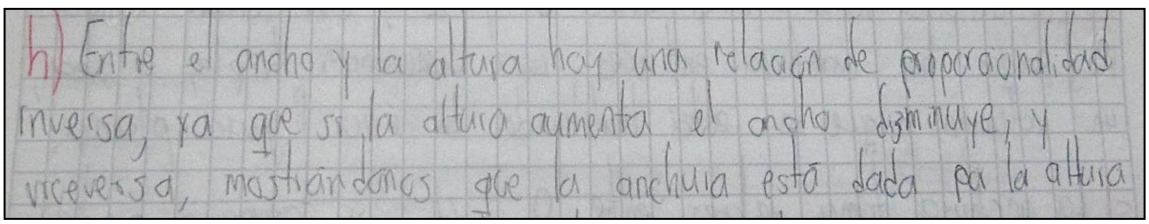

h. Son inversamente proporcionales cuando la una aumenta la otra disminuye, ademas cuando la altura aumenta la anchura va disminuyendo el doble de ese valor y lo mismo pasa cuando la altura disminuye la anchura aumenta el doble de ese valor.

* • Altura = 0,08. Anchura = 3,84.
• Altura = 0,18 Anchura = 3,64.

i. la relacion que existe es que el valor maximo de la altura es el valor minimo de la profundidad. que es 2. y estas dos variables son inversamente proporcionales cuando una aumenta la otra disminuye.

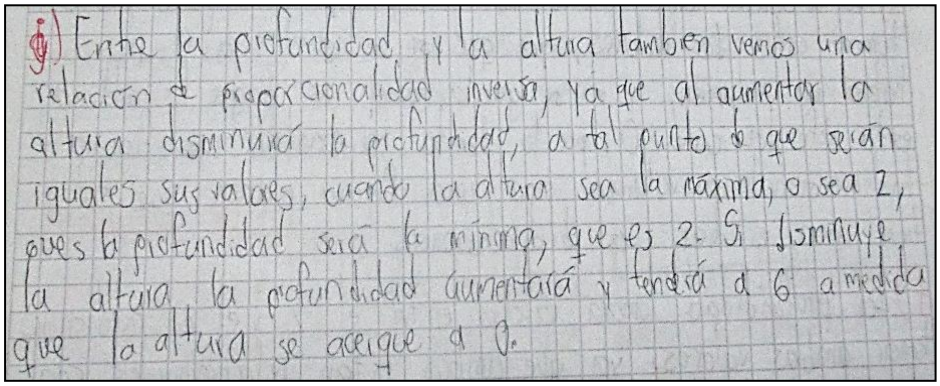
Lo mismo se puede observar en el planteamiento realizado por Jhoan y Sebastián mostrado en la Figura 76

Figura 76. Relación entre el ancho y la altura para la caja sin tapa


h) Entre el ancho y la altura hay una relación de proporcionalidad inversa, ya que si la altura aumenta el ancho disminuye, y viceversa, mostrandonos que la anchura está dada por la altura

La Figura 77 nos permite ver el planteamiento realizado por los mismos estudiantes para la relación entre las otras dos variables que se encuentran involucradas. Además de ello realizan otra acción que podemos considerar dentro de la habilidad de interpretación de representaciones: determinan y cuantifican el cambio de una variable con respecto a la otra y hallan valores máximos y mínimos de la relación existente entre las magnitudes.

Figura 77. Relación entre la profundidad y la altura para la caja sin tapa

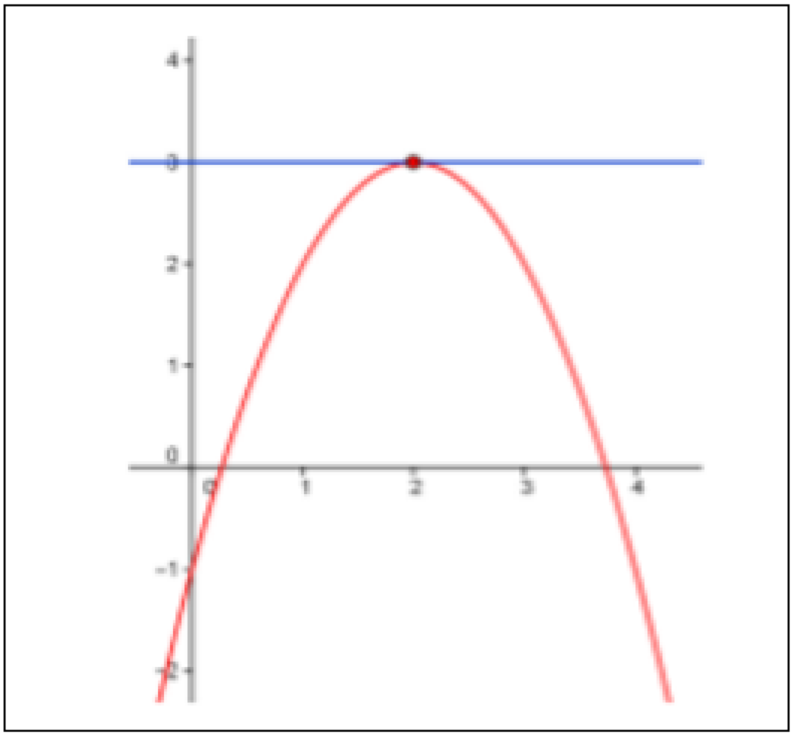

g) Entre la profundidad y la altura tambien vemos una relación de proporcionalidad inversa, ya que al aumentar la altura disminuirá la profundidad, a tal punto de que serán iguales sus valores, cuando la altura sea la máxima, o sea 2, pues la profundidad será la minima, que es 2. Si disminuye la altura, la profundidad aumentará y tenderá a 6 a medida que la altura se acerque a 0.

Recuperamos a continuación uno de los problemas que resuelven los estudiantes en la prueba final del curso, la cual se realiza de manera tradicional y para la cual los estudiantes consignaron sus respuestas en las hojas de procesos:

Problema 5 (El número del problema no corresponde al orden en el que son presentados en la prueba a los estudiantes, la prueba presenta trece problemas iguales para todos pero en orden aleatorio)

En la siguiente gráfica la recta y=3, es tangente a la función $f(x)$ en el punto (2 ,3).

Figura 78. Gráfica presentada en el problema 5



Según la información anterior es correcto afirmar que:

a) $f'(2) = 0$

b) $f'(2) > 0$

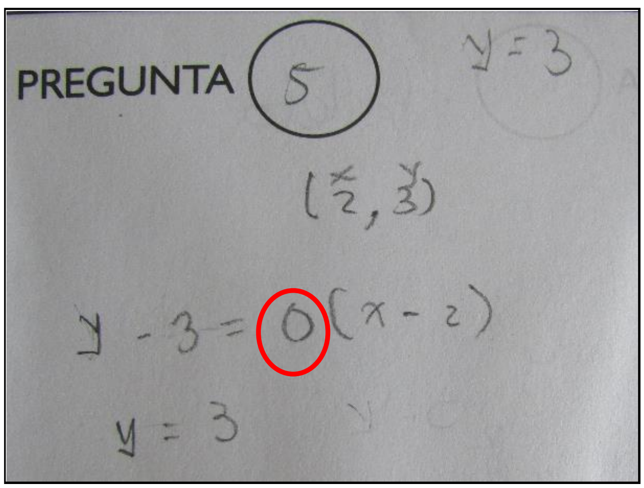
c) $f'(2) = 3$

d) $f'(2)\ no\ existe$

e) No sabe

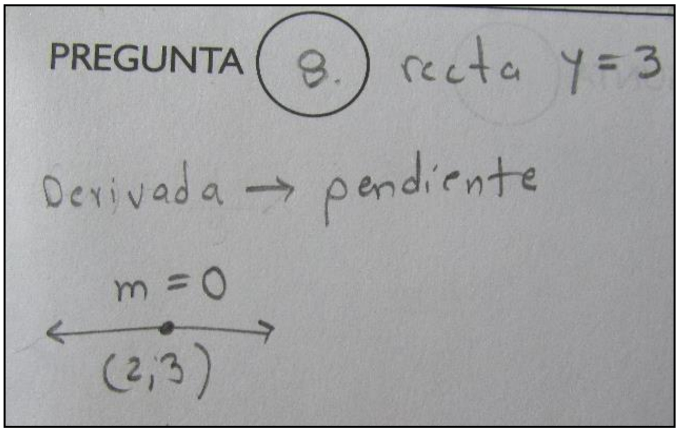
Una de las acciones que nos permite ver de manera más fidedigna si el estudiante está desarrollando la habilidad de interpretación es aquella que consiste en obtener una respuesta para un problema o ejercicio a partir de una representación en cualquier registro, mediante la simple inspección u observación de la misma, sin necesidad de otro tipo de acciones. Este es precisamente un problema que nos permite observar tal característica, puesto que para solucionar el problema se debe interpretar que la pendiente de la recta tangente es igual a la derivada evaluada en dicho punto. En la Figura79, Sebastián realiza una parte de la interpretación requerida, es decir se da cuenta que la pendiente en el punto $(2,3)$ es cero, lo cual es expresado utilizado la ecuación punto pendiente "$Y - Y_1 = m(X - X_1)$. Sin embargo, no existe evidencia del resto del proceso, es decir no sabemos si además de interpretar la recta tangente a la curva como una recta con pendiente cero, el estudiante pudo realizar el otro proceso de interpretación y reconocer esa pendiente como la derivada en el punto.

Figura 79. Interpretación realizada por Sebastián



La interpretación realizada por Ximena es mucho más clara, como se puede ver en la Figura 80, donde mediante una flecha se asocian los dos conceptos: derivada y pendiente. Luego de esta asociación que demuestra la correcta interpretación, Ximena realiza el proceso de interpretación que ya habíamos observado en Sebastián, que la recta tangente al punto tiene una pendiente igual a 0, lo cual le permite a Ximena resolver con exactitud el ejercicio.

Figura 80. Interpretación realizada por Ximena



Según mencionan Sánchez-Matamoros, García y Llinares[123], es necesario comprender la forma en la que los estudiantes dotan de significado al concepto de derivada puesto que:

> […] algunos estudiantes son capaces de resolver los ejercicios que se les proponen con la aplicación correcta de las reglas de derivación; sin embargo, tienen dificultades cuando necesitan manejar el significado de la noción de derivada, ya sea a través de su expresión analítica, como límite del cociente incremental, o en su interpretación geométrica, como pendiente de la recta tangente. (p.269)

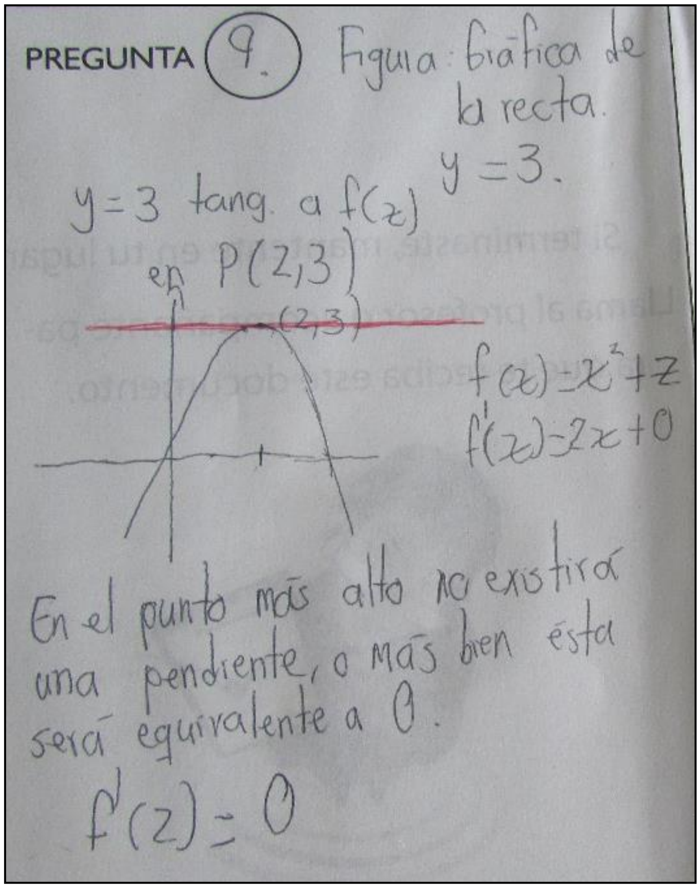
Lo mencionado por los autores es producto de la construcción de un significado apenas parcial del concepto derivada. Aunque a partir de los productos no podemos establecer si existe una construcción de significado total para el concepto de derivada, si podemos inferir que la comprensión del mismo se ha realizado al menos a nivel local

[123] SÁNCHEZ-MATAMOROS, Gloria; GARCÍA, Mercedes; LLINARES, Salvador. La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 2008, vol. 11, no 2, p. 267-296.

En la Figura 81 se muestran las interpretaciones realizadas por Jhoan para responder al problema planteado. Podemos observar que ha realizado tres interpretaciones sobre la gráfica que le ha sido presentada: Identifica al punto dado $(2,3)$ como el punto máximo de la función, asocia la recta tangente con una recta de pendiente cero y finalmente asocia esa pendiente con el valor de la derivada para el punto. Si bien, como lo menciona Badillo[124] la comprensión de la derivada pasa por lo tocante a la relación entre lo global (la derivada como función) y lo local (la derivada en un punto vista como la pendiente de la recta tangente); creemos que al menos desde el punto de vista concerniente a la interpretación, el concepto de derivada a nivel local ha sido ampliamente comprendido.

Figura 81. Interpretación realizada por Jhoan

[124] BADILLO JIMÉNEZ, Edelmira Rosa, et al. La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia:" la derivada un concepto a caballo entre la matemática y la física". 2003



La interpretación de las representaciones de los objetos matemáticos es a nuestro parecer la habilidad que más se puede desarrollar y potenciar mediante el enfoque de resolución de problemas, puesto que la interpretación viene convirtiéndose en una habilidad necesaria no solo para el proceso de representación sino para otros procesos como el de comunicación, razonamiento y demostración. Esto último considerando que para la solución de cualquier situación que esté relacionada con uno de estos procesos matemáticos, partimos de una representación de un objeto matemático y debemos establecer ciertas características o cierta información a partir de dicha representación.

En el caso de los estudiantes caso de estudio, la interpretación de las representaciones de objetos matemáticos se ha visto fortalecida a lo largo del curso gracias al constante trabajo enfocado en la resolución de problemas. Como producto de ello los cuestionamientos realizados tanto en las últimas actividades del curso, como en la prueba final que dependían del uso de una buena interpretación han tenido respuestas bastante satisfactorias.

4.3 CONSTRUIR REPRESENTACIONES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

De las reflexiones realizadas en el capítulo II, podemos considerar que las acciones que nos describen la habilidad para construir representaciones de los objetos matemáticos son aquellas donde se genera una nueva representación de dicho objeto (nueva en términos de que no se encuentre dada para el estudiante en dicha actividad) aun cuando dicha representación no presente todas las características correctas de dicha representación en el registro en que se muestra.

Para el caso de la construcción de gráficas podemos considerar que la construcción de representaciones pasa por la selección y etiquetado de los ejes, la selección de la escala, la identificación de la unidad y el trazado. Es decir, se tienen en cuenta características de objetos "paramatemáticos" en los términos mencionados por Chevallard[125].

Tomamos como primer ejemplo de acciones de este tipo las realizadas por los estudiantes caso de estudio para responder a la primera actividad del Taller Transformación de funciones (mostrado en los apartados 0 y 0):

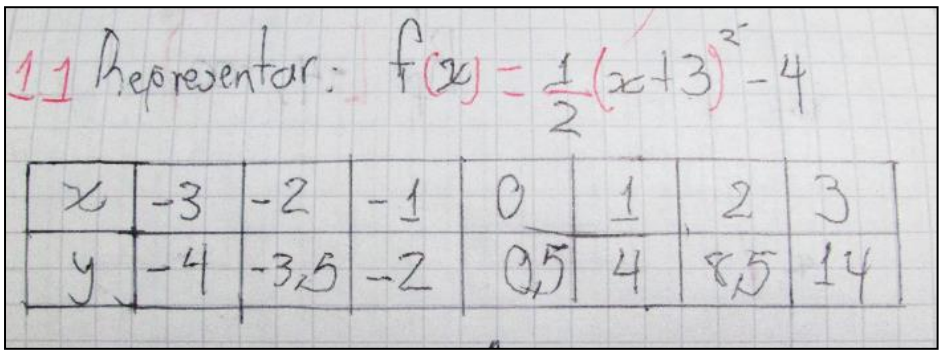
- En tu hoja de trabajo representa gráficamente la función $=\frac{1}{2}(x+3)^2-4$

[125] CHEVALLARD, Yves. La transposición didáctica. *Del saber sabio al saber enseñado*, 1991, vol. 3.

En dicha actividad se le solicita a los estudiantes obtener una representación gráfica de la función a partir de la representación algebraica de la misma. Observamos a continuación lo realizado por los estudiantes:

En la Figura 82 los estudiantes Jhoan y Sebastián construyen una representación tabular para la función que les ha sido presentada en el registro algebraico, aun cuando su objetivo final es obtener una representación gráfica de la función.

Figura 82. Construcción de una representación tabular de la función dada (Jhoan y Sebastián)



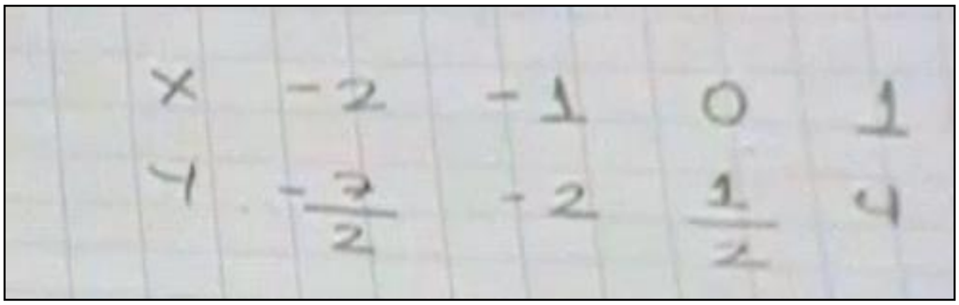
Podemos observar que para realizar esta construcción los estudiantes han elegido valores enteros que se encuentran alrededor del cero, lo cual es una situación muy común dado el estilo de enseñanza recibido. Por lo general la graficación de funciones se realiza a partir de sustituir una cantidad de valores para una expresión algebraica dada, a fin de obtener una representación tabular de la misma (Hitt)[126]

De igual forma como ha sido iniciada la actividad por Jhoan y Sebastián, Jessica y Ximena utilizan valores enteros cercanos al cero (tanto negativos como positivos)

126 HITT, Fernando. Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. Cortés, y F. Hitt (Eds.). *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 81-107). Morelia: Morevallado Editores. 2005

para construir una representación tabular de la expresión algebraica que les fue dada inicialmente (Figura 83)

Figura 83. Construcción de una representación tabular de la función dada (Jessica y Ximena)



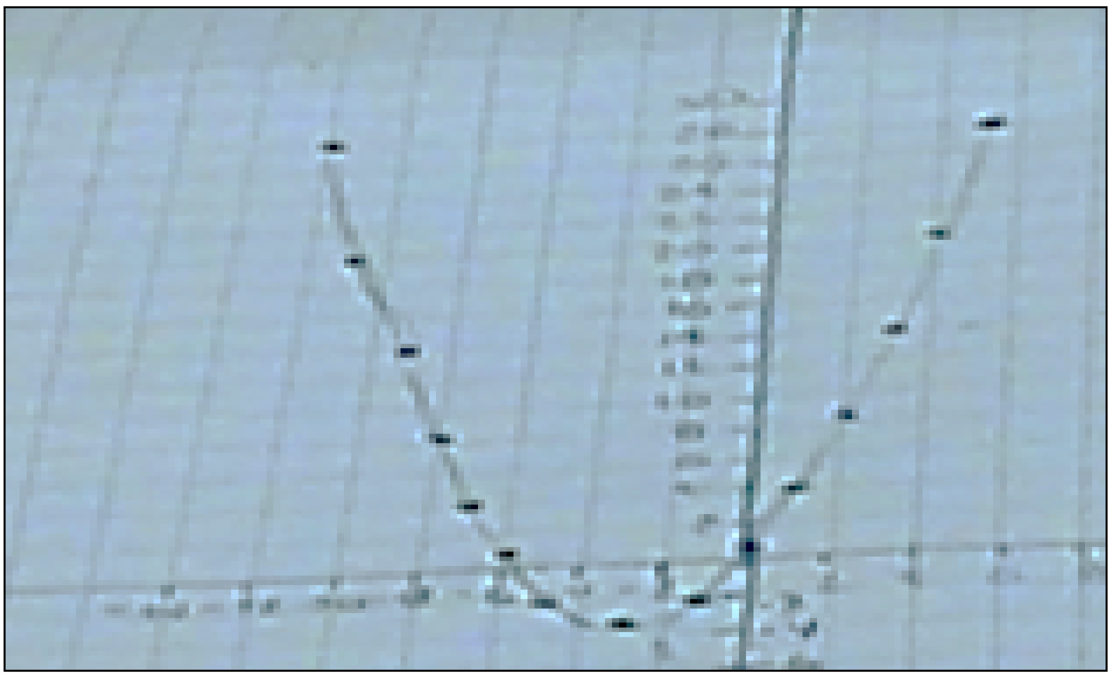
La actividad de construcción realizada por las dos parejas casos de estudio reflejan un comportamiento automático como el ya mencionado antes, donde no se realiza siquiera un análisis de la función a graficar, sino que enseguida se escogen valores (enteros y cercanos al cero) y se utiliza el reemplazo para construir una representación en el registro tabular. Aunque la actividad de construcción de la representación tabular está automatizada y en términos generales se realiza de forma eficiente, salvo algunas excepciones por errores de cálculo, este automatismo puede generar, como lo menciona Hitt[127], dos tipos de conflictos: la falta de visión global sobre el comportamiento de las funciones y la concepción de función como función continua.

Una vez que los estudiantes han construido la representación tabular de la función dada proceden a construir la representación gráfica de la misma como podemos observar en la Figura 84.

[127] HITT, Fernando. Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. Cortés, y F. Hitt (Eds.). *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 81-107). Morelia: Morevallado Editores. 2005

De nuevo la tarea de construcción parece estar automatizada y estar siendo realizada con éxito (no estamos considerando si la construcción de la representación tabular fue exitosa del todo o presenta errores). Sin embargo, este método de graficación tradicional: *“ha considerado como secundario lo variacional y privilegiado el trazado del dibujo de la gráfica de la función a partir de ubicar un conjunto discreto de puntos”* (Dolores y Salgado[128]).

Figura 84. Construcción de la representación gráfica de la función dada (Jessica y Ximena)

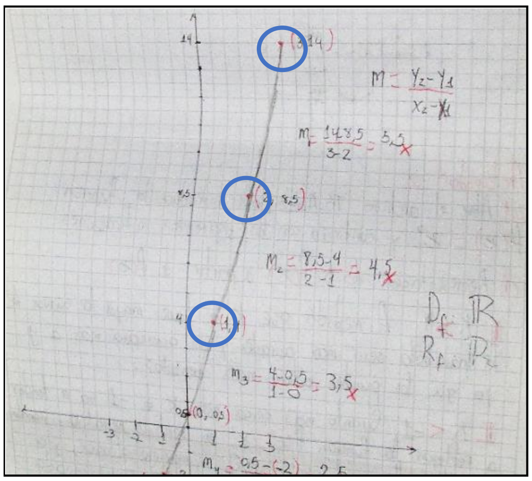


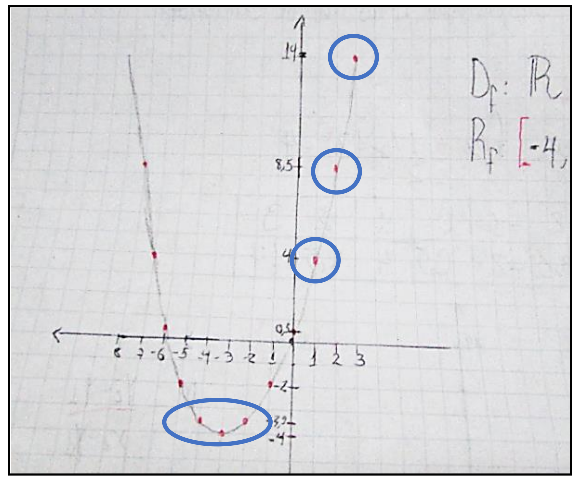
Se hace evidente cómo lo que más se resalta de la representación gráfica construida son los puntos que se han obtenido a partir de la representación tabular (Figura 85). La obtención de la curva que se encuentra entre dos puntos obedece

[128] DOLORES, Crisólogo; SALGADO, Gerardo. Elementos para la graficación covariacional. *Números*, 2009, no 72, p. 63-74.

de nuevo a reglas automatizadas pues de ninguna forma se analiza el comportamiento de la función en el intervalo entre los dos puntos graficados inicialmente. Dolores[129] menciona que los estudiantes por lo general tratan con las funciones de forma puntual, es decir trazan y leen puntos pero no analizan el comportamiento global de la función o en intervalos definidos.

Figura 85. Construcciones de la representación gráfica realizadas por Jhoan y Sebastián





Ahora bien, cabe destacar que en el proceso de construcción de la representación gráfica los objetos paramatemáticos han sido correctamente escogidos y utilizados, no existe problema con la ubicación de los ejes, las escalas seleccionadas son correctas y los trazados de las curvas corresponden a curvas suaves. En términos del marco conceptual de Carlson, Jacobs, Coe, Larson y Hsu (2003) podríamos decir que los estudiantes coordinan la razón de cambio instantánea de la función con los cambios continuos en la variable independiente, pues en la construcción de la representación gráfica de la función dada los puntos de inflexión y las

[129] DOLORES, Crisólogo. Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 2004, vol. 7, no 3, p. 195-218.

concavidades son correctamente establecidas; aun cuando esto no se haga de manera espontánea sino como producto de la automatización de otros procedimientos.

Retomamos ahora otra actividad en la que se evidencia la construcción de representaciones de objetos matemáticos: en el taller Función parte entera se presenta el siguiente enunciado:

1. En Bucaramanga, en un minutero de telefonía celular se cobra \$100 por minuto o fracción.

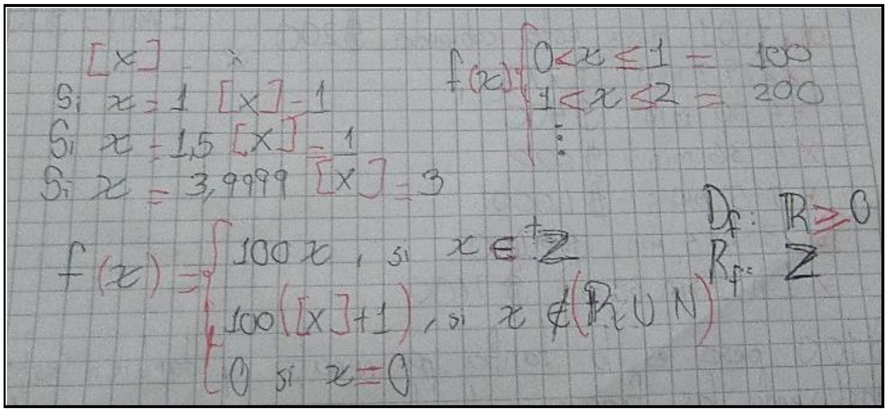
a) ¿Cuánto cuesta una llamada de 1:01 *min*, 2:99 *min*, 4:00 *min*, 5:36 *min*, 9:5 *min*, 23:485 *min*, 1 *h*15*min*32*seg*?

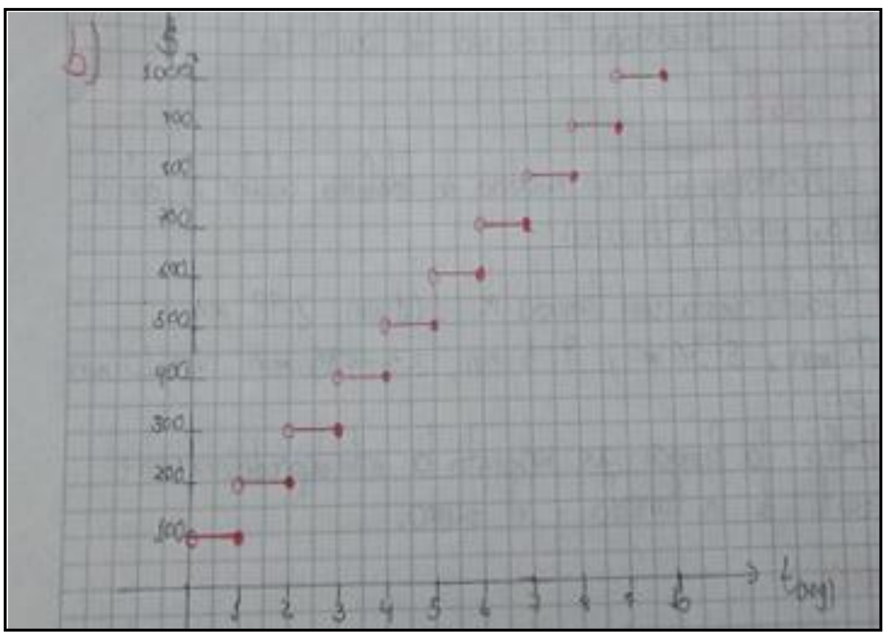
b) Halla la función que representa la interdependencia entre el costo de la llamada y el tiempo.

El literal b) de dicha actividad no hace referencia a un tipo de representación específico o a un registro de representación en particular, de manera que los estudiantes podían construir una representación cualquiera que describiera la interdependencia entre las magnitudes allí involucradas.

En la Figura 86 se puede observar la construcción realizada por Jhoan y Sebastián para responder al literal b) propuesto, por un lado se hace la representación en el registro gráfico y por otro se construye una representación algebraica a partir de algunos valores obtenidos mediante reemplazo, en un intento por construir una representación tabular. De nuevo, la representación gráfica posee elementos destacables como la correcta selección y etiquetación de los ejes, la correcta selección de la escala, la selección de la unidad y el trazo. Se puede inferir que durante el desarrollo de las actividades del curso los estudiantes han logrado cierta destreza en la construcción de este tipo de representaciones; si bien en este ítem poseían ya cierta habilidad al inicio del curso como ya se mencionó anteriormente.

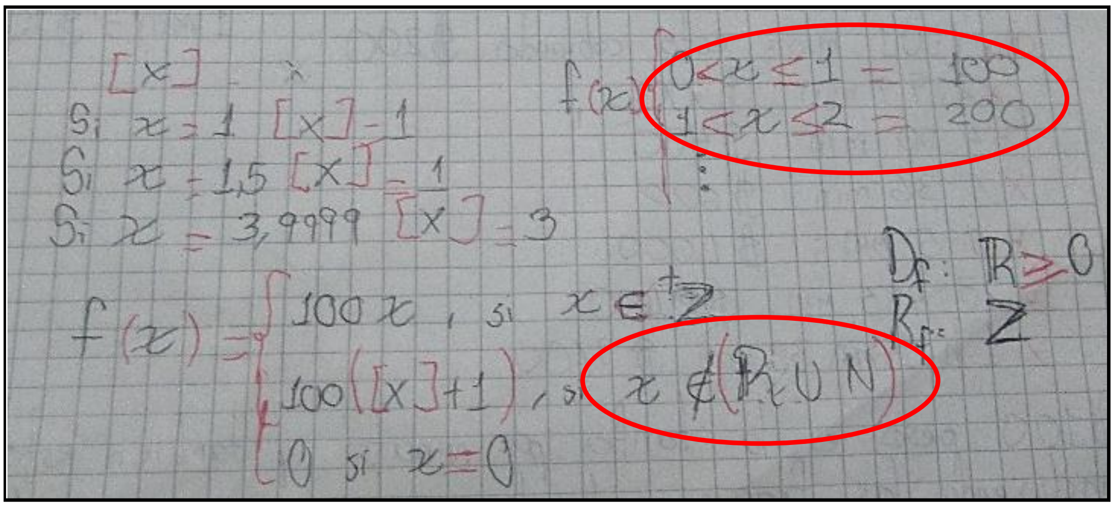
Figura 86. Construcción de las representaciones de la interdependencia entre las magnitudes





Por su parte, en la construcción de la representación algebraica existen algunos errores como la incorrecta escritura para los elementos que definen el dominio de la función por partes y las desigualdades-igualdades mostradas en la Figura 87, producto del uso del texto escrito como reproducción fiel del discurso oral. En el caso de la construcción (no terminada) de la representación en el registro tabular se puede observar cómo, a diferencia de otras actividades donde también se realiza esta construcción, se están utilizando valores tanto enteros como no enteros. Esto último podría considerarse como un cambio de conducta en el desarrollo de este tipo de tareas, lo cual también podría estar influenciado por el literal a) de la misma actividad.

Figura 87. Errores perceptibles en la construcción de la representación algebraica



La construcción de representaciones vista como habilidad para nuestros dos casos de estudio presenta tres características fundamentales:

i) El manejo de los objetos paramatemáticos tal como los hemos definido anteriormente en este apartado, ha sido bastante bueno, lo que ha facilitado tanto el desarrollo como la potenciación de esta habilidad. A pesar de que los objetos paramatemáticos no son objeto directo de estudio, en términos de las representaciones se vuelven fundamentales y su correcto o equivocado manejo puede influir de gran forma en esta habilidad.

ii) Producto de la enseñanza recibida en la educación básica y media, se privilegian por parte de los estudiantes las construcciones en ciertos registros de representación, en especial aquellas representaciones que discretizan el comportamiento de las relaciones funcionales establecidas.

iii). La construcción directa de los objetos matemáticos aún presenta errores en términos de lo global, los cuáles serán mejor explicitados a la luz de la siguiente habilidad: la transformación de representaciones de los objetos matemáticos.

4.4 TRANSFORMAR REPRESENTACIONES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Recordemos que la habilidad de transformar la representación de una función se puede observar en dos tipos de acciones, según las definiciones descritas en el marco conceptual, las cuales se retoman de Duval (2004), ellas son:

- El tratamiento de representaciones cuando a partir de una representación inicial dada se obtiene una representación final que se encuentra en el mismo registro.

- La conversión de representaciones cuando a partir de una representación inicial dada se obtiene una representación final que se encuentra en un registro diferente.

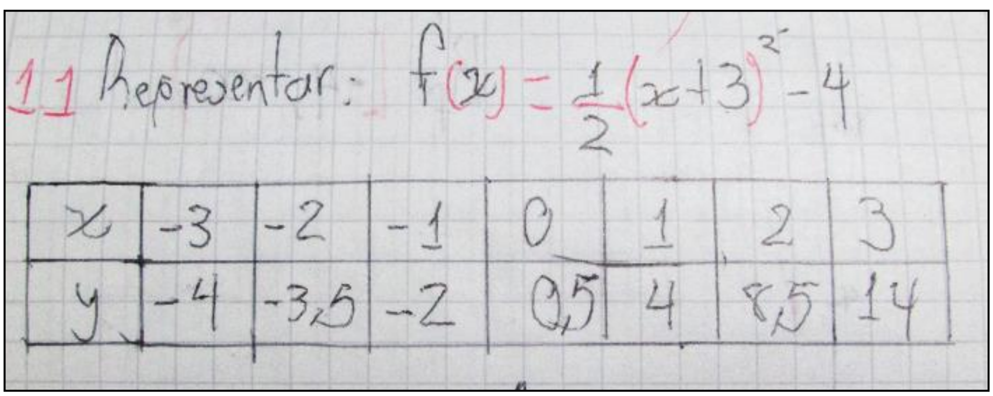
Respecto a esta habilidad, las actividades desarrolladas en el curso laboratorio de pre cálculo propenden el abandono del carácter estático de las representaciones de los objetos matemáticos y se caracterizan por presentar representaciones iniciales de dichos objetos solicitando al estudiante que los transforme para dar solución a una situación planteada o bien como parte de la apropiación de los núcleos conceptuales de cambio y variación, lo que dará como resultado la obtención de representaciones finales.

Rescatamos acciones que en la experimentación surgieron con los casos de estudio y que pueden estar asociadas a la habilidad de transformación de funciones. Para ello recuperamos la primera instrucción que se plantea en el taller de transformación de funciones (el cual se presentó en el apartado 0). Como primera actividad del taller se propone:

- En tu hoja de trabajo representa gráficamente la función $= \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$

Este ítem de la actividad explícitamente le solicita al estudiante que realice una conversión entre la representación algebraica de la función y la representación gráfica. Como se podrá observar en la Figura 88 realizada por los estudiantes Jhoan y Sebastián, se recurre de manera casi que inmediata al uso de la representación tabular numérica para, a partir de allí, obtener la representación gráfica.

Figura 88. Transformación realizada por Jhoan y Sebastián



Este comportamiento de Jhoan y Sebastián en el que se recurre a la utilización de una representación tabular numérica para construir una representación gráfica de la misma, nos permite reconocer que existe cierta habilidad para realizar una conversión del registro algebraico al registro tabular numérico, sin embargo esta habilidad se ha desarrollado en los estudiantes producto de prácticas constantes durante su estudio de secundaria, tal y como lo menciona Hitt: "*La graficación de funciones, a menudo se inicia con alguna expresión algebraica, se sustituyen algunos valores para formar una tabla, y enseguida se le solicita al estudiante unir esos puntos por medio de una curva*" (2005, p.86). Además esta actividad está mediada por la existencia de unas reglas específicas de conversión, que aunque están bien definidas no solventan del todo las dificultades y ambigüedades de este tipo de transformación (Duval, 2004).

Tales reglas corresponden a un proceso netamente algorítmico en el que la variable independiente toma un valor específico y mediante la manipulación algebraica de la expresión se obtiene un valor para la variable dependiente. Sin embargo, esta regla de carácter local, tal como lo indica Duval (2004), induce una actividad de puntaje en el que el individuo sólo caracteriza el comportamiento local de la función. Es decir, el comportamiento variacional de la función se discretiza y se asume como una regla de asignación puntual. En Barajas[130] se reporta que estudiantes de características similares a los casos de estudio del presente reporte realizan un análisis numérico de la función con el uso de números enteros para los valores del dominio, lo que reafirma la conversión de la representación algebraica a la representación tabular numérica como una actividad de puntaje y de análisis local de la función.

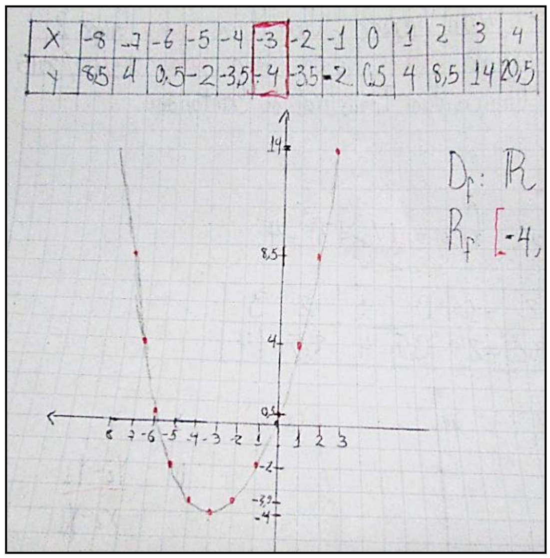
De la misma forma, parece que la habilidad para realizar la conversión del registro tabular numérico de la función al registro gráfico también se encuentra en buen proceso de desarrollo, como se puede observar en la Figura 89. De nuevo sugiere Duval (2004) que este pasaje obedece a la regla que consiste en asociar un punto del plano con una dupla de números, permitiendo construir con un procedimiento

---

[130] BARAJAS, Claudia. *Dificultades del pensamiento variacional: una mirada al proceso elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos*. Trabajo de grado Magíster en Ciencias Especialidad Matemática Educativa. México: CICATA-IPN, 2015. 220 p.

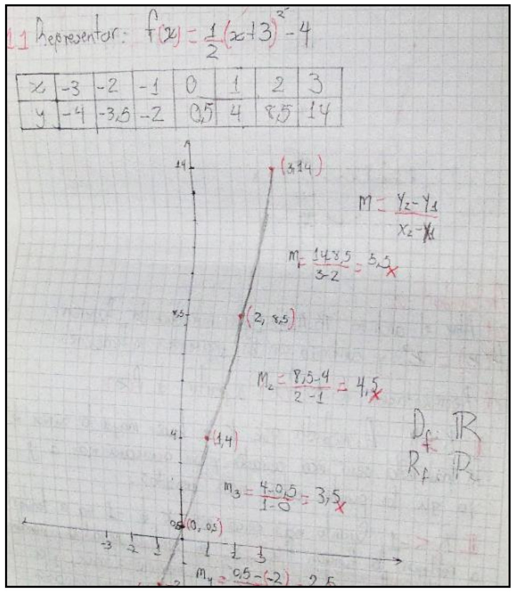
muy simple las representaciones gráficas de una relación previamente establecida de manera algebraica.

Figura 89. Conversión realizada por Jhoan y Sebastián



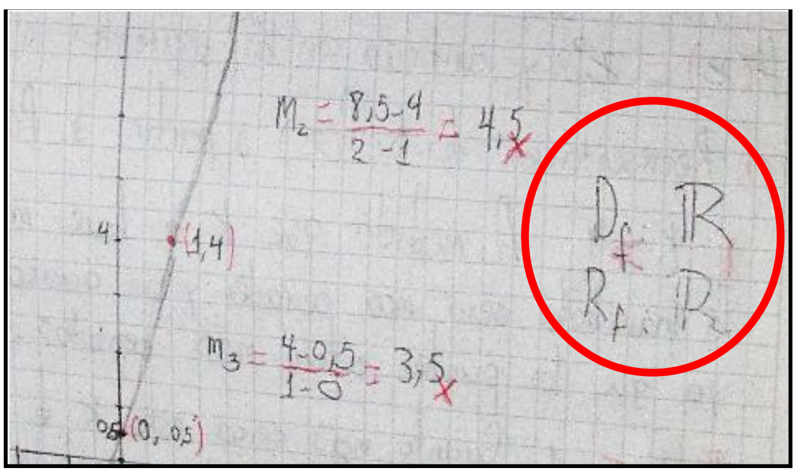
Sin embargo, y a pesar de la simpleza del procedimiento, esto no garantiza que el estudiante tenga una comprensión absoluta del mismo. Incluso, la actividad de puntaje puede inducir al estudiante a realizar una representación gráfica errónea o a conjeturar un comportamiento funcional diferente al que realmente tiene ésta: tal como se muestra en la Figura 90.

Figura 90. Conversión realizada inicialmente por Jhoan y Sebastián



La ilustración muestra el proceso realizado por Jhoan y Sebastián quienes representan con un punto en el plano cartesiano la dupla representada en la tabla y posteriormente unen esos puntos, asumiendo como se puede observar en la Figura 91 que el recorrido de la función dada es el conjunto de los números reales.

Figura 91. Dominio y recorrido considerado para la función dada



Aquí, incluso los estudiantes determinan las pendientes entre los puntos hallados, aunque como se mostró en el apartado 4.1, Sebastián ya había reconocido a partir de la expresión algebraica que ésta no se representaba por medio de una recta.

El proceso de conversión de la representación algebraica a la representación gráfica se ha tornado de esta manera en un proceso no directo que necesita de una acción auxiliar como es la conversión algebraica-tabular y posteriormente tabular-gráfica. No obstante, este cambio auxiliar de representación es producto de la simplicidad y la economía de tratamiento que genera para el individuo el manejo de reglas más sencillas y mejor definidas para la conversión entre estas representaciones.

Duval (2004) sugiere que las conversiones entre las representaciones algebraicas y las representaciones gráficas de funciones se pueden plantear mediante tareas relativamente fáciles "*al menos para los objetos más simples (rectas y parábolas)*". Dichas tareas consisten en la identificación de:

> […] todas las variaciones cognitivamente pertinentes de una representación en un registro, de manera que una exploración según el 'método que consiste en hacer variar un solo factor a la vez, dejando a los otros sin cambio' pueda ser puesta en acto por los alumnos. (Duval, 2004, p. 78)

De forma similar a lo realizado por los estudiantes Johan y Sebastián, las estudiantes Ximena y Jessica también realizan una conversión entre la representación algebraica y la representación tabular numérica a fin de obtener posteriormente la representación gráfica pedida. Tal y como fue mencionado en párrafos anteriores la enseñanza recibida por los estudiantes en su educación secundaria en términos de graficación de funciones hace mella en el desarrollo de esta actividad. Aunque se observa que se han desarrollado habilidades que incluyen el realizar conversiones algebraica-tabular y tabular-gráfica, éstas en términos de Duval (2004) discretizan el comportamiento de la función y solo permiten observar comportamientos puntuales.

Cabe destacar que del grupo de treinta estudiantes donde se estaban tomando los datos para esta investigación, solamente dos estudiantes (ninguno de ellos de los casos de estudio) realizaron un proceso diferente a la conversión algebraica-tabular y tabular-gráfica para poder realizar la representación gráfica pedida. Rescatamos a continuación el diálogo entre uno de los estudiantes mencionados y el investigador:

- Investigador: ¿Cómo hizo usted para graficar la función?

- Estudiante A: Pues yo tomé la función que sé que es "y", entonces como la función era "$y = \frac{1}{2}(x+3)^2 - 4$", [el estudiante escribe la expresión en el tablero] pues despejo y me queda "$y + 4 = \frac{1}{2}(x+3)^2$" y yo sé que eso es una cónica.

- Investigador: Y bueno, luego que sabe que eso es una cónica ¿cómo grafica?

- Estudiante A: Pues como hay una cuadrada y otra no, eso es una parábola, entonces el vértice es $(-3, -4)$ y ya.

A diferencia de lo presentado con los casos de estudio, este estudiante utiliza una transformación de tratamiento de la representación algebraica inicial y luego efectúa una transformación de conversión que se realiza directamente entre los registros algebraico y gráfico, sin embargo más allá de la obtención del vértice, el estudiante realiza un bosquejo de la parábola sin prestar mucha atención a lo que le indican las demás unidades significantes de la representación algebraica. En dicha conversión se hace uso, como el estudiante menciona, del vértice lo cual nos refiere el uso de los puntos extremos de la función; al respecto Fabra y Deulofeu[131] mencionan lo siguiente:

---

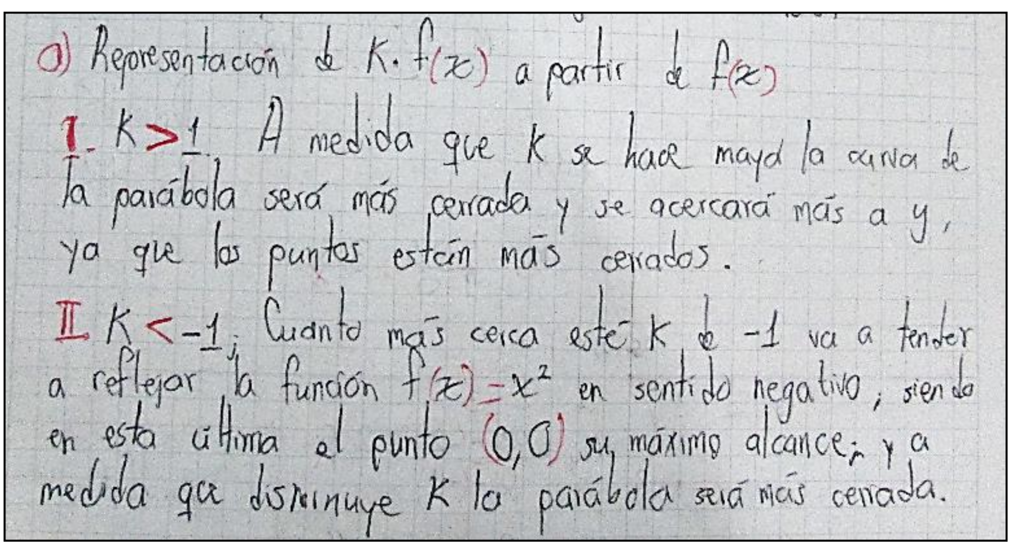
[131] FABRA, Margarida y DEULOFEU, Jordi. Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 2000, vol. 3, no 2, p. 207-230.

[…] la representación de funciones se reduce (por lo menos en nuestro país), al trazado de la gráfica de una función dada su expresión algebraica, representación que se hace siguiendo unos pasos previamente determinados (puntos de corte, determinación de extremos, asíntotas, tendencias, etc.), utilizando técnicas relativas al cálculo de límites y derivadas y tratando de algoritmizar el paso del lenguaje algebraico al gráfico.

Después de realizada la actividad a lápiz y papel, se procede, tal y como se mencionó en los apartados 3.2.4 y 3.3.1.1 a realizar la actividad mediada por el software lo cual le permite al estudiante una manipulación simultánea, en este caso de las representaciones algebraicas y gráficas de una función, siendo las trabajadas las funciones “$f(x) = x^2$” y “$f(x) = sen\,x$”.

Los estudiantes Jhoan y Sebastián escriben las conclusiones obtenidas después de realizar la manipulación de la representación digital de las funciones. En la Figura 92 los estudiantes describen cual es el cambio que se produce en la representación gráfica cuando la representación algebraica “$f(x)$” es modificada como “$k * f(x)$”

Figura 92. Modificación (I) de la representación gráfica a partir de una variación en la representación algebraica

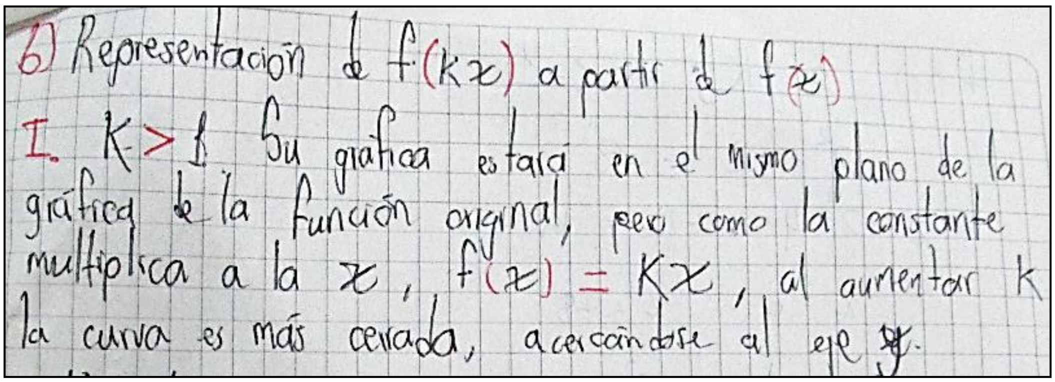

a) Representación de K. f(x) a partir de f(x)

I. K>1 A medida que k se hace mayor la curva de la parábola será más cerrada y se acercará más a y, ya que los puntos están más cerrados.

II. K<-1; Cuanto más cerca esté K de -1 va a tender a reflejar la función f(x) = x² en sentido negativo, siendo en esta última el punto (0,0) su máximo alcance; y a medida que disminuye K la parábola será más cerrada.

Conclusiones similares son mostradas en la Figura 93 y en la Figura 94, esta vez para la modificación "$f(k * x)$"

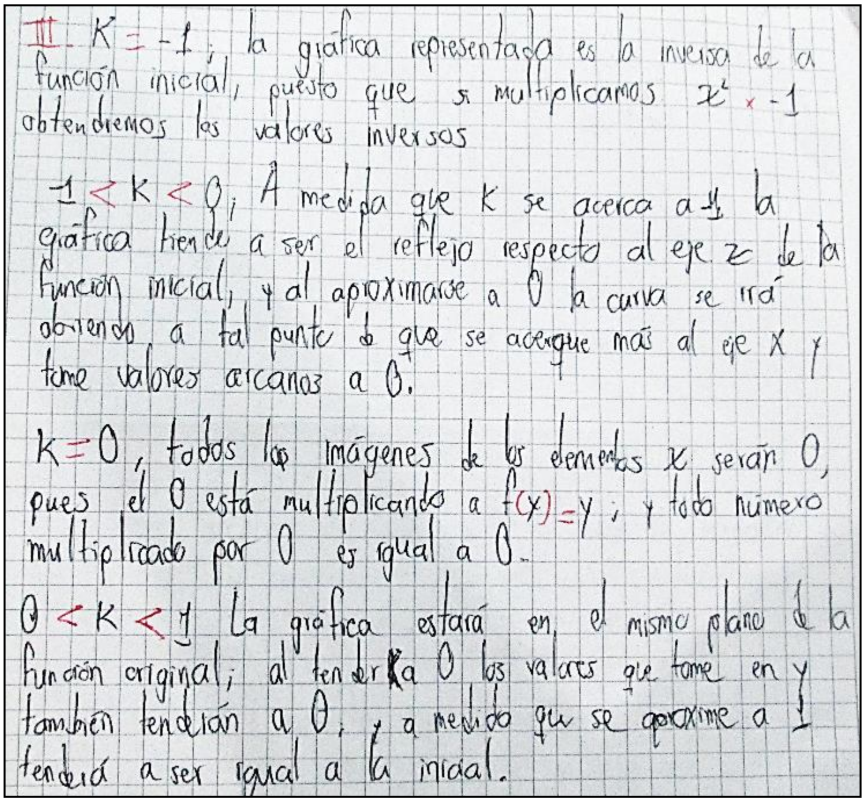
Figura 93. Modificación (II) de la representación gráfica a partir de una variación en la representación algebraica



6) Representación de f(Kx) a partir de f(x)

I. K > 1. Su gráfica estará en el mismo plano de la gráfica de la función original, pero como la constante multiplica a la x, f(x) = Kx, al aumentar K la curva es más cerrada, acercándose al eje y.

Figura 94. Modificación (III) de la representación gráfica a partir de una variación en la representación algebraica



III. $K = -1$; la gráfica representada es la inversa de la función inicial, puesto que si multiplicamos $x^2 \times -1$ obtendremos los valores inversos

$-1 < K < 0$; A medida que K se acerca a -1 la gráfica tiende a ser el reflejo respecto al eje x de la función inicial, y al aproximarse a 0 la curva se irá abriendo a tal punto de que se acerque más al eje x y tome valores cercanos a 0.

$K = 0$, todas las imágenes de los elementos x serán 0, pues el 0 está multiplicando a $f(x) = y$; y todo número multiplicado por 0 es igual a 0.

$0 < K < 1$ La gráfica estará en el mismo plano de la función original; al tender a 0 los valores que tome en y también tenderán a 0, y a medida que se aproxime a 1 tenderá a ser igual a la inicial.

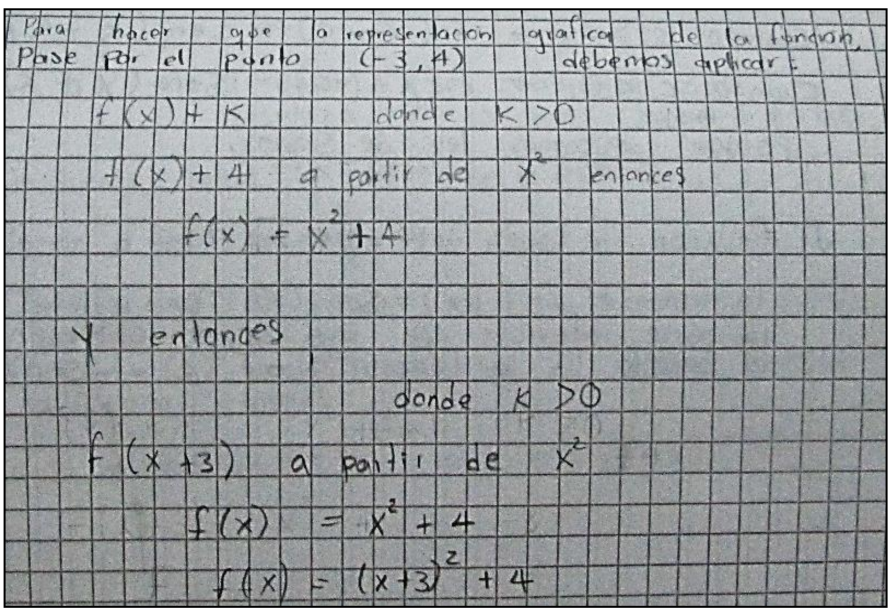
A continuación recuperamos el ítem 2.3 de la misma actividad de transformación de funciones:

En el mismo archivo escribe la función “$\boldsymbol{f(x) = x^2}$”. En la barra de entrada Vista gráfica escribe $(-3{,}4)$ *(aparecerá un punto en el plano cartesiano)*

a) Aplica la(s) transformación(es) pertinente(s) para que la representación gráfica de la función pase por el punto $(-3{,}4)$

Al respecto de esta instrucción las estudiantes Jessica y Ximena realizan la graficación de la función pedida, dando en nuestro concepto indicios de que han logrado comprender, a partir de la actividad, el proceso que conlleva la conversión directa entre las representaciones algebraica y gráfica, sin necesidad de una representación en un registro auxiliar intermediario. Los pasos realizados por las estudiantes se pueden ver en la Figura 95; aunque la representación hallada por Jessica y Ximena es una de las infinitas funciones cuadráticas que pueden pasar por el punto $(-3,4)$, pues ellas solo consideraron mover el vértice de la parábola, la ganancia en términos de la conversión algebraica-gráfica ha sido substancial.

Figura 95. Realización del ítem 2.3 de la actividad utilizando las conversiones requeridas


Para hacer que la representación gráfica de la función, Pase por el punto $(-3, 4)$ debemos aplicar:

$f(x) + K$ donde $K > 0$

$f(x) + 4$ a partir de x^2 entonces

$f(x) = x^2 + 4$

Y entonces

donde $K > 0$

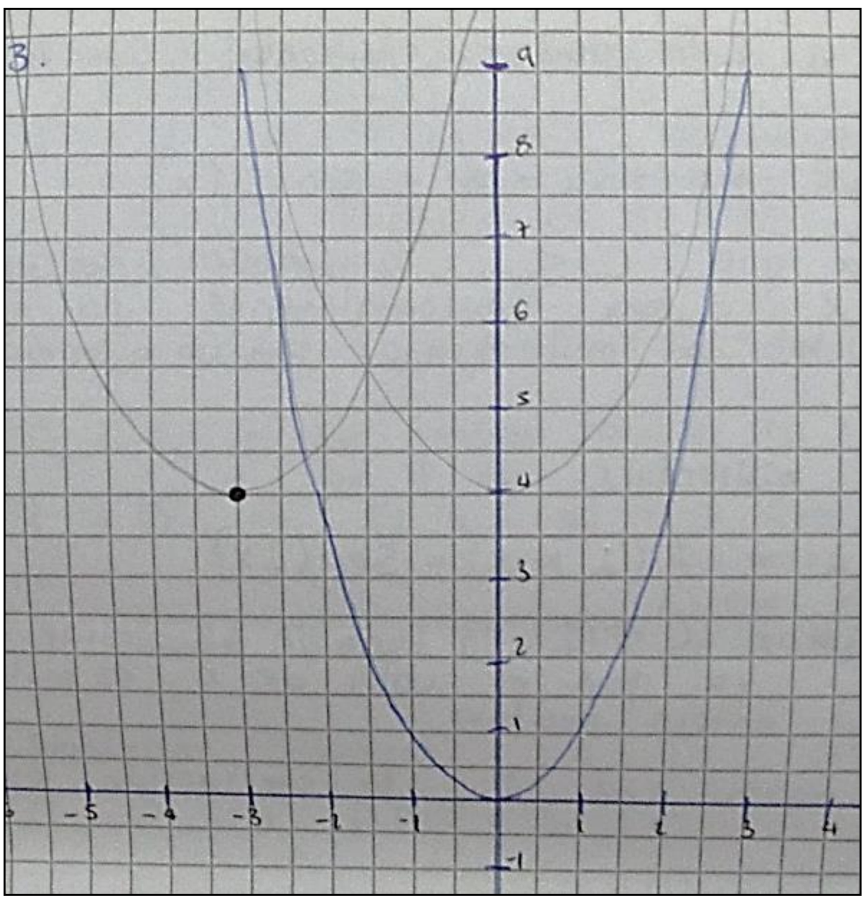
$f(x+3)$ a partir de x^2

$f(x) = x^2 + 4$

$f(x) = (x+3)^2 + 4$

Luego de realizar el análisis respectivo en términos de la representación algebraica que se esperaba obtener, las estudiantes procedieron a realizar también la representación gráfica, no solo teniendo en cuenta la representación gráfica final, sino las representaciones gráficas intermedias que se produjeron en cada uno de los pasos que se realizó al modificar la representación algebraica (ver Figura 96).

Figura 96. Modificación de la representación gráfica a partir de las modificaciones en la representación algebraica



Una vez culminado el taller de transformación de funciones, se puede observar la ganancia cognitiva adquirida por los estudiantes. Como se ha podido ver en la realización del último ítem el trabajo en particular sobre la transformación de representaciones entre los registros algebraico y gráfico se vuelve relativamente sencillo para ellos dada la simplicidad de los procedimientos realizados y la ventaja en términos de visualización que otorga el trabajo con el software.

Esta habilidad se pone en juego en los talleres subsecuentes y aun cuando no se exploran a fondo otros tipos de transformaciones de tratamiento o de conversión, el manejo más adecuado de las representaciones en el registro gráfico le da más libertad a los estudiantes para explorar soluciones que involucren lo gráfico y lo algebraico.

4.5 COORDINAR REPRESENTACIONES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

Tomadas en cuenta las razones expuestas en el apartado 0, según las cuales la coordinación de representaciones exige del individuo la elección espontánea de los registros de representación más útiles al momento de dar solución a una situación, consideramos que el curso laboratorio de pre-cálculo no presenta muchas situaciones en las que el estudiante pueda escoger de manera espontánea el registro de representación que le permita dar solución a una situación específica. Aunque las actividades del curso propenden por el uso de la multiplicidad de registros de representación, estas se realizan de manera guiada a fin de alcanzar unos determinados objetivos.

De esta manera, son solo algunas de las tareas retadoras que se proponen finalizando las actividades, las que nos permiten ver si el estudiante realmente ha logrado realizar una coordinación entre las representaciones. Para tal fin, solo hemos considerado en este apartado las situaciones propuestas que no guían al estudiante mediante unos determinados ítems, sino que les dan la absoluta libertad de solución al proponer un enunciado y lanzar una pregunta problema.

Recuperamos a continuación la primera actividad del Taller Matemáticas y realidad (que fue presentado en el apartado 03.2.1):

1. Una jugadora se golpeó en una rodilla jugando al voleibol y su médico prescribió un antiinflamatorio para reducir la hinchazón. Tenía que tomar 2 tabletas de 220 miligramos cada 8 horas durante 10 días. Si sus riñones filtraban un 60% del medicamento de su cuerpo cada 8 horas, contesta:

a) ¿Qué cantidad quedaba en su sistema circulatorio al cabo de los 10 días? **Justifica** tu respuesta.

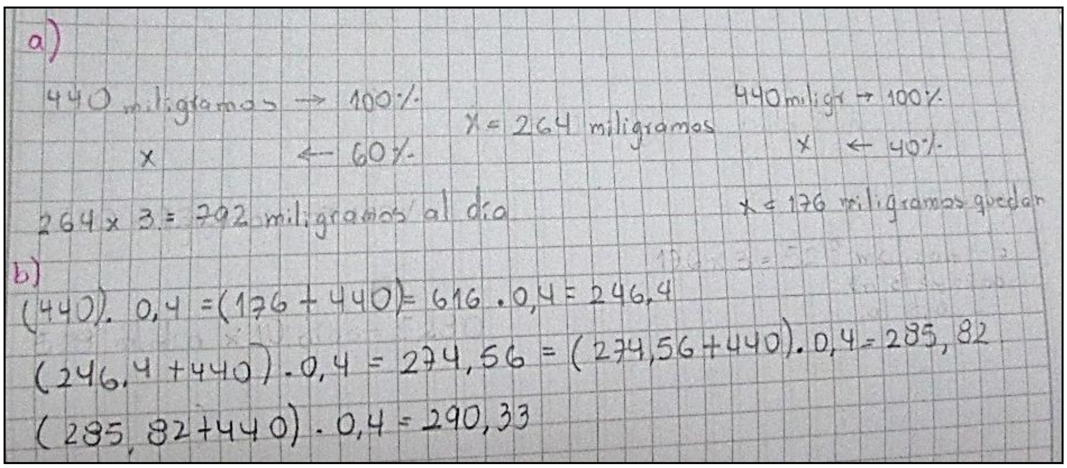
b) ¿Y si hubiera tomado la medicina durante un año? **Justifica** tu respuesta.

c) ¿Qué ocurre con la variación de la cantidad de medicamento en el organismo conforme pasa el tiempo? **Justifica** tu respuesta.

En la Figura 97 podemos observar la respuesta planteada por Jessica y Ximena quienes recurren a la representación numérica obteniendo valores para la cantidad de medicamento presente en el cuerpo con el transcurrir del tiempo. No se evidencia que las estudiantes obtengan una respuesta para los interrogantes presentados, solo obtienen valores para los primeros reemplazos que realizan, pero ante la imposibilidad de encontrar un procedimiento que les permita generalizar lo encontrado, esperan a escuchar las respuestas de sus compañeros para poder continuar con el desarrollo de la actividad.

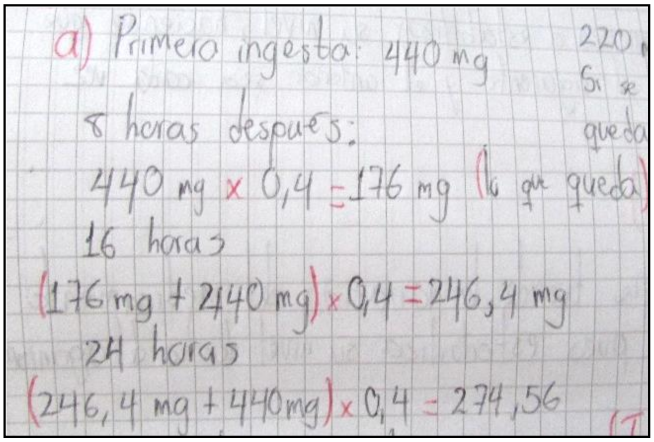
A pesar de que se selecciona un registro de representación a fin de solucionar los interrogantes presentados, esta elección no brinda los resultados esperados.

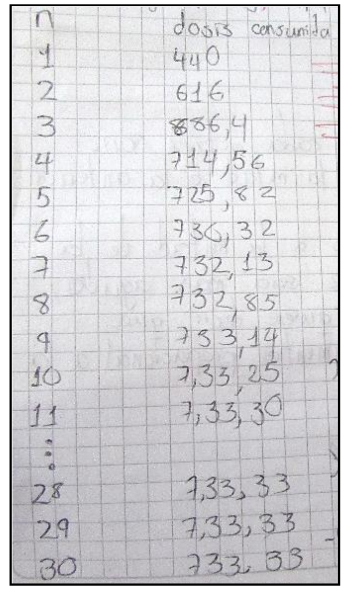
Figura 97. Uso de la representación numérica



Jhoan y Sebastián por su parte intentan dar solución de una manera similar a la situación planteada, obteniendo valores para una cantidad de días específicos y luego obteniendo una representación tabular numérica a partir de los resultados obtenidos, como se puede ver en la Figura 98.

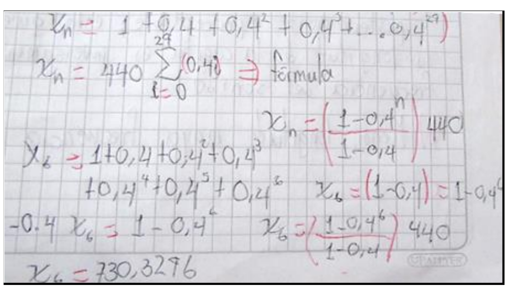
Figura 98. Representación tabular numérica para la situación descrita

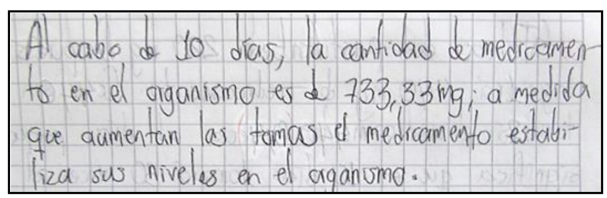




Además, luego de hacer uso de esta representación, los estudiantes hacen uso de una representación algebraica que describe el comportamiento de la cantidad de medicamento en el cuerpo con el transcurrir del tiempo y finalmente dan respuesta a los interrogantes generados haciendo uso de una representación en lenguaje natural, como se puede observar en la Figura 99.

Figura 99. Representación algebraica y en lenguaje natural para la situación descrita



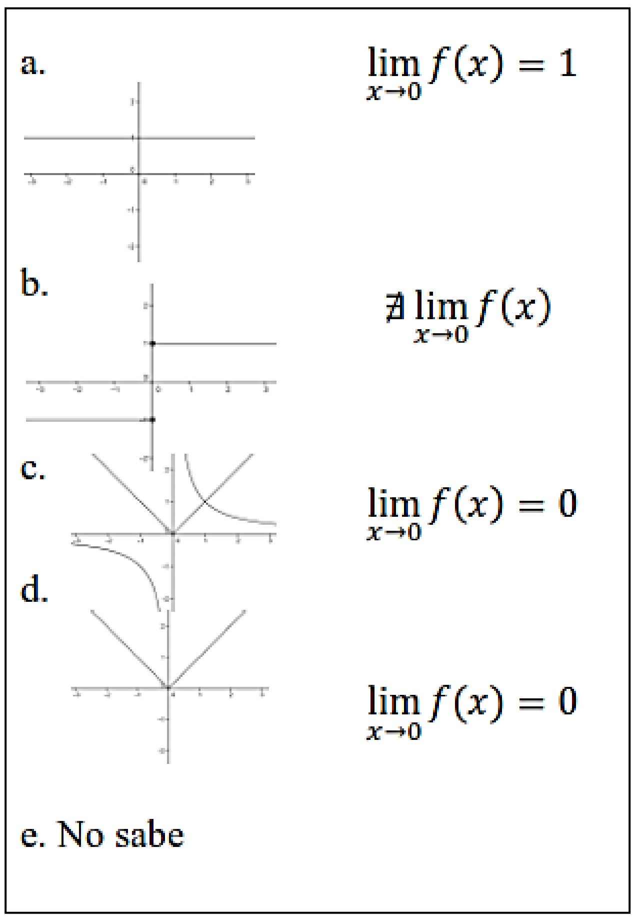


Como se mencionó en secciones anteriores, al finalizar el curso laboratorio de pre-cálculo, los estudiantes deben presentar una prueba de tipo tradicional en el cual se les realizan trece preguntas. Los estudiantes caso de estudio para esta investigación consignaron los procesos que realizaron para responder a esas trece preguntas, aunque este no era un requisito de la prueba, ya que la misma es cerrada dándole al estudiante cinco opciones de respuesta para cada pregunta. A continuación recuperamos tres de las preguntas y algunas de las evidencias recogidas de dicha prueba que nos permiten inferir que existe coordinación de las representaciones de objetos matemáticos:

Problema 3:

Para determinar el límite de $f(x) = \frac{|x|}{x}$ cuando "x" se acerca a cero, basta con reconocer la siguiente gráfica de la función (ver Figura 100) y decir que:

Figura 100. Gráficas presentadas en el problema 3



El análisis realizado en Barajas[132] respecto a este ítem que se presenta en la prueba nos dice que la obtención de la respuesta pasa por realizar procedimientos netamente analíticos en los que el estudiante debe conocer la función valor absoluto, tabular e identificar que el límite de la función cuando “x” tiende a cero por derecha es diferente del límite de la función cuando “x” tiende a cero por la izquierda, o bien, graficar y observar que al acercarse a cero la función tiene imágenes diferentes por izquierda y por derecha.

Desde el punto de vista de las habilidades de representación estos procesos descritos por Barajas están asociados al reconocimiento de la representación en el registro algebraico para la función dada en el enunciado, el reconocimiento de la representación de la función en el registro gráfico (representación cartesiana) y la interpretación de la misma para concluir que el límite no existe, tal y como lo hace Jessica (ver Figura 101), quien no explicita más su procedimiento, pero de quien podemos inferir que ha realizado la concatenación de procesos antes descritos para dar solución al problema planteado.

La otra solución descrita por Barajas corresponde al reconocimiento de la representación en el registro algebraico para la función dada en el enunciado, la construcción o transformación de la expresión algebraica en una representación en los registros tabular numérico y gráfico, y la posterior interpretación de las representaciones obtenidas para concluir que el límite no existe, de la manera que lo hace Jhoan según se puede ver en la Figura 102.

[132] BARAJAS, Claudia. *Dificultades del pensamiento variacional: una mirada al proceso elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos*. Trabajo de grado Magíster en Ciencias Especialidad Matemática Educativa. México: CICATA-IPN, 2015. 220 p.

Figura 101. Respuesta de Jessica al problema 1

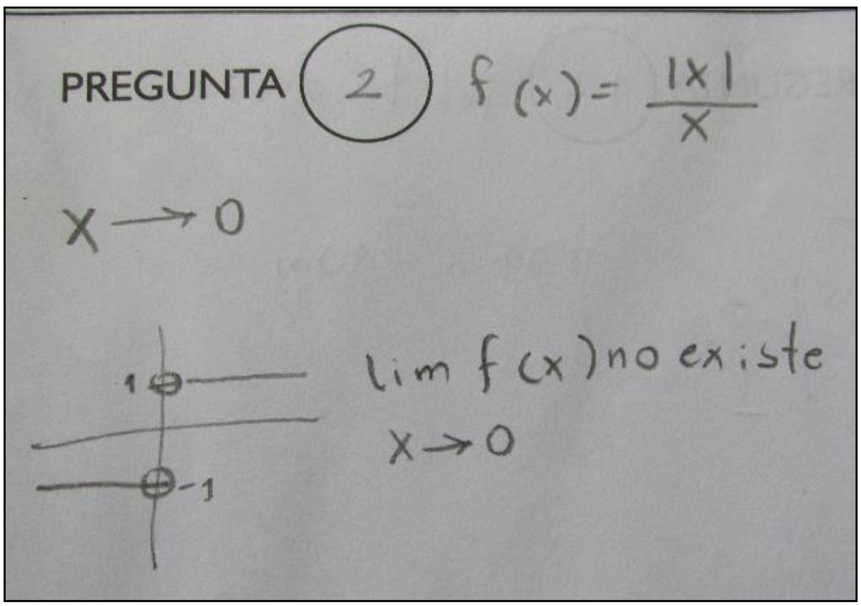
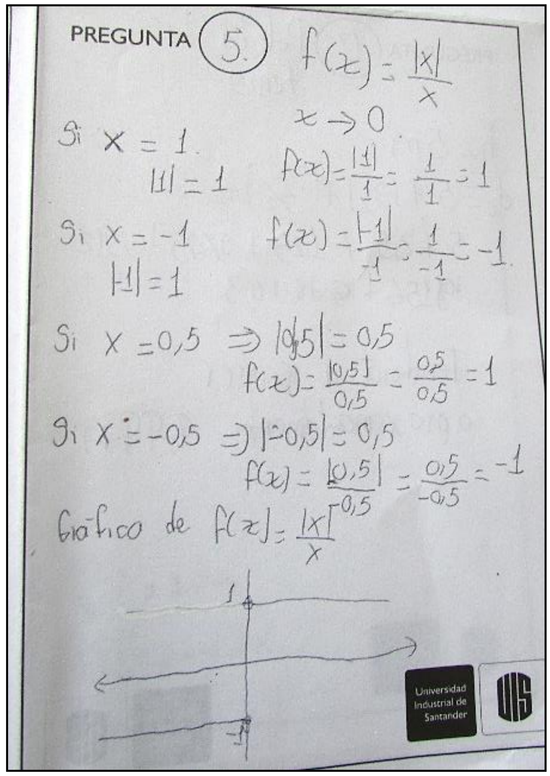


Figura 102. Respuesta de Jhoan al problema 1



Consideramos que dentro de las acciones que nos evidencian que Jhoan ha realizado una coordinación de las representaciones del objeto matemático involucrado podemos situar en primera medida que aunque parece que Jhoan no tiene completamente clara cuál es la representación gráfica cartesiana que le corresponde a la función planteada inicialmente en el registro gráfico, es capaz de escoger el registro adecuado para iniciar la solución del problema (Ramírez, Romero y Oktaç[133]), es decir utiliza el registro tabular numérico como un auxiliar y luego realiza de manera correcta la representación algebraica, antes de inferir la respuesta al ejercicio planteado.

---

[133] RAMÍREZ, Osiel; ROMERO, César Fabián; OKTAÇ, Asuman. Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. En A. Ramírez e Y. Morales (Eds.), *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (pp. 537-547). Santo Domingo: ICEMACYC. 2013

Problema 4

Un cuadrado de lado 1 cm se divide en dos partes iguales y se sombrea una de ellas (paso 1). La mitad no sombreada se divide a la mitad y nuevamente se sombrea una de las partes (paso 2), Si se continúa el proceso indefinidamente, ¿a cuánto se aproxima la suma de las áreas sombreadas del cuadrado? (ver Figura 103)

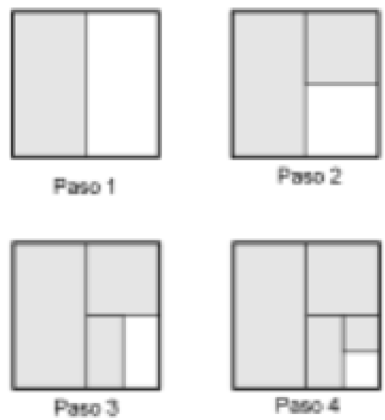
Recurrimos de nuevo al análisis realizado por Barajas[134] para la obtención de la solución del problema 2:

Procedimiento geométrico analítico: "*Distinguir un proceso infinito. Razonar sobre el infinito actual.*"

Procedimiento aritmético analítico: *"Elaborar una tabla para explorar los cambios que se producen entre las variables. Manejar la noción de convergencia."*

Figura 103. Pasos mostrados y respuestas posibles para el problema 2

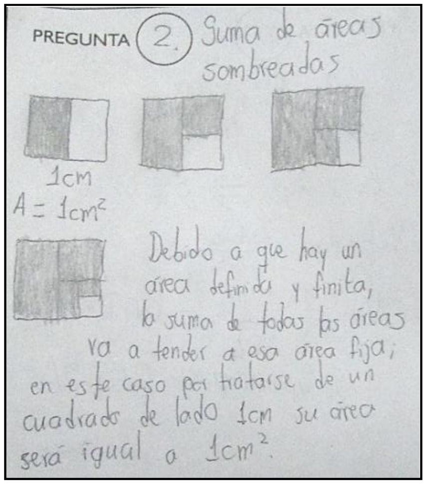
[134] BARAJAS, Op. Cit. P.67.

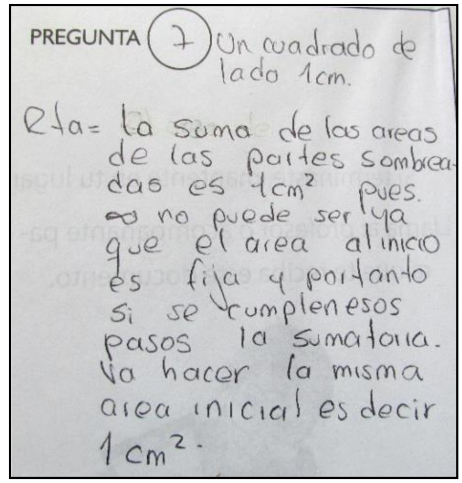


a. 0.5 cm^2
b. 1 cm^2
c. A infinito
d. 0.9 cm^2
e. No sabe

El procedimiento geométrico analítico propuesto por Barajas nos refiere desde nuestra perspectiva a la habilidad de interpretación, de manera que la respuesta esgrimida por los estudiantes requiera simplemente el uso discursivo y en tal caso realizar una transformación para dar la respuesta utilizando representaciones en el registro del lenguaje natural, así como lo realizan Jhoan y Ximena (ver Figura 104)

Figura 104. Respuestas de Jhoan y Ximena al problema 2

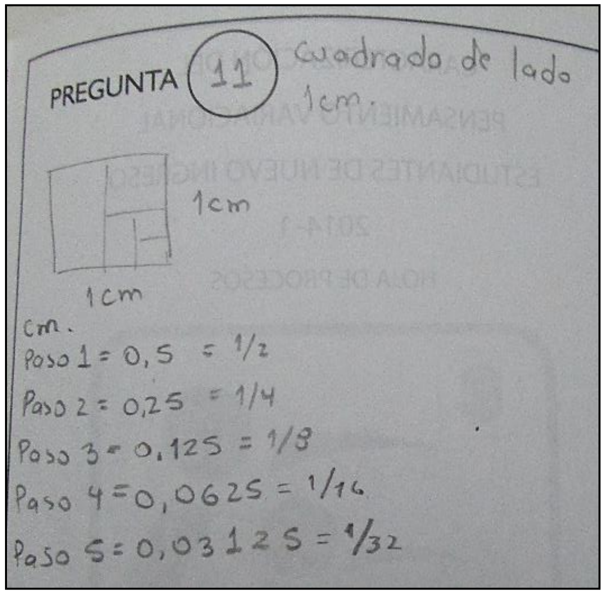




Por su parte el procedimiento aritmético analítico define el uso de una transformación entre la representación en el registro gráfico que se está mostrando en el enunciado y el registro tabular, como se puede ver en la Figura 105, en la respuesta dada por Jessica.

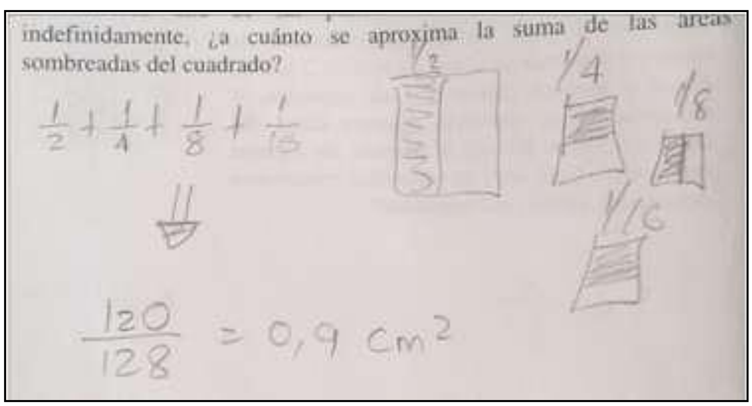
Cabe notar que dado que la representación numérica decimal se hace extensa, Jessica utiliza una transformación de tratamiento al convertir cada representación numérica decimal en numérica fraccionaria. Esta actividad nos refiere al término utilizado por Duval (2004) como economía de tratamiento, al sugerir que los cambios de registro se utilizan en su mayoría con este fin, es decir el de dar simplicidad a las operaciones subsecuentes. Inferimos que para Jessica, dadas las representaciones numéricas usadas, se hace más sencillo pensar en el infinito actual al pensar en la sumatoria de las expresiones fraccionarias y no tanto si necesita hacer la suma de las cantidades expresadas como decimales.

Figura 105. Respuesta de Jessica al problema 2



Esto último nos hace pensar en el desarrollo de habilidades en el uso de diversas representaciones, dado que según el análisis realizado por Barajas, de 400 estudiantes que presentaron la prueba menos del 10% recurren al uso de representaciones fraccionarias; y aquellos que las utilizan tienen luego problemas para comprender que el proceso va más allá de los cuatro pasos mostrados (Figura 103) en el enunciado del problema, como se puede ver en la Figura 106.

Figura 106. Respuesta dada por un estudiante al problema 2.

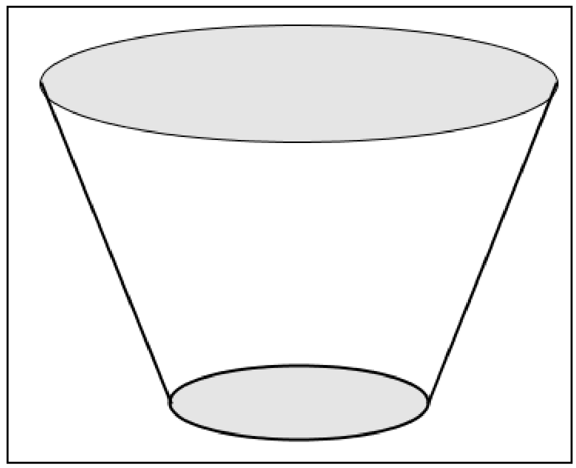


Fuente: Barajas (2015)

Problema 6

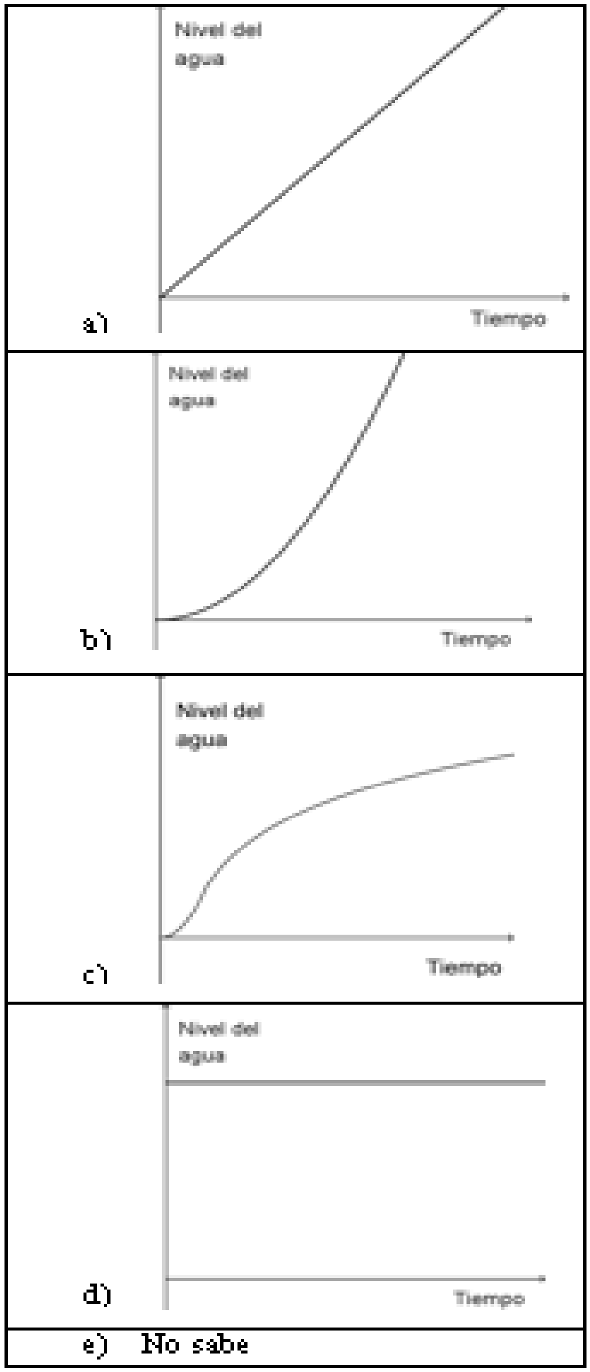
Andrea tiene una fuga de agua en su cocina, y quiere retener este preciado líquido para que no se desperdicie, por ello pone un recipiente (Figura 107) el cual se llena totalmente sin interrupción.

Figura 107. Recipiente para el problema 3



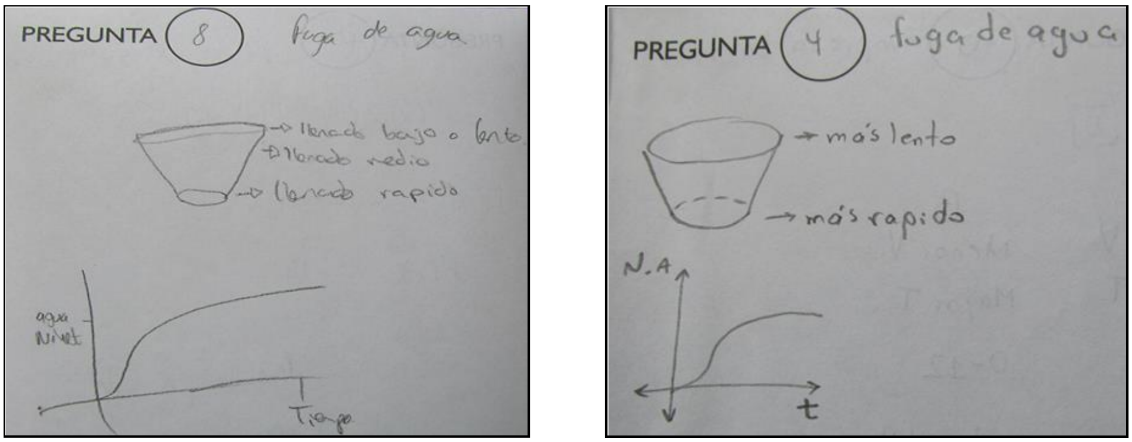
¿Cuál de las siguientes gráficas puede describir la forma como varía el nivel del agua a través del tiempo? (ver Figura 108)

Figura 108. Respuestas para el problema 3



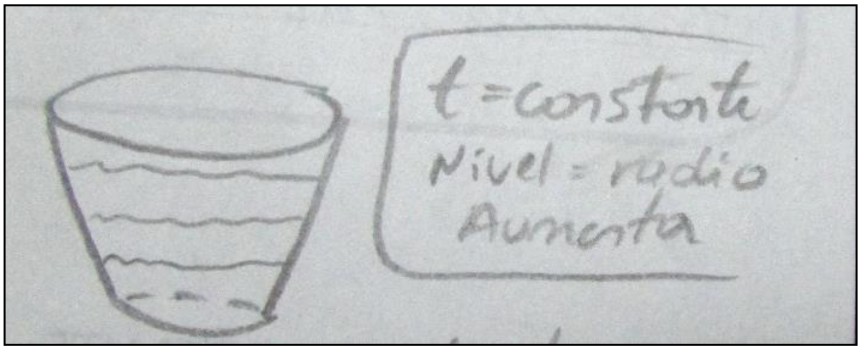
Para dar solución a este problema los estudiantes asignaron unas cualidades (llenado bajo o lento, llenado medio, llenado rápido, más lento, más rápido) que describen el comportamiento del llenado de la cubeta lo que les permitía inferir como se comportaba el nivel del agua a medida que transcurría el tiempo (ver Figura 109)

Figura 109. Respuestas de Sebastián y Jessica al problema 3



Inicialmente, los estudiantes debían reconocer las magnitudes allí involucradas, determinar cuáles de ellas eran variables e interpretar cuales de ellas eran representadas en las representaciones gráficas cartesianas mostradas, es decir hacer una transformación de conversión entre las representaciones en lenguaje natural y gráfica. Como se puede ver en la Figura 110, algunos estudiantes en este ítem asocian la palabra Nivel con el radio de la cubeta.

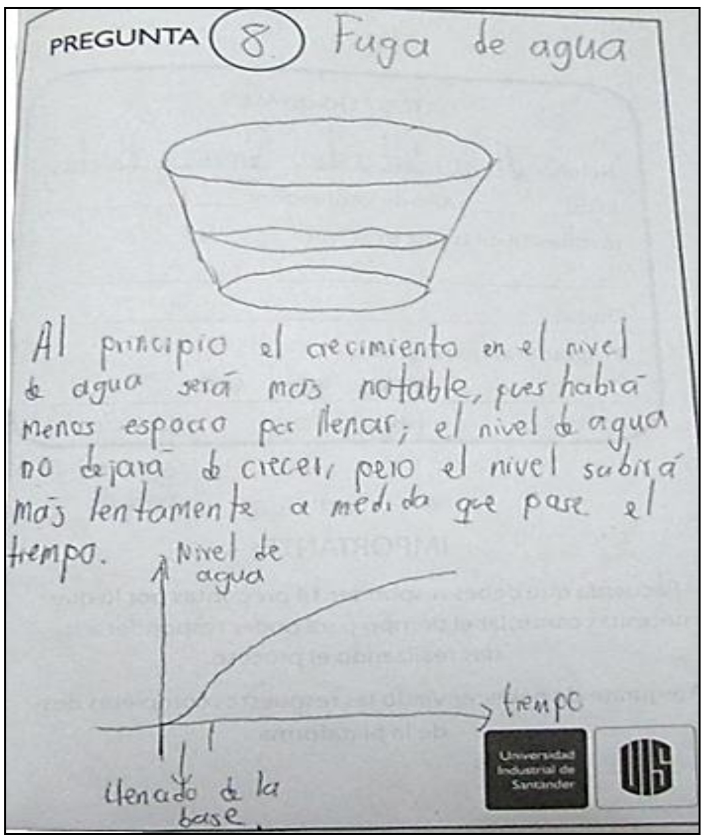
Figura 110. Interpretación errónea del término Nivel.



Fuente: Hojas de procesos de la prueba diagnóstica inicial.

En la Figura 111 podemos observar la respuesta de Jhoan quien primero realiza una transformación de tratamiento de la información recibida para luego expresar su respuesta en términos de la representación en el registro gráfico.

Figura 111. Respuesta de Jhoan al problema 3



Hemos podido observar en las situaciones planteadas en este apartado que en su mayoría los estudiantes han recurrido al uso simultáneo de dos representaciones ya sea en el mismo registro o en registros diferentes(Figura 98 y Figura 99, Figura

102, Figura 105, Figura 111); cuando esto se logra, como lo dicen Ramírez, Romero y Oktaç[135] "*en el mejor de los casos, implican que se ha desarrollado la coordinación de esos registros a tal grado de poder realizar conversiones de manera espontánea en una misma expresión*".

La habilidad de coordinación de representaciones nos refiere una actividad cognitiva mayor en la que se ponen en juego las conexiones de las habilidades anteriores e incluso las conexiones entre varios procesos, no solo el proceso de representación.

[135] RAMÍREZ, Osiel; ROMERO, César Fabián; OKTAÇ, Asuman. Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. En A. Ramírez e Y. Morales (Eds.), *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (pp. 537-547). Santo Domingo: ICEMACYC. 2013. P.543

5. CONCLUSIONES

Recordemos que para dar respuesta al objetivo de caracterizar habilidades cognitivas asociadas a los procesos de representación de fenómenos de variación, hemos considerado a lo largo del documento las actividades que se realizan en un curso laboratorio de pre-cálculo dirigido a estudiantes de primer ingreso a las carreras de Ingenierías y Ciencias de la Universidad Industrial de Santander.

Las conclusiones de esta investigación las presentamos en tres secciones en las que explicitaremos: *i)* La caracterización de las habilidades que hemos encontrado desde el punto de vista teórico y que hemos corroborado a partir de los datos, *ii)* Reflexiones acerca del curso laboratorio de pre-cálculo relacionadas con el desarrollo de habilidades cognitivas del proceso de representación a partir de las actividades que allí se realizan, *iii)* Perspectivas para futuras investigaciones.

CARACTERIZACIÓN DE HABILIDADES COGNITIVAS ASOCIADAS A LOS PROCESOS DE REPRESENTACIÓN DE FENÓMENOS DE VARIACIÓN QUE PUEDEN POTENCIARSE MEDIANTE LA RESOLUCIÓN DE PROBLEMAS MEDIADOS POR TECNOLOGÍAS DIGITALES, EN UN CURSO DE PRE-CÁLCULO CON ESTUDIANTES DE NUEVO INGRESO A LA UIS.

A partir de la presente investigación de tipo fenomenológico experimental y de los resultados encontrados en la experimentación, podemos caracterizar habilidades cognitivas asociadas a los procesos de representación de fenómenos de variación mediante la explicitación de los descriptores que surgieron paulatinamente a través del análisis de datos que se realizó para cada una de las habilidades *a priori* que se plantearon en el apartado 2.4.

Resaltamos que para cada uno de los descriptores que se enuncian a continuación son tenidos en cuenta cada uno de los cinco registros de representación que se han mencionado a lo largo del presente documento: Simbólico motriz, lenguaje natural, algebraico, tabular y gráfico. Así mismo, cuando hacemos referencia a una situación estamos hablando de situaciones de cambio y variación como las trabajadas en el curso laboratorio de pre-cálculo, ya sea que dicha situación se desarrolle dentro del contexto matemático o fuera de él.

Mencionaremos de igual modo algunas acciones que están específicamente ligadas con los objetos matemáticos que se trabajan en el curso laboratorio de precálculo y que están relacionados con las situaciones de variación y cambio: Funciones, derivadas y límites:

HABILIDAD PARA RECONOCER REPRESENTACIONES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS:

Las observaciones de las video grabaciones, así como las producciones escritas de los estudiantes caso de estudio nos han permitido identificar al reconocimiento como una de las habilidades que pueden potenciarse mediante el curso laboratorio de pre-cálculo; dicha habilidad se puede observar en los siguientes comportamientos:

- Determinar las magnitudes que están involucradas en una situación específica.

- Determinar las magnitudes que varían y aquellas que permanecen constantes.

- Determinar los valores que puede tomar una magnitud en una situación determinada.

- Determinar las magnitudes que son independientes y aquellas que son dependientes de otras.

- Determinar cuándo dos magnitudes covarían.

- Asociar dos o más representaciones de un objeto matemático ya sea que estas se encuentren en un mismo registro de representación o en registros diferentes.

- Seleccionar de una lista de candidatos la representación correspondiente a un objeto matemático previamente dado mediante una representación en el mismo o en diferente registro.

- Determinar las partes constitutivas de la representación de un objeto matemático específico para cada uno de los registros de representación.

De los descriptores mencionados podemos señalar que aquéllos que mejor son dominados por los estudiantes casos de estudio son los relacionados con la determinación de las magnitudes que se ven involucradas en situaciones de variación, lo cual se ve aún más facilitado por el uso de representaciones digitales, lo que permite que la visualización de dichas magnitudes se realice de una manera más correcta. Independientemente de si la situación se presenta mediante dichas representaciones o si se utilizan representaciones en registros diferentes al gráfico, este tipo de acciones son frecuentemente realizados con éxito por los estudiantes.

La asociación de dos representaciones ya sea de manera libre o mediante la presentación de candidatos se dificulta en un principio debido a que en la educación básica y media, como ya se ha mencionado en los capítulos precedentes, se privilegian ciertos registros de representación; una vez los estudiantes trabajan con la multiplicidad de registros de representación dichos trabajos de asociación se hacen más viables y surgen de manera espontánea.

La determinación de las unidades significantes o partes constitutivas de una representación pasan por el mismo problema mencionado para los anteriores descriptores de esta habilidad. Incluso para los registros de representación privilegiados en la enseñanza tradicional: el algebraico y el gráfico, el reconocimiento de las partes constitutivas de objetos matemáticos, como por ejemplo las funciones, es bastante débil.

Desde las actividades del curso laboratorio de pre-cálculo el reconocimiento como habilidad está siendo constantemente trabajado, pues generalmente los talleres inician con cuestionamientos al estudiante de manera que pueda reconocer que magnitudes se encuentran relacionadas en una situación específica. Además, el manejo de funciones se convierte en algo habitual para los estudiantes, dado que es ese el mejor modelo para describir las situaciones de cambio que se trabajan en cada uno de los talleres.

HABILIDAD PARA INTERPRETAR REPRESENTACIONES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS:

La interpretación de las representaciones de los objetos matemáticos puede llegar a ser considerada como una habilidad intermedia dado que para los procesos de representación el producto de una correcta interpretación de una representación de un objeto matemático generalmente es una transformación de dicha representación (la cual será considerada como una habilidad por separado de esta). Sin embargo, como no podemos considerar el proceso de representación como aislado de otros procesos como el de razonamiento y el de comunicación; habremos de distinguir a la interpretación como una habilidad que puede ser observada mediante los siguientes descriptores:

- Identificar patrones que permitan predecir comportamientos variacionales específicos.

- Determinar valores particulares para la relación que se establece entre dos magnitudes relacionadas.

- Determinar el comportamiento global de la relación que se establece entre dos magnitudes relacionadas.

- Determinar el cambio que se produce en una magnitud al variar otra magnitud que esté relacionada con ella.

- Determinar la variación (Cuantificar el cambio) entre dos magnitudes relacionadas.

- Extraer información parcial o total de la representación de un objeto matemático en cualquiera de los registros de representación.

En particular para los objetos matemáticos mencionados al inicio de este capítulo de conclusiones podemos mencionar acciones más específicas que dan cuenta de la habilidad de interpretación de representaciones:

- Interpreta la derivada de una función como otra función.

- Interpreta la derivada de una función como la pendiente de la recta tangente.

- Interpreta la derivada como razón de cambio entre dos magnitudes que varían.

- Infiere valores de tendencia mediante aproximaciones numéricas.

- Infiere valores de tendencia mediante el uso de gráficas.

- Infiere el comportamiento (la tendencia) de un gráfico a partir de valores ya plasmados del mismo.

- Determina los puntos máximos y mínimos de una representación gráfica de una función.

Teniendo en cuenta la observación hecha acerca de la confluencia de los procesos en matemáticas, podríamos concluir que la habilidad de interpretación de representaciones de los objetos matemáticos es una habilidad inherente a cualquiera de los procesos en matemáticas dado el carácter semiótico de los mencionados objetos. Es decir, dado que la única forma en la que nos podemos acercar a los objetos matemáticos es mediante sus representaciones, la interpretación de las mismas debe desarrollarse ya sea que el proceso matemático en el que estamos inmersos sea el de representación, el de comunicación, el de razonamiento y demostración, etc.

La habilidad de interpretación de representaciones de objetos matemáticos, tal y como hemos señalado antes, no es una habilidad que se trabaje por separado en los talleres que corresponden al curso. Sin embargo, es una habilidad que está siendo desarrollada, potenciada y reevaluada en cada actividad pues en cada ítem se espera que el estudiante exprese una respuesta justificada, de manera que debe hacer una correcta interpretación de todas las representaciones que se ponen en juego durante cada taller.

HABILIDAD PARA CONSTRUIR REPRESENTACIONES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS:

Teniendo en cuenta que en la presente investigación reconocemos cinco registros de representación, consideramos cinco descriptores para la habilidad de construcción de representaciones de objetos matemáticos; una correspondiente a cada uno de los ya mencionados registros:

- Expresar en lenguaje natural la relación existente entre dos o más magnitudes que covarían.

- Realizar una tabla que presente la relación existente entre dos o más magnitudes que covarían, ya sea una tabulación numérica o simbólica.

- Determinar la expresión algebraica correspondiente a la covariación de dos o más magnitudes

- Realizar una gráfica que dé cuenta de la covariación de dos o más magnitudes, ya sea esta una gráfica en el plano cartesiano, un gráfico estático o una representación digital.

- Utilizar el movimiento de las manos o del cuerpo para modelar el comportamiento de dos o más magnitudes que covarían.

La habilidad de construcción de representaciones podría englobarse dentro de la habilidad de transformación de funciones, una vez que debemos reconocer que cualquier objeto matemático dado su carácter de semiótico solo es accesible mediante una de sus representaciones, de manera que no partimos de la nada. Cualquier construcción que se realice de un objeto matemático tendrá una representación de origen, de manera que estaremos realmente realizando una tarea de transformación, ya sea esta una conversión o un tratamiento.

Existen construcciones “puentes” o intermediarias dentro de las cuales podemos encontrar representaciones mixtas, es decir aquellas con características propias de dos o más registros, sin embargo al tener dichas características éstas producen por lo general impases didácticos (Duval, 2006)

Desde el curso laboratorio de pre-cálculo se propende por que los estudiantes estén continuamente generando representaciones de los objetos matemáticos involucrados. Dado que las funciones son los objetos matemáticos que por naturaleza modelan las situaciones de cambio y variación, al estudiante se le está sugiriendo continuamente que construya representaciones de las situaciones que le son presentadas.

Aunque en general en las actividades se les sugiere a los estudiantes cuál de los registros de representación utilizar en un determinado momento, no consideramos que esto sea un obstáculo sino por el contrario una muy bien planeada secuencia de manera que el estudiante se vea obligado a abandonar el registro que viene trabajando por costumbre y empiece a realizar construcciones en otros registros.

HABILIDAD PARA TRANSFORMAR REPRESENTACIONES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

La habilidad de transformación de los objetos matemáticos es considerada acorde al planteamiento expresado por Duval[136] según el cual existen dos tipos de transformaciones entre las representaciones de los objetos matemáticos: tratamiento, cuando las representaciones inicial y final estén en el mismo registro; y conversión, cuando la representación final esté en un registro diferente al de la representación inicial:

[136] DUVAL, Raymond. *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang (sa), 1995.

- Realizar transformaciones de tratamiento entre representaciones de objetos matemáticos en situaciones de comportamiento variacional.

- Realizar transformaciones de conversión entre representaciones de objetos matemáticos en situaciones de comportamiento variacional.

Mencionaremos solo algunas acciones o ejemplos de acciones que caracterizan esta habilidad en términos de los objetos involucrados en las situaciones de cambio y variación trabajadas en el curso, dado que los tipos de transformaciones tanto de tratamiento como de conversión fueron explicitados en el apartado 2.4.4. Esas acciones serán:

- Determinar la expresión algebraica a partir del registro tabular de una función

- Realizar la gráfica de una función a partir del registro tabular de la misma

- Expresar en lenguaje natural la relación funcional entre dos magnitudes que varían a partir del registro tabular

- Determinar la expresión algebraica de una función a partir de su gráfica

- Realizar una tabla de valores de una función a partir de su gráfica

- Expresar en lenguaje natural la relación funcional entre dos magnitudes que varían a partir de su gráfica

- Construir una tabla de valores a partir de una expresión algebraica

- Realizar la gráfica de una relación funcional a partir de su expresión algebraica

- Expresar en lenguaje natural la relación funcional entre dos magnitudes que varían a partir de su expresión algebraica

- Realizar una tabla de valores a partir de un enunciado en lenguaje natural de una situación funcional

- Construir una representación gráfica a partir de un enunciado en lenguaje natural de una situación funcional

- Determinar una expresión algebraica a partir de un enunciado en lenguaje natural de una situación funcional

A pesar de que el curso laboratorio solo tiene como tal un taller en el que se trabajan las transformaciones entre representaciones, este le brinda gran experticia a los estudiantes para trabajar un tipo de conversión que normalmente se les dificulta y les da pie para hacer uso continuo de este tipo de transformaciones. Consideramos sin embargo que se dejan un poco de lado las transformaciones entre otros registros de representación, e incluso como lo menciona Rojas[137] se deja de lado también el trabajar transformaciones de tratamiento, una tarea que a pesar de poseer reglas más "explícitas" para ser realizada, también genera ciertos resquemores en los estudiantes.

[137] ROJAS, Pedro Javier. Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 2014, vol. 12, no 1.

Somos conscientes que la dificultad para implementar actividades donde se propicien transformaciones entre otros registros diferentes al gráfico y al algebraico, son precisamente la falta de reglas bien delimitadas para hacer esos tipos de transformaciones, el tiempo tan corto del que se dispone para la realización del curso y la preponderancia que en la enseñanza tradicional se le da a estos dos registros de representación; no olvidando que los estudiantes que participan del curso de pre-cálculo ingresan semanas después a afrontar un curso de Cálculo Diferencial en el que es muy posible que reciban una enseñanza donde se siguen privilegiando esos dos registros de representación.

HABILIDAD PARA COORDINAR REPRESENTACIONES DE LOS OBJETOS MATEMÁTICOS

La coordinación de registros de representación de los objetos matemáticos puede considerarse como una habilidad que reúne características de las anteriores habilidades, por lo que consideramos los siguientes como sus descriptores:

- Escoger de manera espontánea el registro y la representación del objeto matemático que sea más acorde para poder desarrollar o dar solución a una situación de variación que ha sido propuesta.

- Diferenciar con claridad entre un objeto matemático y cualquiera de las representaciones del mismo.

Aunque nuestro objetivo fundamental no pasa por establecer una jerarquía en términos de las habilidades que hemos tratado de caracterizar, habremos de reconocer que la coordinación de representaciones de objetos matemáticos es una habilidad superior. Lo dicho, en cuanto la coordinación exige del individuo poder establecer cuál de las representaciones del objeto matemático en cuestión, en un determinado momento, le brinda la mayor información, mayor economía o mayores posibilidades de visualización, a fin de solventar la situación específica en la que se halla inmerso. Para tales fines requiere cuando menos de dos representaciones del mismo objeto, aquella en la que le haya sido presentada la situación y otra a la cual pueda transformarla para los fines antes especificados.

De la misma forma si cuenta cuando menos con dos representaciones del objeto matemático, debe poder manejar de forma adecuada las transformaciones entre dichas representaciones en ambos sentidos. El hecho de poder realizar conversiones en ambos sentidos va de este modo a significar que puede interpretar de manera correcta la información y sin necesidad de hacer hincapié en el asunto sabemos que ha podido reconocer el objeto matemático en cuestión sea cual fuere la representación inicial dada.

Como se mencionó en el capítulo IV, las situaciones en las que los estudiantes podían mostrar evidencia de la coordinación de representaciones no se dan durante el desarrollo de las actividades del curso laboratorio de pre-cálculo, debido al diseño de las mismas, las cuales consideramos se desarrollan mediante una secuencia de pasos especificados en los que los estudiantes van reforzando y potencializando las demás habilidades acá descritas.

De tal forma, la coordinación de representaciones de objetos matemáticos es una habilidad por la que se propende al trabajar en pos de las otras cuatro habilidades.

En el análisis de los datos no se encontraron evidencias que nos sugirieran pensar en una habilidad distinta a las cinco que se categorizaron *a priori*, por lo cual estas han sido las acá descritas.

REFLEXIONES ACERCA DEL CURSO LABORATORIO DE PRE-CÁLCULO

Durante el desarrollo del curso laboratorio de pre-cálculo se trabajan actividades de conversión entre las representaciones de los objetos matemáticos, sin embargo se privilegia la conversión entre la representación algebraica y la representación gráfica, dado que el mediador semiótico utilizado permite visualizar de manera sencilla las variaciones de las unidades significantes en la representación gráfica a partir de las variaciones de las unidades simbólicas correspondientes; por otro lado la conversión en el sentido inverso, es decir a partir de la representación gráfica de una función obtener su representación algebraica pasa por una tarea de interpretación en la que el software es quien provee una cantidad de candidatos para la representación algebraica y el estudiante escoge cuál se acomoda más a la situación que está siendo explorada. En este tipo de actividad, la precisión exagerada conduce a una pérdida de significado y limita al cálculo a una visión netamente algebraica.

Tareas en las que la conversión se realice a partir de la representación gráfica pudieran ser de gran utilidad, incluso cuando, tal y como sucede en la actividad realizada en el curso se utilice como representación intermediaria a la tabular numérica. Villa[138] nos muestra un ejercicio de identificación de una función polinómica a través de su tabla, trabajando con los cocientes de las diferencias, por su parte Pluvinage[139] plantea la posibilidad de trabajar la conversión tabular-algebraica de la misma forma, mediante un ejercicio de tratamiento dentro del registro tabular. Así, se trabajarían otro tipo de conversiones que no son los usuales y se realizan transformaciones de tratamiento en registros diferentes al algebraico

---

[138] VILLA-OCHOA, Jhony. Identificar funciones polinómicas: Una tarea no siempre realizable. *Revista EMA*, 2001, vol. 6, no 3, p. 290-307.

[139] PLUVINAGE, Francois. Acceder al estrato funcional. En C. A. Cuevas, A. y F. Pluvinage (Eds.), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral: Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa*. México: Pearson. 2014

que son los tratamientos generalmente enseñados en los cursos tradicionales de cálculo y en la enseñanza básica y media.

En términos de la habilidad de transformación de las representaciones de los objetos matemáticos, aportaría en gran medida a fin de alcanzar los fines últimos del curso que los estudiantes pudiesen construir representaciones digitales de los objetos matemáticos que son tratados en el curso. Sin embargo, somos conscientes que para ello deberían conocer a profundidad el mediador semiótico utilizado para la construcción de dichas representaciones y esa posibilidad está fuera de los alcances y objetivos del curso laboratorio de pre-cálculo.

Las actividades correspondientes a la evaluación (prueba diagnóstica y prueba final) del curso laboratorio de pre-cálculo presentan ítems planteados utilizando los registros de representación predominantes en un curso tradicional de cálculo. Si bien, la prueba diagnóstica se presenta de esta manera considerando los ambientes de aprendizaje de los que provienen los estudiantes, en los que se promueven los aprendizajes memorísticos basados en algoritmos, consideramos que la prueba final del curso además de unos cuantos ítems que sirvan de comparación con la prueba diagnóstica, deberían presentar situaciones retadoras más acordes con las habilidades que se desarrollan y potencian a lo largo del curso.

PERSPECTIVAS PARA FUTURAS INVESTIGACIONES

Este trabajo más allá del aporte teórico en términos de la caracterización de las habilidades cognitivas asociadas al proceso de representación de fenómenos de variación, también ha sido planteado para aportar a la consolidación de la estructura curricular del curso laboratorio de pre-cálculo, el cual apunta a atacar la problemática de la deserción y la mortalidad académica mencionada al inicio de este escrito.

Es además una invitación a continuar en la indagación en la Didáctica del cálculo desde la perspectiva del desarrollo y potenciación de habilidades que le permitan al estudiante acercarse aún más a los objetos matemáticos de estudio, para lo cual necesita apropiarse de la multiplicidad de representaciones de los mismos.

Así como nosotros hemos planteado una serie de habilidades relacionadas con el proceso de representación y conociendo la cercanía y el entrelazamiento de los procesos matemáticos (comunicación, razonamiento, resolución de problemas) queda hecha la invitación para indagar desde otros procesos, cuáles son las habilidades que se pueden y se deben desarrollar y potenciar.

Por último, la invitación para que la comunidad académica pueda llevar los resultados de las investigaciones al aula de clase desde la educación básica y media, a fin de generar espacios donde se propicien, promuevan, desarrollen y potencien habilidades cognitivas para cada uno de los procesos matemáticos.

BIBLIOGRAFÍA

ALEJO, Avelina; REYES, Victoriano & RODRÍGUEZ, Verónica. Relación entre el curso propedéutico, nivelación y el examen de diagnóstico de primer semestre, en el instituto tecnológico de Cd. Madero Tamaulipas, México. *Revista Iberoamericana para la investigación y el desarrollo,* vol *10*. pp.135-144.

ANDERSON, John R.; BOWER, Gordon H. Recognition and retrieval processes in free recall. Psychological review, 1972, vol. 79, no 2, p. 97.

ARTIGUE, Michèle. La enseñanza de los principios del cálculo: problemas epistemológicos, cognitivos y didácticos..En Artigue, M. Douady, R. Moreno, L. y Gómez, P. (Eds)*. Ingeniería didáctica en Educación Matemática* (pp. 97-140).Bogotá: Grupo Editorial Iberoamericana.

ARTIGUE, Michèle. What can we learn from educational research at the university level?. En *The teaching and learning of mathematics at university level.* Springer Netherlands, 2001. p. 207-220.

BADILLO JIMÉNEZ, Edelmira Rosa, et al. La derivada como objeto matemático y como objeto de enseñanza y aprendizaje en profesores de matemática de Colombia:" la derivada un concepto a caballo entre la matemática y la física". 2003.

BARAJAS, Claudia. *Dificultades del pensamiento variacional: una mirada al proceso elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos*. Trabajo de grado Magíster en Ciencias Especialidad Matemática Educativa. México: CICATA-IPN, 2015. 220 p.

BLANTON, Maria; KAPUT, James. Elementary grades students' capacity for functional thinking. En *Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education*. 2004. p. 135-142.

BOSCH, Mariana. *La dimensión ostensiva en la actividad matemática. El caso de la proporcionalidad.* Trabajo de grado Doctor en Ciencias Matemáticas. Barcelona: Universitat Autònoma de Barcelona, 1994. 207 p.

BOSCH, Marianna; CHEVALLARD, Yves. La sensibilité de l'activité mathématique aux ostensifs: objet d'étude et problématique. *Recherches en didactique des mathématiques,* 1999, vol. 19, no 1, p. 77-123.

BOTELLO, Carolina. *Procesos de seguimiento y acompañamiento académico a estudiantes de cálculo diferencial: un aula experimental para profesores de matemáticas en formación*. Trabajo de grado Magíster en Educación Matemática. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2013, 222 p.

CANTORAL, Ricardo; FARFÁN, Rosa. Pensamiento y lenguaje variacional en la introducción al análisis. *Epsilon*, 1998, vol. 42, no 14, p. 3.

CANTORAL, Ricardo. Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional, una mirada socioepistemológica. 2004. En: *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 17(1), 1–9. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

CANTORAL, Ricardo. *Desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional*. México: Secretaría de educación pública, 2013.

CANTÚ, Idalia; ARENAS, Rita; FLORES, María Teresa. Impacto de precálculo en cálculo. *Números. Revista de Didáctica de las Matemáticas*, 2012, vol. 80, p. 135-144.

CAÑADAS, María. C.; FUENTES, Sandra. *Pensamiento funcional de estudiantes de primero de educación primaria: un estudio exploratorio*. 2015.

CAÑEDO, Carlos., & CÁCERES, Maritza. *Fundamentos teóricos para la implementación de la didáctica en el proceso enseñanza-aprendizaje*. Cienfuegos: Universidad de Cienfuegos "Carlos Rafael Rodríguez. Recuperado de: http://www.eumed.net/libros-gratis/2008b/395/index.htm#indice

CARLSON, Marilyn, et al. Razonamiento covariacional aplicado a la modelación de eventos dinámicos: Un marco conceptual y un estudio. *Revista EMA*, 2003, vol. 8, no 2, p. 121-156.

CARRIÓN MIRANDA, Vicente. & PLUVINAGE, Francois. Registros y estratos en ETM al servicio del pensamiento funcional. *Relime*, Vol. 17, Núm. 4 (II), 2014; p. 267-286

CHEVALLARD, Yves. La transposición didáctica. *Del saber sabio al saber enseñado*, 1991, vol. 3.

CUEVAS, Armando; MARTINEZ, Magally; PLUVINAGE, François. Annales de didactique et de sciences cognitives. V. 17. p. 137-168. Promoviendo el pensamiento funcional en la enseñanza del cálculo: un experimento con el uso de tecnologías digitales y sus resultados.(Promouvoir la pensée fonctionnelle dans l'enseignement de l'analyse: une expérimentation avec usage des technologies informatiques et ses résultats.).

D'AMORE, Bruno; PUGA, Angel Balderas; PINILLA, Martha Isabel Fandiño. *Didáctica de la matemática*. Cooperativa Editorial Magisterio, 2006.

D'AMORE, Bruno. Objetos, significados, representaciones semióticas y sentido. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 2006, vol. 9, no 1, p. 177-196.

DÁVILA, Guillermo, FLORES, Rubén, GARCÍA, Martín. & VALENCIA, Marco. *Fundamentos del cálculo*. Sonora: Editorial Garabatos, 2008.

DOLORES, Crisólogo. La Matemática de las variables y el desarrollo del pensamiento y lenguaje variacional. *Revista Academia*, 2000, vol. 2, p. 18.

DOLORES, Crisólogo. Acerca del análisis de funciones a través de sus gráficas: concepciones alternativas de estudiantes de bachillerato. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 2004, vol. 7, no 3, p. 195-218.

DOLORES, Crisólogo; SALGADO, Gerardo. Elementos para la graficación covariacional. *Números*, 2009, no 72, p. 63-74.

DUVAL, Raymond. Graphiques et équations. En *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 1988. p. 235-253.

DUVAL, Raymond. *Sémiosis et pensée humaine*. Peter Lang (sa), 1995.

DUVAL, Raymond. *Semiosis y pensamiento humano: registros semióticos y aprendizajes intelectuales*. Universidad del Valle, 2004.

DUVAL, Raymond. Un tema crucial en la educación matemática: La habilidad para cambiar el registro de representación. *La Gaceta de la Real Sociedad Matemática Española*, 2006, vol. 9, no 1, p. 143-168.

DUVAL, Raymond; SÁENZ-LUDLOW, Adalira. Comprensión y aprendizaje en matemáticas: perspectivas semióticas seleccionadas. 2016.

FABRA, Margarida y DEULOFEU, Jordi. Construcción de gráficos de funciones: Continuidad y prototipos. *RELIME. Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 2000, vol. 3, no 2, p. 207-230.

FIALLO, Jorge. & PARADA, Sandra Evely. Curso de precálculo apoyado en el uso de geogebra para el desarrollo del pensamiento varacional. *Revista Científica*, 2014, no 20, p. 56-71.

FONT, Vicenç, et al. Algunos puntos de vista sobre las representaciones en didáctica de las matemáticas. *Philosophy of Mathematics Education Journal*, 2000, vol. 14, p. 1-35.

GILAR, Raquel. *Adquisición de habilidades cognitivas: factores en el desarrollo inicial de la competencia experta*. Tesis de grado Doctor en Psicología. Alicante: Universidad de Alicante, 2003. 437 p.

GOLDIN, Gerald A. Representations and the psychology of mathematics education: part II. *The Journal of Mathematical Behavior*, 1998, vol. 17, no 2, p. 135.

HECKLEIN, Marcela; ENGLER, Adriana, VRANCKEN, Silvia & MÜLLER, Daniela Variables, funciones y cambios. Exploración de las nociones que manejan alumnos de una escuela secundaria. *Revista Premisa, 49, 2011;* 23-40. Recuperado de: http://www.soarem.org.ar/Documentos/49%20Heicklein.pdf

HERRERA, Francisco. Habilidades Cognitivas*. Notas del departamento de Psicología Evolutiva y de la educación.* Universidad de Granada. España.2001

HITT, Fernando. Sistemas semióticos de representación del concepto de función y su relación con problemas epistemológicos y didácticos. *Investigaciones en matemática Educativa*, 1996, p. 245-264.

HITT, Fernando. Dificultades en el aprendizaje del cálculo. En J. Cortés, y F. Hitt (Eds.). *Reflexiones sobre el aprendizaje del cálculo y su enseñanza* (pp. 81-107). Morelia: Morevallado Editores. 2005

INSTITUTO COLOMBIANO PARA EL FOMENTO DE LA EDUCACIÓN SUPERIOR. *Fundamentación conceptual área de Matemáticas.* Bogotá: Acevedo, M., Montañés, R., Huertas, C., Pérez, M. 2007.

KAPUT, James J. Notations and representations as mediators of constructive processes. En *Radical constructivism in mathematics education*. Springer Netherlands, 1991. p. 53-74.

LANGLEY, Pat; SIMON, Herbert A. The central role of learning in cognition. *Cognitive skills and their acquisition*, 1981, p. 361-380.

LAORDEN, Cristina; GARCÍA, Elena; SÁNCHEZ, Salvador. Integrando descripciones de habilidades cognitivas en los metadatos de los objetos de aprendizaje estandarizados. *Revista de Educación a Distancia*, 2005.

LEINHARDT, Gaea; ZASLAVSKY, Orit; STEIN, Mary Kay. Functions, graphs, and graphing: Tasks, learning, and teaching. *Review of educational research*, 1990, vol. 60, no 1, p. 1-64.

LOZANO, María E., et al. Dificultades de los alumnos para articular representaciones gráficas y algebraicas de funciones lineales y cuadráticas. *Año XI–Número 41–Marzo 2015 Monográfico: FISEM y Sociedades que la integran ÍNDICE*, p. 20.

MANDLER, George. Recognizing: The judgment of previous occurrence. *Psychological review*, 1980, vol. 87, no 3, p. 252.

MANZANERO, Antonio. Procesos automáticos y controlados de memoria: Modelo Asociativo (HAM) vs. Sistema de Procesamiento General Abstracto. *Revista de Psicología General y Aplicada*, 2006, vol. 59, no 3, p. 373-412.

MESA, Yadira Marcela; VILLA OCHOA, Jhony Alexánder. Elementos históricos, epistemológicos y didácticos para la construcción del concepto de función cuadrática. *Revista Virtual Universidad Católica del Norte*, 2011, vol. 1, no 21.

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN). *Pensamiento Variacional y Tecnologías Computacionales.* Colombia: M.E.N. 2004

MINISTERIO DE EDUCACIÓN NACIONAL (MEN) *Estándares básicos de competencias en Matemáticas*. Recuperado de: . http://www.eduteka.org/pdfdir/MENEstandaresMatematicas2003.pdf

MORENO, Daniel. *Procesos de interpretación y acción de profesores que participan en una comunidad de práctica en la que se realiza el diseño curricular de un curso de precálculo.* Trabajo de grado Magíster en Educación Matemática. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander, 2015, 185 p.

MORENO, Luis. *Educación Matemática: del signo al píxel*. Bucaramanga: Universidad Industrial de Santander. 2014

MORENO, María. El papel de la didáctica en la enseñanza del cálculo: evolución, estado actual y retos futuros. 2005.

MURILLO, Jesús., ARNAL, María. & MARCOS, Guillermina. Competencias en matemáticas y entornos interactivos. En *Contribuciones científicas en honor de Mirian Andrés Gómez*. Universidad de La Rioja, 2010. p. 375-401.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS (ed.). *Principles and standards for school mathematics*. National Council of Teachers of, 2000.

NATIONAL COUNCIL OF TEACHERS OF MATHEMATICS. *Principios y Estándares para la Educación Matemáticas.* Sevilla*, SAEM Thales*, 2003.

NIETO, Natividad.; CHAVIRA, Heidi.; VIRAMONTES, Juan. *Desarrollo del pensamiento y el lenguaje variacional con el CABRI II PLUS®*. 2011.

NOSS, Richard; HEALY, Lulu; HOYLES, Celia. The construction of mathematical meanings: Connecting the visual with the symbolic. *Educational studies in mathematics*, 1997, vol. 33, no 2, p. 203-233.

PARADA, Sandra. Una estructura curricular para atender la problemática relacionada con el curso de Cálculo I en la Universidad Industrial de Santander. *Documento interno no publicado de la Escuela de Matemáticas de la UIS, Bucaramanga*, 2012.

PLUVINAGE, Francois. Acceder al estrato funcional. En C. A. Cuevas, A. y F. Pluvinage (Eds.), *La enseñanza del cálculo diferencial e integral: Compendio de investigaciones y reflexiones para profesores, formadores e investigadores en matemática educativa*. México: Pearson. 2014

PONCE, Héctor. *Enseñar y aprender matemática: propuestas para el segundo ciclo*. Noveduc Libros, 2004.

RAMÍREZ, Osiel; ROMERO, César Fabián; OKTAÇ, Asuman. Coordinación de registros semióticos y las transformaciones lineales en el plano. En A. Ramírez e Y. Morales (Eds.), *I Congreso de Educación Matemática de América Central y el Caribe* (pp. 537-547). Santo Domingo: ICEMACYC. 2013

RAMOS, Ana., HERRERA, José., & RAMÍREZ, María. Desarrollo de habilidades cognitivas con aprendizaje móvil: un estudio de casos. *Comunicar: Revista científica iberoamericana de comunicación y educación*, 2010, no 34, p. 201-209.

RAMOS, Raul & JIMÉNEZ, Rosa (2014) Elementos teóricos para analizar el desarrollo del pensamiento variacional en el estudiante. *Revista El cálculo y su enseñanza* 5 (5), 107-124.

RENKL, Alexander; ATKINSON, Robert K. Structuring the transition from example study to problem solving in cognitive skill acquisition: A cognitive load perspective. *Educational psychologist*, 2003, vol. 38, no 1, p. 15-22.

ROJAS, Pedro Javier. Sistemas de representación y aprendizaje de las matemáticas. *Revista Digital: Matemática, Educación e Internet*, 2014, vol. 12, no 1.

ROSENBAUM, David A.; CARLSON, Richard A.; GILMORE, Rick O. Acquisition of intellectual and perceptual-motor skills. *Annual review of psychology*, 2001, vol. 52, no 1, p. 453-470.

SÁNCHEZ-MATAMOROS, Gloria; GARCÍA, Mercedes; LLINARES, Salvador. La comprensión de la derivada como objeto de investigación en didáctica de la matemática. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 2008, vol. 11, no 2, p. 267-296.

SARMIENTO, Mariela. *La enseñanza de las matemáticas y las Ntic. Una estrategia de formación permanente*. Universitat Rovira i Virgili, 2007.

SOSA, Landy, APARICIO, Eddie;. Interactuando con el concepto función en situaciones de modelación. 2009. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* 22,551-560. México: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa.

TAATGEN, Niels A., et al. The acquisition of robust and flexible cognitive skills. *Journal of Experimental Psychology: General*, 2008, vol. 137, no 3, p. 548.

TALL, David. Functions and calculus. En *International handbook of mathematics education*. Springer Netherlands, 1996. p. 289-325.

TULVING, Endel. Memory and consciousness. *Canadian Psychology/Psychologie canadienne*, 1985, vol. 26, no 1, p. 1.

VAN DER MEIJ, Jan; DE JONG, Ton. Learning with multiple representations. En *Annual Meeting of the American Educational Research Association, San Diego, CA*. 2004.

VAN MERRIËNBOER, Jeroen JG; KIRSCHNER, Paul A. *Ten steps to complex learning: A systematic approach to four-component instructional design*. Routledge, 2012.

VASCO, Carlos Eduardo. *Didáctica de las matemáticas: artículos selectos*. U. Pedagógica Nacional, 2006.

VERGEL, Rodolfo. *Sobre la emergencia del pensamiento algebraico temprano y su desarrollo en la educación primaria*. Bogotá D.C, Colombia: Universidad Distrital Francisco José de Caldas. 2016.

VICERRECTORÍA ACADÉMICA *Diagnóstico de las causas de deserción y retención estudiantil en los programas de pregrado presencial de la Universidad Industrial de Santander*. Documento interno no publicado de la Vicerrectoría Académica de la UIS, Bucaramanga. 2011

VILLA-OCHOA, Jhony. Identificar funciones polinómicas: Una tarea no siempre realizable. *Revista EMA*, 2001, vol. 6, no 3, p. 290-307.

VIÑAS DE LA HOZ, María; NAVARRO, Patricia; ORTEGA COLLANTE, Eugenio. La calculadora: Una fuente de exploraciones conceptuales. *Zona Próxima*, 2011, no 5.

VRANCKEN, Silvia. ENGLER, Adriana. GIAMPIERI, María. & MÜLLER, Daniela. Estudio de las funciones en situaciones variacionales. Resultados de la implementación de una secuencia de actividades. *Matemática, Educación e Internet, 15*(1), 2014, p. 1-20.