

FUNCIONES QUE PRESERVAN MÉTRICA

Gisselle Bayona Prieto

Universidad Industrial de Santander

Facultad de Ciencias

Escuela de Matemáticas

Bucaramanga

Diciembre, 2005

FUNCIONES QUE PRESERVAN MÉTRICA

Gisselle Bayona Prieto

Trabajo de grado presentado como
requisito parcial para optar al título de
Licenciada en Matemáticas

Director
Javier E. Camargo García

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas
Bucaramanga
Diciembre, 2005

*Encomienda tus obras a Dios,
y tus proyectos se realizarán*
(Prov 16, 3)

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a:

Dios, el que me ha prestado la vida para realizar mis sueños y a la Virgen María por ser mi segunda mamá.

Profesor Javier E. Camargo García, mi director, por su colaboración, paciencia y dedicación en la realización del presente trabajo.

Profesor Gilberto Arenas por su desinteresada orientación.

Jahel Prieto Sarmiento, mi madre, quien ha sido un ejemplo para mí.

Mis familiares, amigos y compañeros que me han apoyado de manera incondicional durante la carrera.

Eduard Pérez Corzo por su constante ayuda y compañía.

Todos los profesores por la formación que me dieron durante mis estudios.

Rosalba Puentes y a Nubia Moreno por su valiosa amistad.

TITLE: FUNCTION PRESERVING METRIC*

AUTHOR: Gisselle Bayona Prieto**

KEY WORDS: Metric space, MONOTONa function, continuous function, derivative, equivalent topologically spaces..

DESCRIPTION

Not only, in the mathematical environment, is well-know the topic of the metric spaces but also in the curriculum of Mathematical Analysis or in the Topology course, for this reason, in the first chapter it6 will be specify concepts as metric space, continuous function and differentiable function.

In the second chapter will be observed that a metric-preserving function is built from a metric space (X, d) and a f function defined from $[0, \infty)$ in $[0, \infty)$ in such a way that $f \circ d$ is a metric.

The first detailed study of these functions was by Sreenivasan in 1947, also, Juza discovered an interesting application of the metric-preserving functions.

In the third chapter is necessary to take into account the continuity of function in zero. In the first section will be exam the important relations hip between strongly metric-preserving functions and continuity. In the second and final section, will be studied metric-preserving functions which are differentiable in zero. To find the derivative in zero is the final homework of this work in order to get a division of the functions metric-preserving functions in two different classes: functions which are determined by the finite valve and functions which have a valve infinite of their derivative in zero.

*Thesis

** FACULTY OF SCIENCES, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR Javier E. Camargo García.

TITULO: FUNCIONES QUE PRESERVAN MÉTRICA*

AUTOR: Gisselle Bayona Prieto**

PALABRAS CLAVES: Espacio métrico, función monótona, función continua, derivada, espacios topológicamente equivalentes..

DESCRIPCIÓN

En el ambiente matemático es bien conocido el tema de los espacios métricos ya sea en el currículum del curso de análisis matemático o en el curso de topología, por esta razón en el primer capítulo se especifican conceptos como espacio métrico, función continua y función diferenciable.

En el segundo capítulo veremos que una función que preserve métrica se construye a partir de un espacio métrico (X, d) y una función f definida de $[0, \infty)$ en $[0, \infty)$ de modo que $f \circ d$ es una métrica.

El primer interesado en estas funciones fue Sreenivasan en 1947, pero también en 1956 Juza, mucho antes que el tema se formalizara, descubrió una interesante aplicación de las funciones que preservan métrica.

En el capítulo tres es necesario tener en cuenta la continuidad de la función en cero. En la primera sección examinaremos la importante relación entre funciones que preservan métrica fuertemente y la continuidad. En la segunda y última sección estudiaremos funciones continuas que preservan métrica las cuales son diferenciables en cero. Hallar la derivada en cero es la tarea final del presente trabajo, obteniendo así una división de las funciones que preservan métrica en dos clases diferentes: las que están determinadas por el valor finito y las que tienen un valor infinito de su derivada en cero.

*Tesis

** FACULTAD DE CIENCIAS, LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS.
DIRECTOR Javier E. Camargo García.

CONTENIDO

INTRODUCCIÓN	I
1. PRELIMINARES	1
1.1. Algunas definiciones	1
1.2. Espacios Métricos	5
2. FUNCIONES QUE PRESERVAN MÉTRICA	9
3. FUNCIONES QUE PRESERVAN MÉTRICA FUERTEMENTE	39
3.1. Funciones que preservan métrica y continuidad	39
3.2. Funciones que preservan métrica y diferenciabilidad	47
Referencias	53

INTRODUCCIÓN

El estudio de los espacios métricos es uno de los temas que más a fascinado al mundo de los matemáticos desde comienzos del siglo pasado, los conceptos de la teoría de los espacios métricos, son parte esencial del currículum de los cursos de análisis matemático y topología. En las pasadas tres décadas se desarrolló, una significativa cantidad de documentos sobre funciones que preservan métrica.

El primer estudio detallado sobre esas funciones fue hecho por Sreenivasan en 1947, pero quien más se ha interesado en este tema ha sido *Doboš* [3], con sus aportes como demostrar que la función de Cantor preserva métrica y muchos mas conocimientos sobre estas funciones que han servido para estudio y avance en los espacios métricos.

Las funciones que preservan métrica se presentan como una alternativa diferente, con un soporte geométrico, que hace más sencilla la manera de abordar problemas que exigen construcciones especiales. Es sabido que si d es una métrica, $\frac{d}{1+d}$ es una métrica equivalente a d (topológicamente), pues a esto nos llevarán algunas preguntas interesantes como: si f es una función que preserva métrica y d una métrica sobre cualquier espacio métrico, ¿que condiciones debe cumplir f para que d y $f(d)$ generen la misma topología?

La extensión de la clase de funciones que preservan métrica es estructurada entorno a su conducta en cero, en esta inspección se tendrá en cuenta tanto la continuidad como la diferenciabilidad. Sea una función f que preserva métrica veremos que transforma

cada métrica d a una métrica discreta, o, a una métrica que es topológicamente equivalente a d . También se estudiará la influencia del valor (finito o infinito) de la derivada de la función en cero para determinar la propiedad de ser diferenciable en ninguna parte, o, casi en toda parte.

CAPÍTULO 1

PRELIMINARES

En este capítulo se hace un resumen de los principales conceptos, definiciones y teoremas del cálculo, los espacios métricos y en general del análisis matemático, que se van a necesitar para el desarrollo del trabajo.

1.1. Algunas definiciones

Esta monografía estudia características de funciones $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ con algunas condiciones que se enunciarán con detalle más adelante, por esta razón, las definiciones que enunciaremos en esta sección, aunque (algunas) son válidas en cualquier espacio topológico, son enunciadas para $\mathbb{R}$.

Definición 1.1. *Sea f una función definida sobre $\mathbb{R}$, se dice que f es **subaditiva** si para cada $x, y \in \mathbb{R}$ se tiene que*

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y).$$

Teniendo en cuenta que la subaditividad de una función es una característica de todas las funciones que preservan métrica como veremos más adelante, la monotonía es otra propiedad que se presenta muy a menudo. Además el crecimiento y decrecimiento de una función en un conjunto dado, tiene una estrecha relación con la monotonía.

Definición 1.2. Una función f es **decreciente** en el intervalo $[a, b]$ si se tiene que para cada c, d , con $a \leq c < d \leq b$ entonces:

$$f(c) > f(d).$$

Además, una función f puede ser **no decreciente** en el intervalo $[a, b]$ cumple que para cada c, d , con $a \leq c < d \leq b$ se tiene:

$$f(c) \leq f(d).$$

Definición 1.3. Una función f es **creciente** en el intervalo $[a, b]$ si cumple que para cada c, d , con $a \leq c < d \leq b$ se tiene

$$f(c) < f(d).$$

Pero también puede suceder que una función f sea **no creciente**, sin necesidad de ser decreciente, ya que f en el intervalo $[a, b]$ cumple que para cada c, d , con $a \leq c < d \leq b$ se tiene:

$$f(c) \geq f(d).$$

La siguiente definición es también muy conocida cuando se trabaja con la teoría de funciones sobre los reales, pero aunque es muy conocida es de gran importancia en el desarrollo del presente escrito, por esta razón la presentaremos a continuación.

Definición 1.4. Una función $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es **cóncava** si para todo $x, y \geq 0$,

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} \leq f\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

Se dice que la función f es **estrictamente cóncava** en el intervalo $[a, b]$ si para todo $a \leq x < y \leq b$ se tiene que:

$$\frac{f(x) + f(y)}{2} < f\left(\frac{x + y}{2}\right).$$

Definición 1.5. Una función $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es **convexa** en el intervalo $[a, b]$ si para todo $a \leq x < y \leq b$ se tiene que:

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Se dice que la función f es **estrictamente convexa** en el intervalo $[a, b]$ si para todo $a \leq x < y \leq b$ se tiene que:

$$f\left(\frac{x + y}{2}\right) < \frac{f(x) + f(y)}{2}.$$

Proposición 1.6. f es cóncava si, y sólo si, $-f$ es convexa sobre $[0, c]$ para cualquier $c > 0$.

Demostración. Sean $g = -f$, $x, y \in [0, c]$, con $x < y$. Supongamos que f es cóncava, entonces si multiplicamos la desigualdad por -1 nos queda:

$$\begin{aligned}\frac{f(x) + f(y)}{2} &\leq f\left(\frac{x+y}{2}\right), \\ \frac{-f(x) - f(y)}{2} &\geq -f\left(\frac{x+y}{2}\right), \\ \frac{g(x) + g(y)}{2} &\geq g\left(\frac{x+y}{2}\right).\end{aligned}$$

Luego g es convexa, pero como $g = -f$ entonces llegamos a lo deseado.

Por otra parte, sean $x, y \in [0, \infty)$, con $x < y$. Partiendo del hecho que $-f$ es convexa y haciendo el mismo procedimiento anterior llegamos a:

$$\begin{aligned}\frac{-f(x) - f(y)}{2} &\geq -f\left(\frac{x+y}{2}\right), \\ \frac{f(x) + f(y)}{2} &\leq f\left(\frac{x+y}{2}\right).\end{aligned}$$

Luego f es cóncava. □

Es bien conocido, que una sucesión $\{x_n\}$ de elementos de $\mathbb{R}$ es una aplicación del conjunto $\mathbb{N}$ en $\mathbb{R}$. Se designa por x_n el elemento de $\mathbb{R}$ que corresponde a la imagen del número natural n , $f(n) = x_n$. Ahora nuestro interés son las sucesiones acotadas.

Definición 1.7. Se dice que una sucesión $\{x_n\}$ de números reales está **acotada** si existe un número real $M > 0$ tal que $|x_n| \leq M$ para toda $n \in \mathbb{N}$.

La anterior definición nos indica que una sucesión $\{x_n\}$ está acotada si, y solo si el conjunto $\{x_n : n \in \mathbb{N}\}$ de sus valores está acotado en $\mathbb{R}$. Con la siguiente definición, profundizaremos un poco en las sucesiones acotadas.

Definición 1.8. Dada una sucesión acotada $\{x_n\}$, $s_m = \sup\{x_n : n \geq m\}$ y $t_m = \inf\{x_n : n \geq m\}$. Se define el límite superior y el límite inferior de la sucesión denotados respectivamente por $\limsup x_n$, $\liminf x_n$ como:

$$\limsup x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} s_m \quad \liminf x_n = \lim_{m \rightarrow \infty} t_m.$$

Ejemplo 1.9. Dada la sucesión $\{x_n\}$ donde $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$, tenemos que $\limsup x_n = 1$ y $\liminf x_n = -1$.

Una función está acotada si su codominio es un conjunto acotado en $\mathbb{R}$. Hay que tener presente que las funciones continuas no tienen que ser obligatoriamente acotadas ni las funciones acotada tienen que ser necesariamente continuas. Formalmente decimos:

Definición 1.10. Una función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$ está **acotada en** A si existe una constante $M > 0$ tal que $|f(x)| \leq M$ para toda $x \in A$.

Dentro de las funciones acotadas encontramos las funciones de variación acotada que a su vez están estrechamente relacionadas con las funciones monótonas.

Definición 1.11. Sea f definida en $[a, b]$, si $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ es una partición de $[a, b]$, escribimos $\Delta f_k = f(x_k) - f(x_{k-1})$, para $k = 1, 2, \dots, n$.

Si existe $M > 0$ tal que $\sum_{k=1}^n |\Delta f_k| \leq M$ para toda $P \in \mathfrak{P}$ donde $\mathfrak{P}$ es la familia de las particiones del intervalo $[a, b]$, entonces diremos que f es de **variación acotada** en $[a, b]$.

Ejemplo 1.12. 1. Sea $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{si } x \in \mathbb{Q}, \\ 2, & \text{si } x \in \mathbb{I}. \end{cases}$$

Esta función no es de variación acotada en el intervalo $[0, \infty]$, la prueba se encuentra en el siguiente capítulo donde nuevamente se define la función.

2. Otra función que no es de variación acotada es:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ x \cos \frac{\pi}{2x} & \text{si } x \in (0, 1]. \end{cases}$$

Consideremos la partición $P = \{0, \frac{1}{2n}, \frac{1}{2n-1}, \dots, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, 1\}$, es fácil ver que f es continua en $[0, 1]$ y calculando la variación encontramos que:

$$\sum_{k=1}^{2n} |\Delta f_k| = \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n-2} + \frac{1}{2n-2} + \dots + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}.$$

Esta suma no está acotada para todo n , ya que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ diverge.

1.2. Espacios Métricos

Definición 1.13. Sea $\mathbf{X}$ un conjunto no vacío y δ la función:

$$\delta : \mathbf{X} \times \mathbf{X} \rightarrow [0, \infty)$$

Se dirá que " δ " es una métrica sobre $\mathbf{X}$, si cumple:

- a). $\delta(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$ para cada $x, y \in \mathbf{X}$,
- b). $\delta(x, y) = \delta(y, x)$ para cada $x, y \in \mathbf{X}$,
- c). $\delta(x, y) + \delta(y, z) \geq \delta(x, z)$ para cada $x, y, z \in \mathbf{X}$.

En tal caso a la pareja $(\mathbf{X}, \delta)$ se le llama **espacio métrico**.

A continuación se presentan algunos ejemplos clásicos de métricas:

Ejemplo 1.14. El espacio métrico $(\mathbb{R}, d_1)$ donde d_1 está definida como:

$$d_1(x, y) = |y - x|$$

$\forall x, y \in \mathbb{R}$ y se le denomina métrica euclidiana en $\mathbb{R}$ o simplemente métrica ordinaria.

Ejemplo 1.15. $\mathbf{X}$ un conjunto cualquiera, la distancia entre x y y se define por:

$$\ddot{d}(x, y) = \begin{cases} 1, & \text{si } x \neq y \\ 0, & \text{si } x = y \end{cases}$$

$\ddot{d}$ es una métrica sobre $\mathbf{X}$, llamada la métrica discreta.

Ejemplo 1.16. $\mathbf{X} = \mathbb{R}^2$, d_u la distancia entre $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$ se define por:

$$d_u(x, y) = ((x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2)^{1/2}$$

Se denomina la métrica usual en $\mathbb{R}^2$.

Se dará la definición de conjunto abierto en términos de las llamadas bolas abiertas, las cuales se definen a continuación.

Definición 1.17. Sea $(\mathbf{X}, d)$ un espacio métrico, $a \in \mathbf{X}, \epsilon > 0$. Se define:

$$B(a, \epsilon) = \{x \in \mathbf{X} \mid d(a, x) < \epsilon\}$$

como la bola abierta con centro en a y radio ϵ .

Definición 1.18. Sea $(\mathbf{X}, d)$ un espacio métrico y $A \subset \mathbf{X}$. El conjunto A se denomina **abierto**, si para cada $x \in A$, existe un $r > 0$ tal que $B(x, r) \subset A$.

Por ejemplo el conjunto vacío y el conjunto $\mathbf{X}$ son abiertos. También toda bola abierta en un espacio métrico $(\mathbf{X}, d)$ es un conjunto abierto, particularmente en la recta real, todo intervalo abierto es un conjunto abierto.

La colección de conjuntos abiertos de un espacio métrico se conoce como la topología inducida por la métrica.

Proposición 1.19. Sea d una métrica sobre un conjunto X . Si τ es la topología generada por la métrica d , entonces:

1. $U \cap V \in \tau$, para cada $U, V \in \tau$;
2. $\bigcup U_\alpha \in \tau$, para cada colección $\{U_\alpha : \alpha \in A\} \subset \tau$.

Demostración.

- a. Sean $U, V \in \tau$ y $x \in U \cap V$, como U es abierto se tiene un $r_1 > 0$ tal que $B(x, r_1) \subset U$, igualmente sucede con V pues también es abierto teniendo así $B(x, r_2) \subset V$ con $r_2 > 0$. Si tomamos $r = \min\{r_1, r_2\}$, entonces $B(x, r) \subset U \cap V$, luego $U \cap V \in \tau$.
- b. Sea $x \in \bigcup U_\alpha$, entonces existe $\beta \in A$ tal que $x \in U_\beta$, luego hay un $r > 0$, tal que $B(x, r) \subset U_\beta \subset \bigcup U_\alpha$. Por lo tanto $\bigcup U_\alpha \in \tau$. $\square$

Definición 1.20. Sean $\mathbf{X}$ un espacio métrico, y d_1, d_2 métricas sobre $\mathbf{X}$ entonces d_1 es **topológicamente equivalente** a d_2 si generan la misma topología, esto se denota como $T_{d_1} = T_{d_2}$.

Definición 1.21. Un subconjunto A en un espacio métrico $(\mathbf{X}, d)$ se denomina **conjunto cerrado** si el conjunto $\mathbf{X} - A$ es un subconjunto abierto.

De acuerdo con la definición anterior, podemos definir un análogo a la proposición 1.19 para cerrados, que es una inmediata consecuencia de la definición de cerrado, como se muestra a continuación.

Proposición 1.22. Sea d una métrica sobre un conjunto X . Si τ es la topología generada por la métrica d , entonces:

1. $F \cup L$ es cerrado, para cada F, L cerrados;
2. $\bigcap F_\alpha$ es cerrado, para cada colección $\{F_\alpha : \alpha \in A\}$ de cerrados en X .

La prueba de la anterior proposición se puede encontrar en cualquier libro de análisis o topología general, por esta razón no se presentará.

En consecuencia, el conjunto vacío y el conjunto $\mathbf{X}$ son cerrados, igualmente todo intervalo cerrado en $\mathbb{R}$ es cerrado. Si A es un subconjunto de un espacio métrico X , la adherencia de A es el más pequeño cerrado de X que contiene a A y lo denotaremos por $\overline{A}$, es decir,

$$\overline{A} = \bigcap \{F : F \text{ es cerrado y } A \subset F\}.$$

En un espacio métrico $\mathbf{X}$, si ciertos subconjuntos verifican $A \subseteq S \subseteq \overline{A}$, entonces si A satisface esta condición, diremos que A es denso en S . Por ejemplo el conjunto $\mathbb{Q}$ de los números racionales es denso en $\mathbb{R}$.

En los siguientes renglones daremos una definición general de la continuidad de una función en un punto, en nuestro caso, para espacios métricos.

Definición 1.23. Sea $(\mathbf{X}_1, d_1)$, $(\mathbf{X}_2, d_2)$ espacios métricos y sea $f : \mathbf{X}_1 \rightarrow \mathbf{X}_2$ una función. Diremos que la función f es **continua** en el punto c de $\mathbf{X}_1$, si para todo $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para todo $x \in \mathbf{X}_1$ con $d_1(c, x) < \delta$ entonces $d_2(f(x), f(c)) < \epsilon$.

Se puede expresar la equivalencia a la definición anterior en términos de bolas como sigue: una función f es continua en c si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que $f(B_{d_1}(c, \delta)) \subseteq B_{d_2}(f(c), \epsilon)$.

Ejemplo 1.24. Sea $f(x) = mx$ con $m \neq 0$, la función lineal definida de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$.

Sean $\epsilon > 0$ y $x, y \in \mathbb{R}$ tal que $|x - y| < \delta$ tomemos $\delta = \frac{\epsilon}{|m|}$ de modo que

$$d(f(x), f(y)) = |f(x) - f(y)| = |mx - my| = |m||x - y| < \epsilon,$$

luego la función es continua en $\mathbb{R}$.

Ahora resaltamos la importancia de introducir la noción de derivada, la cual, es de gran importancia para los objetivos del presente escrito. Esta definición se enunciará para funciones de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{R}$ con la métrica usual solo por efectos prácticos.

Definición 1.25. Sea la función $f : A \rightarrow \mathbb{R}$, con $A \subset \mathbb{R}$ abierto y $a \in A$, se dice que f es **derivable** en el punto a , si existe el límite finito:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a},$$

y se denota por $f'(a)$.

Teorema 1.26. (Teorema de Rolle) Supongamos que f posee derivada (finita o infinita) en cada uno de los puntos de un intervalo abierto (a, b) , y supongamos también que f es continua en los puntos extremos a y b . Si $f(a) = f(b)$, entonces existe un punto interior c , por lo menos, en el que $f'(c) = 0$.

Demostración. Supongamos que f' no es cero en ningún punto de (a, b) y llegaremos a una contradicción. Como que f es continua, alcanza su máximo M y su mínimo m en algún punto de $[a, b]$. Ninguno de dichos valores extremos puede ser alcanzado en un punto interior (pues en ese caso f' se anularía); por lo tanto la función los alcanza en los extremos del intervalo. Como $f(a) = f(b)$, entonces $m = M$, y por lo tanto f es constante en $[a, b]$. Esto contradice el supuesto de que f' no es cero en ningún punto de (a, b) . Luego $f'(c) = 0$ para algún c de (a, b) . $\square$

Para terminar analizaremos la relación entre los valores de una función y los valores de su derivada, que se señalan en el teorema del valor medio.

Teorema 1.27. (Teorema del valor medio para derivadas) Si f es una función continua en el intervalo $[a, b]$ con $a, b \in \mathbb{R}$ y es diferenciable en el intervalo (a, b) , entonces existe un punto $c \in (a, b)$ para el que se cumple que:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a)$$

Demostración. Sea $g(x) = f(x)(b - a) - x(f(b) - f(a))$.

$$g(a) = bf(a) - af(b) = g(b)$$

Fácilmente se puede ver que g es continua en $[a, b]$ y derivable en (a, b) ; aplicando el teorema de Rolle que garantiza la existencia por lo menos de un $c \in (a, b)$ tal que $g'(c) = 0$; como $g'(x) = f'(x)(b - a) - (f(b) - f(a))$, cuando $x = c$ se obtiene:

$$f(b) - f(a) = f'(c)(b - a).$$

$\square$

El siguiente teorema nos muestra una relación entre la derivada y la monotonía de una función, esta relación es presentada en cursos elementales de Cálculo.

Teorema 1.28. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ derivable en el intervalo $[a, b]$. Entonces:

- a). f es creciente en $[a, b]$ si, y sólo si, $f'(x) \geq 0$ para todo $x \in [a, b]$.
- b). f es decreciente en $[a, b]$ si, y sólo si, $f'(x) \leq 0$ para todo $x \in [a, b]$.

La demostración de este teorema se encuentra en [10].

CAPÍTULO 2

FUNCIONES QUE PRESERVAN MÉTRICA

Comenzaremos estudiando funciones definidas sobre $[0, \infty)$, las cuales a partir de un espacio métrico (M, d) permiten el desarrollo de otras métricas en ese mismo conjunto. A estas funciones las llamaremos "funciones que preservan métrica".

Definición 2.1. Sean (X, d) un espacio métrico y f una función definida de $[0, \infty)$ a $[0, \infty)$, se dice que f **preserva métrica** si $f \circ d$ es métrica sobre $\mathbf{X}$.

De la anterior definición podemos fácilmente verificar que si una función preserva métrica debe tenerse que $f^{-1}(0) = 0$. Porque si $f(x) = 0$ para algún $x > 0$, se llegaría a una contradicción ya que X es un espacio métrico y $f \circ d$ es métrica entonces existen $a, b \in \mathbf{X}$, de modo que $d(a, b) = x$ y $f(d(a, b)) = 0$ luego $a = b$. Llamaremos a todas las funciones que $f^{-1}(0) = 0$ funciones **dóciles**. Esta es una característica de todas las funciones que preservan métrica.

La siguiente proposición identifica una propiedad básica de todas las funciones que preservan métrica.

Proposición 2.2. Si f preserva métrica, entonces f es subaditiva.

Demostración. Sean $a, b \in [0, \infty)$ y d_u la métrica usual sobre $\mathbb{R}$. Notamos que

$b = d_u(0, b) = d_u(a, a + b)$, luego:

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &= f(d_u(0, a)) + f(d_u(a, a + b)) \\ &= (f \circ d_u)(0, a) + (f \circ d_u)(a, a + b); \end{aligned}$$

y como f preserva métrica se tiene la desigualdad triangular:

$$\begin{aligned} f(a) + f(b) &\geq (f \circ d_u)(0, a + b); \\ &= f(d_u(0, a + b)); \\ &= f(a + b), \end{aligned}$$

por tanto,

$$f(a) + f(b) \geq f(a + b).$$

□

Nota: Es Importante resaltar que si f no es subaditiva, entonces f no preserva métrica. En el siguiente ejemplo mostraremos que el recíproco de la proposición 2.2 no es cierto:

Ejemplo 2.3. *Mientras que la subaditividad es necesariamente una condición importante, la función $\phi(x) = \frac{x}{1+x^2}$ muestra que la subaditividad no es suficiente para que una función dócil preserve métrica. Veamos que ϕ es subaditiva pero que no preserva métrica porque $\phi \circ d$ no es métrica.*

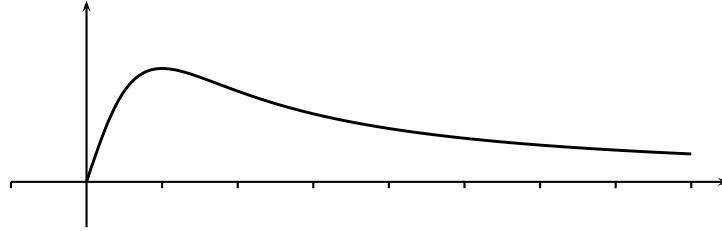


Figura 2.1: Gráfica de la función $\phi(x) = \frac{x}{1+x^2}$.

1. Mostremos que ϕ es subaditiva. Sean $x_1, x_2 \in [0, \infty)$

$$\begin{aligned} \phi(x_1 + x_2) &= \frac{x_1 + x_2}{1 + (x_1 + x_2)^2} \\ &= \frac{x_1}{1 + (x_1 + x_2)^2} + \frac{x_2}{1 + (x_1 + x_2)^2}, \end{aligned}$$

como $x_2 \geq 0$, tenemos:

$$\frac{1}{1 + (x_1 + x_2)^2} \leq \frac{1}{1 + x_1^2};$$

además, dado que $x_1 \geq 0$, entonces

$$\frac{x_1}{1 + (x_1 + x_2)^2} \leq \frac{x_1}{1 + x_1^2}. \quad (2.1)$$

Con un análisis similar obtenemos:

$$\frac{x_2}{1 + (x_2 + x_1)^2} \leq \frac{x_2}{1 + x_2^2}; \quad (2.2)$$

sumando las ecuaciones (2.1) y (2.2) se deduce

$$\frac{x_1}{1 + (x_1 + x_2)^2} + \frac{x_2}{1 + (x_1 + x_2)^2} \leq \frac{x_1}{1 + x_1^2} + \frac{x_2}{1 + x_2^2}.$$

Luego

$$\phi(x_1 + x_2) \leq \phi(x_1) + \phi(x_2).$$

2. $\phi(x) = \frac{x}{1+x^2}$ no preserva métrica.

Es fácil verificar que $\phi \circ d$ cumple que

$$(\phi \circ d)(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y;$$

y que $(\phi \circ d)(x, y) = (\phi \circ d)(y, x)$. Cuando d es una métrica sobre un conjunto $\mathbf{X}$.

Para mostrar que ϕ no preserva métrica tomemos $\mathbb{R}$ con la métrica usual d_u y destaquemos los puntos A, B y C como muestra la gráfica.

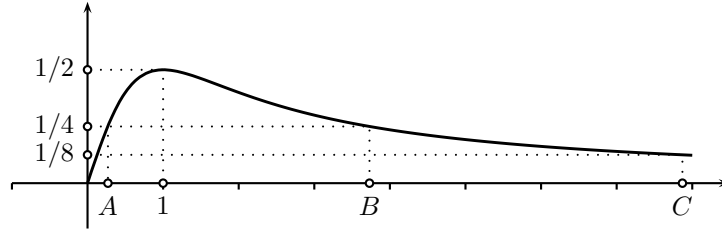


Figura 2.2: Gráfica de la función $\phi(x)$.

Sean $x_1 = d_u(u, v)$, $x_2 = d_u(u, w)$, $x_3 = d_u(v, w)$ con $x_1, x_2, x_3 \in [0, \infty)$ y $u, v, w \in \mathbb{R}$ y $A, B, C \in \mathbb{R}^+$, tal que $\phi(A) = \phi(B) = \frac{1}{4}$ $\phi(C) = \frac{1}{8}$, con $A < x_1 < B < C < x_2, x_3$, como $A < x_1 < B$, entonces $\phi(A) < \phi(x_1)$ y $\phi(B) < \phi(x_1)$.

Por hipótesis tenemos que:

$$\phi(x_2) < \phi(C) = \frac{1}{8}, \quad \text{y} \quad \phi(x_3) < \phi(C) = \frac{1}{8},$$

sumando estas desigualdades llegamos a:

$$\begin{aligned}\phi(x_2) + \phi(x_3) &< 2\phi(C) = \frac{1}{8} + \frac{1}{8}; \\ \phi(x_2) + \phi(x_3) &< \frac{1}{4},\end{aligned}$$

pero $\phi(A) = \frac{1}{4}$, luego:

$$\begin{aligned}\phi(x_2) + \phi(x_3) &< \frac{1}{4} = \phi(A) < \phi(x_1); \\ \phi(x_2) + \phi(x_3) &< \phi(x_1), \\ \phi(d_u(u, w)) + \phi(d_u(v, w)) &< \phi(d_u(u, v)).\end{aligned}$$

Con lo cual podemos afirmar que si ϕ preservara la métrica entonces conservaría la desigualdad triangular del espacio métrico, pero ese no es el resultado obtenido en la última ecuación.

La subaditividad sobre una función que preserva métrica, supone intuitivamente, una relación con la convexidad y concavidad definida en $[0, \infty)$. Esta relación la estudiaremos con detalle más adelante, sin embargo, el siguiente corolario nos muestra que una función que preserva métrica no puede ser convexa.

Corolario 2.4. *Sea $f:[0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ suponga que f cumple alguna de las siguientes afirmaciones:*

- I. *f es estrictamente convexa sobre algún intervalo que contenga al cero y $f(0) = 0$.*
- II. *f es diferenciable sobre (u, ∞) para algún $u \geq 0$, y, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = +\infty$.*

Entonces f no preserva métrica.

Demostración.

I. Supongamos que f es estrictamente convexa sobre algún intervalo que contenga al cero y $f(0) = 0$. Mostremos que f no preserva métrica. Sea $[0, c]$ el intervalo en el cual f es estrictamente convexa, entonces se tiene que:

$$f\left(\frac{c}{2}\right) < \frac{f(c)}{2};$$

pero esto contradice la subaditividad porque si tomo $x = y = \frac{c}{2}$ se obtiene la desigualdad en el sentido contrario, por lo que f no puede preservar métrica.

II. Supongamos que f es diferenciable sobre (u, ∞) para algún $u \geq 0$, y, $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = +\infty$, es decir, para cada x en $(u, +\infty)$ se tiene que $f'(x)$ existe.

Sea $x_0 > u$ entonces existe $r > 0$, tal que $f'(x) > \frac{f(x_0)}{x_0}$ para cada $x > r$, tomando $x_1 > r$, existe un y en $(x_1, x_1 + x_0)$ aplicando el teorema del valor medio teorema 1.27 podemos ver que:

$$\begin{aligned} f'(y) = \frac{f(x_1 + x_0) - f(x_1)}{x_0} &> \frac{f(x_0)}{x_0}; \\ f(x_1 + x_0) - f(x_1) &> f(x_0); \\ f(x_1 + x_0) &> f(x_0) + f(x_1). \end{aligned}$$

Pero este resultado contradice la subaditividad lo que implica que f no preserva métrica. $\square$

En el proximo capítulo en el teorema 3.7 se extiende el corolario anterior, haciendo uso de una simetría entre subaditividad y funciones convexas dóciles, la cual está desarrollada en los dos siguientes ejemplos.

Ejemplo 2.5. *Obsérvese que una función subaditiva $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ cumple:*

1. $f(nx) \leq nf(x)$, para todo $n \in \mathbb{Z}^+$,
2. $\frac{f(x)}{2^n} \leq f\left(\frac{x}{2^n}\right)$, siempre que $x \geq 0$.

1. Este resultado se prueba fácilmente, realizando inducción sobre n , como se muestra a continuación:

cuando $n = 1$, trivialmente se tiene $f(x) \leq f(x)$.

Supongamos cierto para $n = k$,

$$f(kx) \leq kf(x),$$

y probaremos

$$f((k+1)x) \leq (k+1)f(x).$$

Se demuestra partiendo de la definición de función y aplicando la subaditividad:

$$\begin{aligned} f((k+1)x) &= f(kx + x) \leq f(kx) + f(x); \\ &\leq kf(x) + f(x); \end{aligned}$$

$$\leq (k+1)f(x),$$

Por lo tanto, se cumple que $f((k+1)x) \leq (k+1)f(x)$

2. Ahora probemos que $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \geq \frac{f(x)}{2^n}$, siempre que $x \geq 0$.

Con el mismo procedimiento cuando $n = 1$ mostremos que $\frac{f(x)}{2^1} \leq f\left(\frac{x}{2}\right)$.

$$f(x) = f\left(\frac{x}{2} + \frac{x}{2}\right) \leq f\left(\frac{x}{2}\right) + f\left(\frac{x}{2}\right);$$

$$f(x) \leq 2f\left(\frac{x}{2}\right);$$

$$\frac{f(x)}{2} \leq f\left(\frac{x}{2}\right).$$

Supongamos cierto para $n = k$,

$$\frac{f(x)}{2^k} \leq f\left(\frac{x}{2^k}\right),$$

y pruébese que

$$\frac{f(x)}{2^{k+1}} \leq f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right).$$

Entonces por propiedades de las razones y por hipótesis de inducción tenemos:

$$\begin{aligned} \frac{f(x)}{2^{k+1}} &= \frac{1}{2} \left(\frac{f(x)}{2^k} \right); \\ &\leq \frac{1}{2} f\left(\frac{x}{2^k}\right); \\ &\leq f\left(\frac{\frac{x}{2^k}}{2}\right) = f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right). \end{aligned}$$

Luego $\frac{f(x)}{2^n} \leq f\left(\frac{x}{2^n}\right)$.

Ejemplo 2.6. Suponga f dócil y convexa sobre $[0, c]$. Probar que para todo n en $\mathbb{Z}^+$, $f\left(\frac{x}{2^n}\right) \leq \frac{f(x)}{2^n}$ siempre que $0 \leq x \leq c$.

Como f en $[0, c]$ es convexa, para cada n en $\mathbb{Z}^+$ y $f^{-1}(0) = 0$, entonces nuevamente por inducción sobre n se demuestra:

Si $n = 1$ y f convexa, luego

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \frac{f(x) + f(y)}{2},$$

y tomando $y = 0$ obtenemos que $f\left(\frac{x}{2}\right) \leq \frac{f(x)}{2}$.

Supongamos cierto para $n = k$,

$$f\left(\frac{x}{2^k}\right) \leq \frac{f(x)}{2^k},$$

y demostraremos para $n = k + 1$,

$$f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) \leq \frac{f(x)}{2^{k+1}}.$$

Entonces $f\left(\frac{x}{2^{k+1}}\right) = f\left(\frac{\frac{x}{2}}{2^k}\right) \leq \frac{f\left(\frac{x}{2}\right)}{2^k} \leq \frac{\frac{f(x)}{2}}{2^k} \leq \frac{f(x)}{2^{k+1}}$. Por transitiva demostramos la desigualdad.

Como veíamos en el ejemplo 2.3, la función subaditiva no necesariamente preserva métrica, sin embargo, agregando a la subaditividad el "no decrecimiento" de una función se está proporcionando una condición suficiente como mostramos a continuación:

Proposición 2.7. *Suponga f dócil, subaditiva y no decreciente, entonces f preserva métrica.*

Demostración. Tenemos por hipótesis que $f^{-1}(0) = 0$ y $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$, y si $a < b$ entonces $f(a) \leq f(b)$ y verifiquemos si $f \circ d$ es una métrica.

a. Sean $x, y \in \mathbf{X}$.

- i. Si $(f \circ d)(x, y) = 0$ entonces $f(d(x, y)) = 0$ y como es dócil $d(x, y) = 0$ luego $x = y$.
- ii. Si $x = y$ entonces $f(d(x, y)) = f(0) = 0$.

Luego, $(f \circ d)(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

b. Sean $x, y \in \mathbf{X}$, por ser d métrica cumple $f(d(x, y)) = f(d(y, x))$, por tanto $(f \circ d)(x, y) = (f \circ d)(y, x)$ como queremos.

c. Sean $x, y, z \in \mathbf{X}$, y probemos que $(f \circ d)(x, z) \leq (f \circ d)(x, y) + (f \circ d)(y, z)$

Sea $a = d(x, y)$, $b = d(y, z)$, $c = d(x, z)$ como f es subaditiva y no decreciente entonces $f(a+b) \leq f(a) + f(b)$ además d es métrica luego reemplazando

$$f(d(x, z)) \leq f(d(x, y)) + f(d(y, z)).$$

De a,b,c se concluye que f preserva métrica. $\square$

Ejemplo 2.8. Si $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es no creciente, entonces $f(x) = \int_0^x g(t)dt$ es subaditiva, podemos aplicar la proposición 2.7 que confirma que preserva métrica.

Si $g : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es no creciente, entonces probaremos que: Para cada $x, y \in [0, \infty)$,

$$\int_0^{x+y} g(t)dt \leq \int_0^x g(t)dt + \int_0^y g(t)dt.$$

Recordemos el teorema de valor intermedio para integrales, el cual es $\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$; para algún $c \in [a, b]$.

Sea $c_1 \in [0, y]$, $c_2 \in [y, x]$, $c_3 \in [x, x+y]$, $g(c_3) \leq g(c_2) \leq g(c_1)$ esto se tiene porque g es no creciente. Apliquemos el teorema, de modo que:

$$\begin{aligned} \int_x^{x+y} g(t)dt &= g(c_3)(x+y-x); \\ \int_x^{x+y} g(t)dt &= g(c_3)(y), \end{aligned}$$

de igual forma,

$$\begin{aligned} \int_0^y g(t)dt &= g(c_1)(y-0); \\ \int_0^y g(t)dt &= g(c_1)(y), \end{aligned}$$

reemplazando en $g(c_3) \leq g(c_1)$:

$$\begin{aligned} g(c_3)(y) &\leq g(c_1)(y); \\ \int_x^{x+y} g(t)dt &\leq \int_0^y g(t)dt, \end{aligned}$$

sumando a ambos lados $\int_0^x g(t)dt$

$$\begin{aligned} \int_0^x g(t)dt + \int_x^{x+y} g(t)dt &\leq \int_0^x g(t)dt + \int_0^y g(t)dt; \\ \int_0^{x+y} g(t)dt &\leq \int_0^x g(t)dt + \int_0^y g(t)dt, \end{aligned}$$

Luego $f(x+y) \leq f(x) + f(y)$.

Otra aplicación de la anterior proposición envuelve funciones cóncavas. Ger y Kuczma en [4] mostraron que funciones dóciles cóncavas, deben ser no decrecientes; desde entonces tales funciones muestran fácilmente ser subaditivas y usando la proposición 2.7 otra vez para concluir que las funciones dóciles y cóncavas siempre preservan métrica.

Ejemplo 2.9. Usando la proposición 2.7 y el resultado de Ger y Kuczma en [4], mostraremos que $\log_a(1+x)$ con $a > 1$ y x^r con $0 < r \leq 1$, preservan métrica.

$\log_a(1+x)$ con $a > 1$.

a. Sean $x, y \in [0, \infty)$ tal que $x \leq y$ de modo que sumando a ambos lados 1 manteniendo la desigualdad $x + 1 \leq y + 1$ y como por hipótesis sabemos que $a > 1$ entonces a^x es creciente, lo cual garantiza que $\log_a(x+1) \leq \log_a(y+1)$ que indica que es no decreciente.

b. Sean $x, y \in [0, \infty)$ y supongamos que la función no es subaditiva, entonces

$$\begin{aligned}\log_a(x+1) + \log_a(y+1) &< \log_a(x+y+1); \\ \log_a((x+1)(y+1)) &< \log_a(x+y+1); \\ xy + x + y + 1 &< x + y + 1; \\ xy &< 0,\end{aligned}$$

Lo cual es falso pues ambos son positivos y $xy > 0$ por lo tanto la función es subaditiva.

c. Para finalizar note que la función es dócil pues partiendo del hecho que es no decreciente probado renglones antes y por definición, la única preimagen del cero es el cero.

Ahora tomemos $f(x) = x^r$ con $0 < r \leq 1$.

a. Como $f(x) = x^r$, como $0 < r \leq 1$ solo es cero cuando $x = 0$, lo que muestra que f es dócil.

b. Con el argumento de Ger y Kuczma es suficiente probar la concavidad.

$f(x) = x^r$, donde $f'(x) = rx^{r-1}$ por tanto si $r = 1$ entonces $f'(x) = 1$. Por otra parte si $r \neq 1$ entonces $f'(x) = \frac{r}{x^{1-r}} > 0$ para cada $x \in [0, +\infty)$, y $f''(x) = r(r-1)x^{r-2}$ por lo que $(r-1) < 0$ y la ecuación también se vuelve negativa entonces es cóncava.

Ejemplo 2.10. Otro ejemplo interesante de una función que preserva métrica fue descubierta por Doboš [3] quien demostró que la función **estándar de Cantor** es subaditiva (como muestra la siguiente proposición), y de aquí, por proposición 2.7 preserva métrica. La función $C : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ se define como el límite de la sucesión de funciones C_n cuando n tiende a infinito, de tal manera que:

$$C_0(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x \leq 0; \\ x, & \text{si } 0 \leq x \leq 1; \\ 1, & \text{si } x \geq 1. \end{cases} \quad C_{n+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}C_n(3x), & \text{si } x \leq \frac{2}{3}, \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_n(3x-2), & \text{si } x \geq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

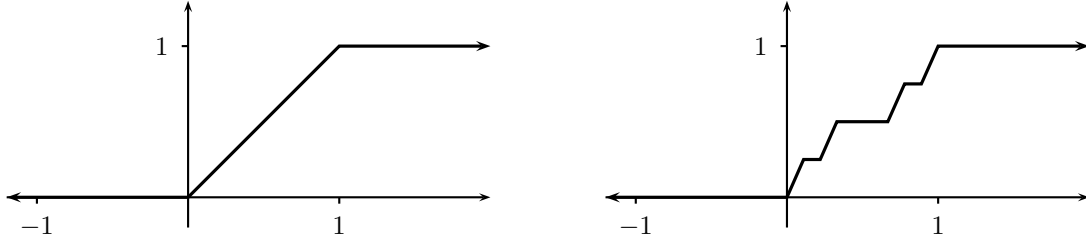


Figura 2.3: Gráfica de la función $C_0(x)$ y $C_2(x)$.

Proposición 2.11. *La función estándar de Cantor es subaditiva.*

Demostración. Teniendo en cuenta que la función es creciente. Así para probar la subaditividad de C , es suficiente con probar la subaditividad de toda C_n , que haremos por inducción matemática sobre n .

El caso $n = 0$ es trivial, la misma gráfica nos muestra la subaditividad. Supongamos cierto para $n = k$,

$$C_k(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}C_{k-1}(3x), & \text{si } x \leq \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_{k-1}(3x - 2), & \text{si } x \geq \frac{1}{3}, \end{cases}$$

y verifiquemos para $n = k + 1$:

$$C_{k+1}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}C_k(3x), & \text{si } x \leq \frac{2}{3}; \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_k(3x - 2), & \text{si } x \geq \frac{1}{3}. \end{cases}$$

Sea $x, y \in \mathbb{R}$, tal que $y \leq x$. Consideremos los siguientes casos:

I. $y \leq 0$.

Dado que $x + y \leq x$ podemos escribir que

$$C_{n+1}(x + y) \leq C_{n+1}(x);$$

como $C_{n+1}(y) = 0$ decimos que es monótona para todo $n > 0$, con seguridad la función es subaditiva.

$$C_{n+1}(x + y) \leq C_{n+1}(x) + C_{n+1}(y).$$

II. $y \geq \frac{1}{3}$.

En este caso,

$$C_{n+1}(x + y) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_n(3(x + y) - 2);$$

$$C_{n+1}(x+y) \leq 1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2};$$

$$C_{n+1}(x+y) \leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_n(3x-2) + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_n(3y-2);$$

$$C_{n+1}(x+y) \leq C_{n+1}(x) + C_{n+1}(y),$$

Por la propiedad transitiva la función es subaditiva.

III. $x \leq \frac{1}{3}$.

Como $y \leq x$ entonces $x+y \leq \frac{2}{3}$ y por definición de la función:

$$\begin{aligned} C_{n+1}(x+y) &= \frac{1}{2}C_n(3x+3y), \\ &\leq \frac{1}{2}C_n(3x) + \frac{1}{2}C_n(3y); \end{aligned}$$

$$C_{n+1}(x+y) \leq C_{n+1}(x) + C_{n+1}(y),$$

IV. $0 \leq y \leq \frac{1}{3} \leq x$.

Como $\frac{1}{3} \leq x+y$ hacemos

$$\begin{aligned} C_{n+1}(x+y) &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_n(3x+3y-2); \\ &\leq \frac{1}{2} + \frac{1}{2}C_n(3x-2) + \frac{1}{2}C_n(3y); \\ &\leq C_{n+1}(x) + C_{n+1}(y). \end{aligned}$$

En estos 4 casos están todas las posibilidades, así la demostración queda terminada. $\square$

Nuestros ejemplos han tenido como propiedades hasta ahora ser no decrecientes y salvo la función estándar de Cantor, la continuidad.

Un ejemplo sencillo de función discontinua no decreciente que preserva métrica es:

Ejemplo 2.12.

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ 1, & \text{en cualquier otra parte} \end{cases}$$

Finalmente se verifica que f es dócil, subaditiva y no decreciente, por tanto preserva métrica.

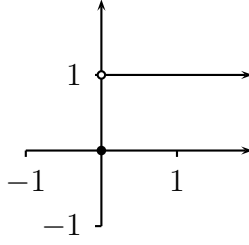


Figura 2.4: Gráfica de $f(x)$.

Para continuar ampliando los ejemplos y también para caracterizar las funciones que preservan métrica necesitamos la noción de tripla triangular. Esta primera noción fue presentada en uno de los primeros artículos de Sreenivasan [9].

Definición 2.13. Una **tripla triangular** es una tripla que notamos (a, b, c) donde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$ tal que

$$a \leq b + c, \quad b \leq a + c, \quad c \leq a + b$$

o equivalente a, $|a - b| \leq c \leq a + b$.

Las triplas triangulares son precisamente esas triplas de $\mathbb{R}$ no negativas que son de la forma

$$(d(x, y), d(y, z), d(x, z))$$

para algún espacio métrico $(\mathbf{X}, d)$ y algunos $x, y, z \in \mathbf{X}$, como se muestra en la siguiente proposición:

Proposición 2.14. Si $(\mathbf{X}, d)$ es un espacio métrico y $x, y, z \in \mathbf{X}$ entonces $(d(x, y), d(y, z), d(x, z))$ es una tripla triangular.

La prueba de la proposición es inmediata usando la desigualdad triangular.

Proposición 2.15. Suponga que f es una función dócil. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:

1. f preserva métrica
2. Para cada tripla triangular (a, b, c) , $(f(a), f(b), f(c))$ es una tripla triangular.

Demostración.

Sea (a, b, c) una tripla triangular, sea d_u la métrica usual sobre $\mathbb{R}^2$. Un argumento claro usando geometría elemental (como indica la Figura 2.9) muestra que hay $u, v, w \in \mathbb{R}^2$ tal que

$$d_u(u, v) = a, \quad d_u(v, w) = b, \quad y \quad d_u(u, w) = c$$

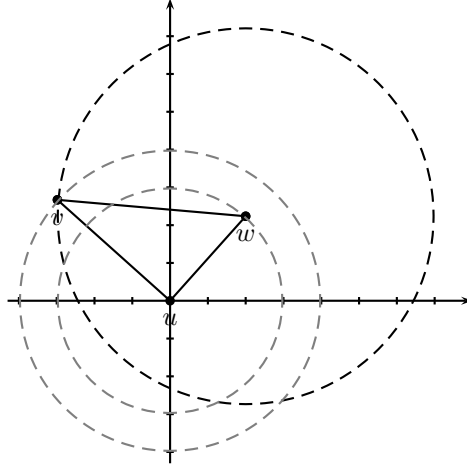


Figura 2.5: Gráfica de las distancias entre u, v y w .

sabiendo que $(f \circ d_u)$ es métrica se tiene:

$$\begin{aligned} (f \circ d_u)(u, w) &\leq (f \circ d_u)(u, v) + (f \circ d_u)(v, w); \\ f(d_u(u, w)) &\leq f(d_u(u, v)) + f(d_u(v, w)); \\ f(c) &\leq f(a) + f(b); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ d_u)(u, v) &\leq (f \circ d_u)(u, w) + (f \circ d_u)(w, v); \\ f(d_u(u, v)) &\leq f(d_u(u, w)) + f(d_u(w, v)); \\ f(d_u(u, v)) &\leq f(d_u(u, w)) + f(d_u(v, w)); \\ f(a) &\leq f(c) + f(b); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (f \circ d_u)(v, w) &\leq (f \circ d_u)(v, u) + (f \circ d_u)(u, w); \\ f(d_u(v, w)) &\leq f(d_u(v, u)) + f(d_u(u, w)); \\ f(d_u(v, w)) &\leq f(d_u(u, v)) + f(d_u(u, w)); \\ f(b) &\leq f(a) + f(c). \end{aligned}$$

Por lo tanto $(f(b), f(a), f(c))$ es una tripla triangular.

Ahora veamos que la imagen de cada tripla triangular preserva métrica:

1. Como $f^{-1}(0) = 0$, entonces para cada $x, y \in \mathbf{X}$,

$$\begin{aligned}(f \circ d)(x, y) = 0; & \Leftrightarrow f(d(x, y)) = 0; \\ & \Leftrightarrow d(x, y) = 0; \\ & \Leftrightarrow x = y.\end{aligned}$$

2. Sean $x, y \in \mathbf{X}$, y por el hecho que d es métrica afirmamos:

$$\begin{aligned}d(x, y) &= d(y, x); \\ f(d(x, y)) &= f(d(y, x)); \\ (f \circ d)(x, y) &= (f \circ d)(y, x).\end{aligned}$$

3. Si $x, y, z \in \mathbf{X}$, entonces como $(d(x, y), d(y, z), d(x, z))$ es una tripla triangular tenemos:

$$\begin{aligned}d(x, z) &\leq d(x, y) + d(y, z); \\ f(d(x, z)) &\leq f(d(x, y)) + f(d(y, z)); \\ (f \circ d)(x, z) &\leq (f \circ d)(x, y) + (f \circ d)(y, z).\end{aligned}$$

Por lo tanto f preserva métrica. □

Recordemos que por la definición de tripla triangular, uno de los tres valores está en medio de la suma y la diferencia de los otros dos; si se analiza en la cota mínima, es decir, cuando por ejemplo $c = |a - b|$ un importante resultado servirá de apoyo a los próximos capítulos.

Entonces para funciones f que preservan métrica, la proposición 2.15 en la segunda parte obtenemos que si $c = |a - b|$, $|f(a) - f(b)| \leq f(|a - b|)$, es decir,

$$\begin{aligned}c = |a - b| &< |a| + |b|, \\ |a - b| &\leq |a| + |-b|,\end{aligned}$$

como la función preserva métrica entonces (a, b, c) es una tripla triangular, luego:

$$\begin{aligned}|a| &\leq |b| + |a - b|; \\ a &\leq b + b - a; \\ 0 &\leq 2b,\end{aligned}$$

y sus imágenes también son una tripla triangular, de modo que:

$$f(b) \leq f(a) + f(c),$$

$$f(b) - f(a) \leq f(c),$$

$$\begin{aligned} f(a) &\leq f(b) + f(c), \\ f(a) - f(b) &\leq f(c), \end{aligned}$$

lo cual indica que:

$$|f(a) - f(b)| \leq f(|a - b|).$$

La demostración de la proposición 2.15 muestra que una función f dócil, preserva métrica sí y solo sí $f \circ d$ es métrica sobre $\mathbb{R}^2$ siempre que d lo sea.

Doboš dio un interesante ejemplo mostrando que $\mathbb{R}^2$ no puede ser cambiado por $\mathbb{R}$ ver [3]. El construye una variación f de la función extendida de Cantor, que preserva métrica sobre $\mathbb{R}$ y tiene la propiedad que $\liminf f(x) = 0$, (propiedad suficiente para que f no preserve métrica como mostraremos adelante), pero nosotros a continuación presentamos tres puntos cualesquiera que a pesar del intento de obtener una misma distancia de un punto a los otros dos, mostraremos que no es posible lograr eso en $\mathbb{R}$.

Sean (X, d) espacio métrico y (a, b, c) una tripla triangular, de modo que existen $u, v, w \in \mathbb{R}$ con $u \leq v \leq w$ tal que:

$$d(u, v) = a, \quad d(v, w) = b, \quad y \quad d(u, w) = c$$

gráficamente se muestra que se necesita trazar arcos a igual distancia con centro en v y radio $\frac{c}{2}$ que pase por u y por w , pero que no cumple con las distancias dadas entre ellos mismos.

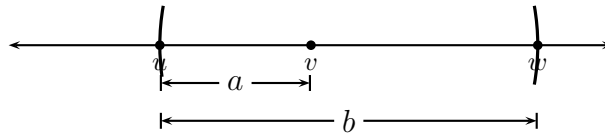


Figura 2.6: Gráfica de distancias en $\mathbb{R}$.

Ahora, siguiendo con el análisis y basados en las mismas triplas triangulares se tiene:

$$|u - v| = a, \quad |v - w| = b, \quad y \quad |u - w| = c,$$

que es lo mismo que:

$$\begin{aligned} u - v &= a \quad , \vee, \quad v - u = a \\ v - w &= b \quad , \vee, \quad w - v = b \\ u - w &= c \quad , \vee, \quad w - u = c \end{aligned}$$

entonces se construye la matriz con

$$v - u = a$$

$$w - v = b$$

$$w - u = c$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$|A| = (-1)(-1) - 1(1) = 0$ luego la matriz A no es invertible y en general no tiene solución, por ejemplo con $a = 1$, $b = 1$, y $c = 1$, claramente $\{1, 1, 1\}$ es una tripla triangular pero:

$$d(u, v) = 1, \quad d(v, w) = 1, \quad y \quad d(u, w) = 1$$

$$v - u = 1$$

$$w - v = 1$$

$$w - u = 1,$$

y el sistema representado por:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

No tiene solución.

Como decíamos renglones antes sobre el $\liminf f(x) = 0$ es una propiedad suficiente para que una función no preserve métrica, la siguiente proposición presentada por Doboš en [3] nos afirma esto.

Proposición 2.16. *Suponga que f preserva métrica:*

1. *Para cada $x_0 > 0$, existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) \geq \epsilon$, para cada $x \geq x_0$. En particular, $\liminf f(x) > 0$ y $(x, 0)$ no es punto límite de la gráfica de f , para algún $x > 0$.*
2. *Si f es discontinua en cero, entonces existe $\epsilon > 0$ tal que $f(x) > \epsilon$ para todo $x > 0$.*

Demostración.

1. Supongamos que existe $x_0 > 0$ y una sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ tal que $x_n > x_0$, para todo $n \in \mathbb{N}$ y $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$.

Sea n de modo que $f(x_n) < \frac{f(x_0)}{2}$ entonces (x_n, x_n, x_0) es una tripla triangular, pero $(f(x_n), f(x_n), f(x_0))$ es imposible que sea tripla, pues,

$$f(x_n) + f(x_n) < \frac{f(x_0)}{2} + \frac{f(x_0)}{2} = f(x_0).$$

En consecuencia, para cada $x_0 > 0$, existe $\epsilon > 0$ de modo que se cumple $f(x) \geq \epsilon$, para cada $x \geq x_0$.

2. Supongamos que para todo $\epsilon > 0$, existe $x > 0$ tal que $f(x) \leq \epsilon$

Sea $\epsilon > 0$ y construyamos una sucesión $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = 0$ de la siguiente forma: por hipótesis si tomamos $\frac{1}{n}$ entonces existe x_n tal que $f(x_n) \leq \frac{1}{n}$, luego $f(x_n)$ es una sucesión con la condición deseada, pero si tomamos $f(x_n) < \frac{\epsilon}{2}$ y como f no es continua en cero, existe un $y \in (-x_n, x_n)$ con $f(y) \geq \epsilon$, de modo que (y, x_n, x_n) es una tripla triangular pero $(f(y), f(x_n), f(x_n))$ no lo es pues $f(y) > 2f(x_n)$ porque

$$f(y) > \epsilon > 2f(x_n). \quad \square$$

La proposición 2.16 muestra que funciones que preservan métrica no pueden tener el eje x como asíntota horizontal: de este modo, la función $\frac{x}{1+x^2}$ no preserva métrica.

Usando la proposición 2.15, ahora se puede exhibir completamente una variedad de funciones discontinuas que preservan métrica, como se muestra en la proposición 2.18.

Definición 2.17. Una función f dócil se le llama **fuertemente acotada** si existe un $\nu > 0$ tal que $f(x) \in [\nu, 2\nu]$, para cada $x > 0$.

Proposición 2.18. Si f es dócil y fuertemente acotada, entonces f preserva métrica.

Demostración. Sea $\nu > 0$ tal que $f(x) \in [\nu, 2\nu]$, para cada $x > 0$ y sea una tripla triangular cualquiera (a, b, c) así por medio de la proposición 2.15 demostremos que sus imágenes también son una tripla triangular, contemplemos los siguientes casos:

- i. Si $a * b * c = 0$ entonces alguno de los tres es cero, o que dos sean cero o que todos sean cero, de modo que:

Supongamos que $a = 0$ por definición de docilidad tenemos que $f(a) = 0$. Por ser fuertemente acotada sabemos que $f(b) > \nu$, $f(c) > \nu$ entonces $f(b) \leq f(c) + f(a)$ que reemplazando es $f(b) \leq f(c) + 0$ lo que prueba que $(f(a), f(b), f(c))$ es una tripla. Igualmente si es $b = 0$ o $c = 0$ obtenemos que $(f(a), f(b), f(c))$ es una tripla triangular.

Ahora supongamos que $a = b = 0$ por ser f dócil entonces $f(a) = f(b) = 0$ y por ser fuertemente acotada $f(c) > \nu$.

Como $b \leq c + a \Rightarrow 0 \leq c + 0$ y $c \leq b + a \Rightarrow c \leq 0 + 0$ por lo tanto $c = 0$ y debido a la docilidad tenemos que $f(c) = 0$ llegando así a: $(f(a), f(b), f(c))$ es una tripla triangular.

- ii. Si $a * b * c \neq 0$ es porque ninguno de los tres es cero y por hipótesis tenemos que $f(a) > \nu, f(b) > \nu, f(c) > \nu$. Como $f(a) \leq 2\nu = \nu + \nu \leq f(b) + f(c)$, $f(b) \leq 2\nu = \nu + \nu \leq f(a) + f(c)$, $f(c) \leq 2\nu = \nu + \nu \leq f(b) + f(a)$. $\square$

Combinando las proposiciones 2.16 y 2.18 tenemos que cualquier función dócil, fuertemente acotada es necesariamente discontinua en cero. Por consiguiente hay $2^{\mathfrak{c}}$ funciones dóciles fuertemente acotadas (donde $\mathfrak{c}$ es el cardinal de $\mathbb{R}$), de este modo la mayor parte de las funciones que preservan métrica no son continuas.

Un típico ejemplo que podemos construir es con la proposición siguiente:

Proposición 2.19. *Existe una función que preserva métrica que en ninguna parte es continua y en ninguna parte de variación acotada.*

Demostración. Sea $\{A, B\}$ una partición de $[0, \infty)$ para la cual A y B son densos en $[0, \infty)$.

Definimos $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ por

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ 1, & \text{si } x \in A \\ 2, & \text{si } x \in B \end{cases}$$

Por medio de la proposición 2.18 a continuación se prueba que f preserva métrica :

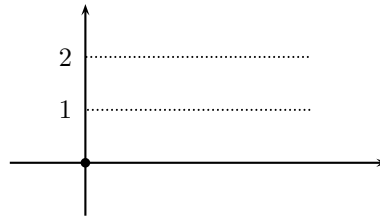


Figura 2.7: Gráfica de $f(x)$.

Por definición de la función, $f(x) = 0$ si $x = 0$ en consecuencia es dócil.

Tenemos que para todo $x > 0$, $f(x)$ es 1 o 2 por tanto existe $\nu > 0$ en este caso $\nu = 0,5$ tal que: $f(x) \in [\frac{1}{2}, \frac{5}{2}]$ lo cual indica que es fuertemente acotada.

Ahora con seguridad esta función preserva métrica y dirigimos nuestro interés en observar que en ninguna parte de variación acotada. Como A, B son densos entonces existe $\{a_i\}_{i \in \mathbb{N}} ; a_i < a_j$ si $i < j$ de modo que $\{a_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \langle A \cap [a, b] \rangle$. Igualmente existe $\{b_i\}_{i \in \mathbb{N}} ; b_i < b_j$ si $i < j$ tal que $\{b_i\}_{i=1}^{\infty} \subset \langle B \cap [a, b] \rangle$ y $|\{a_i\}| = n, |\{b_i\}| = m$.

Supongamos que $f \in VA[a, b] : \sum |\Delta_k f| \leq M$. Como $V_f(I_k) = f(x_k) - f(x_{k-1}) \equiv \Delta_k f$ por densidad de los conjuntos A y B tenemos que la diferencia entre cualesquiera dos elementos pertenecientes a cada una de las sucesiones siempre será 1 y $\sum |\Delta_k f| = 2n - 1 > M$ lo que contradice lo supuesto, luego no es de variación acotada. $\square$

El ejemplo presentado en la anterior proposición muestra, en particular, que funciones que preservan métrica no necesitan ser no decrecientes. Pokorný [8] fue apartando una clase natural de funciones dóciles para lo cual todas las funciones que preservan métrica deben ser no decrecientes.

Definimos $\vartheta = \{g : g(x) = x + h(x), \forall x \geq 0, \text{ donde } h \text{ es periódica}\}$.

Un elemento de este conjunto ϑ es $x + |\sin(x)|$. Pokorný mostró que para funciones dóciles miembros de la clase ϑ , preservan métrica si y solo si son no decrecientes y subaditivas en [8].

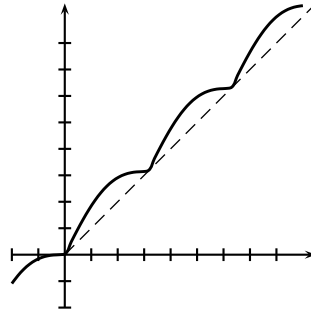


Figura 2.8: Gráfica de $f(x) = x + |\sin(x)|$.

Otro ejemplo del conjunto ϑ que preserva métrica.

Ejemplo 2.20. $h(x) =: h_n(x)$, donde $n \in \mathbb{Z}^+$ y $I_n = [np, (n+1)p]$, supónganse que $0 < \alpha < 1$, y $x \in I_n$.

$$h_n(x) = \begin{cases} (1 + \alpha)x - n\alpha p, & \text{si } np < x \leq \left(\frac{2n+1}{2}\right)p \\ (1 - \alpha)x + (n+1)\alpha p, & \text{si } \left(\frac{2n+1}{2}\right)p \leq x \leq (n+1)p \end{cases}$$

Primero probaremos que h preserva métrica por medio de la proposición 2.7.

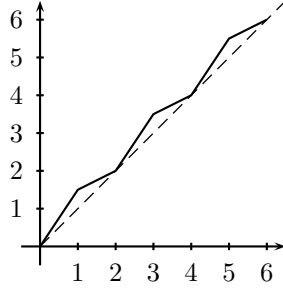


Figura 2.9: Gráfica de $h(x)$ con $\alpha = \frac{1}{2}$ y $n = 2$.

Note que h_n es creciente en $\left(\frac{2n+1}{2}\right)p$ y $\left(\frac{2n+1}{2}\right)p \leq x \leq (n+1)p$, además es continua, luego h_n es creciente en $[np, (n+1)p]$.

Sean $x, y \in [0, \infty)$, tenemos muchas posibilidades, las cuales solo se considerarán algunas:

- a. Tomemos $x, y \in I_k$ y $kp \leq x, y \leq \left(\frac{2k+1}{2}\right)p$

Sumando las desigualdades, tenemos:

$$2kp \leq x + y \leq (2k+1)p,$$

luego $x + y \in I_{2k}$, y mas concretamente contemplamos las dos posibilidades del intervalo que su imagen bajo $h_k(x + y)$.

◇ si $x+y \in [2kp, \left(\frac{4k+1}{2}\right)p]$, pero $h_k(x) = (1+\alpha)x - k\alpha p$ y $h_k(y) = (1+\alpha)y - k\alpha p$, entonces la suma es:

$$h_k(x) + h_k(y) = (1+\alpha)(x+y) - 2k\alpha p = h_{2k}(x+y);$$

que es lo mismo que:

$$h_{2k}(x+y) = h_k(x) + h_k(y).$$

Lo anterior cumple la desigualdad de la subaditividad

$$h(x+y) \leq h(x) + h(y).$$

◇ pero puede suceder que $x+y \in \left[\left(\frac{4k+1}{2}\right)p, (2k+1)p\right]$ y así, $h_{2k}(x+y) = (1-\alpha)(x+y) + (2k+1)\alpha p$, luego:

$$(1-\alpha)(x+y) + (2k+1)\alpha p \leq (1+\alpha)(x+y) - 2k\alpha p$$

$$\begin{aligned}
\alpha x - \alpha y + 2k\alpha p + \alpha p &\leq \alpha x + \alpha y + 2k\alpha p; \\
4k\alpha p + \alpha p &\leq 2k\alpha x + 2\alpha y; \\
\left(\frac{4k+1}{2}\right)p &\leq x + y.
\end{aligned}$$

Por lo tanto la subaditividad se tiene.

- b. Tomemos $x, y \in I_k$ y $\left(\frac{2k+1}{2}\right)p \leq x, y \leq (k+1)p$. Sumando las desigualdades, tenemos:

$$(2k+1)p \leq x + y \leq (2k+2)p,$$

luego $x + y \in I_{2k+1}$, y analizamos los dos casos donde $h_k(x + y)$.

◇ si $x + y \in \left[\left(\frac{4k+3}{2}\right), (2k+2)\right]$. Como $h_k(x) = (1 - \alpha)x + (k+1)\alpha p$ y $h_k(y) = (1 - \alpha)y + (k+1)\alpha p$. Entonces la suma es:

$$h_k(x) + h_k(y) = (1 - \alpha)(x + y) + (2k+2)\alpha p = h_{2k+1}(x + y);$$

que es lo mismo que

$$h_{2k+2}(x + y) = h_k(x) + h_k(y).$$

Lo anterior cumple la desigualdad de la subaditividad

$$h(x + y) \leq h(x) + h(y).$$

◇ Pero también puede ser que $x + y \in [(2k+1)p, \left(\frac{4k+3}{2}\right)p]$ y así, $h_{2k+1}(x + y) = (1 + \alpha)(x + y) - (2k+1)\alpha p$.

$$\begin{aligned}
(1 + \alpha)(x + y) - (2k+1)\alpha p &\leq (1 - \alpha)(x + y) + (2k+2)\alpha p; \\
\alpha x - \alpha y - 2k\alpha p - \alpha p &\leq -\alpha x - \alpha y + 2k\alpha p + 2\alpha p; \\
2x + 2y &\leq 4kp + 3p; \\
x + y &\leq \left(\frac{4k+3}{2}\right)p.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $x + y$ están en el intervalo correspondiente y la subaditividad se tiene.

- c. Tomemos $x, y \in I_k$ y $x \in [kp, \left(\frac{2k+1}{2}\right)p]$, $y \in \left[\left(\frac{2k+1}{2}\right)p, (k+1)p\right]$

$$\begin{aligned}
kp &\leq x \leq \left(\frac{2k+1}{2}\right)p; \\
\left(\frac{2k+1}{2}\right)p &\leq y \leq (k+1)p;
\end{aligned}$$

$$\left(\frac{4k+1}{2}\right)p \leq x+y \leq \left(\frac{4k+3}{2}\right)p;$$

lo que quiere decir que $x+y \in I_{2k} \cup I_{2k+1}$.

◊ Si $x+y \in I_{2k}$ entonces

$$h_{2k}(x+y) \leq h_k(x) + h_k(y)$$

se tiene por la subaditividad de la función.

◊ Y si $x+y \in I_{2k+1}$ entonces:

$$h_{2k+1}(x+y) \leq h_k(x) + h_k(y),$$

se tiene por la subaditividad.

- d. De manera equivalente podemos considerar el caso restante, cuando $x \in I_k$, $y \in I_m$ con $k < m$ y $x \in [kp, (\frac{2k+1}{2})p]$, $y \in [mp, (\frac{2m+1}{2})p]$.

Con lo que podemos concluir que $h(x+y) \leq h(x) + h(y)$.

En última instancia queda discutir algunas técnicas para la construcción de nuevas funciones que preservan métrica que se han trabajado desde hace varios años, y mas concretamente situarnos en preguntas naturales que nos podríamos hacer como las siguientes:

Q_1 ¿Puede una función que preserva métrica ser estrictamente decreciente sobre un intervalo (a, ∞) , $a \geq 0$?

Sabiendo por la proposición 2.16 que las funciones que preservan métrica no pueden tener como asíntota el eje x y que cabe la posibilidad de acotar las funciones decrecientes dando así una traslación ascendente a la función; como se enuncia a continuación.

Definición 2.21.

$$U_{f,r}(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ f(x) + r, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

Para cada $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ y cada $r > 0$.

Proposición 2.22. Supongamos que $f : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ es acotada superiormente. Entonces existe un $r_0 > 0$ tal que $U_{f,r}(x)$ preserva métrica $r \geq r_0$.

Demostración. Como f es acotada superiormente entonces sea r_0 una cota superior, por la definición de $U_{f,r}(x)$ tenemos que es fuertemente acotada para todo $r \geq r_0$ lo cual indica que el r_0 fue hallado. $\square$

El siguiente ejemplo nos presenta el caso de una función que preserva métrica y que es estrictamente decreciente sobre $(0, \infty)$. Por lo tanto la respuesta a la pregunta es afirmativa.

Ejemplo 2.23. Sea

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ 1 + \frac{1}{x+1}, & \text{si } x > 0. \end{cases}$$

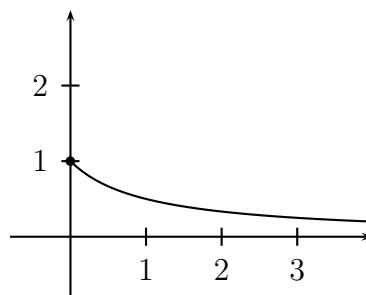
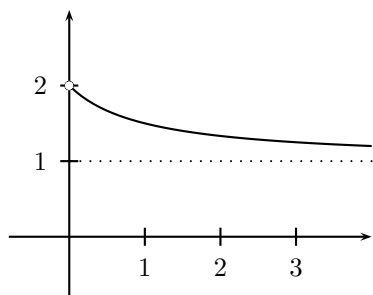


Figura 2.10: Gráfica de la función $g(x)$. Figura 2.11: Gráfica de la función $f(x)$.

Podemos ver que $g = U_{f,r}(x)$ donde $r = 1$ y

$$f(x) = \frac{1}{x+1}, \quad \text{si } x > 0.$$

Por la proposición 2.22, se tiene que g preserva métrica.

Q_2 ¿Una función continua que preserva métrica puede ser estrictamente decreciente sobre un intervalo (a, ∞) , $a \geq 0$?

Para responder esta pregunta se necesita contar con la siguiente proposición que es una herramienta básica y útil.

Proposición 2.24. Supongamos que f preserva métrica. Definamos $T_{f,c,r} : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ con $c, r > 0$ por:

$$T_{f,c,r}(x) = \begin{cases} rx, & \text{si } x \in [0, c); \\ f(x), & \text{en otra parte.} \end{cases}$$

Entonces $T_{f,c,r}$ preserva métrica sí y solo sí $f(c) = rc$ y $|f(x) - f(y)| \leq r|x - y|$ para cada $x, y \in [0, \infty)$.

Demostración.

Partiendo del hecho que $T_{f,c,r}$ preserva métrica, demostraremos que $f(c) = rc$ y $|f(x) - f(y)| \leq r|x - y|$ para cada $x, y \in [0, \infty)$, por lo tanto:

- i. Supongamos que $f(c) \neq rc$ entonces $f(c)$ es cualquier valor mayor que cero, luego no cumpliría la propiedad de subaditividad ya que por la proposición 2.2 ésta es consecuencia de la preservación de métrica, por lo tanto $f(c) = rc$.
- ii. Sea $x, y \in [0, \infty)$ como $x, y > c$ supongamos $x < y$ y $y - x < c$ y por hipótesis tenemos que T preserva métrica luego:

$$\begin{aligned} |T(y) - T(x)| &\leq T(|y - x|) \\ |f(y) - f(x)| &\leq r|y - x| \end{aligned}$$

Ahora, si $x - y > c$ podemos tomar la partición $x_0 = y < x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} = x$ tal que $|x_{i+1} - x_i| < c$. Aplicando la propiedad telescópica se tiene:

$$\begin{aligned} T(x) - T(y) &= \left| \sum_{i=0}^n T(x_{i+1}) - T(x_i) \right|; \\ &\leq \sum_{i=0}^n |T(x_{i+1}) - T(x_i)|; \\ &\leq \sum_{i=0}^n r|x_{i+1} - x_i|; \\ &\leq r|x - y|. \end{aligned}$$

□

Ejemplo 2.25. Una función continua, que preserva métrica que es estrictamente decreciente en $(1, \infty)$.

Sea (ver figura 2.10)

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0 \\ 1 + \frac{1}{x+1}, & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

Se define:

$$T(x) = \begin{cases} \frac{3}{2}x, & \text{si } x \in [0, 1) \\ g(x), & \text{en otra parte} \end{cases}$$

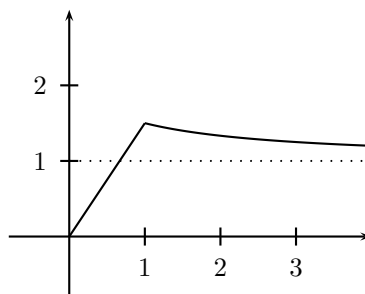


Figura 2.12: Gráfica de la función T(x).

Fácilmente se puede ver que T es continua y que es estrictamente decreciente en $(1, \infty)$, ahora por la proposición 2.24 tomando $c = 1$, $r = \frac{3}{2}$ y $f = g$ se tiene que $T_{f,c,r}(x) = T_{g,1,\frac{3}{2}}(x)$ la cual es estrictamente decreciente sobre un intervalo y preserva métrica, así responde a la pregunta Q_2 .

Este ejemplo también muestra que funciones continuas que preservan métrica no necesitan ser no decrecientes.

Q_3 ¿Toda función continua, no decreciente que preserva métrica debe ser cóncava?

Ejemplo 2.26. *Esta es una función continua, no decreciente pero que no es cóncava, se necesita ver si preserva métrica. Sea*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq x < 2, \\ x - 1 & \text{si } 2 \leq x < 3, \\ 2, & \text{si } x \geq 3. \end{cases}$$

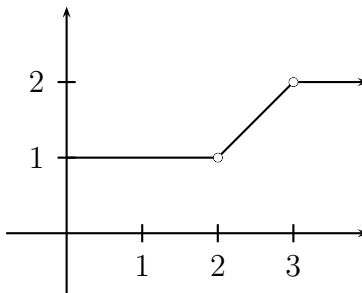


Figura 2.13: Gráfica de la función $f(x)$.

Puesto que f es estrictamente acotada, por proposición 2.15 se obtiene que f preserva métrica.

Se define

$$T(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \in [0, 1), \\ f(x), & \text{si } x \geq 1. \end{cases}$$

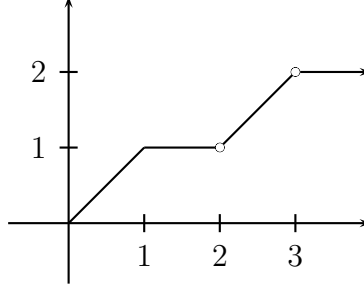


Figura 2.14: Gráfica de la función $T(x)$.

Es claro que $T(x)$ es continua y es no decreciente.

$T(x)$ es no cóncava pues por ejemplo para $a = 1$ y $b = 3$ se tiene que:

$$\begin{aligned} T\left(\frac{a+b}{2}\right) &< \frac{T(a) + T(b)}{2}, \\ T\left(\frac{1+3}{2}\right) &< \frac{T(1) + T(3)}{2}, \\ T(2) &< \frac{1+2}{2}, \\ 1 &< \frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Lo que contradice la concavidad. Utilizando la proposición 2.24 con $c = 1, r = 1$ y $T_{f,c,r}(x) = T_{f,1,1}(x)$ se puede afirmar que preserva métrica y no es cóncava.

Ejercicio 2.27. Usando la proposición 2.22 y proposición 2.24 probar que la función de Juza preserva métrica.

La función de Juza es:

$$\zeta(x) = \begin{cases} x, & \text{si } x \leq 2, \\ 1 + \frac{1}{x-1}, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

Aplicando la proposición 2.24 tenemos que $\zeta = T_{g,2,1}$ donde

$$g(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ 2, & \text{si } x \in [0, 2), \\ 1 + \frac{1}{x-1}, & \text{si } x > 2. \end{cases}$$

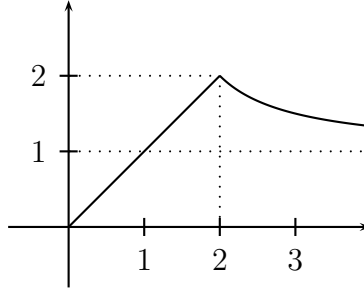


Figura 2.15: Gráfica de la función $\zeta(x)$.

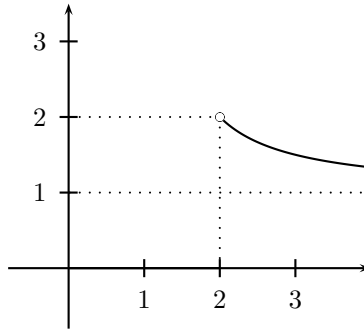


Figura 2.16: Gráfica de la función $C(x)$.

Pero a la vez g está compuesta por otra función que llamaremos f en concordancia con la proposición 2.22 donde $g = U_{f,r} = U_{f,1}$, la mencionada f es fuertemente acotada por arriba por lo cual se aplica la proposición 2.22 concluyendo así que existe $r_0 > 0$ tal que g preserva métrica para cada $r \geq r_0$. Con base en esto, por la proposición 2.24 es claro que $g(c) = g(2) = rc = 1 * 2 = 2$ pero falta probar que $|g(x) - g(y)| \leq 1|x - y|$ para todo $x, y \in [2, \infty)$.

Por definición de la función g para el caso donde no es constante ni cero, se tiene que para todo valor z su derivada es:

$$|g'(z)| = \left| -\frac{1}{(x-1)^2} \right|,$$

que siempre es menor que 1 y por el teorema de valor medio, donde $\frac{|g(x)-g(y)|}{|x-y|} \leq 1$ que es igual a $|g(x) - g(y)| \leq 1|x - y|$ se concluye que g preserva métrica.

Q_4 ¿Debe toda función que preserva métrica que es discontinua ser fuertemente acotada?

La respuesta a esta pregunta, se presentará después de conocer el siguiente teorema dando así la propiedad de clausura a la clase de funciones que preservan métrica.

Teorema 2.28.

1. Si f, g preservan métrica y $m > 0$, entonces $f \circ g$, $f + g$, mf y $\max\{f, g\}$ preservan métrica.
2. Si $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de funciones que preservan métrica convergente puntualmente a una función h y $h(x) > 0$ para todo $x > 0$, entonces h preservan métrica.
Igualmente, si $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ converge a una función h_0 , donde cada función h_n preservan métrica, entonces h_0 preservan métrica.
3. si S es un conjunto de funciones que preservan métrica, acotado y si $g(x) = \sup\{f(x) : f \in S\}$ entonces g preservan métrica.

Demostración.

1. En este punto se tiene que f, g preservan métrica. Entonces:

◊ Como cada función preservan métrica, preservan triplas triangulares. Sea (x, y, z) cada tripla triangular, entonces $(g(x), g(y), g(z))$ son sus respectivas triplas triangulares y aplicando f se tiene:

$$(f(g(x)), f(g(y)), f(g(z))),$$

es una tripla. Y de la proposición 2.15 tengo que $f \circ g$ preservan métrica.

◊ Sea (x, y, z) una tripla triangular. Como f y g preservan métrica:

$$f(x) \leq f(y) + f(z) \quad \text{y} \quad g(x) \leq g(y) + g(z).$$

Sumando las desigualdades se tiene:

$$f(x) + g(x) \leq f(y) + g(y) + f(z) + g(z),$$

por la proposición 2.15 se concluye que

$$((f + g)(x), (f + g)(y), (f + g)(z)),$$

es una tripla triangular, luego $f + g$ preservan métrica.

◊ Por la proposición 2.2 f es subaditiva, donde para cada x, y, z se afirma que:

$$f(x + y) \leq f(x) + f(y),$$

luego, como $m > 0$:

$$mf(x + y) \leq m(f(x) + f(y));$$

$$mf(x+y) \leq mf(x) + mf(y).$$

Por lo tanto mf preserva métrica.

◊ la función $\max(f, g)$ se probará en el último punto.

2. Si $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una familia de funciones que preservan métrica que convergen puntualmente a una función h y además para cada x se tiene $h(x) > 0$ entonces h preserva métrica.

Sea (x, y, z) una tripla triangular como todo elemento de la familia $\{h_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es una función que preserva métrica entonces bajo h_k también es una tripla triangular como sigue

$$(h_k(x), h_k(y), h_k(z)).$$

y $h_n \rightarrow h$ puntualmente, entonces para todo x se tiene: $h_k(x) \rightarrow h(x)$. Supongamos que h no preserva métrica en consecuencia $h(x) > h(y) + h(z)$ y sea

$$r = h(x) - (h(y) + h(z)) > 0.$$

Se construyen las bolas $B(h(y), \epsilon)$, $B(h(z), \epsilon)$ y $B(h(x), \epsilon)$ tal que $h_k(x) \in (h(x) - \epsilon, h(x) + \epsilon)$ y $\epsilon = \frac{r}{4}$ de modo que:

$$\begin{aligned} h_k(y) + h_k(z) &< h(y) + h(z) + 2\epsilon \\ h_k(y) + h_k(z) &< h(y) + h(z) + \frac{r}{2} \\ h_k(y) + h_k(z) &< h(y) + h(z) + \frac{h(x) - h(y) - h(z)}{2} \\ h_k(y) + h_k(z) &< \frac{h(x) + h(y) + h(z)}{2} \\ h_k(y) + h_k(z) &< h(x) - \left(\frac{h(x) - h(y) - h(z)}{2} \right) \\ h_k(y) + h_k(z) &< h(x) - \frac{r}{2} < h(x) - \frac{r}{4} = h(x) - \epsilon \\ h_k(y) + h_k(z) &< h(x) - \epsilon < h_k(x) \end{aligned}$$

Luego esto es una contradicción porque $(h_k(x), h_k(y), h_k(z))$ es una tripla triangular y la suposición es falsa.

◊ Si $\sum_{n=1}^{\infty} h_n$ converge a una función h_0 , donde cada función h_n preserva métrica. Entonces h preserva métrica.

Por el primer punto donde si dos funciones preservan métrica también la suma preserva métrica y gracias a la propiedad asociativa, se dice que $h_k = \sum_{i=1}^k h_i$ preserva métrica. Como h_k tiende a $h_0 = \sum_{n=1}^{\infty} h_n$ se tiene que h_0 preserva métrica.

3. Si S es un conjunto de funciones que preservan métrica, que es acotado puntualmente y se define $g(x) = \sup\{f(x) : f \in S\}$. Entonces $g(x)$ preserva métrica.

Sean (x, y, z) una tripla triangular, $f \in S$, para cada f que preserva métrica tenemos:

$$\begin{aligned} f(x) &\leq f(y) + f(z); \\ f(x) &\leq \sup_{f \in S} f(y) + \sup_{f \in S} f(z); \\ \sup_{f \in S} f(x) &\leq \sup_{f \in S} f(y) + \sup_{f \in S} f(z); \\ g(x) &\leq g(y) + g(z). \end{aligned}$$

□

Ahora veamos el ejemplo que responde a la pregunta Q_4 .

Ejemplo 2.29. Sea f una función discontinua que preserva métrica que no es fuertemente acotada definida así:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ 1 + |x - 1|, & \text{si } x \in (0, \infty). \end{cases}$$

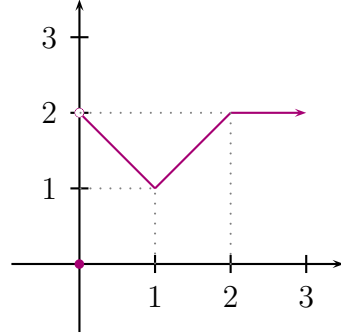
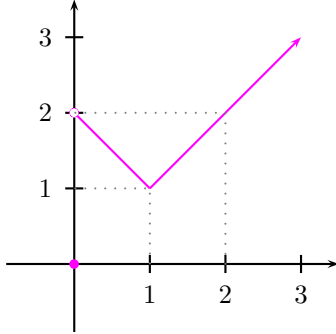


Figura 2.17: Gráfica de la función $f(x)$. Figura 2.18: Gráfica de la función $h(x)$.

Fácilmente se puede observar que f es discontinua en cero y no es fuertemente acotada. Utilizando el teorema 2.28 sea

$$g(x) = x$$

y

$$h(x) = \begin{cases} 0, & \text{si } x = 0, \\ 1 + |x - 1|, & \text{si } x \in (0, 2), \\ 2 & \text{si } x \in [2, \infty). \end{cases}$$

Entonces $f = \max\{h, g\}$, luego g preserva métrica porque es dócil, subaditiva y no decreciente y h preserva métrica porque es fuertemente acotada, por lo tanto gracias al teorema 2.28 f preserva métrica.

CAPÍTULO 3

FUNCIONES QUE PRESERVAN MÉTRICA FUERTEMENTE

3.1. Funciones que preservan métrica y continuidad

Las funciones que preservan métrica son una herramienta para crear nuevas métricas de la forma $f \circ d$ sobre un espacio métrico dado $(\mathbf{X}, d)$, en efecto, estas funciones pueden ser una fuente para construir métricas que son topológicamente equivalentes a d y que tienen propiedades interesantes.

En este capítulo se presentan las funciones que preservan métrica pero que además se caracterizan por preservar métrica fuertemente.

Definición 3.1. Sean $(\mathbf{X}, d)$ un espacio métrico y una función f que preserva métrica, entonces f **preserva métrica fuertemente** si la métrica que la función genera es topológicamente equivalente a d .

Es necesario comprender el comportamiento en cero de una función que preserva métrica: porque entre las funciones que preservan métrica fuertemente y la propiedad de ser continuas en cero existe doble implicación. En el capítulo anterior se trataron funciones discontinuas que preservan métrica, ahora se prueba que la métrica que genera la composición es la discreta.

Lema 3.2. *Suponga que la función f preserva métrica. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes:*

1. f es discontinua en cero.
2. $f \circ d$ es una métrica discreta para cada métrica d .

Demostración.

Mostremos que $f \circ d$ es una métrica discreta, sea (X, d) un espacio métrico. Por la proposición 2.16 existe un $\epsilon > 0$ tal que para todo $z > 0$ se tiene que $f(z) > \epsilon$. Entonces $B_{f \circ d}(x, \epsilon) = \{x\}$ para cada $x \in X$ como se deseaba.

Ahora probemos f es discontinua en cero, sea d_u la métrica usual sobre $\mathbb{R}$, sabiendo que $f \circ d_u$ es la métrica discreta, se construye $B_{f \circ d_u}(0, \epsilon) = \{0\}$ para algún $\epsilon > 0$. En consecuencia existe una sucesión $\{x_n\}_n$ de números positivos que converge a cero (relativo a d_u) tal que para todo n y para todo x se tiene

$$\epsilon < f(d_u(x_n, 0)) = f(x_n)$$

$$\epsilon \leq f \circ d_u(x, 0)$$

que es lo mismo que $f(x) \geq \epsilon$ y $f(x_n) \geq \epsilon$ por lo tanto, $f(x_n)$ no converge a $f(0) = 0$ así f no es continua en cero. $\square$

Teorema 3.3. *Una función que preserva métrica, preserva métrica fuertemente si, y sólo si, ésta es continua en cero.*

Demostración. Sea ψ una función que preserva métrica fuertemente, por tanto $\psi \circ d$ es topológicamente equivalente a d . Si ψ no es continua en cero entonces $\psi \circ d$ es discreta por proposición anterior lo cual contradice que preserve métrica fuertemente luego ψ es continua en cero.

Asúmase que ψ es continua en cero. Sea (X, d) un espacio métrico. Se sabe que si una topología es equivalente a otra es porque cada topología contiene a la otra por lo tanto la demostración se divide en dos partes:

$$\blacksquare \quad \tau_d \subset \tau_{\psi \circ d}$$

Dado $\epsilon > 0$, existe un $\delta > 0$ tal que si $z \in B(0, \delta)$ con $0 \leq z < \delta$ entonces $0 \leq \psi(z) < \epsilon$. Sea $y \in B_{\psi \circ d}(x, \epsilon)$ tal que $\psi \circ d(x, y) < \epsilon$. Tomemos $r = \delta - d(x, y)$. Si $z \in B_d(y, r)$ entonces $d(z, y) < r$ pero:

$$\begin{aligned}
d(z, y) &< \delta - d(x, y), \\
d(z, y) + d(x, y) &< \delta, \\
d(x, z) \leq d(z, y) + d(x, y) &< \delta, \\
0 \leq d(x, z) &< \delta, \\
\psi(d(x, z)) &< \epsilon.
\end{aligned}$$

Por lo tanto $z \in B_{\psi \circ d}(x, \epsilon)$ y $\tau_d \subset \tau_{\psi \circ d}$.

$$\blacksquare \quad \tau_{\psi \circ d} \subset \tau_d$$

Sea $x \in X$, $r > 0$, $\beta_d(x, r)$, $y \in \beta_d(x, r)$. Para encontrar R tal que $B_{\psi \circ d}(y, R) \subset B_d(x, r)$ se toma la proposición 2.16, así existe un $\delta > 0$ tal que $f(z) > \delta$ para cada $z \geq r$ de donde se obtiene

$$B_{\psi \circ d}(y, \delta - \psi \circ d(x, y)),$$

de ahí $R = \delta - \psi \circ d(x, y)$. Sea $z \in B_{\psi \circ d}(y, R)$ entonces:

$$\begin{aligned}
\psi \circ d(y, z) &< R, \\
\psi \circ d(y, z) &< \delta - \psi \circ d(x, y), \\
\psi \circ d(y, z) + \psi \circ d(x, y) &< \delta, \\
\psi \circ d(x, z) \leq \psi \circ d(y, z) + \psi \circ d(x, y) &< \delta, \\
\psi \circ d(x, z) &< \delta.
\end{aligned}$$

Luego $d(x, z) < r$ y $z \in \beta_d(x, r)$ que se quería. $\square$

Q_5 ¿Debe toda función que preserva métrica que es continua en cero ser continua?

Como ahora se muestra, la continuidad en cero obliga a una función que preserva métrica a ser continua en todo intervalo; este resultado responde a la pregunta que si ¿Debe toda función que preserva métrica que es continua en cero ser continua?

Teorema 3.4. *Suponga que f es una función que preserva métrica y que es continua en cero, entonces la función f es continua sobre $[0, \infty)$.*

Demostración.

Supongamos que f no es continua en algún $x_0 > 0$, entonces existe $\epsilon > 0$, tal que para todo $\delta > 0$ existe un $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$ y $f(x) \notin (f(x_0) - \epsilon, f(x_0) + \epsilon)$.

Por la discontinuidad de la función se puede garantizar que existe $\delta < \frac{x_0}{2}$. Si $0 \leq a < \delta$ entonces $0 \leq f(a) < \epsilon$. Sea $z_0 \in [0, \infty)$ tal que $|z_0 - x_0| < \delta$ y $|f(z_0) - f(x_0)| \geq \epsilon$. También sea $a_0 = |z_0 - x_0|$ de modo que se tienen dos casos a analizar:

Cuando $f(z_0) \geq \epsilon + f(x_0)$.

- Si $x_0 + a_0 = z_0$ se tiene:

$$\begin{aligned} f(x_0) + f(a_0) &< f(x_0) + \epsilon; \\ f(x_0) + f(a_0) &\leq f(x_0 + a_0); \\ f(x_0) + f(a_0) &\leq f(z_0), \end{aligned}$$

que contradice la subaditividad.

- Si $a_0 + z_0 = x_0$ entonces (x_0, z_0, a_0) es una tripla triangular y

$$a_0 + x_0 = 2a_0 + z_0 \geq z_0;$$

$$a_0 \leq a_0 + 2z_0 = x_0 + z_0;$$

por lo tanto, $f(z_0) - f(x_0) \geq \epsilon > f(a_0)$,

que es lo mismo que $f(a_0) + f(x_0) < f(z_0)$ no es una tripla triangular entonces por proposición 2.15 no preserva métrica.

Cuando $f(x_0) \geq \epsilon + f(z_0)$.

- Si $x_0 + a_0 = z_0$ entonces (x_0, a_0, z_0) es una tripla triangular y

$$x_0 + z_0 = 2x_0 + a_0 \geq a_0;$$

$$x_0 \leq x_0 + 2a_0 = z_0 + a_0;$$

Por lo tanto, $f(x_0) - f(z_0) \geq \epsilon > f(a_0)$.

Que es lo mismo que $f(x_0) > f(a_0) + f(z_0)$ no es una tripla triangular y por tanto, no preserva métrica.

- Si $a_0 + z_0 = x_0$ entonces

$$\begin{aligned} f(a_0) + f(z_0) &< f(z_0) + \epsilon; \\ f(a_0) + f(z_0) &\leq f(z_0 + a_0); \\ f(x_0) + f(a_0) &\leq f(x_0), \end{aligned}$$

que contradice la subaditividad.

En cada caso se obtuvo una contradicción de lo supuesto y f es continua en $[0, \infty)$. $\square$

De este modo, para una función f que preserva métrica las propiedades de continuidad y preservación de métrica fuertemente son totalmente determinadas por el comportamiento de f en cero. Y la continuidad en cero es ilustrada por una propiedad que es aparentemente débil: esta sigue de la proposición 2.16 en la cual f es continua en cero si, y sólo si, para cada $\epsilon > 0$, existe $x > 0$ tal que $f(x) < \epsilon$ todo esto queda resumido en el siguiente teorema.

Teorema 3.5. *Suponga que f preserva métrica entonces los siguientes enunciados son equivalentes:*

1. f preserva métrica fuertemente;
2. f es continua en cero;
3. f es continua sobre $[0, \infty)$;
4. para cada $\epsilon > 0$, existe un $x > 0$ tal que $f(x) < \epsilon$.

La demostración de este teorema se deriva de los teoremas anteriores y de la proposición 2.16.

Los siguientes lemas son importantes para la demostración del siguiente teorema, estos nos recuerdan que las funciones convexas que preservan métrica deben ser continuas y además, en un intervalo cerrado las imágenes de los puntos son inversamente proporcionales a ellos.

Lema 3.6. *Sea f una función que preserva métrica y convexa sobre $[0, c]$. Entonces f cumple:*

1. Para cada $x \in [0, c]$ y $n \in \mathbb{Z}^+$, $f(\frac{x}{2^n}) = \frac{f(x)}{2^n}$.
2. La función f es continua.
3. Siempre que $0 < x \leq y \leq c$ tal que $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(y)}{y}$.

Demostración.

1. Como la función preserva métrica y por el ejemplo 2.5 que nos presenta que una función subaditiva cumple que $\frac{f(x)}{2^n} \leq f(\frac{x}{2^n})$, pero también de hipótesis se tiene que

es convexa y el ejemplo 2.6 muestra que una función dócil y convexa $f(\frac{x}{2^n}) \leq \frac{f(x)}{2^n}$ luego podemos concluir que

$$f(\frac{x}{2^n}) = \frac{f(x)}{2^n}.$$

2. Con base a la anterior afirmación y el numeral cuatro del teorema 3.5 sea $\epsilon > 0$ tomando x en este caso igual a $\frac{\epsilon}{2^n}$, donde n es un entero positivo tal que $\frac{f(\epsilon)}{2^n} < \epsilon$, podemos afirmar que

$$f(x) = f(\frac{\epsilon}{2^n}) = \frac{f(\epsilon)}{2^n} < \epsilon,$$

por lo tanto $f(x) < \epsilon$ y f es continua.

3. Sea $S = \{u \in [0, c] : \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(y)}{y}; 0 < x \leq y \leq u\}$. Este conjunto en el peor de los casos tiene por lo menos un elemento, ya que $0 \in S$ pues no existen x e y que contradigan la condición, así $S \neq \emptyset$. Sea $z = \sup S$; se necesita demostrar que $S = [0, c]$ probando que $z = c$.

Supongamos que $z < c$ entonces puede suceder:

Caso 1. $z \notin S$. Como $z < c$ entonces $\exists x_0 < z$ tal que $\frac{f(z)}{z} < \frac{f(x)}{x}$ para cualquier $x_0 \leq x < z$. Sea

$$g_x : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$$

que denota la función cuya gráfica es la línea que pasa por $(0, 0)$ y $(x, f(x))$. Definimos:

$$g_{x_0}(x) = x \frac{f(x_0)}{x_0}$$

Por la elección de z , siempre que $x_0 \leq x \leq y \leq z$, se tiene:

$$g_{x_0}(z) = z \frac{f(x_0)}{x_0} > f(z),$$

como $x_0 \leq x$ entonces

$$\begin{aligned} g_{x_0}(y) &\leq g_x(y); \\ y \frac{f(x_0)}{x_0} &\leq y \frac{f(x)}{x}; \\ \frac{f(x_0)}{x_0} &\leq \frac{f(x)}{x}, \end{aligned}$$

existe $\delta > 0$ ($\delta \leq z - x_0$) tal que si $0 < z - x \leq \delta$ entonces por continuidad de g_{x_0} se puede decir que $g_{x_0}(x) > f(z)$. Sean $x_1 = z - \delta$, $\epsilon = g_{x_0}(x_1) - f(z)$ si $0 < x - z < \delta$ entonces

$$\begin{aligned} \epsilon = g_{x_0}(x_1) - f(z) &\leq g_{x_0}(x) - f(z) = |f(x) - f(z)| \\ \epsilon &\leq |f(x) - f(z)|, \end{aligned}$$

pero esto contradice la continuidad de f en z que está probada en el primer punto.

Caso 2. $z \in A$. Con base en lo supuesto, se puede encontrar un y arbitrariamente cercano a z tal que $\frac{f(y)}{y} < \frac{f(z)}{z}$ donde $z < y$ y $y - z < z$ llamaremos $x = 2z - y$. Despejando $z = \frac{x+y}{2}$ y por la convexidad de la función:

$$\begin{aligned} f(z) = f\left(\frac{x+y}{2}\right) &\leq \frac{f(x) + f(y)}{2}; \\ f(z) - f(x) &\leq \frac{f(y) - f(x)}{2} \leq f(y) - f(x), \end{aligned}$$

desarrollando las ecuaciones tenemos que $z - x = z - (2z - y) = y - z$. Luego

$$\frac{f(z) - f(x)}{z - x} \leq \frac{f(y) - f(z)}{y - z}, \quad (3.1)$$

como $\frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(z)}{z}$ entonces:

$$\begin{aligned} zf(x) &\leq xf(z), \\ zf(x) + zf(z) &\leq xf(z) + zf(z), \\ zf(z) - xf(z) &\leq zf(z) - zf(x), \\ (z - x)f(z) &\leq z(f(z) - f(x)), \\ \frac{f(z)}{z} &\leq \frac{f(z) - f(x)}{z - x}, \end{aligned}$$

$$\text{y } \frac{f(y)}{y} < \frac{f(z)}{z},$$

$$\begin{aligned} zf(y) &< yf(z), \\ zf(y) - zf(z) &< yf(z) - zf(z), \\ (z)(f(y) - f(z)) &< (y - z)f(z), \\ \frac{f(y) - f(z)}{y - z} &< \frac{f(z)}{z}, \end{aligned}$$

por la propiedad transitiva,

$$\frac{f(y) - f(z)}{y - z} < \frac{f(z) - f(x)}{z - x},$$

que contradice (3.1). Por lo tanto $z = c$. □

Ya se había mencionado en el Corolario 2.4 que si una función preserva métrica implica que no puede ser estrictamente convexa y es por esto mismo el siguiente teorema perfecciona el resultado.

Teorema 3.7. Si f preserva métrica y es convexa sobre $[0, c]$ para algún $c > 0$, entonces f es lineal sobre $[0, c]$.

Demostración. Demostremos que para cada x en $[0, c]$ para algún $c > 0$,

$$f(x) = \frac{f(c)}{c}x,$$

trivialmente cuando $x = 0$, $f(0) = 0$. Sean $x \in (0, c]$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{c}{2^n} \leq x$ entonces por el lema 3.6 y por ser la función convexa se concluye:

$$\frac{f(c)}{c} = \frac{f(\frac{c}{2^n})}{\frac{c}{2^n}} \leq \frac{f(x)}{x} \leq \frac{f(c)}{c}.$$

□

3.2. Funciones que preservan métrica y diferenciabilidad

La noción de diferenciabilidad hace una partición de las funciones que preservan métrica en dos clases diferentes que están determinadas por el valor de la derivada de cada función en cero. Vamos a ver que la derivada de tales funciones siempre existe en cero. La pregunta central es si la derivada es finita o infinita. Las funciones con derivada finita forman una clase de funciones continuas que se comportan bien y que son diferenciables casi en toda parte; funciones con derivada infinita, por el contrario pueden ser muy mal comportadas, ellas pueden ser continuas, en ninguna parte ser diferenciables (en el sentido finito), e incluso, como vimos en el capítulo dos, en ninguna parte son continuas. En esta sección, probaremos estos resultados.

El siguiente lema justifica el caso en que la derivada en cero existe y es infinita.

Lema 3.8. *Si f es una función que preserva métrica y $0 \leq x \leq y$, entonces $\frac{f(y)}{y} \leq 2\frac{f(x)}{x}$.*

Demostración. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$ tal que $2^{n-1} \leq \frac{y}{x} < 2^n$, entonces $(x, x, \frac{y}{2^{n-1}})$ es una tripla triangular donde

$$\frac{y}{2^{n-1}} \leq 2x,$$

así por el ejemplo 2.5 se afirma que:

$$\frac{f(y)}{2^{n-1}} \leq f\left(\frac{y}{2^{n-1}}\right) < f(2x) \leq 2f(x);$$

$$f(y) < 2^{n-1}(2f(x)) \leq 2y\frac{f(x)}{x},$$

por lo tanto,

$$\frac{f(y)}{y} \leq 2\frac{f(x)}{x}.$$

□

A continuación se formula una condición suficiente, encerrando la noción de gradiente acotado, que mostraremos a continuación.

Definición 3.9. *Dado $r > 0$, decimos que una función f que preserva métrica es de **gradiente r -acotado en cero** si hay algún $h > 0$ tal que $f(x) \leq rx$, para todo $x \in [0, h]$.*

Y decimos que f es de gradiente acotado en cero, si existe algún $r > 0$ tal que f es de gradiente r -acotado en cero.

La siguiente proposición se necesita para el caso de la derivada finita y esto se determina por medio del gradiente acotado en cero de la función.

Proposición 3.10. *Suponga $r > 0$ y f una función que preserva métrica, de gradiente r -acotado en cero entonces:*

1. $f(x) \leq rx$ para cada $x \geq 0$.
2. $|f(x) - f(y)| \leq r|x - y|$ para cada $x, y \geq 0$.

Demostración.

1. Por la definición de gradiente r -acotado se tiene un $r > 0$ tal que existe un $h > 0$, por lo que $f(x) \leq rx$ para cualquier x en $[0, h]$. Sean $x \geq 0$, $n \in \mathbb{Z}^+$ suficientemente grande de modo que $\frac{x}{2^n} \leq h$, usando el ejemplo 2.5 se puede afirmar que

$$\frac{f(x)}{2^n} \leq f\left(\frac{x}{2^n}\right) \leq \frac{rx}{2^n},$$

que es lo mismo que $f(x) \leq rx$ para cada $x \geq 0$.

2. Retomando el resultado de la proposición 2.7 sea $c = |x - y|$ con $x, y \geq 0$ entonces $|f(x) - f(y)| \leq f(|x - y|)$, además basados en el que $f(|x - y|) \leq r|x - y|$ para cada $x \geq 0$, se tiene:

$$|f(x) - f(y)| \leq f(|x - y|) \leq r|x - y|.$$

□

El siguiente lema es una generalización del teorema 3.7.

Lema 3.11. *Suponga que f preserva métrica y $r > 0$. Si en cualquier vecindad de cero existe un punto a tal que $f(a) = a$, entonces existe un $h > 0$ tal que $f(x) = rx$ para cada x en $[0, h]$.*

Demostración. Por hipótesis f preserva métrica y por teorema 3.5 se tiene que f es continua. Sea $h > 0$ tal que $f(h) = rh$. Supónganse que existe un x en $(0, h)$ tal que $f(x) \neq x$. Sea $A = \{y \in [0, \infty) : f(y) = ry\}$. Por continuidad de f , $A \cap [0, x]$ es compacto y tiene un maximal elemento, el cual denotamos por $M_{0,x}$; además, $A \cap [x, h]$ también es compacto, y se denota su elemento minimal por $m_{x,h}$.

En primer lugar si $f(x) > rx$, probaremos que existe un número u en $(M_{0,x}, x)$ tal que $f(u) \leq ru$ entonces por continuidad $f(z) = rz$ para algún z en $[u, x)$ pero esto

contradice la elección de $M_{0,x}$ con base en esto, sea y en A con $0 < y < x - M_{0,x}$, tomamos $u = y + M_{0,x}$ de modo que:

$$\begin{aligned} f(u) = f(y + M_{0,x}) &\leq f(y) + f(M_{0,x}); \\ &\leq ry + rM_{0,x} = r(y + M_{0,x}); \\ &\leq ru, \end{aligned}$$

Ahora si $f(x) < rx$, como en el caso anterior se prueba que existe un u en $(x, m_{x,h})$ tal que $ru \leq f(u)$, nuevamente por la continuidad de la función si $f(z) = rz$ para algún z en $[x, u]$ pero no puede suceder porque contradice la elección de $m_{x,h}$. Sea y en A de tal forma que $0 < y < m_{x,h} - z$ llamaremos $u = m_{x,h} - z$ entonces:

$$\begin{aligned} ru = r(m_{x,h} - z) = r(m_{x,h}) + r(z) &\leq r(m_{x,h} - z); \\ f(m_{x,h}) + f(z) &\leq f(f(m_{x,h} - z)) = f(u); \\ ru &\leq f(u). \end{aligned}$$

En conclusión, $f(x) = rx$ para cualquier x en $[0, h]$. □

Ahora podemos pensar en una característica de todas las funciones que preservan métrica y preguntarnos:

Q_5 ¿Será que cualquier función que preserve métrica tiene derivada en cero?

Esta pregunta le da respuesta en el siguiente teorema que abarca la derivada finita e infinita por lo que se necesita definir el conjunto $Q_f = \{r > 0 : f(x) \leq rx, \forall x \geq 0\}$ el cual si es vacío entonces la derivada es infinita pero sino es vacío pasa lo contrario, además se obtendrá que si la derivada es finita entonces el conjunto es vacío y lo mismo si la deriva es infinita entonces el conjunto no es vacío.

Teorema 3.12. *Sea f una función que preserve métrica, entonces $f'(0)$ existe en el sentido extendido, (puede suceder que $f'(0) = +\infty$).*

Demostración. La prueba de este teorema se divide en dos partes las cuales son: encontrar la derivada finita cuando $Q_f \neq \emptyset$ y la derivada infinita

1. Sea $n \in \mathbb{Z}^+$, como $Q_f = \emptyset$ se puede escoger un $y > 0$ tal que $f(y) \geq 2ny$; sea $x \in (0, y]$ por el lema 3.8 se tiene que:

$$\frac{f(y)}{y} \leq 2 \frac{f(x)}{x};$$

adicionando la desigualdad nombrada entre las hipótesis obtenemos:

$$\begin{aligned} 2n \leq \frac{f(y)}{y} &\leq 2\frac{f(x)}{x}; \\ \frac{2n}{2} &\leq \frac{f(x)}{x}; \\ n &\leq \frac{f(x)}{x}. \end{aligned}$$

Como es para cada entero $n > 0$, entonces $f'(0)$ existe y es infinita.

2. Por el teorema 3.5, f es continua de donde Q_f es cerrado. Sea $r_0 = \min Q_f$ probaremos que

$$r_0 = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{x}. \quad (3.2)$$

Sea $\epsilon > 0$ primero necesitamos demostrar que para cada $h > 0$, existe un $x \in (0, h]$ tal que

$$f(x) > (r_0 - \epsilon)x. \quad (3.3)$$

Supongamos, en cambio que existe un $h > 0$ de modo que para cada $x \in [0, h]$, $f(x) \leq r_1 x$, donde $r_1 = r_0 - \epsilon$. Por lo tanto, f es de gradiente r_1 -acotado en cero y así por proposición 3.10, $f(x) \leq r_1 x$ para cada $x \geq 0$ lo cual contradice la escogencia de r_0 . Por lo tanto, $f(x) > (r_0 - \epsilon)x$ es cierto.

Ahora pasándonos al caso en que $Q_f \neq \emptyset$, mostremos que existe un $h > 0$ tal que $f(x) > (r_0 - \epsilon)x$ para todo $x \in (0, h]$.

Supongamos que para cada $h > 0$, existe un $x \in [0, h]$ tal que

$$f(x) \leq (r_0 - \epsilon)x. \quad (3.4)$$

Sea $h > 0$, por la ecuación (3.3), existe $x_1 \in (0, h]$ tal que $f(x_1) > (r_0 - \epsilon)x_1$; por la ecuación (3.4), existe $x_2 \in (0, h]$ tal que $f(x_2) \leq (r_0 - \epsilon)x_2$ y por la continuidad de f , existe $x_3 \in (0, h]$ tal que $f(x_3) \leq (r_0 - \epsilon)x_3$ se obtiene por el lema 3.11, por lo tanto lo supuesto no es cierto y se probó lo que queríamos.

Por lo tanto, $r_0 \in Q_f$, también se cuenta con $f(x) < (r_0 - \epsilon)x$ para cada $x > 0$. De esta forma combinamos los resultados y concluimos que para cada $\epsilon > 0$, existe un $h > 0$ tal que $r_0 - \epsilon < \frac{f(x)}{x} < r_0 + \epsilon$ siempre que $0 < x \leq h$, demostrando así por la ecuación (3.2). $\square$

Proposición 3.13. *Si f preserva métrica y de gradiente acotado en cero, entonces f es de variación acotada sobre cada intervalo cerrado encontrado dentro de $[0, \infty)$.*

Demostración. Sea $r > 0$, existe un $h > 0$ tal que $f(x) \leq rx$ para todo $x \in [0, h]$. Sea $P = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = h\}$, con $P \in \mathcal{P}[0, h]$. Se puede afirmar por la proposición 3.10 que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(x_i)| &\leq \sum_{i=0}^n r|x_{i+1} - x_i|; \\ \sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(x_i)| &\leq r \sum_{i=0}^n |x_{i+1} - x_i|; \\ \sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(x_i)| &\leq r|x_0 - x_n|; \\ \sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(x_i)| &\leq r|0 - h| \leq M, \end{aligned}$$

para algún $M > 0$. □

Ahora se muestra que una función f que preserva métrica con derivada finita en cero será diferenciables casi en cualquier lugar.

Lema 3.14. *Suponga que f es una función que preserva métrica y $f'(0) < +\infty$, entonces:*

1. $f(x) \leq f'(0)x$, para cualquier $x \geq 0$.
2. $|f(x) - f(y)| \leq f'(0)|x - y|$, para todo $x, y \geq 0$.

Demostración.

1. Sea $\epsilon > 0$, por hipótesis $f'(0) < +\infty$, luego existe un $h > 0$ tal que $f(x) \leq (f'(0) + \epsilon)x$ para todo $x \in [0, h]$; por lo tanto f es de gradiente $(f'(0) + \epsilon)$ -acotado en cero. Por la proposición 3.10 se tiene que:

$$f(x) \leq rx = (f'(0) + \epsilon)x \leq f'(0)x.$$

2. Sean $x, y \geq 0$, por la proposición 2.15(2) si $z = |x - y|$ entonces $|f(x) - f(y)| \leq f(|x - y|)$ y utilizando el primer punto $f(z) \leq f'(0)z$ en el cual se reemplaza y queda $f(|x - y|) \leq f'(0)|x - y|$ y por la propiedad transitiva se tiene:

$$|f(x) - f(y)| \leq f(|x - y|) \leq f'(0)|x - y|.$$

□

En la demostración del lema 3.14(1) se prueba que si una función f preserva métrica y su derivada en cero es finita, entonces la función es de gradiente acotado en cero. Lo contrario también es cierto y seguido del teorema 3.12 inmediatamente así:

Corolario 3.15. *Sea f una función que preserva métrica, entonces $f'(0) < +\infty$ sí y solo sí f es de gradiente acotado en cero.*

Demostración.

La implicación es inmediata usando el lema 3.14.

Por otra parte como la función f preserva métrica podemos aplicar el teorema 3.12 así la $f'(0)$ existe, ahora para determinar si es finita utilizaremos la proposición 3.13 y el lema 3.14(2) para alguna partición $P = \{a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b\}$, con $P \in \mathcal{P}[0, h]$ se tiene:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(x_i)| &\leq \sum_{i=0}^n f'(0) |x_{i+1} - x_i|; \\ \sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(x_i)| &\leq f'(0) \sum_{i=0}^n |x_{i+1} - x_i|; \\ \sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(x_i)| &\leq f'(0) |x_0 - x_n|; \\ \sum_{i=0}^n |f(x_{i+1}) - f(x_i)| &\leq f'(0) |a - b| \leq +\infty. \end{aligned}$$

Por lo tanto $f'(0) \leq +\infty$. □

Teorema 3.16. *Suponga que f es una función que preserva métrica y $f'(0) < +\infty$, entonces f es de variación acotada sobre cada intervalo cerrado dentro de $[0, \infty)$. De aquí, f es diferenciable casi en cualquier parte.*

Demostración. Se tiene que la función f por la corolario 3.15 es de gradiente acotado en cero y por la proposición 3.13 es de variación acotada en todo intervalo cerrado dentro de $[0, \infty)$. □

REFERENCIAS

- [1] BORSÍK J., DOBOŠ J. On metric preserving functions. Real Anal. Exchange. 13, 1988.
- [2] CORAZZA P. Introduction to metric-preserving functions. American Mathematical Monthly 106, 1999.
- [3] DOBOŠ J. The standard Cantor function is subadditive. Proc. American Mathematical Society 124, 1996.
- [4] GER R., KUCZMA M. On the boundedness and continuity of convex functions and additive functions. Aequationes Mathematicae Monthly 4, 1970.
- [5] JUZA M. A note on complete metric spaces. Matematicko-fyzikálny časopis SAV 6, 1956.
- [6] KELLEY J. General topology. Springer-Verlag, New York 1955.
- [7] PILLINGSLEY P. Van der Waerden's continuous nowhere differentiable function. American Mathematical Monthly 89, 1982.
- [8] POKORNY I. Some remarks on metric preserving functions. Trata Mt. Mathematical Publ. 2, 1993.
- [9] SREENIVASAN T. Some properties of distance functions. J. Indian Math. Society 11, 1947.
- [10] BARTLE R., SHERBERT D. Introduccion al analisis matematico de una variable. Limusa, 1999.