Estudio del razonamiento proporcional en educación primaria: un acercamiento histórico-epistemológico para favorecer la inclusión

Jaiver David Rey Gómez
Código: 2180125

Trabajo de grado presentado como requisito para optar al título de
Licenciado en Matemáticas

Directora
Sandra Evely Parada Rico
Doctora en Ciencias en la especialidad de Matemática educativa

Codirector
Jairo Gutiérrez Balaguera
Magíster en Educación matemática

Universidad Industrial de Santander
Facultad de Ciencias
Escuela de Matemáticas
Licenciatura en Matemáticas

Bucaramanga
2022

Dedicatoria

Dedico este trabajo a todos los que fueron y son mis maestros…

quienes han trabajado sin descanso y en silencio por construir un mundo mejor.

Para todos ellos mi admiración sin límites.

Agradecimientos

A Dios, fuente suprema de sabiduría, quien me ha dado la oportunidad de terminar este trabajo y de encontrar mi verdadera vocación.

A mi madre adorada, Mónica Gómez; faro perene, luz y consuelo de mi alma, quien es maestra de vocación y fue mi primera maestra, gracias por enseñarme que educar es un acto de amor.

A mi padre, Javier Rey, quien me ha brindado el consejo de los años, y me enseñó a caminar con firmeza y valentía en el estrepitoso sendero de la vida.

A mis hermanos, Mary y Mauricio, mi sobrino Breiner, mi tía Rocío, mis padrinos Andrés y Marina. Gracias por su apoyo constante.

A la profesora Sandra Evely, por su confianza e infinita paciencia. Gracias por tenderme su mano cuando más lo necesité y enseñarme que la vida siempre da segundas oportunidades.

Al profesor Jairo, mi primer maestro de la carrera y quien me enseñó a amar esta noble profesión.

A las evaluadoras: la profesora Edith Johanna y a la profesora Difariney. Gracias por sus valiosos aportes para hacer de este un mejor trabajo.

A los profesores de la Licenciatura, por su apoyo en mi realización como profesional, como maestro y especialmente como persona.

A mis amigos, quienes amablemente me colaboraron en las últimas semanas de trabajo: Jennifer, Yuli y Juan José. Infinitas gracias.

A mis amigos y compañeros de carrera por compartir sus alegrías y tristezas. Gracias por caminar conmigo y enseñarme el verdadero valor de la amistad.

A todos, los que de alguna forma me apoyaron económica, espiritual o moralmente. A quienes, con dureza, pero con aprecio, me aconsejaron, me orientaron y me corrigieron. Gracias a todos soy hoy, un mejor ser humano.

Agradecimiento

Al Ministerio de Ciencia, Tecnología e Innovación, Colombia – MINCIENCIAS quien está financiando el programa de investigación “Innovar en la Educación Básica para formar ciudadanos matemáticamente competentes frente a los retos del presente y del futuro”. Código1115-852 70767, con el proyecto “Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnología: procesos de formación y reflexión con profesores”. Financiado por el Ministerio de Ciencia y Tecnología”. Código70783, con recursos del Patrimonio autónomo Fondo Nacional de financiamiento para la ciencia, la tecnología y la innovación Francisco José de Caldas, contrato CT 183-2021.

Tabla de contenido

Pág.

Lista De Figuras

Lista de Tablas

Lista De Apéndices

Resumen

Título: Estudio del razonamiento proporcional en educación primaria: un acercamiento histórico-epistemológico para favorecer la inclusión[*]

Autor: Jaiver David Rey Gómez[**]

Palabras clave: Razonamiento proporcional, Historia, Epistemología, Inclusión.

Descripción:

En el presente documento se reporta un trabajo de investigación cuyo propósito fue plantear y valorar un diseño didáctico flexible y adaptable rescatando el componente histórico-epistemológico del razonamiento proporcional y que favorezca la inclusión, dirigido a estudiantes del grado quinto de educación básica primaria.

Este trabajo se fundamenta teóricamente en las *etapas del desarrollo del razonamiento proporcional*, propuestas por Mochón (2012), y en el uso de la Historia y la Epistemología como recurso didáctico. Así mismo, acoge las directrices del Diseño Universal de Aprendizaje (DUA) para favorecer procesos de inclusión. Por otra parte, se sustenta metodológicamente en el proyecto 707983 *"Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnología: procesos de formación y reflexión con profesores"*. La metodología particular de este trabajo tiene un enfoque de diseño curricular y se desarrolla en cuatro fases.

En cuanto a la estructura curricular del diseño didáctico, se adaptó una secuencia particular, con un énfasis histórico-epistemológico, a cuatro momentos de actividad matemática, de acuerdo con el proyecto 707983, antes citado.

Finalmente, en el análisis y discusión de resultados se resaltan las reflexiones *a priori* suscitadas por el planteamiento del diseño y su posterior valoración, en aras de responder al objetivo de investigación.

[*] Trabajo de grado

[**] Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Licenciatura en Matemáticas. Directora: Dra. Sandra Evely Parada Rico. Codirector: Mg. Jairo Gutiérrez Balaguera

Abstract

Title: Study of proportional reasoning in primary education: a historical-epistemological approach to promote inclusion[*]

Author: Jaiver David Rey Gómez[**]

Keywords: Proportional reasoning, History, Epistemology, Inclusion.

Description:

This document reports a research work whose purpose was to propose and assess a flexible and adaptable didactic design rescuing the historical-epistemological component of proportional reasoning and that favors inclusion, aimed at students of the fifth grade of primary basic education. This work is theoretically based on the stages of the development of proportional reasoning, proposed by Mochón (2012), and on the use of History and Epistemology as a didactic resource. Likewise, it welcomes the guidelines of the Universal Design for Learning (UDL) to favor inclusion processes. On the other hand, it is methodologically based on the project 707983 "*Didactic designs for inclusion in mathematics with the mediation of technology: processes of training and reflection with teachers*". The particular methodology of this work has a curricular design approach and is developed in four phases.

Regarding the curricular structure of the didactic design, a particular sequence, with a historical-epistemological emphasis, was adapted to four moments of mathematical activity, according to the project 707983, cited above.

Finally, in the analysis and discussion of results, the *a priori* reflections raised by the design approach and its subsequent assessment are highlighted, in order to respond to the research objective.

[*] Bachelor thesis

[**] Science Faculty. Mathematics school. Bachelor's degree in Mathematics. Director: Dra. Sandra Evely Parada Rico. Codirector: Mg. Jairo Gutiérrez Balaguera

1. Introducción y Descripción Del Problema

La Organización de las Naciones Unidas (ONU), en la *Declaración Universal de los Derechos Humanos*, Artículo 26, afirma que "todos tenemos el derecho a la educación" (1948, p. 36). Así, la educación además de ser un derecho fundamental del sujeto, que le permite desenvolverse en cualquier contexto, también abre las puertas al desarrollo y expande las oportunidades del ser humano. Por lo anterior, en los Objetivos del Desarrollo Sostenible (ODS) se postula como fin imperante "garantizar una educación inclusiva, equitativa y de calidad…" (ONU, 2015, p.1). Por tanto, los países tienen como tarea indispensable promover esta educación.

La Organización de las Naciones Unidas para la Educación, la Ciencia y la Cultura (UNESCO, 1990) en La *Declaración Mundial Sobre la Educación para Todos*, comenta la necesidad de garantizar una educación universal a través de incentivos que faciliten infraestructuras educativas con un enfoque inclusivo para todas las personas. Por su parte, La *Conferencia Mundial sobre Necesidades Educativas Especiales* (NEE), celebrada en España por UNESCO (1994), expone la importancia de mejorar el acceso a las personas con necesidades especiales, al mismo tiempo que exhorta a los países del mundo a impartir con urgencia la enseñanza a esta población dentro del sistema educativo.

Así mismo, en el *Foro Mundial de la Educación* de Dakar se hizo un llamado a los estados a que asuman a plenitud esta responsabilidad. Así, podrá lograrse "un sistema de educación realista, asequible, moderno, universalmente accesible y exento de toda discriminación, que fomente una cultura universal compartida por todos los seres humanos" (UNESCO, 2000, p.5).

En el contexto nacional, diferentes normativas sostienen el derecho básico a la educación. En primer lugar, la *Constitución Política de Colombia* (Const., 1991) resalta la educación como un derecho de la persona, y un servicio público social con el cual se accede a los bienes y valores de la cultura. Dicho derecho, se estipula con la *Ley General de Educación* (Ley 115 de 1994), en la cual, se le hace corresponder al Estado, la sociedad y la familia el deber de velar por la educación y promover el acceso al sistema educativo. El Decreto 1860 de 1994, del Ministerio de Educación Nacional (MEN), por su parte, expone las formas en que se pueden garantizar los fines de la educación promulgados por la ley.

En este orden de ideas, garantizar la educación inclusiva es una de las tareas que más les atañe actualmente a los estados, esto dado que, tanto el desarrollo económico como el progreso son consecuencia de las políticas públicas enfocadas a grupos excluidos, en la medida en que eliminar las barreras del aprendizaje y permitir el paso al mercado laboral a estas personas contribuye al desarrollo del país. No obstante, se reconoce que las personas con necesidades educativas especiales aún tienen menor acceso a la formación.

Las convenciones internacionales enfatizan en el hecho de que bajo ningún motivo se deben prohibir, excluir o restringir las oportunidades de enseñanza, a razón de diferencias sociales, económicas o culturales; en cambio, se debe llegar a grupos excluidos y permitirle el acceso a una educación de calidad.

Al respecto, la ONU, en el Comentario General N°4 de la *Convención sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad* sostiene que, “la educación inclusiva es capital para lograr una educación de alta calidad para todos los estudiantes… así como para el desarrollo de sociedades inclusivas, pacíficas y justas” (2016, p.1). De tal forma, “el derecho a la educación inclusiva abarca una transformación en la cultura, la política y la práctica de todos los entornos educativos para dar cabida a las diferentes necesidades e identidades de cada estudiante” (ONU, 2016, p.3)

En el caso de Colombia, la educación inclusiva es una obligación del Estado, de acuerdo a la *Ley General de Educación* (Ley 115 de 1994), al Decreto 1860 del 1994, al Decreto 2028 del 1996, y a la reciente Ley 2216 de 2022

Si bien, el MEN expone que a todos los estudiantes se les "garantiza, en el marco de los derechos humanos, los apoyos y los ajustes razonables requeridos en su proceso educativo, a través de prácticas, políticas y culturas que eliminan las barreras existentes en el entorno educativo" (Decreto 1421, 2017), aún es insuficiente el apoyo del sistema educativo para adelantar planes estratégicos que favorezcan procesos de inclusión. Algunos autores como Figueroa y Muñoz (2014) postulan que:

> La educación inclusiva implica que todos los niños y niñas de una determinada comunidad aprendan juntos, independientemente de sus condiciones personales, sociales y culturales. Una escuela inclusiva fundamentalmente se caracteriza por su voluntad de hacer posible una educación individualizada mediante la oferta de acciones plurales y diversas en un mismo marco escolar, buscando conciliar los principios de igualdad y diversidad. (p. 181)

Así mismo, Booth & Ainscow (2000) sostienen que el desarrollo de la inclusión en la educación implica "la creación de una comunidad escolar segura, acogedora, colaboradora y estimulante, en la que cada uno es valorado, lo cual es la base fundamental primordial para que todo el alumnado tenga mayores niveles de logro" (p.18). Una educación inclusiva, debe garantizar, entre otras cosas, una formación integral que satisfaga las diferentes formas de aprendizaje de acuerdo con las necesidades educativas particulares del estudiante. Lo anterior significa un importante esfuerzo por ampliar los recursos educativos, y enfatizar en la formación de los maestros, para que posibiliten un proceso de aprendizaje ajustado al estudiante.

Particularmente, en el área de Matemáticas se requiere un profesorado comprometido, reflexivo y crítico que además de contar con un dominio conceptual amplio, sea sensible ante la inclusión.

A pesar de que se han hecho esfuerzos en los últimos años en este aspecto, aún resultan insuficientes, ya que de acuerdo con Arnaiz (2000) cada vez las formas tradicionales de enseñanza resultan más ineficientes para atender las necesidades del estudiantado en las aulas, por lo que se requiere de un sistema educativo que posibilite la enseñanza para todos. Garantizar una educación de calidad, requiere superar la complejidad de enseñar matemáticas en los diferentes niveles escolares.

Por las anteriores consideraciones, en este trabajo se respondió a la pregunta: *¿Cómo la mirada histórica-epistemológica del razonamiento proporcional posibilita su estudio y favorece la inclusión en clase de matemáticas de quinto grado?* Para ello, es necesario en primera medida, abordar la problemática alrededor de la enseñanza del razonamiento proporcional. En la educación básica primaria, según los Derechos básicos de Aprendizaje (DBA), se abordan algunos conceptos relacionados con este tema (MEN, 2016). De este modo, se trabajan en ideas iniciales que tienen que ver con relaciones y comparaciones entre cantidades y luego con ideas del razonamiento proporcional. Ahora bien, se expondrá a la luz de la literatura las principales dificultades que se registran sobre el tema en cuestión.

El razonamiento proporcional, a menudo, es uno de los procesos que más se abordan en la enseñanza de la matemática escolar, pero no siempre con la profundidad que le merece. El primer problema en la enseñanza de este proceso es el abordaje mecanicista y repetitivo con el que se estudia, limitándolo al uso indiscriminado de la regla de tres, lo que produce varios obstáculos en su comprensión. Esta divergencia se agudiza cuando se trabajan con estudiantes con NEE, ya que no es posible lograr un aprendizaje real a través de procedimientos algorítmicos, repetitivos y descontextualizados.

Mochón (2012) y Guacaneme (2016) con base en los trabajos de Inhelder & Piaget, Karplus, Freudenthal, Hart, Lamon, entre otros, refieren que, respecto al razonamiento proporcional, la reducción del proceso a la aplicación de la regla de tres es el problema más documentado. Por otra parte, Guacaneme (2002), considera, acerca de los libros guía, que existe un abordaje no direccionado de los libros de texto, junto a las ideas superfluas, exiguas y difusas que en ocasiones tienen los docentes, lo cual conlleva a un factor que obstaculiza un aprendizaje correcto del tema.

Estos problemas, traen como consecuencia inmediata que el estudiante no puede transitar de un algoritmo a la interpretación de un problema dentro de un contexto particular, afectando la comprensión y el aprendizaje para la vida que promulga la educación inclusiva. En este sentido, la incapacidad de resolver problemas que involucren implícitamente la proporcionalidad es un importante desafío para la Educación matemática (Obando et al., 2014).

Del mismo modo, es importante "tener en cuenta las implicaciones en la manera de enseñar la proporcionalidad respecto a la construcción del significado del concepto de "razón", y su desarrollo del pensamiento multiplicativo" (Steffe, 1994, como se citó en Cortés, W. et al, 2018, p. 9). Por tanto, se debe enfatizar en que la proporcionalidad tiene como base el concepto de razón, como un subconstructo de la fracción. Así mismo, Mochón (2012) de acuerdo con Lamon (1999) afirma que:

> Para comprender la proporcionalidad es necesario desarrollar la idea de cantidades relativas. Además, se debe entender la conexión de equivalencia que existe entre dos

razones y conocer sus propiedades de invariancia, como la de conservar la razón al multiplicar ambas cantidades por un mismo factor (p.136).

Darle este sentido a la enseñanza de la proporcionalidad resulta conveniente a la luz de las problemáticas documentadas, a la vez que se favorece la comprensión y se promueve el desarrollo de la competencia matemática de todos los estudiantes. Es aquí donde se deben analizar alternativas para encauzar la enseñanza del objeto matemático de estudio: el uso de la Historia y la Epistemología del concepto puede coadyuvar con esta tarea, y favorecer la inclusión.

En este sentido, autores como D'Amore (2011) y Guzmán (1993), concluyen que una mirada histórica-epistemológica a las matemáticas posibilita el análisis de la evolución de ideas y el desarrollo de hechos que construyeron los objetos matemáticos como hoy se conocen. De este modo Poincaré (1981) mencionado por Gutiérrez (2019) sostiene que la Historia de las Matemáticas debe ser la primera guía del docente.

Aunado a lo anterior, Mochón (2012) a partir de autores como, Hart, Vergnaud, Behr, comenta que muchas personas tienen dificultades significativas a la hora de resolver problemas que exigen el razonamiento proporcional, constituyendo una razón suficiente para plantear este estudio centrado en estudiantes con NEE, los cuales requieren en mayor medida un aprendizaje para la vida. Ante esto, Wilhelmi (2017) documenta numerosas aplicaciones de la proporcionalidad en el ámbito académico y laboral: en la Ciencia (Biología, Genética, Astronomía, etc.), la Tecnología, la Ingeniería y las Artes.

En este orden de ideas, se debe realizar un amplio trabajo para favorecer el desarrollo del razonamiento proporcional en estudiantes con NEE. Se debe tener en cuenta que este objeto matemático supone un aprendizaje significativo de las matemáticas, en la medida de su amplio campo de aplicación. Por otra parte, se reconoce la importancia de enseñar el objeto matemático atendiendo a las particularidades del individuo, lo que posibilita un desarrollo del razonamiento matemático del sujeto y favorece sus competencias matemáticas para la vida.

Por tanto, es conveniente plantear los diseños didácticos para desarrollar una concepción profunda que rescate las ideas fundamentales de la proporcionalidad, sus diferentes representaciones, y familiarice al estudiante con las técnicas de resolución de problemas de tipo proporcional, conscientes de su sustento matemático, aprehendido con anterioridad. Más aún cuando se cuenta con la Historia y la Epistemología del concepto como recurso didáctico, ya que autores como Guacaneme (2016), y Oller-Marcén y Gairín (2013), reconocen que la proporcionalidad cuenta con una historia prolífica que se evidencia en problemas registrados en la antigüedad, en ideas brillantes y en sucesos estelares, que pueden suscitar el análisis y la discusión en el aula. De allí, que tal como menciona Mochón (2012) el conocimiento del origen y la evolución de los conceptos que constituyen la Ciencia es el mejor soporte para contextualizarlos.

Por todo lo antes dicho, se desarrolló el trabajo de grado que tuvo por objetivo *plantear y valorar diseños didácticos basados en el componente histórico-epistemológico del razonamiento proporcional para favorecer la inclusión en clase de matemáticas de quinto grado.*

2. Algunos Antecedentes

En este apartado se esbozan las bases legales que fundamentan la educación inclusiva, algunos trabajos referentes al razonamiento proporcional, enfatizando en el componente histórico-epistemológico, y otros proyectos que muestran cómo abordar el objeto matemático de estudio desde la inclusión. En particular, se enfatiza en los trabajos que puedan contribuir al desarrollo del diseño. Por tanto, este capítulo se categoriza de la siguiente manera: Aspectos legales de la educación inclusiva; una revisión bibliográfica sobre el razonamiento proporcional; el papel de la Historia y la Epistemología en la enseñanza del razonamiento proporcional, y, por último, el razonamiento proporcional y la inclusión.

2.1. Marco Legal Colombiano Sobre La Educación Inclusiva

En el ámbito nacional, diferentes normativas sostienen el derecho a la educación inclusiva. En primer lugar, la *Constitución Política de Colombia* (Const., 1991), resalta la educación como un derecho de la persona, y un servicio público social con el cual se accede a los bienes y valores de la cultura. Así mismo, en los artículos 13, 42, 47, 54 y 68 se promueve el acceso y la inclusión a todas las personas a espacios educativos y culturales. En esta misma línea, la *Ley General de Educación* (Ley 115 de 1994), le hace corresponder al Estado, la sociedad y la familia el deber de velar por el acceso al sistema educativo de todas las personas. Así mismo, las leyes 361 del 1997 y 715 de 2001, junto a los decretos 1860 del 1994 y 2082 del 1996 complementan lo expuesto por la *Ley General de Educación*, en cuanto a la educación inclusiva. Recientemente, la Ley 2216 de 2022, consolida y reafirma la educación inclusiva, y la formación integral de todos los estudiantes, por medio de planes territoriales de estrategias dirigidas para posibilitar su desarrollo.

Finalmente, el Ministerio de Educación Nacional (MEN, 2017) propone *una Fundamentación conceptual para la atención en el servicio educativo a estudiantes con necesidades educativas especiales*, en el cual aborda las bases legales, conceptuales y epistemológicas para el desarrollo de una educación inclusiva. Otros documentos institucionales como el Proyecto Educativo Institucional PEI, el Diseño Universal de Aprendizaje DUA, y el Plan Institucional de Ajustes Razonables PIAR, coadyuvan al proceso de inclusión en el aula.

2.2. El Razonamiento Proporcional Como Objeto De Estudio En Educación Matemática

En los últimos años, han surgido diversas investigaciones respecto al razonamiento proporcional, en distintas líneas: epistemológica, didáctica, pedagógica, etc. La mayoría de estas investigaciones priman la comprensión de los conceptos y el razonamiento sobre la ejercitación de procedimientos, por tanto, sitúan al estudiante como sujeto activo de aprendizaje en el desarrollo de las Matemáticas como actividad humana: histórica y cultural. En un primer momento, (Obando et al., 2014) en su trabajo denominado *Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado de arte*, realiza una revisión y análisis sobre las investigaciones en torno al razonamiento proporcional. Para ello, agruparon los trabajos en tres categorías: cognitivas, epistémicas y semióticas-antropológicas; y mostraron distintas perspectivas asociadas a los conceptos de razón y proporción; y algunos problemas abiertos para investigaciones futuras.

Por otra parte, se destaca el trabajo propuesto por Mochón (2012), denominado *Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres*, en el cual se exponen consideraciones teóricas para introducir los conceptos relacionados con el razonamiento proporcional. Así mismo, se presenta un marco teórico con las etapas del razonamiento proporcional, y se describen una serie de acercamientos para transitar a las etapas más avanzadas. También expone actividades que promueven el aprendizaje de la proporcionalidad directa; y realiza unas recomendaciones dirigidas a los maestros para fomentar el aprendizaje significativo del tema. La propuesta de Mochón (2012) se amplía más adelante como base para el desarrollo del diseño. Este autor, introdujo el término de razonamiento pre-proporcional y recomienda trabajar este proceso desde la educación primaria.

Así mismo, Wilhelmi (2017) en su trabajo *Proporcionalidad en educación primaria y secundaria*, busca analizar didáctica y epistemológicamente los significados que los estudiantes aprenden referente al razonamiento proporcional, y la manera en que esto apoya la transición de la aritmética al álgebra. Así mismo, defiende el hecho de que el razonamiento proporcional sea un proceso necesario de empezar en la educación primaria, a través de experiencias previas, que con el paso de los años se amplían y diversifican a través del contexto personal. De esta manera, propone el razonamiento proporcional como un contenido longitudinal y trasversal en el currículo, lo que justifica sus numerosas aplicaciones. De allí que sea conveniente incluir aspectos históricos-epistemológicos en su enseñanza.

En el contexto regional, Dubeibi, (2019) realiza su tesis sobre el proceso comunicativo del razonamiento proporcional, a través de un estudio sistemático mediado por la producción de textos. Para ello, se hizo el diseño de actividades y se ejecutaron para el posterior análisis de habilidades de los estudiantes, categorizadas posteriormente de acuerdo a su naturaleza: interpretativa, explicativa o justificativa. Con este trabajo, se encontró que la producción de textos en el marco del proceso comunicativo de las Matemáticas favorece el pensamiento crítico, la creatividad y la cooperación entre compañeros. Con esto, el autor recomienda a los docentes el diseño de actividades diversas, desde un contexto personal, social, histórico y cultural que favorezcan las necesidades educativas de los estudiantes, y con esto, el proceso de inclusión en el aula de Matemáticas.

2.3. Potencial Didáctico De La Historia Y La Epistemología En El Razonamiento Proporcional

Oller-Marcén y Gairín (2013) realizan un profundo análisis de la evolución histórico-epistemológica de conceptos relacionados con el razonamiento proporcional, especialmente el concepto de razón y proporción. Este trabajo es un análisis completo y detallado de la génesis histórica del razonamiento proporcional (en la cuna de la cultura china y griega) y su posterior aritmetización (posterior a la Edad Media). Allí, además de rescatar acontecimientos históricos-epistemológicos del objeto de estudio, también motiva el uso de la historia en clase de Matemáticas. Luego de abordar la evolución histórico-epistemológica del concepto, los autores presentan a modo de recomendación, algunas consideraciones importantes en cuanto al diseño de secuencias didácticas para la enseñanza del razonamiento proporcional. En el Marco teórico, se rescatarán algunas conclusiones derivadas de este trabajo.

En esta misma línea, y enfatizando en aspectos epistemológicos y didácticos, Guacaneme (2016) propone en su tesis doctoral el estudio de la relación entre la Historia de las Matemáticas, y su enseñanza, puntualizando en los momentos históricos que dieron lugar a la concepción de proporcionalidad. Del mismo modo, este autor sostiene que la comprensión de la evolución histórica-epistemológica permea positivamente en la enseñanza de las Matemáticas, basando esta afirmación en una revisión bibliográfica previa que fundamentan el uso de la Historia como un recurso didáctico. La estructura del diseño didáctico que se propondrá, está parcialmente fundamentada en las formas en que interviene la Historia de las Matemáticas en la enseñanza, de acuerdo con Guacaneme (2016), a saber: La Historia de las Matemáticas como uso, la Historia de las Matemáticas como integración, y la Historia de las Matemáticas como permeador.

Del mismo modo, Gutiérrez (2019) propone caracterizar aprendizajes en la formación de un ciudadano matemáticamente competente a través del desarrollo de una secuencia didáctica desde una perspectiva histórica-epistemológica para el estudio de la Trigonometría. Gutiérrez (2019) propone esta secuencia en el marco de una educación humanizante, y por medio de la Historia y la Epistemología como recurso didáctico; tesis que a su vez se fundamentó en el trabajo de Guacaneme (2016) sobre las formas en que interviene la Historia de las Matemáticas en su enseñanza (descritas anteriormente) y el concepto de ciudadano matemáticamente competente propuesto por el MEN.

Para finalizar, Gonzáles (2004), en su artículo denominado *La historia de las Matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza*, sustenta a las ulteriores propuestas que hacen uso del potencial didáctico de la Historia y la Epistemología de las Matemáticas para impactar positivamente la enseñanza: orientarla, contextualizarla y darle sentido. El autor, reconoce la Historia de las Matemáticas como elemento importante para la Didáctica de las Matemáticas, en la medida en que fomenta el aprendizaje activo- investigativo, esencial para el futuro ciudadano: profesional, científico o técnico. Así mismo, en este artículo se rescata el puente científico-humanista que posibilita la Historia de las Matemáticas. Según el autor, la Historia y la Epistemología es una guía para el docente como agente cultural, para el mejoramiento de su conocimiento disciplinar y de su enseñanza. Autores como Guzmán (1993), D'Amore (2011), entre otros, concuerdan con la tesis de González (2004).

2.4. El Razonamiento Proporcional Y La Inclusión

En cuanto al diseño, combinando el razonamiento proporcional y la inclusión, Howe et al. (2015), proponen un módulo denominado "Ratios", con el objetivo de favorecer la comprensión de la razón y la proporción. Este módulo se contrapone a la enseñanza tradicional del tema, y se basa en el procesamiento de la información para concatenar nociones asociadas al razonamiento proporcional. Así mismo, Howe et al. usaron un modelo pedagógico dialogante para promover la comunicación en el aula, lo que permitió a los estudiantes participantes en el proyecto mayor aprendizaje y mejor actitud frente al proceso, en relación al grupo de control. Es destacable, que en el desarrollo del proyecto se trabajó con estudiantes con características diferenciadas.

En este sentido, resulta conveniente destacar el trabajo de Valverde y Castro (2009) sobre las *Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa*, especialmente, porque los sujetos de estudio eran maestros en formación de Educación especial. Allí, los autores buscaron explorar el razonamiento proporcional y las técnicas de resolución de problemas de proporcionalidad directa de 76 futuros maestros de Educación especial. El hallazgo de errores de los participantes, permitió ubicarlos en alguna etapa del razonamiento proporcional, según la clasificación que plantean Karplus, Pulos y Stage, y reflexionar en torno a los obstáculos epistemológicos que dieron lugar a estos errores, así como las estrategias para alcanzar una comprensión completa de las propiedades estructurales de la proporcionalidad, y no solo los conocimientos procedimentales y algorítmicos.

3. Aspectos Teóricos Y Conceptuales

En este apartado se describen los elementos teóricos y conceptuales que sustentan el diseño didáctico. En primera medida, se esbozan *grosso modo* las políticas sobre educación inclusiva. Seguidamente, se hace un recorrido histórico enfatizando en los hechos principales en la evolución de la proporcionalidad. Así mismo, se exponen algunos aspectos conceptuales y epistemológicos en cuanto al razonamiento proporcional. Por otra parte, se hacen una serie de consideraciones curriculares para la enseñanza de este objeto matemático de estudio. Luego, producto del recorrido histórico, se analizan las implicaciones didácticas para la enseñanza del razonamiento proporcional. Finalmente, se propone la estructura metodológica del diseño didáctico.

3.1. Inclusión y Diseño Universal de Aprendizaje (DUA)

De acuerdo al objetivo del presente trabajo es importante definir lo que se entiende por educación inclusiva, de acuerdo con el Decreto 1421 de 2017:

> La educación inclusiva es un proceso permanente que reconoce, valora y responde de manera pertinente a la diversidad de características, intereses, posibilidades y expectativas de los niñas, niños, adolescentes, jóvenes y adultos, cuyo objetivo es promover su desarrollo, aprendizaje y participación, con pares de su misma edad, en un ambiente de aprendizaje común, sin discriminación o exclusión alguna, y que garantiza, en el marco de los derechos humanos, los apoyos y los ajustes razonables requeridos en su proceso educativo, a través de prácticas, políticas y culturas que eliminan las barreras existentes en el entorno educativo (p.4).

Es importante mencionar, que, para efectos de este trabajo, se usan los términos educación inclusiva y atención a las NEE de manera indistinta para referirse al proceso que se referenció anteriormente.

En este mismo Decreto, se consideran un lineamiento teórico fundamental para el desarrollo de la educación inclusiva: el Diseño Universal de Aprendizaje (DUA), el cual se concibe como:

> (…) Una propuesta pedagógica que facilita un diseño curricular en el que tengan cabida todos los estudiantes, a través de objetivos, métodos, materiales, apoyos y evaluaciones formulados partiendo de sus capacidades y realidades. Permite al docente transformar el aula y la práctica pedagógica y facilita la evaluación y seguimiento a los aprendizajes. (Decreto 1421,2017, p.5)

A continuación, se esbozan los principios y pautas del DUA de acuerdo con Pastor et. al (2011), citados en Velasco (2022) y en Pastor (2018).

I. **Proporcionar múltiples formas de representación:** en el marco de la inclusión se reconoce que todos los estudiantes tienen formas distintas de percibir, y comprender la información, luego es fundamental que se le presenten distintas formas de representación. Es claro que se deben proponer múltiples formas de representación que le sean captables a todos los estudiantes. En Matemáticas, de acuerdo con la teoría de representaciones de Duval, los distintos registros semióticos posibilitan la actividad matemática. A este principio están relacionadas tres pautas: proponer diferentes opciones para percibir la información, proporcionar múltiples opciones para el lenguaje y los símbolos, y proporcionar opciones para la comprensión.

II. **Proporcionar múltiples formas de acción y expresión:** al estudiante se le debe promover distintas formas de hacer actividad matemática y comunicarla. Para ello, las clases de Matemáticas deben tener preguntas bien dirigidas que favorezca distintas formas de aprender y distintas formas de manifestar lo aprendido, pues así se convierte el aula en un laboratorio científico. Las tres pautas fundamentales asociadas con este principio son proporcionar múltiples medios físicos de acción, proporcionar opciones para la comunicación y proporciones opciones para las funciones ejecutivas.

III. **Proporcional múltiples formas de implicación:** este principio hace referencia a la necesidad de implicar al estudiante activamente en el aula. Para ello se debe identificar sus intereses motivacionales, y de allí encauzar la enseñanza. Lo que hace que el estudiante esté motivado por aprender. Para este principio se proponen tres pautas fundamentales: proporcionar múltiples formas para captar el interés, proporcionar opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia y proporcionar opciones para la autorregulación.

Lo anterior se puede observar en la figura 1.

Figura 1

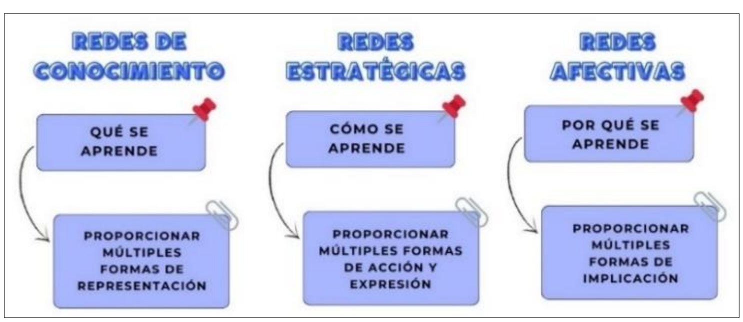
Principios y Pautas del DUA

Nota. Elaboración propia de acuerdo a información de Pastor (2018)

De acuerdo con Pastor (2018) estos principios implican una serie de redes neurales implícitas en el proceso de aprendizaje, como las redes afectivas que responden al *por qué se aprende*; las redes de conocimiento que indican *qué se aprende*, y las redes estrategias que explican *cómo se aprende*. Figura 2

Figura 2

Redes neuronales implícitas en los principios del DUA



Nota. Elaboración propia de acuerdo a información de Pastor (2018)

Los principios y pautas del DUA, harán parte de los resultados del presente proyecto, los cuales se esbozan en el capítulo 5.

3.2. Análisis Histórico-Epistemológico Del Razonamiento Proporcional

El razonamiento proporcional cuenta con una prolífica historia en su evolución. En cuanto a la razón y la proporción, su historia data varios siglos antes de Cristo. Al respecto, hay relatos escritos antiguos que referencian elementos de la proporcionalidad. Por ejemplo, en el Papiro de Rhind, un documento de carácter didáctico escrito en el siglo XIX a.C, se recogen textos con trescientos años de antigüedad, y aparecen 87 problemas matemáticos, aproximadamente seis de ellos relacionados con repartos proporcionales.

También aparecen en el Papiro problemas de tipo comercial, monetario y mercantil relacionados con la proporcionalidad. Los conceptos de razón y proporción surgen de este modo en un contexto aplicativo, sin fundamentación teórica, la cual se da varios siglos después.

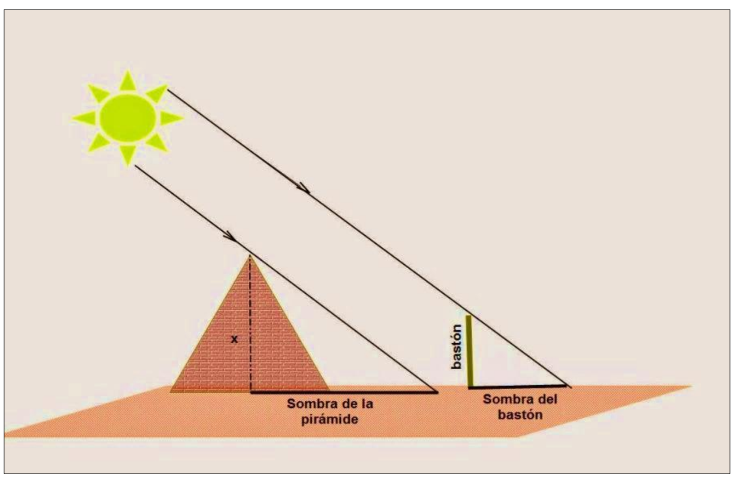
Este mismo tipo de problemas aparecen en algunos textos chinos e hindúes del siglo II a.C, recopilados después en libros como el *Lilavati*, que data del siglo XII d.C, y se le atribuye al matemático indio Bhaskara. Este tratado de 47 capítulos incluye problemas de distintas áreas, incluido la proporcionalidad (uno de estos problemas se incluye en el diseño), pero igual al Papiro de Rhind, sin fundamento teórico.

3.2.1. Cultura Griega

Es en la cultura griega, donde la razón y la proporción presentan su mayor avance histórico: tanto teórico como práctico. Ya hacia el siglo VI a.C Thales de Mileto, parece trabajar con relaciones proporcionales. Se cree que este matemático y filósofo griego ideó una forma de medir la Gran pirámide de Egipto: midió la longitud de la sombra de la pirámide, luego midió la longitud de su bastón y la sombra que proyectaba, luego de hacer unos cálculos sencillos pudo deducir, a un nivel de precisión sorprendente para la época, la altura de la Gran pirámide de Egipto. Si bien, Thales estaba usando su teorema que afirma que “si por un triángulo se traza una línea recta paralela a cualquiera de sus lados, se obtienen dos triángulos semejantes”, fueron indispensables sus conocimientos sobre razones y proporciones para la medición, este hecho también se incluye en el diseño.

Figura 3

Medición de la altura de la Gran pirámide de Egipto



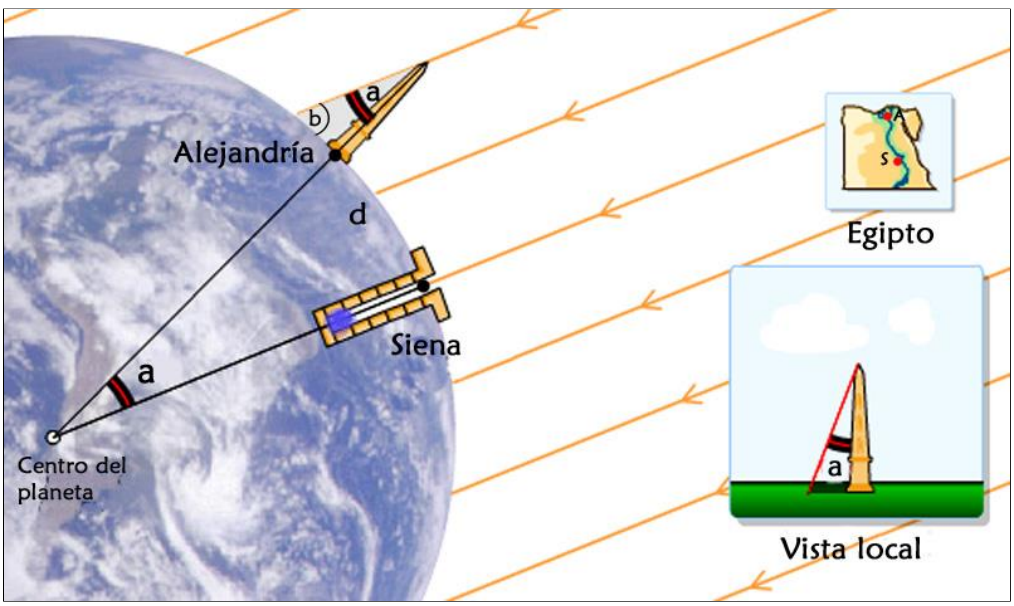
Nota. La imagen representa la manera en la que Thales de Mileto halló la medida de la altura de la pirámide. Tomado de *Matemáticas cercanas,* por Artacho, A. (2014).

Por su parte, Anaximandro de Mileto, discípulo de Thales, hizo uso de la razón y la proporción para la construcción del Gnomon, primer reloj solar. La Escuela de Mileto se caracterizó por su aplicabilidad de la proporcionalidad, pero sin atisbos de una fundamentación matemática.

También, en este contexto, Eratóstenes, logra ser la primera persona que calcula la longitud de la circunferencia de la tierra. Él conocía un evento astronómico que ocurría en Siena, ciudad en la cual al medio día los palos no producían sombras. A través del uso de las razones y proporciones, usando un palo y midiendo la sombra que proyectaba en Alejandría, Eratóstenes logró con un error de menos del 1% hallar la longitud de la circunferencia de la tierra. Figura 4. La situación plateada por Eratóstenes se incluyó en el momento 4 del diseño.

Figura 4

Medición de la circunferencia de la tierra.



Nota. La imagen representa la manera en la que Eratóstenes logró calcular la circunferencia de la tierra. Tomado de *Ingenieros especialistas,* por Guzmán (2017).

Pocos años después, los Pitagóricos, en sus reflexiones sobre la conmensurabilidad, hacen algunos aportes importantes en cuanto a la razón y la proporción. De acuerdo con Naranjo (2016) citado en Oller-Marcén y Gairín (2013), los Pitagóricos concibieron las razones internas (relación de magnitudes de la misma naturaleza), y su medición consistía en determinar cuántas veces una magnitud “cabía en otra”. Para ellos, dos magnitudes $A\ y\ B$ son conmensurables si existen dos números $n\ y\ m$ tales que $nA = mB$. Sin embargo, en el intento de comparar la medida entre el lado de un cuadrado y su diagonal, los Pitagóricos se encontraron con las magnitudes inconmensurables, y con estas, la conclusión de que no todo se puede comparar en términos de números naturales.

Posterior a esto, aparece el *Libro de Los Elementos* hacia el año 300 a.C, atribuido al geómetra griego Euclides, y considerado el libro más importante en la Historia de las Matemáticas, en particular, porque es el primer intento de formalizar, a través de postulados y teoremas, conocimientos prácticos usados desde hace siglos. Allí, Euclides desarrolla la teoría de razones y proporciones, con aportes de Eudoxio y Apolonio. Estos elementos aparecen en el libro V, dedicado a las magnitudes, y en el libro VII, que trata sobre la Aritmética; dado que Euclides desarrolla una teoría de razones y proporciones para magnitudes, y otra para números.

Sobre el libro V, dedicado a las magnitudes, Guacaneme (2016) hace numerosas reflexiones. Este autor, analiza minuciosamente cada uno de los postulados de este libro, y su potencial didáctico. En el libro V de Los Elementos aparecen relaciones cuantitativas de la misma naturaleza, lo que se conoce como razones internas. Hay varias definiciones allí que permiten construir el concepto de relación proporcional, por ejemplo, que la razón es una relación de tamaños entre dos magnitudes de la misma naturaleza, la concepción de igualdad de razones, lo que da lugar a la proporción, y una relación proporcional entendida como dos razones que guardan la misma magnitud. También se define lo que es guardar la misma razón, o guardan una razón mayor o menor, y que esas razones pueden sumarse, restarse y compararse.

En el libro VII, por su parte, se trata la teoría de números. Allí se define análogo a la teoría de magnitudes, las operaciones de sumar, restar y comparar números. No obstante, se agregan otras nociones como múltiplo, divisor, número primo, etc. De acuerdo a Oller-Marcén y Gairín (2013) las definiciones más importantes de este libro son: "unos números son proporcionales cuando el primero es la misma parte del segundo, que el tercero del cuarto", y: "si cuatro números son proporcionales, el producto del primer y el cuarto serán igual al del segundo y el tercero". Por tanto, dos magnitudes inconmensurables con aquellas que no tienen una medida común: allí aparece la idea de número racional e irracional.

3.2.2. Cultura China

En la cultura china, se desarrolló también una teoría de razones y proporciones, consignada en el libro *Los nueve capítulos sobre el arte matemático,* compilado hacia el siglo I a.C, un poco después de Los Elementos. Este libro está basado en problemas, de los cuales se busca hallar métodos generales de resolución. La cultura china, a diferencia de la cultura griega pre-euclidiana, si se interesó en registrar sus razonamientos para la resolución de problemas. Haciendo que el libro Los nueve elementos, además de tener un gran sentido histórico, resulte valioso epistemológicamente.

Los comentarios que el matemático chino Liu Hui, hacia el siglo III d. C, le hizo a los Nueve Elementos, fueron de gran importancia histórica-epistemológica. Allí Liu Hui relaciona problemas, especifica métodos de resolución de problemas, y presenta un acercamiento formal a las razones y proporciones. Se dice que, estos comentarios fueron los únicos intentos de demostración en la antigüedad en el seno de una cultura distinta a la griega. El tercer capítulo de este libro aborda la distribución proporcional desde un enfoque práctico: repartición de bienes, de mercancías, de tierras, etc. No obstante, de acuerdo a Oller-Marcén y Gairín (2013) los chinos justificaron teóricamente los métodos aplicados.

Liu Hui, define a un conjunto de números correlacionados como una *lü*, entendida como un conjunto de valores de magnitudes directamente proporcionales. Así la razón entre dos magnitudes toma su *lü*, cuando una de las magnitudes toma el valor de 1 (lo que se conoce didácticamente como estrategia unitaria). También se definen propiedades sobre la *lü*: pueden convertirse unas a otras, si hay fracciones en una *lü* esta puede convertirse en entero multiplicando por un número adecuado, y las *lü* se pueden simplificar a través de un común denominador. El enfoque chino sobre la proporcionalidad resulta valioso porque logra relacionar razones externas entre magnitudes de distinta naturaleza, lo que permite ampliar su aplicabilidad.

3.2.3. La Aritmetización De Las Razones

Para finalizar la evolución histórica de las razones y proporciones, se presenta el proceso de aritmetización, en el cual, se le da un papel fundamental al Álgebra y se empiezan a representar las razones a través de números. La aritmetización de las razones se da en el contexto de la Edad Media, entre los siglos V d.C y XV d. C. En esta época afloraron los comentarios y traducciones a los libros clásicos de Matemáticas, en especial a Los Elementos de Euclides. Al respecto, Oller-Marcén y Gairín (2013) sostienen que los mayores avances epistemológicos suceden a raíz del comentario del matemático persa Omar Jayam a *Los Elementos* de Euclides; y la traducción del matemático italiano Campanus de Novara, a este mismo libro. Sin embargo, mientras Jayam enfatiza en las razones de magnitudes, de Novara se centra en las razones numéricas.

Jayam explica el proceso de composición de razones, mediante la cuarta proporcional y usando la multiplicación. Pero es Campanus de Novara quien busca aritmetizar el concepto de razón, asignándole un número. También, define la semejanza de razones, y representa la razón con un número racional, lo que le permite definir la razón como sigue: “la razón entre dos números $a\ y\ b\ es\ el\ cociente\ \frac{a}{b}$” Sin embargo, reconoce que la razón no es un número, sino que es nombrada mediante un número.

3.3. Aspectos Conceptuales Y Epistemológicos Sobre El Razonamiento Proporcional

El *razonamiento proporcional* es uno de los objetos matemáticos más estudiados por la Educación matemática en los últimos 60 años (Valverde y Castro, 2009; Obando, et al, 2012; Dubeibi, 2014) y constituye una de las ideas fundamentales de las Matemáticas (Mochón, 2012). Lo anterior obedece a su carácter longitudinal (se va profundizando grado a grado) y transversal (múltiples aplicaciones en otras áreas científicas, técnicas y artísticas). Antes de definir lo qué se entiende por razonamiento proporcional es conveniente abordar el concepto de razón y proporción.

Una razón puede ser entendida como la comparación entre dos magnitudes, entendida esta última, como una medida (número real) que se le asigna a un objeto. Sin embargo, hay que distinguir que existen dos maneras de comparar magnitudes o números: mediante la sustracción, o mediante el cociente, dando lugar así a la razón aritmética, y la razón geométrica respectivamente. Aunque la razón aritmética es importante en las primeras etapas del razonamiento proporcional, es la razón geométrica el corazón de la proporcionalidad.

Por tanto, en adelante, cuando se hace referencia a razón, se estará hablando de la razón geométrica, entendida esta como el cociente entre dos números reales a y b , es decir $\frac{a}{b}$,con $b \neq 0$. Estos números forman un par ordenado (antecedente y consecuente). Por otra parte, también hay una distinción entre razones internas y razones externas. Las primeras se refieren a comparaciones entre unidades de igual naturaleza (peso-peso, longitud-longitud, etc.), y las segundas hacen referencia a comparaciones entre unidades de diferente naturaleza (tiempo-velocidad, peso-longitud, etc.).

Aunque históricamente este proceso no fue lineal, epistemológicamente de la razón se construye el concepto de proporción. De acuerdo con Guacaneme (2016) una proporción es la igualdad de dos razones: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, donde a y d se llaman extremos; y b y c se llaman medios. Ahora bien una proporción es directa si las dos razones que la componen guardan la misma razón k (constante de proporcionalidad), es decir, $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} = k$. A esto se le conoce curricularmente como proporcionalidad directa, y es el centro del razonamiento proporcional, el cual se definirá a continuación.

Son varias las definiciones que la literatura documenta sobre el razonamiento proporcional. Karplus et al., 1983 en Valverde y Castro, 2009; refiere el razonamiento proporcional como el razonamiento en un sistema de dos variables en donde existe una relación lineal. Por su parte, Fernández (2009) citando a Behr et al. (1988) sostiene que el razonamiento proporcional es un tipo de razonamiento matemático, que envuelve las nociones de comparación y variación, y que tiene como característica la invariancia de un sistema matemático simple. Mochón (2012) citando a Lamon(2007) entiende el razonamiento proporcional como la capacidad de justificar afirmaciones hechas sobre la relación entre cuatro cantidades (a, b, c y d) a través de la covarianza entre las cantidad, y la invariancia de la razón.

En un sentido más general, y que resume las anteriores definiciones, Norton (2005) y Ben-Chaim, et al (2007) citados en Valverde y Castro (2009) entienden el razonamiento proporcional como la capacidad de pensamiento para comprender la razón, la proporción, las tasas de cambios, y demás habilidades dentro del pensamiento multiplicativo como la comprensión de porcentajes, la pendiente, la función lineal, etc. Por tanto, el razonamiento proporcional debe ser entendido como un proceso que se va desarrollando desde edades tempranas y apoya procesos ulteriores relacionados con la variación, el cambio y la tendencia: nociones fundamentales del cálculo. entender el razonamiento proporcional como un proceso longitudinal y trasversal, de este trabajo.

Ahora bien, Mochón (2012) señala dos ideas esenciales que encierran el sentido del razonamiento proporcional: la comparación y la variación, las cuales se explican a continuación:

3.3.1. Comparación

La comparación es uno de los focos principales dentro del razonamiento proporcional. En particular se hace uso de las comparaciones multiplicativas por medio de la razón. Mochón (2012) de acuerdo con Freudenthal (1983) afirma que el razonamiento proporcional se fundamental en el concepto de razón, y de allí se derivan ideas importantes como la de cantidades relativas, la equivalencia de razones, la constancia de la razón, entre otras.

3.3.2. Variación

Para Lest, el al. (1988) citado en Mochón (2012) la idea de variación entre dos cantidades es fundamental para entender el comportamiento de las relaciones directamente proporcionales. En el caso particular, haciendo énfasis en la variación dentro de una relación de proporcionalidad directa. Esta idea permite *a la postre* desarrollar habilidades relacionadas con el Cálculo.

3.3.3. Etapas del desarrollo del razonamiento proporcional

De las anteriores consideraciones, autores como Inhelder, Piaget, y Noelthing, han planteado unas etapas del desarrollo del razonamiento proporcional adaptadas por Karplus, et al.

(1983) y recogidas en el trabajo de Mochón (2012) y Valverde y Castro (2009). Estas etapas son fundamentales para orientar el diseño didáctico; y se esbozan a continuación.

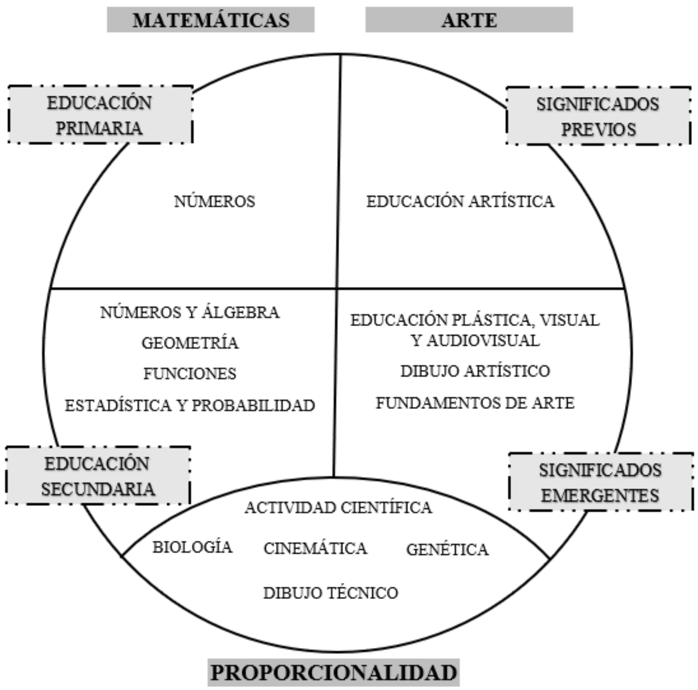
I. Incompleta-ilógica: se ignoran parte de los datos, se da una respuesta ilógica, se hacen operaciones no adecuadas, o no se justifican las afirmaciones.
II. Cualitativa: solo se tienen en cuenta consideraciones cualitativas para describir los datos, pero sí se justifican las afirmaciones.
III. Aditiva: se usa una estrategia incorrecta a través de una comparación aditiva y no una relación multiplicativa.
IV. Pre proporcional: se usan factores multiplicativos para relacionar cantidades y se sustentan las afirmaciones mediante propiedades matemáticas.
V. Proporcional: se hace uso directo de las razones, la equivalencia, y las relaciones proporcionales para justificar las respuestas. Se comprende el sentido de la proporcionalidad, y sus aplicaciones.

3.4. Orientaciones Curriculares Sobre El Razonamiento Proporcional

Tal y como afirma Wilhelmi (2017) el razonamiento proporcional es un proceso longitudinal y transversal en el currículo. Así mismo, Obando et al. (2012) reconoce el razonamiento proporcional como un proceso curricularmente importante, propuesto y aplicado en la mayoría de los países. Además, cuenta con un campo amplio de aplicaciones dentro y fuera de la Ciencia. Godino y Batanero (2002) citado en Wilhelmi (2017) describe las formas en las que interviene el razonamiento proporcional en distintas áreas del conocimiento (Figura 2). Este enfoque transversal y, por ende, las aplicaciones, serán tenidas en cuenta para el diseño didáctico.

Figura 5

Enfoque transversal de la Proporcionalidad



Nota: La figura representa la presencia de la proporcionalidad en diferentes áreas del conocimiento. Imagen adaptada de Wilhelmi (2017).

Ahora bien, de acuerdo a las orientaciones nacionales expuestas por el MEN, en particular, los Lineamientos Curriculares de Matemáticas (MEN, 1998), en cuanto a los tipos de pensamiento, el diseño que se propone, buscó desarrollar principalmente el pensamiento variacional y el pensamiento numérico. En cuanto a los procesos generales, el diseño aborda en mayor medida la resolución de problemas, y otros como la modelación, el razonamiento y la comunicación. Los problemas del diseño se enmarcan en el contexto histórico de las Matemáticas.

En cuanto a los Estándares Curriculares para Matemáticas (MEN, 2003) para el nivel de educación básica primaria se establecen competencias relacionadas con el razonamiento proporcional y su uso en la resolución de problemas. Estas competencias son retomadas por los Derechos básicos de aprendizaje (DBA) (MEN, 2016). A modo de síntesis, en la tabla 1, se ilustra cómo se presenta curricularmente este objeto de estudio en los Estándares curriculares y los DBA.

Allí, se corrobora la necesidad de iniciar el desarrollo del razonamiento proporcional desde edad temprana, en la educación primaria, pues, como lo afirma Wilhelmi (2017) esto permite "la evolución del significado personal aprehendido por los estudiantes" (p.2)

Tabla 1

Orientaciones curriculares para el desarrollo del razonamiento proporcional

Grupo de grados	Tipo de pensamiento	Estándar	DBA
1-3	Pensamiento numérico	Resuelvo y formulo problemas en situaciones de variación proporcional.	Establece comparaciones entre cantidades y expresiones que involucran operaciones y relaciones aditivas y multiplicativas y sus representaciones numéricas.
	Pensamiento variacional	Describo cualitativamente situaciones de cambio y variación utilizando el lenguaje natural.	Describe y representa los aspectos que cambian y permanecen constantes en secuencias y en otras situaciones de variación.
4-5	Pensamiento numérico	- Interpreto las fracciones en distintos contextos: razones y proporciones. - Identifico y uso medidas relativas en diferentes contextos. - Resuelvo y formulo problemas en situaciones de proporcionalidad directa.	Interpreta las fracciones como razón, relación parte todo, cociente y operadores en diferentes contextos.
	Pensamiento variacional	Analizo y explico relaciones de dependencia entre cantidades que varían en el tiempo con cierta regularidad.	Identifica, documenta e interpreta variaciones de dependencia entre cantidades en diferentes fenómenos (de las matemáticas y otras ciencias) y los representa por medio de gráfica.

Nota. La tabla representa una síntesis de los estándares y de los derechos básicos de aprendizaje que denotan el uso de la proporcionalidad

3.5. Implicaciones Didácticas De La Historia Y La Epistemología Del Razonamiento Proporcional

El análisis histórico-epistemológico sobre la proporcionalidad suscita algunas reflexiones para planificar su enseñanza. Con anterioridad, se justificó la importancia de incluir aspectos históricos y epistemológicos en la clase de Matemáticas, no obstante, son pocas las experiencias prácticas encontradas. Ahora bien, en cuanto a la Historia y Epistemología de la razón y la proporción, hay que reconocer el fin práctico con el que surgieron estos conceptos: se inició con problemas de repartos proporcionales, de manera intuitiva, sin un fundamento teórico formal. Se parte de la idea de que el proceso en como en la humanidad abstrajo estos conceptos es una buena guía para integrarlos en el aula. Por tanto, el diseño que se propone está basado especialmente en el proceso de resolución de problemas, claramente apoyado en otros procesos matemáticos, inherentes a este.

En cuanto a la comprensión de la razón, siguiendo la replicabilidad histórica, en la enseñanza debe darse a través de dos momentos: primero como razones entre magnitudes de la misma naturaleza, es decir, razones internas; y posteriormente, entre razones que involucran diferentes tipos de magnitudes, como en el modelo chino. Así mismo, es importante integrar el concepto de *lü* como forma de representación de la razón, análoga a la estrategia unitaria. De este modo, es posible reproducir en el aula la aritmetización de las razones, con una idea preliminar e intuitiva de la regla de tres, pero con unos presaberes que coadyuvan a su fundamentación. Sin duda, evocar la evolución histórica para el proceso de enseñanza del razonamiento proporcional, en el marco de la inclusión educativa, puede significar una alternativa interesante.

En este sentido, es importante rescatar los aportes de Guacaneme (2016) para fundamentar la estructura metodológica del diseño didáctico. Este autor expone tres formas en la que interviene la Historia de las Matemáticas en su enseñanza:

3.5.1. La Historia de las Matemáticas como uso

Se refiere al uso de referencias históricas como hitos, anécdotas, obras, biografías, etc.; permitiendo proponer problemas históricos en clase de Matemáticas y enmarcar los subtemas desde el componente histórico. La Historia de las Matemáticas puede usarse como parte parcial o total de la clase. Dado el fuerte componente histórico del razonamiento proporcional, es posible relacionarlo con diferentes matemáticos, culturas milenarias, y sucesos importantes para la Historia de las Matemáticas.

3.5.2. La Historia de las Matemáticas como Integración

Para Guacaneme (2016) integración hace referencia a la efectividad que puede producir el uso de la Historia de las Matemáticas en la enseñanza misma de las Matemáticas. En este sentido, se propone incluir la Historia de las Matemáticas no como un agregado de las Matemáticas, sino como parte de fundamental de esta. De esta forma, la Historia además de enriquecer de las Matemáticas, coadyuva a superar los problemas de comprensión y a orientar la enseñanza del tema.

3.5.3. La Historia de las Matemáticas como Permeador

Guacaneme, (2016) usa el término permeador, como transformador. Permear la clase de las Matemáticas con su historia, permite entre otras cosas, orientar propuestas curriculares innovadores que rescaten la dimensión histórica del conocimiento matemático. Por ejemplo, para el caso particular del diseño que se propone, es la Historia la que orienta su desarrollo, sus puntos de inflexión, y sus contenidos matemáticos y transversales.

Por otra parte, de acuerdo a las etapas del desarrollo del razonamiento proporcional (explicadas en la sección 4.1.3) Mochón (2012) sugiere unos acercamientos para su desarrollo, las cuales se adaptan, como sigue:

I. **Uso de tablas y razones intuitivas:** con este acercamiento se espera que el estudiante organice en tablas algunos datos en situaciones de proporcionalidad directa, para determinar algunas propiedades intuitivas de la misma. También se espera que se inicie un razonamiento pre proporcional a través de relaciones sencillas como el doble, el triple, la mitad, etc. Debe comprobar que, al duplicar, triplicar, etc., una magnitud la otra también se duplica, se triplica, etc.

II. **Estrategia unitaria:** el objetivo de este acercamiento es que el estudiante reconozca que al conocer una de las magnitudes cuando la otra tiene valor de 1, el problema se reduce a multiplicar ese valor hallado por las otras cantidades. Esta estrategia es conceptualmente equivalente a la regla de tres, pero se invierten los pasos. En al ámbito histórico, se relaciona con el concepto de *lu* de la cultura china.

III. **Razón de cambio-constante de proporcionalidad:** con este acercamiento se espera que el estudiante comprenda la relación entre los números de las dos columnas de la tabla. De allí surge la razón o constante proporcionalidad, valor fundamental en una relación directamente proporcional. En el anterior acercamiento se habla por ejemplo de que 3 niskas corresponde a 1 pala de azafrán; mientras en este se habla de 3 niskas/1 pala de azafrán; conectando así las dos columnas mediante un factor.

IV. **Constancia de la razón y algoritmia:** con este acercamiento se pretende que el estudiante comprenda que en una relación directamente proporcional se pueden igualar razones, dando como resultado una proporción. Aquí, se transita de establecer dos razones por separado a comprender la proporción en la cual se relacionan directamente los cuatro valores involucrados en la situación. Se puede iniciar el algoritmo de la regla de tres, pero con un soporte conceptual ya construido.

En la tabla 2 se exponen las relaciones entre estos acercamientos, y los momentos históricos en el desarrollo del razonamiento.

Tabla 2

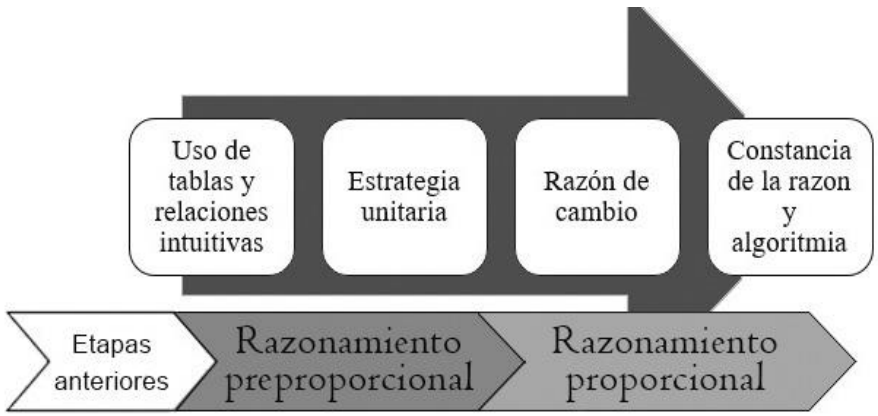
Relación entre los acercamientos epistemológicos y los momentos históricos

Acercamiento τ	**Momento histórico**	**Descripción**
Uso de tablas y razones intuitivas.	Construcción del concepto de razón y proporción. Repartos proporcionales	Se hace una construcción de los conceptos de razón y proporción. Se favorece la comprensión de situaciones que envuelven relaciones proporcionales.
Estrategia unitaria	Razones internas: cultura griega. Concepto de "lü".	Se muestra la estrategia unitaria, la cual consiste en conocer una de las dos cantidades involucradas en el problema cuando la otra tiene el valor de "1", esta técnica es análoga, históricamente similar al concepto de "lü".
Razón de cambio	Razones externas: cultura china	Se enfatiza en las razones entre magnitudes de distinta naturaleza (tiempo-distancia, longitud-área, etc.)
Constancia de la razón y algoritmia	Aritmetización de las razones.	Se busca que el estudiante comprenda que las relaciones que tienen una misma razón se pueden relacionar mediante una igualdad. Se relacionan directamente los cuatros valores involucradas, para constituir la proporción.

En la figura 6, se muestra un proceso que sustenta y delimita el diseño, de acuerdo a los acercamientos y a las etapas del desarrollo del razonamiento proporcional.

Figura 6

Desarrollo del diseño de acuerdo a las etapas y los acercamientos del razonamiento proporcional



3.6. Estructura Metodológica Del Diseño Didáctico

Para la estructura metodológica del diseño, se tiene en cuenta el proyecto 707983 del MEN denominado *Diseños didácticos para la inclusión en Matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores*, Parada (2021). Allí se busca desarrollar una serie de diseños didácticos divididos en cuatros niveles de profundidad, como se esboza a continuación:

- Profundidad 1: diseño dirigido a estudiantes con mayores dificultades, a nivel físico, intelectual o psicosocial.
- Profundidad 2: diseño dirigido a estudiantes con dificultades moderadas físicas, intelectuales o psicosociales.
- Profundidad 3: Diseño dirigido a estudiantes con dificultades leves.
- Profundidad 4: Diseño dirigido a estudiantes que presentan capacidades excepcionales en matemáticas.

En particular, en este trabajo se desarrolló el diseño didáctico en un nivel de profundidad 2 y 3. Se omitió el diseño en un nivel de profundidad 1 dado que se espera de acuerdo a Mochón (2012) que el estudiante haya desarrollado unas etapas cognitivas previas que permitan la comprensión de conceptos dentro del razonamiento proporcional, sin embargo por las características de los estudiantes a los que va dirigido el nivel de profundidad 1 estas etapas están en construcción, y los objetos matemático de estudio involucrados se escapan de la órbita de lo que se conoce como razonamiento proporcional.

Del mismo modo, dado que en el currículo colombiano la proporcionalidad como tema se da en el grado séptimo (MEN, 2003), se omitió el diseño en nivel de profundidad 4, pues este iría dirigido a estudiantes en un nivel superior en cuanto a grado, y no está dentro de la población a la que se dirige la presente investigación.

Por otra parte, Parada (2021) propone una estructura para cada diseño de clase, que cuenta con cuatro momentos, así:

- Momento 1: Corresponde al inicio de la clase, desarrollan las actividades para introducir y contextualizar el objeto de estudio.
- Momento 2: Es el espacio donde se posibilita la matematización del objeto de estudio a través de la mediación del docente.
- Momento 3: Es el espacio en el cual los estudiantes ponen en práctica los saberes teóricos y afianzan las estrategias matemáticas.
- Momento 4: Es el espacio para evaluar el desempeño de los estudiantes y proponer formas para complementar lo aprendido.

La adaptación de estos momentos al diseño, se esbozan minuciosamente en la sección 4.3

4. Metodología De La Investigación

De acuerdo al objetivo, esta investigación tuvo un enfoque de diseño curricular, propuesto por Díaz-Barriga, et al (1990), entendido el diseño como una estructuración sistemática del currículo, en este caso, flexible y adaptable, sobre el razonamiento proporcional. En este sentido, la metodología de investigación que aquí se reporta se compone de cuatro fases: i) Análisis previo sobre orientaciones nacionales y el objeto matemático de estudio; ii) Construcción de la malla curricular del diseño, iii) Planteamiento del diseño didáctico; y, iv) Valoración curricular del diseño didáctico.

4.1. Fase I: Análisis Previo De Literatura

Esta fase consistió en la revisión de literatura, primero sobre el objeto matemático de estudio, el razonamiento proporcional, que responde al *qué* de la investigación, luego del uso de la Historia y la Epistemología como recurso didáctico, lo que responde al *cómo*, y finalmente sobre la inclusión educativa mediante el DUA, lo cual responde al *para qué*. Lo anterior se ilustra en la figura 7.

Figura 7

Revisión previa de la Literatura

El desarrollo de esta fase se hizo de manera previa y algunas de las reflexiones suscitadas se esbozaron en el capítulo 2 y 3 del presente documento, y permiten un análisis en el capítulo 5.

4.2. Fase II: Construcción De La Malla Curricular Del Diseño

En esta fase se construyó la malla curricular que sustenta el diseño, atendiendo a la educación inclusiva. Para ello se tuvo en cuenta en los dos niveles de profundidad trabajados, la pregunta problematizadora, los propósitos por pensamiento (numérico y variacional) y los descriptores de los procesos matemáticos. Para los propósitos se hizo uso de la Taxonomía de Bloom (López, 2015) y se enmarcaron en el contexto histórico de las Matemáticas. La malla curricular también fue valorada mediante la rúbrica (que será explicada en el inciso 4.4), y por tanto se realizaron los correspondientes ajustes. En efecto, se adecuaron algunos descriptores de a los procesos matemáticos y a las habilidades cognitivas a desarrollar por los estudiantes. Por tanto, la malla final ajustada se puede visualizar en el apéndice A.

4.3. Fase III: Planteamiento Del Diseño Didáctico

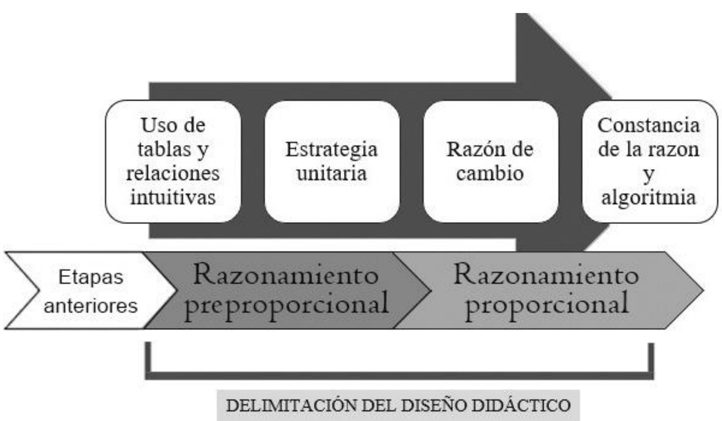
De acuerdo a la estructura curricular se procedió a desarrollar el diseño didáctico, en dos niveles de profundidad (2 y 3). Este diseño parte del marco teórico propuesto, del uso de la Historia como recurso didáctico, y en consonancia con los principios rectores del DUA y sus respectivas pautas. Cada diseño consta de dos versiones, la versión para el estudiante, y la versión docente, en la cual se hacen las orientaciones teóricas, metodologías y didácticas para la implementación del diseño.

4.3.1. Nivel de profundidad 2.

Para el nivel de profundidad 2, de acuerdo a los acercamientos descritos en la sección 4.5, el diseño abarcó los tres primeros acercamientos, y parte del cuarto acercamiento. Si bien se introdujo el concepto de proporción, no se enfatizó en que el estudiante explique o justifique las propiedades de las relaciones directamente proporcionales. La delimitación de este diseño, se observa en la figura 8.

Figura 8

Desarrollo del diseño de acuerdo a las etapas y los acercamientos del razonamiento proporcional. Nivel de profundidad 2



Del mismo modo, en la tabla 3 se puede observar la ruta vertical del diseño de acuerdo a los 4 momentos de actividad matemática.

Tabla 3

Ruta vertical. Nivel de profundidad 2

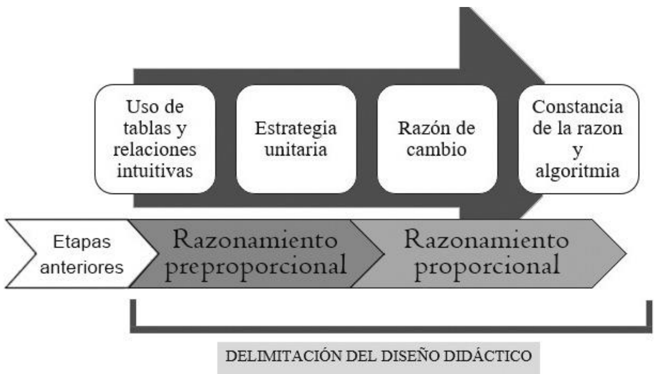
MOMENTOS	DESCRIPCIÓN
Momento 1	En este primer momento se desarrolla la actividad denominada "juguemos con la tierra y la luna", en la cual se usan recursos didácticos concretos. Allí se espera que el estudiante construya una primera concepción del concepto de comparación mediante la razón, sin profundizar en ella.
Momento 2	Aquí se inicia la situación que guiará el desarrollo de los siguientes momentos. Un profesor que hace un proyecto de Historia de las Matemáticas. En esta actividad, se resuelve un problema extraído de un texto antiguo, y se busca que el estudiante empiece un razonamiento pre proporcional mediante tablas, razones intuitivas, y empiece a usar técnicas como la estrategia unitaria o la razón de cambio.
Momento 3	Este momento, se basa en la medición de la Gran Pirámide de Egipto por Tales de Mileto. Se parte de una historieta que relata la situación, junto con una animación en Geogebra y luego se plantean esquemas para que el estudiante refuerce el concepto de razón y se acerque al concepto de proporción.
Momento 4	En este momento, se plantea la situación de la medición de la circunferencia de la tierra por Eratóstenes. Al respecto, se presenta un vídeo y una animación en Geogebra. El estudiante debe reconocer que se trata de una relación directamente proporcional, y mediante la proporción hallar la longitud de la tierra.

4.3.2. Nivel de profundidad 3

Para este, de acuerdo a los acercamientos descritos en la sección 4.5, el diseño abarcó los cuatro acercamientos. Además de que se introdujo el concepto de razón y se desarrollaron procesos algorítmicos, se buscó que el estudiante comprendiera y de ser posible justificara natural o matemáticamente algunas propiedades identificadas en las relaciones directamente proporcionales. La delimitación de este diseño se puede observar en la figura 9.

Figura 9

Desarrollo del diseño de acuerdo a las etapas y los acercamientos del razonamiento proporcional. Nivel de profundidad 3



Así mismo, en la tabla 4, se sintetizan los cuatro momentos de actividad matemática en este nivel de profundidad.

Tabla 4

Ruta vertical. Nivel de profundidad 3

MOMENTOS	DESCRIPCIÓN
Momento 1	En este primer momento se desarrolla la actividad denominada “juguemos con los planetas”, en la cual se usan recursos didácticos concretos. Allí se espera que el estudiante construya una primera concepción del concepto de comparación mediante la razón, sin profundizar en ella.
Momento 2	Aquí se inicia la situación que guiará el desarrollo de los siguientes momentos. Un profesor que hace un proyecto de Historia de las Matemáticas. En esta actividad, se resuelve un problema extraído de un texto antiguo, y se busca que el estudiante empiece un razonamiento pre proporcional mediante tablas, razones intuitivas, y empiece a usar técnicas como la estrategia unitaria o la razón de cambio.
Momento 3	Este momento, se basa en la medición de la Gran Pirámide de Egipto por Tales de Mileto. Se parte de una historieta que relata la situación, junto con una animación en Geogebra y luego se plantean esquemas

	para que el estudiante refuerce el concepto de razón y se acerque al concepto de proporción.
Momento 4	En este momento, se plantea la situación de la medición de la circunferencia de la tierra por Eratóstenes. Al respecto, se presenta un vídeo y una animación en Geogebra. El estudiante debe comprender las propiedades de una relación directamente proporcional y ser capaz de usarlas para resolver problemas. Se consolida aquí la algoritmia dentro del razonamiento proporcional.

4.4. Fase IV: Valoración Curricular Del Diseño Didáctico

De acuerdo con el objetivo de investigación, se valoró el diseño didáctico de acuerdo a una rúbrica de evaluación establecida en el marco del proyecto 707983 antes citado. En esta valoración no interviene de ninguna manera el autor del diseño. Se tiene designada a una experta en Educación Matemática para tal fin. En mayor medida se valora el ajuste del diseño a los principios rectores y a las pautas del DUA, mencionadas en la sección 4.1, la coherencia vertical de acuerdo a los momentos de actividad matemática, y la coherencia horizontal de acuerdo a los niveles de profundidad ya citados. Esta rúbrica se presenta a continuación:

PROYECTO MINISTERIO
"Diseños didácticos para la inclusión en matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores"

VALORACIÓN DISEÑOS DIDÁCTICO 4º-5º

1. Valoración de las tablas con propósitos y desempeños

I1. Coherencia horizontal (Por diseño)

Según los propósitos (pensamientos)

¿Cómo se han resuelto problemas en la Historia usando razones y proporciones? *Pensamiento numérico y variacional*	Valoración					Observaciones
	1	2	3	4	5	
Los propósitos están ajustados al nivel de conceptualización, según cada nivel de profundidad.					X	
Los propósitos están vinculados estrechamente con la pregunta problematizadora y con el contexto					X	
El propósito se relaciona con estándares específicos para el grupo de grados					X	
El propósito, en cada nivel, comprende el mismo objeto matemático				X		

Según los descriptores (procesos)
¿Los descriptores están *ajustados* a las habilidades de proceso, en cada nivel de profundidad?

¿Cómo se han resuelto problemas en la Historia usando razones y proporciones? *Pensamiento numérico y variacional*		Valoración					Observaciones
		1	2	3	4	5	
¿Los descriptores están *ajustados* a las habilidades de proceso, en cada nivel de profundidad?	Comunicación				X		En todos los procesos se pide revisar y corregir los verbos para que ilustren mejor las habilidades de proceso propuestas por Parada y Fiallo (2018). Se sugiere mover los descriptores de Razonamiento al de procedimientos.
	Modelación			X			
	Razonamiento			X			
	Elaboración, comparación y ejecución de procedimientos			X			
Es progresiva la evolución del descriptor, en todos los niveles, según las habilidades						X	

I1. Coherencia vertical

A nivel de cada pregunta

Los descriptores, para cada proceso se ajustan o articulan verticalmente	P1					P2					P3					P4					P5				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Comunicación																									
Razonamiento																									
Elaboración, comparación y ejecución de procedimientos																									
Modelación																									

Comentario general

Se observa que los descriptores se articulan de uno otro, entre los procesos, aunque se requiere hacer los cambios sugeridos en la valoración de Coherencia horizontal. Se resalta que los descriptores también se ajustan al nivel de profundidad abordado.

A nivel global
¿Se observa progreso en los objetos matemáticos de estudio a medida que se avanza en cada pregunta problematizadora?

Indicadores	Valoración					Observaciones
	1	2	3	4	5	
Conexión entre las preguntas problematizadoras ajustadas al desarrollo de los pensamientos						
Se abordan todos los pensamientos con los contextos seleccionados						
Se cubre un 70% de los estándares del grupo de grados						

En este caso no se analiza esta parte, en tanto que el diseño es independiente de los otros elaborados en el grupo de grados de 4º-5º

3. Valoración de la hoja de trabajo del estudiante

III1. **Coherencia horizontal (Por diseño)**
¿Se observa un desarrollo progresivo en las actividades de cada momento, de cada nivel de profundidad?

Indicador	P1					P2					P3					P4					P5				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Se ajusta cada actividad a los momentos de cada diseño, según el nivel de profundidad.				X																					

Comentario

- Se interpreta que, en el primer momento, se quiere hacer mención a los presaberes como es el de presentar el concepto de razón a través de la implementación de un hecho histórico, como lo es el cálculo de pi. En este caso, lo planteado está acorde con lo estipulado para este momento.

- Luego, en el segundo momento, se adentran a calcular la razón a través del cociente y mostrar cómo con este valor se pueden calcular otros. Hasta ahí va bien, pero, en este momento es el de entregar la información con respecto al objeto matemático que se estudia en el diseño y esto no se logra ver, pues no se presenta en este momento lo que es una proporción. Considero que se podría aprovechar, la última actividad de este momento, para mencionar que estas razones definen cantidades directamente proporcionales en tanto que tienen el mismo cociente.

- En el tercer momento, se busca practicar lo aprendido, y ahí queda muy bien esta idea de calcular un valor faltante, habiendo determinado que las magnitudes presentes en la situación son directamente proporcionales.

- Finalmente, el momento cuatro, también cumple en cuanto que busca evaluar lo trabajado durante el diseño.

- De forma positiva, se observa que los momentos se ajustan a cada uno de los niveles de profundidad.

III2.Coherencia vertical
¿Se observa conexión en el desarrollo de los procesos en cada diseño, en cada tarea, según los descriptores propuestos?

Indicador	P1					P2					P3					P4					P5				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Conexión entre los descriptores ajustados al desarrollo de los procesos en cada diseño, en cada tarea.				X																					

Comentarios generales
Sí se observa esa conexión, pero al sugerir cambios en los descriptores conviene revisar con detenimiento que se correspondan con las actividades propuestas.

En general

Indicador	P1					P2					P3					P4					P4				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Las actividades propuestas responden a lo indicado en la tabla de propósitos y descriptores					X																				
Se observa el desarrollo del objeto matemático desde lo didáctico*					X																				
Las instrucciones, dentro del diseño, están acordes con el nivel de profundidad y el grupo de grados**					X																				

*Por ejemplo:
- Es visible alguna intención didáctica en las diferentes actividades formuladas
- A medida que aumenta el nivel hay diferentes representaciones y articulación entre ellas
- La conceptualización del objeto matemático se relaciona con el nivel de profundidad y se hace visible

**Por ejemplo:
- ¿las preguntas e instrucciones son formuladas según el grupo de grados?
- Se dan instrucciones cortas o precisas según el nivel de profundidad

4. Valoración del DUA

Principio I: Proporcionar múltiples formas de *representación*

Indicador	P1					P2					P3					P4				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona diferentes opciones para percepción.					X															
Pauta 2. Proporciona múltiples opciones para el lenguaje, las expresiones matemáticas y simbólicas					X															
Pauta 3. Proporciona opciones para la comprensión					X															

Práctica II. Proporcionar múltiples formas de *expresión*

Indicador	P1					P2					P3					P4				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona opciones para la interacción física.					X															
Pauta 2. Proporciona opciones para la expresión y la comunicación.				X																
Pauta 3. Proporciona opciones para las funciones ejecutivas.					X															

No es explícito si hay momentos de trabajo en grupo o de socialización. Esto con la idea de que el estudiante pueda dar a conocer sus resultados o cuestionamientos con respecto a las actividades con la idea de que comunique y exprese.

Principio III. Proporcionar múltiples formas de implicación

Indicador	P1					P2					P3					P4				
	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona opciones para captar el interés					X															
Pauta 2. Proporciona opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia.					X															
Pauta 3. Proporciona opciones para la autorregulación.					X															

Los resultados de esta rúbrica de valoración, sustentaron el ajuste a los diseños, explicitados en el inciso 5.3

5. Discusión De Resultados

Para orientar el cumplimiento del objetivo del presente trabajo, en este capítulo se presentan los resultados del análisis *a priori* suscitado por la construcción del diseño didáctico y su posterior valoración mediante la rúbrica, los cuales corresponden al proceso de planeación y valoración de acuerdo con el objetivo general. Con estas reflexiones se responde a la pregunta de investigación la cual cuestiona sobre *¿Cómo la mirada histórica-epistemológica del razonamiento proporcional posibilita su estudio y favorece la inclusión en clase de Matemáticas?*

Los resultados se presentan en las siguientes categorías.

i. El proceso de diseño: de los acercamientos epistemológicos al diseño de actividades
ii. Principios rectores del DUA en el diseño e idoneidad didáctica de la Historia para promoverlos
iii. Ajustes a los diseños a partir de la rúbrica de valoración

5.1. El proceso de diseño: de los acercamientos epistemológicos al diseño de actividades

Como referente teórico se usaron las etapas del desarrollo del razonamiento proporcional de las cuales se plantean cuatros acercamiento epistemológicos (Mochón, 2012). Lo anterior, delimitó la estructura y los alcances del diseño didáctico. Esto se puede ver en la figura 4, y en la figura 6 y figura 7 se puntualiza en la delimitación para el nivel de profundidad 2 y 3 respectivamente.

En este apartado, se suscitará el análisis sobre la forma en qué se integró el marco teórico propuesto al diseño didáctico, en los dos niveles de profundidad propuestos. Para efectos de organización, este análisis se categoriza de acuerdo a los cuatro momentos de actividad matemática, explicados en el inciso 4.6. Simultáneamente se realiza el análisis en el nivel de profundidad 2 y 3 para reconocer la transición epistemológica que se dio de un nivel a otro.

5.1.1. Primer momento

En el **nivel de profundidad 2**, este diseño empieza con una actividad práctica denominada "juguemos con la Tierra y la Luna". En esta actividad se plantea un pequeño experimento de clase, en donde a través del aprendizaje colaborativo los estudiantes deberán medir dos círculos de diferente diámetro elaborados en material concreto y con distintos colores o texturas, dependiendo de las adaptaciones que el docente considere conveniente.

Se parte del hecho de que los estudiantes han construido las etapas anteriores al razonamiento pre proporcional, como lo sugiere Mochón (2012), ver figura 9. Por tanto, se debe empezar a construir, de manera natural, el concepto de razón como comparación entre dos magnitudes. En este sentido lo que se espera es que el estudiante tenga un primer acercamiento al concepto de razón, mediante la comparación de la longitud de la circunferencia con su diámetro. También se rescata el hecho, de que trabajar con material concreto, de acuerdo con Godino (1998) mencionado en Torres (2015), contribuye a la comprensión de los objetos matemáticos en la medida en que permite la exploración de la actividad matemática, y posibilita más canales sensoriales para acceder a la información.

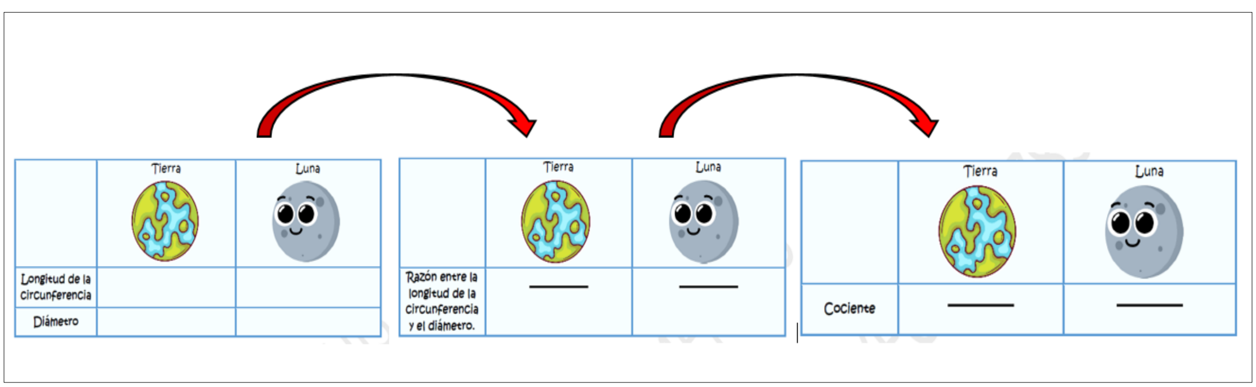
En el punto 2, literal a) y b) se espera que el estudiante relacione las medidas de la Tierra y la Luna respectivamente. No se busca aún que hagan el cociente (es decir, que expresen la razón en decimal), sino que comprendan inicialmente que la razón sirve para comparar o relacionar magnitudes (por eso solo se habla de relación y no de razón). Por su parte en el literal c) se introduce la razón entre magnitudes y se espera que el estudiante pueda hallar la razón de la longitud de la circunferencia con el diámetro de la Tierra y la Luna.

Seguidamente, en el literal d), se busca que el estudiante reconozca la equivalencia entre la razón, expresada como fracción, y el cociente o número decimal, lo que también posibilita las distintas representaciones de los constructos matemáticos, figura 10. De este modo, como pregunta final del momento se busca que el estudiante reconozca que los cocientes hallados son aproximadamente iguales, si bien de acuerdo con las características particulares de este nivel de profundidad no se espera una justificación matemática estructurada, pero sí que argumenten intuitiva por qué sucede esta propiedad (constancia de la razón).

Es de rescatar que esta primera construcción del concepto de razón se contrapone a la enseñanza tradicional de la proporcionalidad reducido al uso indiscriminado de la regla de tres, tal como lo reportan Mochón (2012) y Guacaneme (2016).

Figura 10

Distintas representaciones para relacionar magnitudes. Nivel de profundidad 2



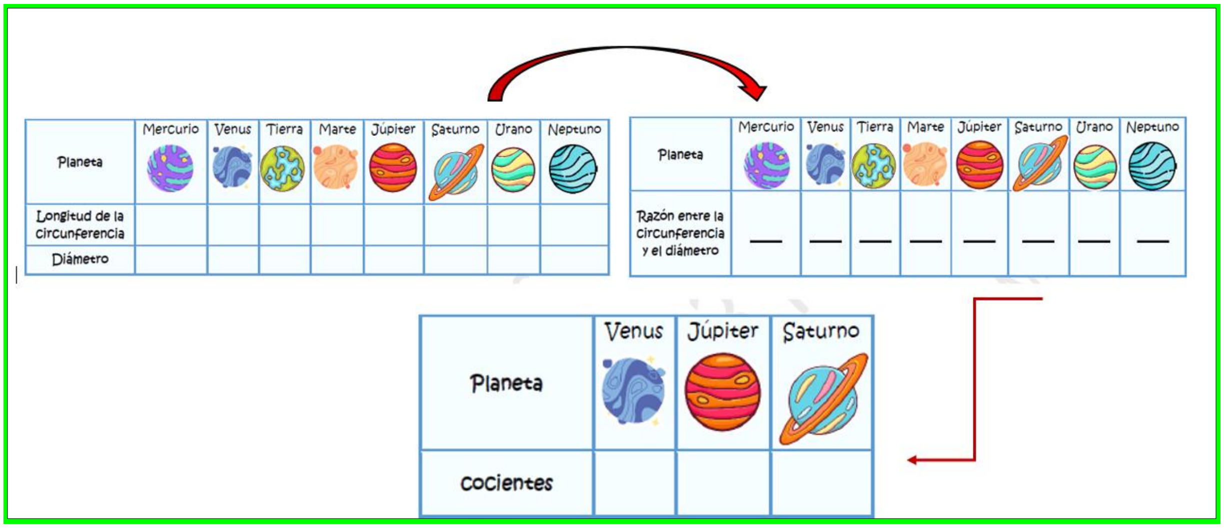
Nota. Esta es la secuencia con la que se presentan las actividades para construir preliminarmente el concepto de razón.

En cuanto al **nivel de profundidad 3** se tiene una intención similar a la del nivel de profundidad 2. Se espera que el estudiante construya, con un poco más de formalidad, el concepto de razón, y comprenda sus diferentes significados. En este nivel la actividad del momento 1 se denomina "juguemos con los planetas" aunque presenta las mismas ideas que la actividad inicial del nivel de profundidad 2, el estudiante debe trabajar con más círculos (que representan los ocho planetas), lo que requiere mayor actividad matemática y mayor sentido de comparación. Así mismo, el estudiante podrá verificar más sus hipótesis sobre la razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro de los distintos círculos, lo que *a la postre* le permitirá estar más familiarizado con el proceso de comparación mediante razón para comprender conceptos o estrategias ulteriores.

En el punto 2, el literal a), b) y c) se trabajan de manera similar que en el nivel de profundidad 2. Se espera que en este nivel el estudiante tenga mayor capacidad de iniciativa para realizar las operaciones y construir los significados sobre el concepto de razón, figura 11. En cuanto al literal e) se quiere que el estudiante reconozca que los cocientes hallados son aproximadamente iguales, y puedan explicar qué sucede esto. Dado que la situación entre las magnitudes es directamente proporcional, allí se evidencia la propiedad de constancia de la razón, la cual se trabaja más adelante. Sin embargo, es conveniente que el estudiante, sin formalización matemática aún, pero con claridad pueda justificar esta propiedad. El hecho de que el estudiante sepa manejar este lenguaje dentro del razonamiento proporcional, interprete la situación y busque estrategias para resolver problemas demuestran un promisorio desarrollo del razonamiento proporcional de acuerdo con Obando et al. (2014).

Figura 11

Distintas representaciones para relacionar magnitudes. Nivel de profundidad 3



Nota: Secuencia con la que se presentan las actividades para construir el concepto de razón.

En este sentido, de acuerdo con Mochón, "construir conceptos como el de razón, el cual es fundamental en el razonamiento proporcional, apoyaría al niño a ir desarrollo sus concepciones y significados personales sobre este proceso y a promover futuras habilidades en este sentido" (2012, p.142). Así mismo, favorece la comprensión y posterior interpretación de situaciones directamente proporcionales.

Comparando lo esperado, con los resultados de la valoración de la rúbrica (ver inciso 4.4), al respecto se valoró positivamente el hecho de que se construyera el concepto de razón haciendo uso de un hecho histórico, de manera sutil, como es el cálculo de PI, haciendo así mención a los presaberes. De acuerdo a la valoración, el primer momento se ajusta a los estipulado de acuerdo a lo expuesto en el inciso 4.3 sobra la fase III de la investigación: planteamiento del diseño, en el marco del proyecto 70783 antes citado.

5.1.2. Segundo momento

En el **nivel de profundidad 2**, se introduce la situación que encauzará el desarrollo de los momentos 2, 3 y 4. Allí se narra un proyecto de Matemáticas desde una perspectiva histórica que desarrolla un profesor sobre razones y proporciones. Al respecto se mencionan tres estudiantes destacados: David, Daniel y Jennifer; los cuales son los protagonistas del momento 2, 3 y 4 respectivamente.

Este momento gira en torno a un problema del libro Lilavati (figura 12).

Figura 12

Problema adaptado del libro Lilavati

Para responder a la pregunta del problema, se orienta a que el estudiante teniendo en cuenta los acercamientos epistemológicos anteriormente descritos vaya desarrollando sus ideas. En particular se aborda el primer acercamiento denominado **uso de tablas y relaciones intuitivas**

(Mochón, 2012). De este modo, de acuerdo a las sugerencias didácticas en el punto 3 literal a) se le plantea al estudiante una tabla (figura 13) para que él mismo determine relaciones cualitativas como el doble, el triple, la mitad, etc. Y así empiece a construir un significado natural sobre las relaciones directamente proporcionales, y no solo realice ejercicios repetitivos sino le sea posible la comprensión de la proporcionalidad en contexto del problema.

Figura 13

Tabla para el punto 3 literal a)

Para diligenciar esta tabla, de acuerdo a Mochón (2012) se debe orientar al estudiante a qué reconozca, por ejemplo, que, si 2 palas de azafrán cuestan 6 niskas, entonces como 4 (palas de azafrán) es el doble de 2, deben costar el doble (en niskas) de lo que cuestan 2 palas de azafrán, es decir 12 niskas, así mismo con las otras cantidades. El docente tiene flexibilidad de hallar las relaciones que desee (4 es el doble de 2, 6 es el triple de 2, 8 es el doble de 4, 4 es la mitad de 8, 2 es la tercera parte de 6, etc.) de acuerdo con las particularidades del grupo. Se espera que el estudiante empiece su razonamiento pre proporcional con estas razones sencillas, a la vez que va reflexionando sobre algunas propiedades de variación en las relaciones directamente proporcionales. Aquí se desarrollan las dos ideas esenciales explicadas en el inciso 4.3: comparación y variación.

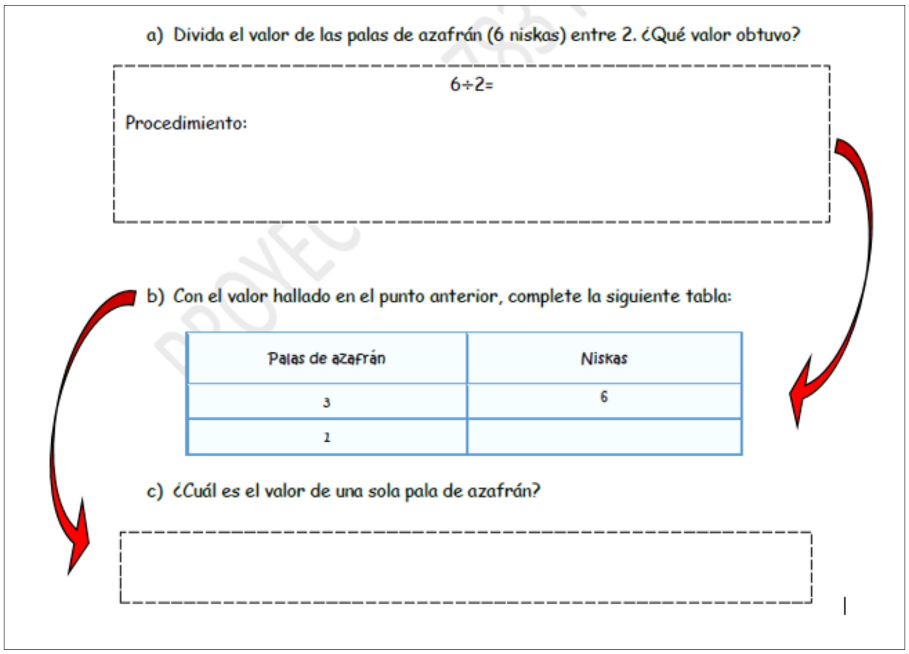
Seguidamente se introduce mediante explicación el método conocido históricamente como *lu,* el cual fue usado por la cultura china. Este método es caracterizado como la **estrategia unitaria**, que corresponde al segundo acercamiento epistemológico. Esta estrategia permite fundamentar la ulterior introducción a la algoritmia. De acuerdo con Mochón (2012), se espera que el docente sirva como orientador para que el estudiante comprenda que al conocer una de las magnitudes cuando la otra tiene valor de 1 (a esto se le conoce como *lu*), el problema se reduce a multiplicar esta *lu* por las otras cantidades.

Nótese que en el caso particular del problema el estudiante debe reconocer que al dividir el valor de las 2 palas de azafrán entre 2, entonces tendrá el valor de 1 sola pala de azafrán (3 niskas). Aunque no se sugiere explícitamente en el diseño, el docente puede pedir que los estudiantes verifiquen que al multiplicar la *lu* (3 niskas) por los valores de la columna derecha, le resultarán los valores de la columna izquierda, y socializar las ideas suscitadas al respecto. Esta estrategia es conceptualmente equivalente a la regla de tres, pero se invierten los pasos. Lo anterior permite *a la postre* fundamentar algunos algorítmicos, que se introducen (de manera básica en este nivel de profundidad) al final del diseño. Así mismo ampliar las concepciones numéricas sobre la proporcionalidad y transitar hacia la comprensión en contexto, tal y como lo refiere Obando, et al. (2014).

De este modo, en el punto 4, se le pide al estudiante que desarrolle mediante pasos la idea, esta actividad debe ser orientada por el docente, el objetivo es que se comprenda naturalmente que 1 pala de azafrán corresponde a 3 niskas (o que 1 pala de azafrán cuesta 3 niskas). Figura 14. Este ejercicio de desarrollar pasos favorece también procesos demostrativos y de argumentación matemática.

Figura 14

Desarrollo de la estrategia unitaria



a) Divida el valor de las palas de azafrán (6 niskas) entre 2. ¿Qué valor obtuvo?

6÷2=

Procedimiento:

b) Con el valor hallado en el punto anterior, complete la siguiente tabla:

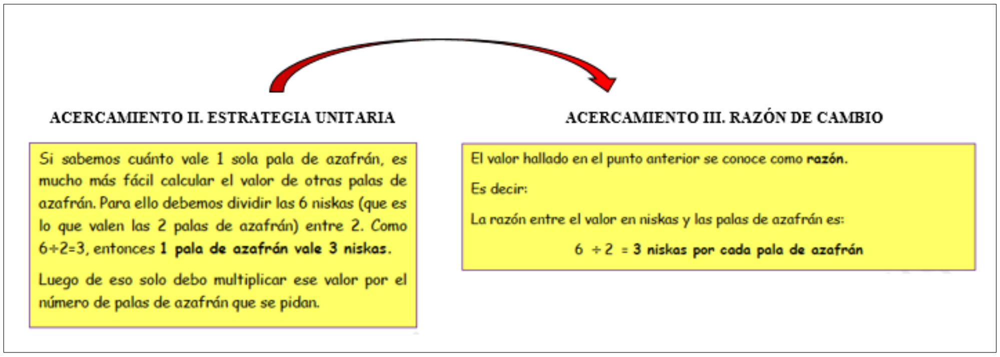
Palas de azafrán	Niskas
3	6
1	

c) ¿Cuál es el valor de una sola pala de azafrán?

Seguidamente, se introduce el concepto de razón, pero se continua con el uso de tablas, se espera que los estudiantes reconozcan que pueden relacionar las dos columnas de la tabla mediante una razón. Aquí se inicia el tercer acercamiento epistemológico denominado **razón de cambio**. El docente debe orientar a que el estudiante comprenda la diferencia con la estrategia unitaria (figura 15) En esta estrategia se hablaba de que 3 niskas corresponden a 1 pala de azafrán (es decir con 3 niskas se puede comprar una pala de azafrán), mientras que en este acercamiento se debe reconocer explícitamente la razón 3 niskas x pala de azafrán, es decir, la razón entre las niskas y las palas de azafrán es de 3.

Figura 15

Transición de la estrategia unitaria a razón de cambio



Las dos estrategias mencionadas posibilitan múltiples formas de representación de la información y favorecen la comprensión. Para finalizar se le invita al estudiante a que explique, mediante sus propias palabras, por qué al multiplicar la razón por los valores de la columna de la izquierda, se obtienen los de la columna de la derecha. La anterior es una competencia, que se rescató en el marco teórico: explicar de distintas formas comportamientos recurrentes (propiedades) en una relación directamente proporcional.

En cuanto al nivel de profundidad 3, en este momento no se realizaron cambios significativos a lo propuesto en nivel de profundidad 2. Se trabaja con el mismo contexto, y con un número un poco mayor de datos. Se sugiere que el docente considere especialmente cuando el estudiante diligencia la tabla, comunicar las pistas de manera más pausada, con el fin de que el estudiante se adelante y con una sola pista pueda deducir la estrategia.

Así mismo, se espera que de manera más natural y autoestructurada el estudiante llegue a sus respuestas y planee sus propias heurísticas para el desarrollo de las estrategias. El principal cambio, es que en el punto 4 literal e) el estudiante debe justificar, con más recursos matemáticos, la propiedad evidenciada de esa relación directamente proporcional y evidenciar una correcta interpretación y compresión de estas propiedades (aunque aún de manera incipiente). Lo anterior para, de acuerdo con Obando et al. (2014), transitar del algoritmo a la comprensión dentro del contexto.

En cuanto a la valoración de este momento mediante la rúbrica, se sugiere de acuerdo con lo estipulado para cada momento de actividad matemática, introducir el objeto matemático de estudio, en este caso, la proporción, por tanto, se sugiere aprovechar la última actividad del momento, para los dos niveles de profundidad, (punto 5.b para el nivel de profundidad 2, y punto 4.e para el nivel de profundidad 3) e introducir allí el concepto de proporción. Este ajuste se explicitará en el inciso *5.3. Ajustes a los diseños a partir de la rúbrica de evaluación.*

5.1.3. Tercer momento

Para un nivel de profundidad 2, se introduce una historieta (figura 16) que relata la leyenda sobre Tales de Mileto y la medición de la Gran Pirámide de Egipto.

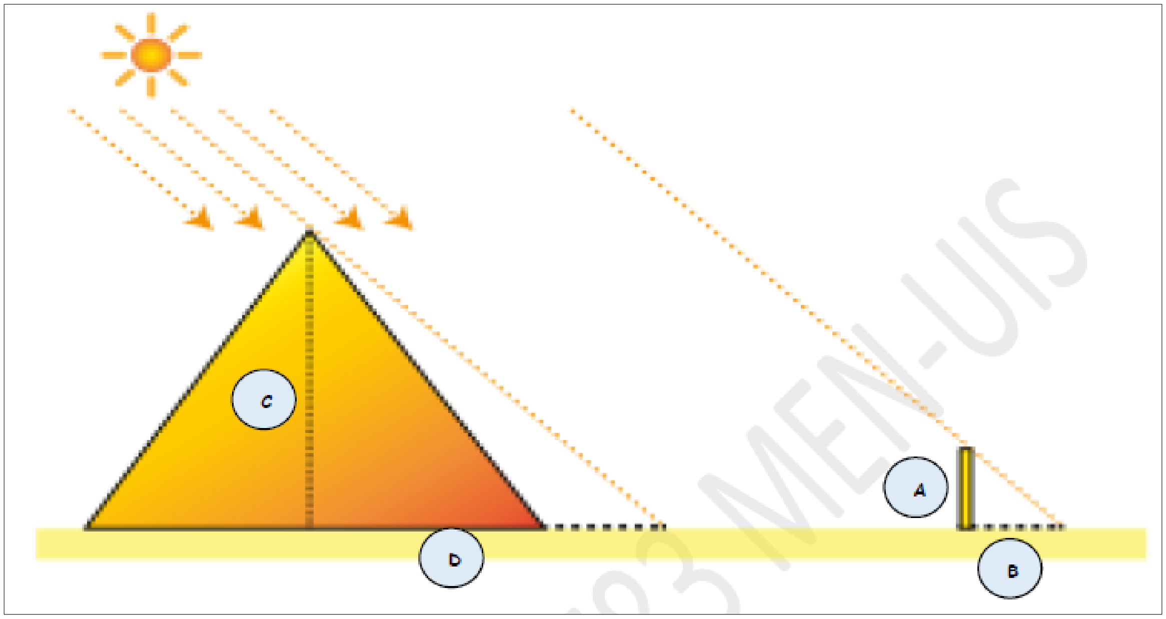
Figura 16

Historieta sobre Tales y la medición de la pirámide

Seguidamente se muestra el esquema utilizado por Tales (figura 17) el cual se refuerza posteriormente mediante el SGD Geogebra. Allí se espere inicialmente que el estudiante reconozca las diferentes medidas asociadas en el esquema.

Figura 17

Esquema planteado por Tales de Mileto

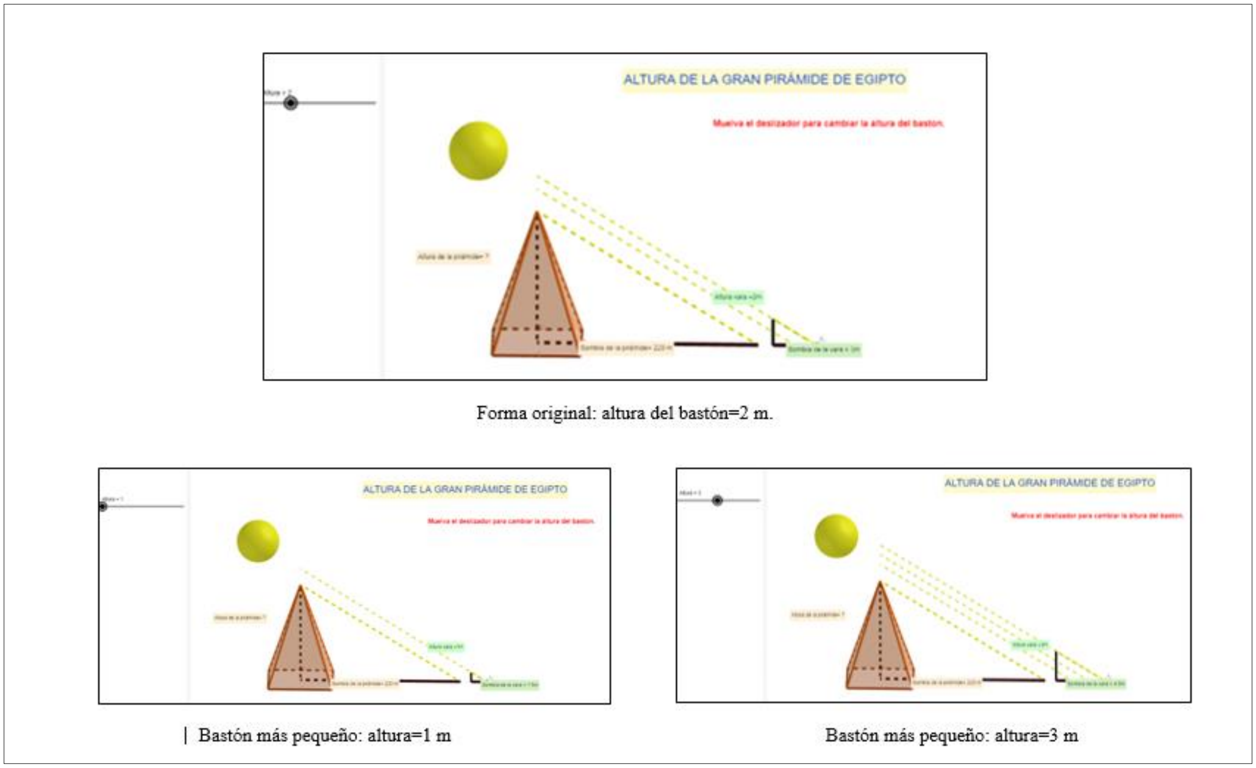


En esta actividad se refuerza la razón de cambio, introducida preliminarmente como estrategia en el momento 2, para ello se busca que el estudiante compare la altura del bastón con su respectiva sombra. En el punto 6 literal b) se añaden los valores específicos de la altura del bastón y la longitud de su sombra, para que el estudiante determine la razón $\frac{2}{3}$, aquí se le pide la ayuda al docente para que el estudiante pueda representar esta razón en decimal, y la tenga presenta para las preguntas posteriores.

Seguidamente, y con aras de desarrollar el pensamiento inductivo, el cual propicia el razonamiento proporcional según Inhelder & Piaget (1958) citados en Mochón (2012) en el literal c) se busca que el estudiante realice algunas conjeturas sobre qué pasaría si Tales hubiese usado un bastón más grande o más pequeño. Estas conjeturas serán corroboradas con una animación en Geogebra (se puede encontrar en el siguiente link: https://www.geogebra.org/m/egw5amtc), en la cual el estudiante puede manipular la altura del bastón (a 1 m. o 3 m.) e identificar la sombra correspondiente. Figura 18. Aquí además de comparación se desarrolla la idea de variación, en la medida en que el estudiante debe cuestionarse sobre el comportamiento del cambio de la sombra, cuando cambia la altura del bastón.

Figura 18

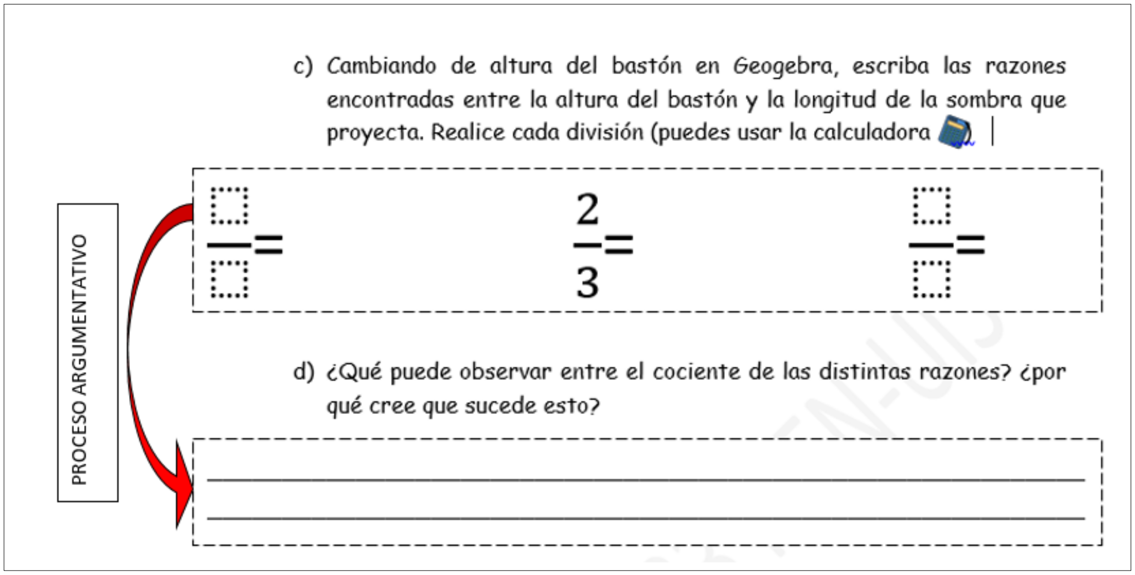
Manipulación de GeoGebra de la altura del bastón. Nivel de profundidad 2



De este modo, se espera que el estudiante reconozca de manera preliminar que se guarda una razón constante entre la altura del bastón y la sombra que proyecta. En efecto, en el punto 7 literal a) y b), luego de manipular el SGD Geogebra, debe corroborar o refutar sus hipótesis sobre la longitud de la sombra cuando el bastón se hace más grande o más pequeño. De acuerdo a esta misma animación en el literal c) se le pide al estudiante que halle las tres razones encontradas entre la altura del bastón y la sombra que proyecta, al cambiar la altura del bastón, así mismo, se le pide que realice la división (este valor va a coincidir con el decimal 0,66 hallado anteriormente), por los objetivos del diseño esta división puede ser realizada mediante una calculadora o con ayuda del docente. Figura 19.

Figura 19

Proceso inicial de argumentación sobre la igualdad de razones



Del mismo modo en la el literal d) se busca que el estudiante comprenda que las razones son iguales, y con esto se adentre un poco más en el razonamiento proporcional, en la medida en que ya se puede explicar ciertas propiedades que ha venido entreviendo regularmente. Se invita al estudiante a que haga la relación análoga, pero con la altura de la pirámide y su sombra, y que sutilmente intuya que esta razón es igual a la hallada anteriormente con el bastón.

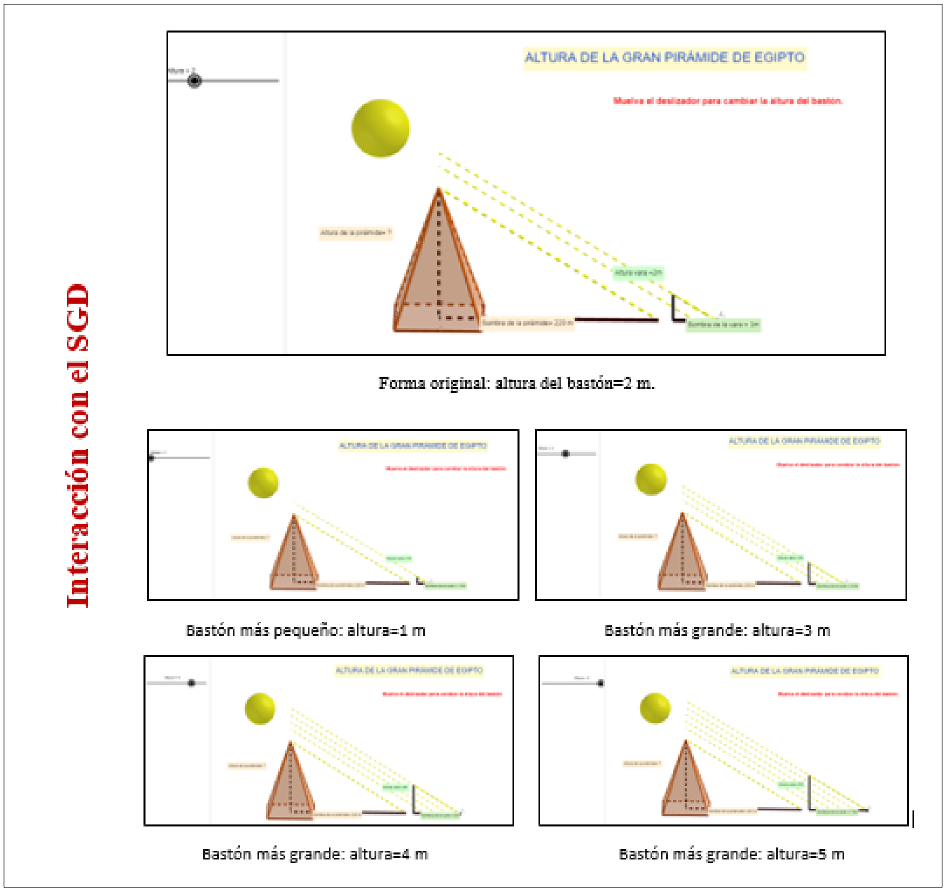
Finalmente, se introducen paulatinamente algunos conceptos matemáticos relacionados con el razonamiento proporcional. El principal objetivo es entender inicialmente que una proporción es una igualdad de razones, con esto es posible desarrollo los procesos algorítmicos posteriores. Aquí se espera una orientación minuciosamente del docente en el desarrollo de los cálculos en el punto 8, en donde se busca que el estudiante entienda más las nociones de comparación y variación a que realice ejercitación de procedimientos algorítmicos. Lo anterior es una parte del cuarto acercamiento denominado **constancia de la razón y algoritmia.**

En cuanto al **nivel de profundidad 3**, el desarrollo se da de manera similar al nivel de profundidad 2, sin embargo, se da más libertad para que el estudiante estructura sus respuestas, y reflexiones sobre las propiedades que han reconocido en las relaciones directamente proporcionales. Esta reflexión se suscita dado que, en este nivel de profundidad, como se indica en la figura 10, se desarrolla con más minucia el cuarto acercamiento epistemológico, en donde el estudiante además de comprender y explicar conceptos relacionados con el razonamiento proporcional y usarlos para resolver problemas, puede explicar e incluso predecir propiedades de este tipo de relaciones, de acuerdo con Mochón (2012).

Otro cambio para resaltar, se da en la animación en Geogebra, la cual puede encontrarse en el siguiente link: https://www.geogebra.org/m/rvrqtbf8 , en donde el estudiante puede interactuar con mayor libertad con la simulación, e incluso tener más insumos para hacer generalizaciones sobre la variación de la longitud de la sombra, cuando el bastón cambia de tamaño. Figura 20.

Figura 20

Manipulación de Geogebra de la altura del bastón. Nivel de profundidad 3



Este momento fue valorado positivamente mediante la rúbrica, pues de acuerdo a las observaciones, se resalta el hecho de que se practique lo aprendido, y calcular un valor faltante, habiendo determinado que las magnitudes se comportan de manera directamente proporcional, cumple con el propósito de este momento.

5.1.4. Cuarto momento

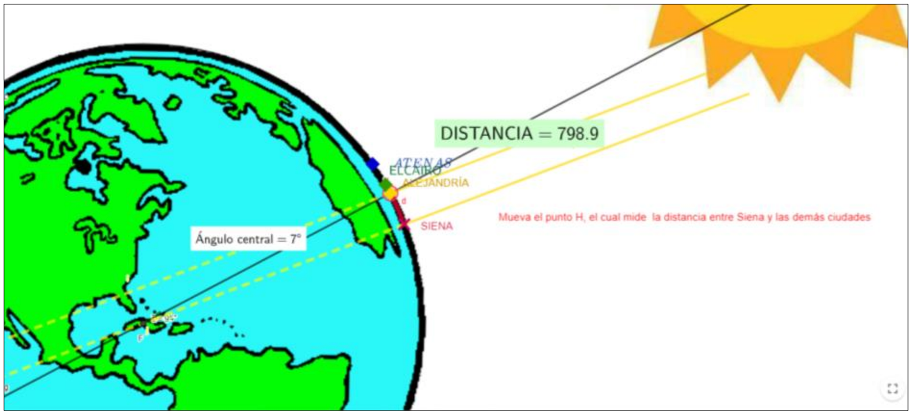
Dadas las delimitaciones que se explicaron anteriormente, en cuanto al nivel de profundidad 2 y 3, en este momento es donde más se evidencia la transición de un nivel a otro. Lo anterior, obedece a que en el nivel 2 solo se abarca una parte del cuarto acercamiento (en cuanto a reconocer la proporción y resolver problemas haciendo uso de sus propiedades) mientras que en el nivel de profundidad 3 se espera además de lo anterior, que el estudiante explique, con justificación matemática apropiada algunas propiedades identificadas como la constancia de la razón, y comprenda adecuadamente las ideas de comparación y variación que de acuerdo a Mochón (2012) fundamentan el razonamiento proporcional.

Ahora bien, en cuanto al **nivel de profundidad 2,** se relata la forma en qué Eratóstenes logró medir la longitud de la circunferencia de la tierra, lo anterior mediante un vídeo que se puede encontrar en el siguiente link: https://www.youtube.com/watch?v=2tmiWjLSMcA, se le sugirió al docente proyectar este vídeo las veces que sea necesario, y repetirlo cuándo la pregunta propuesta lo requiera. En el punto 9 literal a) se le pide al estudiante que explique con sus palabras o dibuje la idea de Eratóstenes según el vídeo, aquí se le sugirió al docente darles el espacio a los estudiantes para que hagan sus propias representaciones y posteriormente socializarlas. Se invita también al estudiante a que anote en una hoja borrador algunos datos, que, a su propio criterio, considere importantes.

En el punto 10, se busca que el estudiante manipule la simulación en GeoGebra sobre la medida de la circunferencia de la tierra por Eratóstenes. Esta simulación se encuentra en el siguiente link: https://www.geogebra.org/m/m7vaptn3 y establezca si se trata de una relación directamente proporcional. Se busca que el estudiante reconozca que las magnitudes involucradas (longitud de tierra y ángulo solar) varían, y puedan determinar si este comportamiento de variación es directamente proporcional. También el docente debe orientar al estudiante para que reconozca que el punto H determina la distancia a Siena, y que debe superponer ese punto sobre el rombo amarillo, en donde se ubica la ciudad de Alejandría. Importante en este sentido, que el estudiante note que hay un pequeño margen de error, y de ser posible el docente pueda explicarlo. Figura 21.

Figura 21

Simulación en GeoGebra. Eratóstenes y la medida de la tierra. Nivel de profundidad 2

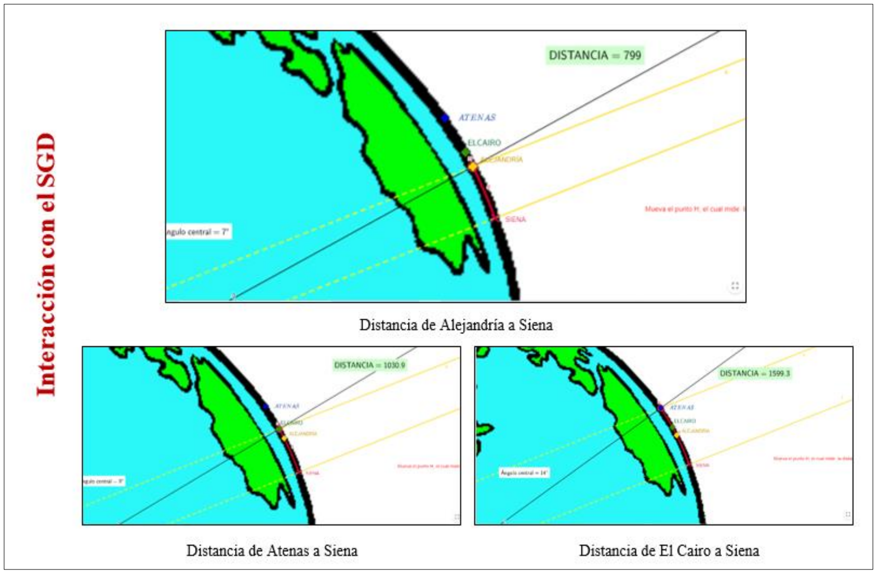


Finalmente, en el punto 11, se le pide al estudiante que desarrolle los pasos que había seguido en el punto anteriormente, para hallar la longitud de la circunferencia de la Tierra. Se le sugiere al profesor guiar muy detenidamente las operaciones de los estudiantes y enfatizar en qué entiendan el proceso y los objetos matemáticos involucrados, especialmente el concepto de proporción.

En el **nivel de profundidad 3** además de las actividades descritas en el nivel de profundidad 2, se añade también una pregunta en el punto 10 literal b) en donde el estudiante debe realizar una división para determinar la razón de cambio entre la longitud de tierra y el ángulo solar correspondiente. Lo anterior con el fin de reforzar los conocimientos previamente construidos. Por otra parte, en aras de que el estudiante reflexione sobre las propiedades de las relaciones directamente proporcionales, se añade una situación, el punto 11, en donde el estudiante de nuevo explorando el SGD, debe responder algunas cuestiones. En el literal a) se debe superponer el punto H sobre los rombos que señalan las ciudades de Alejandría, El Cairo y Atenas, y verificar los datos esbozados en una tabla. Figura 22

Figura 22

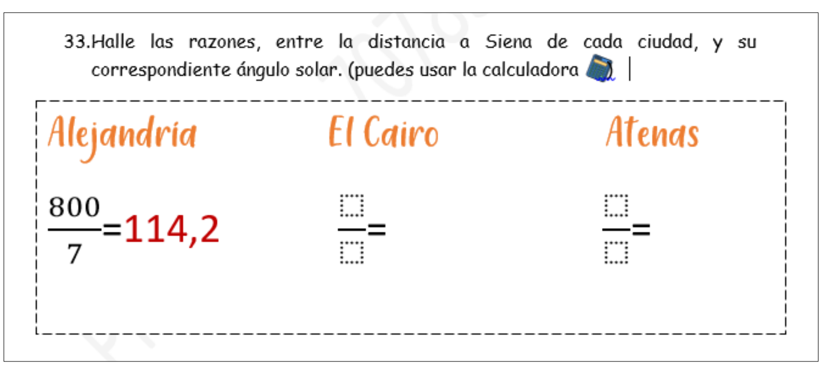
Simulación en Geogebra. Eratóstenes y la medida de la tierra. Nivel de profundidad 3



En el literal b) se pide que se halla la razón entre la distancia a Siena de cada ciudad y el respectivo ángulo solar asociado, de Alejandría, El Cairo y Atenas respectivamente. Aquí, se puede hacer uso de la calculadora y verificar que las tres razones son aproximadamente iguales, esto de acuerdo al acercamiento trabajado, en donde se espera que el estudiante pueda reconocer y verificar algunas propiedades de las relaciones directamente proporcionales. Figura 23.

Figura 23

Razón entre la distancia a Siena y el ángulo solar. Nivel de profundidad 3

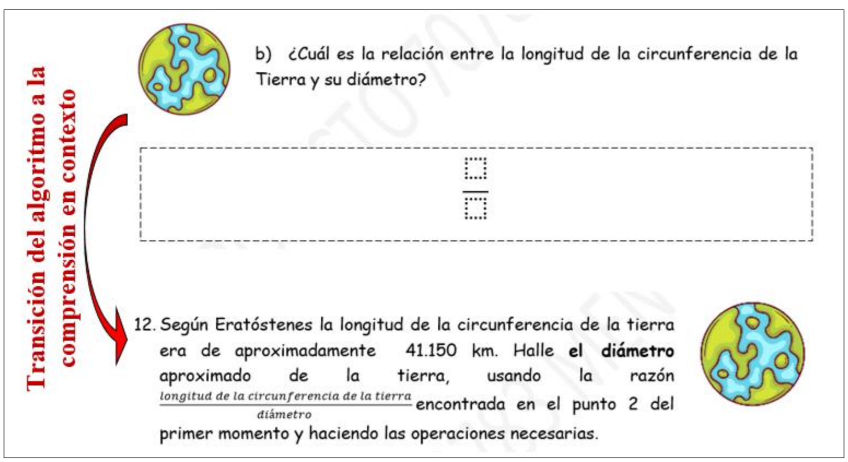


En el literal c) se espera que el estudiante justifique, con un poco más rigor, por qué las razones son iguales, En el literal d) se busca que el estudiante sepa interpretar la constancia de la razón en el contexto histórico en el que se está trabajando, y lo justifique matemáticamente.

En el punto 12, se espera conectar lo que se ha venido trabajando con Eratóstenes y el momento 1 en el que se hallaron razones entre la circunferencia y el diámetro de los planetas (en este caso del planeta tierra). En este punto se le sugirió al docente dejar que el estudiante razone para determinar una estrategia matemática para hallar el diámetro, y de ser necesario solo le ayude en las operaciones que se requieran. Figura 24. Con esta actividad se terminan de desarrollar los acercamientos del razonamiento proporcional.

Figura 24

Conexión entre el momento 4 y el momento 1. Nivel de profundidad



Este momento también fue valorado positivamente mediante la rúbrica de evaluación, en la medida en que se busca evaluar los conocimientos adquiridos mediante el desarrollo del diseño, y esto es acorde con el propósito para este momento de actividad matemática.

5.2. Principios rectores del DUA en el diseño e idoneidad didáctica de la Historia para promoverlos

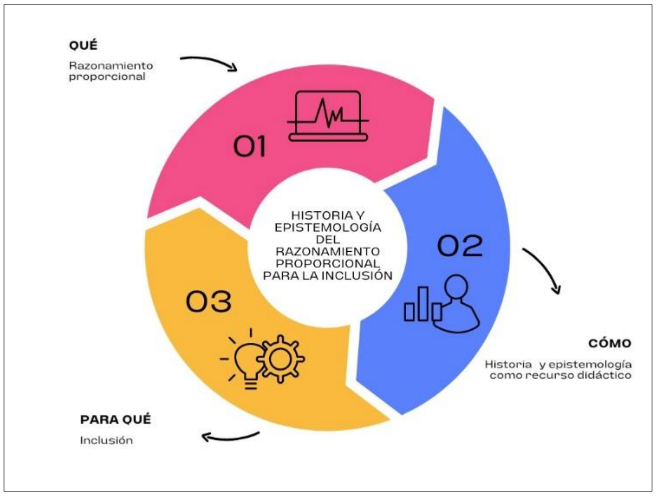
En el inciso 3.5 se explicitan las formas en las que interviene la Historia para favorecer su enseñanza: la Historia de la Matemáticas como uso, la Historia de las Matemáticas como integrador y la Historia de las Matemáticas como permeador. Por otra parte, en el apartado 4.1 se consideran los principios rectores del DUA, y las pautas asociadas, en aras de valorar si se están desarrollando procesos inclusivos en el aula.

En esta categoría de análisis se expondrán los resultados *a priori* de la forma en que se promovieron los principios y pautas del DUA en el diseño y en particular el rol que jugó la Historia y la Epistemología como recurso didáctico para favorecer la inclusión.

En este sentido, se tiene como objeto matemático de estudio el razonamiento proporcional, que hace referencia al *qué* del presente proyecto, con la Historia y la Epistemología se responde al *cómo*, mientras el proceso de inclusión indica el *para qué*. Figura 25

Figura 25

Síntesis de la categoría de análisis



Este análisis se organiza de acuerdo a los tres principios rectores del DUA, en cada categoría se expondrán el desarrollo de estos principios y pautas y cómo las formas en la que intervienen la Historia de las Matemáticas en su enseñanza (como uso, como integración y como permeador) posibilitaron o favorecieron el cumplimiento de dichos principios. Antes de iniciar, para orientar el proceso de análisis, se plantea la figura 26.

Figura 26

Análisis de los principios y pautas del DUA propiciados por el diseño didáctico

5.2.1. *Principio I: Múltiples formas de representación*

El diseño didáctico que se desarrolló posibilitó distintas formas de representación de la información. En particular, con la actividad práctica del momento 1, en donde el estudiante debe manipular material concreto, se ampliaron los canales sensoriales para acceder a la información.

Lo anterior, en concuerda con la pauta 1: *proporcionar diferentes opciones para percibir la información*, en la medida en que el material concreto propuesto puede adaptarse adecuadamente (con colores o texturas) de acuerdo con la necesidad particular del estudiante.

Así mismo, también se posibilitó distintas representaciones semióticas dentro del registro semiótico numérico, para que el estudiante construyera el significado de razón. En primera medida se introduce como una relación de comparación, luego se transita a la razón (escrita en forma de fracción) y finalmente el estudiante reconoce que puede representar esta razón mediante un número decimal. Lo anterior además de promover la comprensión y los significados personales que deben favorecerse en el desarrollo del razonamiento proporcional, también es acorde a la pauta 2: *proporcionar múltiples opciones para el lenguaje y los símbolos*, dado que se le permitió al estudiante interactuar con los sistemas de representación matemáticos del concepto de razón, y se buscó establecer un lenguaje común para que el esa actividad, que se sugirió, se desarrolle en pequeños grupos, se promueve la comunicación.

Por otra parte, la secuencia que se planteó en el diseño para la construcción de los conceptos fundamentales y la introducción a estrategias proporcionales, en donde se guío al estudiante para que el mismo, y partiendo de nociones básicas fuera resolviendo problemas y hallando sus propias respuestas, como el punto 2,3,4,8 y 11, permitió satisfacer la pauta 3*: proporcionar opciones para la comprensión*, en donde se brindó al estudiante múltiples formas de comprender la información, y adquirir paulatinamente nuevo conocimiento. Lo anterior, también en el marco de un aprendizaje significativo, en donde se construyeron epistemológicamente conceptos fundamentales del razonamiento proporcional, partiendo de nociones previas, como la comparación.

Es de rescatar, que la Historia como recurso didáctico posibilitó también este principio de representación. La Historia como uso, se evidencia, por ejemplo, con dos elementos que se integraron en el diseño: los *¿sabías qué?* y *las notas históricas.* Estos recursos daban referencias históricas que ayudaban al estudiante a comprender la situación y situarse en el contexto del problema, de acuerdo a la pauta 3, antes citada. Así mismo, la Historia de las Matemáticas como uso posibilitó la conexión entre conceptos del razonamiento proporcional con hitos históricos que marcaron la historia de las razones y proporciones: en particular, para el diseño se rescataron tres hitos históricos: El problema de Lilavati, un texto chino fundamental en la Matemática de la época, la leyenda de Tales sobre la medición de la Gran Pirámide de Egipto, y la medida de la longitud de la circunferencia de la tierra, hecha por Eratóstenes.

Por otra parte, la Historia de las Matemáticas como integración, se evidenció en el desarrollo del diseño, en donde la Historia de las Matemáticas no fueron un extracto adicional al diseño, sino parte fundamental del diseño mismo. Con los registros históricos usados en el diseño, se complementa esta idea. Nótese que es la historia misma la que encauza el desarrollo del tema, y permite anticiparse a los bloqueos epistemológicos que pudiesen surgir. Por ejemplo, en la medición de la pirámide, se empieza a comparar primero por aparte las razones entre la altura del bastón y la sombra del bastón, y de la altura de la pirámide con la sombra de la pirámide; y luego se transita a construir el concepto de proporción, en donde se igualan estas dos razones. Lo anterior permitió proporciones más formas para reconocer el lenguaje matemático, y también favorecer la comprensión en contexto, y la adquisición de nuevo conocimiento de manera sutil y estructura, de acuerdo a la pauta 3, antes mencionada.

En el contexto del primer principio del DUA, también se destacan las animaciones realizadas mediante el SGD Geogebra, en donde el estudiante el estudiante tiene la posibilidad de interactuar, verificar y conjeturar sobre la situación que se le plantea. El uso de un SGD se planteó dada la necesidad de que el estudiante comprenda, con una representación dinámica, la idea de variación. Además, estas animaciones ayudaron a favorecer la comprensión del objeto matemático mismo. Con esta misma idea, se propuso la visualización del vídeo sobre Eratóstenes y la medida de la tierra, dado que lenguaje natural y adaptado a la edad de los estudiantes, narraba la historia y favoreció la comprensión.

Como evidencia del cumplimiento del primer principio del DUA, con sus pautas asociadas, en la figura 27, se muestra la valoración hecha mediante la rúbrica en cuanto a este principio.

Figura 27

Valoración primer principio del DUA: múltiples formas de representación

Indicador	P1				
	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona diferentes opciones para percepción.					X
Pauta 2. Proporciona múltiples opciones para el lenguaje, las expresiones matemáticas y simbólicas					X
Pauta 3. Proporciona opciones para la comprensión					X

Nota: El puntaje está dado en una escala de 1 a 5, en donde 5 es el mayor ajuste a los principios del DUA

5.2.2. Principio II: Múltiples formas de acción y expresión

El diseño didáctico que se presentó buscó posibilitar múltiples respuestas por parte de los estudiantes, un poco más en el nivel de profundidad 3 que en el nivel 2. Sin embargo, se promovieron espacios para que el estudiante expresara auto estructuradamente sus esquemas en los registros que él considera convenientes. Al respecto, se plantearon preguntas abiertas, bien dirigidas, encauzadas al objetivo de cada actividad y propiciara diferentes caminos para dar respuesta a dicha pregunta.

En particular, se plantearon puntos en donde el estudiante debía registrar mediante un esquema, verbal o gráfico, la situación. Por ejemplo, en el momento 4 con la historia de Eratóstenes se le pidió al estudiante, que, de acuerdo con el vídeo, hiciera un dibujo, o explicara con sus propias palabras la idea de Eratóstenes. Allí se le sugirió al docente dar la mayor libertad para que el estudiante estructurara sus propios esquemas. Así mismo, con el uso de Geogebra, el estudiante pudo verificar algunos datos y comportamientos de la situación y de allí validar sus conjeturas. Lo anterior de acuerdo a la pauta 4: *proporcionar múltiples medios físicos de acción.*

También en el diseño se le sugiere al docente buscar medios de expresión para comunicar las ideas, al respecto se dan algunas orientaciones sobre las “pistas” que sería conveniente dar para que el estudiante adquiera conocimiento. Así mismo el uso de la tecnología, en este caso el SGD, promueve distintas formas de comunicación. También se plantean en determinados espacios socializar respuestas o esquemas construidos individualmente, discutirlos y hallar puntos de inflexión en estos. Con esto, se da cumplimiento a la pauta 5*: proporciones opciones para la comunicación y la expresión.*

Así mismo, para proporcionar opciones para las funciones ejecutivas (pauta 6) se secuenciaron adecuadamente las actividades, y se propusieron puntos de verificación dentro del diseño, para que se valore el aprendizaje, especialmente por parte del propio estudiante (metacognición). Como se mencionó también se plantearon actividades, en donde el estudiante debía organizar las acciones de trabajo para llegar a la respuesta, lo anterior permite gestionar las funciones ejecutivas del cerebro, y desarrollar estrategias para la resolución de problemas.

Aquí también, interviene el uso de la Historia como integración, en la medida en que la Historia como recurso didáctico no solo permite orientar epistemológicamente la enseñanza, sino también el aprendizaje y la actividad matemática del estudiante. La metacognición también es favorecida por la Historia como integración y la Historia como permeador, en la medida en que la historia permite identificar y comprender los bloqueos epistemológicos en la construcción de conceptos y superarlos. (Gutiérrez, 2019)

En cuanto a la valoración de este principio mediante la rúbrica, como se refleja en la figura 28, la pauta 4 y la pauta 6 se cumplen totalmente (figura 28). No obstante, la pauta 5: *proporcionar opciones para la comunicación y expresión*, tuvo una puntuación de 4, al respecto se sugirió hacer explícitos momentos de trabajo en grupo o de socialización, en aras de favorecer la comunicación en el aula. En el inciso 5.3 para los ajustes a los diseños, se tuvo en cuenta esta observación.

Figura 28

Valoración segundo principio del DUA: múltiples formas de acción y expresión

Indicador	P1				
	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona opciones para la interacción física.					X
Pauta 2. Proporciona opciones para la expresión y la comunicación.				X	
Pauta 3. Proporciona opciones para las funciones ejecutivas.					X

5.2.3. Principio III. Múltiples formas de implicación

El diseño que se presentó promueve la participación activa del estudiante en el aula de clase. Por ello plantea estrategias de motivación que pueden ayudar a despertar el interés y la motivación. La actividad práctica del primer momento, el cual se constituye como un experimento de clase, no solo ayuda a la construcción de los conceptos iniciales, sino mantiene al estudiante motivado por su propio aprendizaje, y se favorece el clima de clase para las ulteriores actividades.

Cuando se planteó la situación que desarrolló el diseño en el momento 2, 3 y 4 (el proyecto del profesor Javier) se destacaron tres estudiantes, con diferentes intereses (Literatura, Historia, Arquitectura, Arte, Astronomía). Lo anterior se planteó en aras de abrir mayores posibilidades para que las actividades estuvieran dentro de los intereses particulares del estudiante. Lo anterior, de acuerdo a la pauta 7: *proporcionar múltiples formas de captar el interés*. Esta pauta también fue propiciada por las simulaciones en Geogebra, en la medida en que además de captar el interés del estudiante también estimula la concentración.

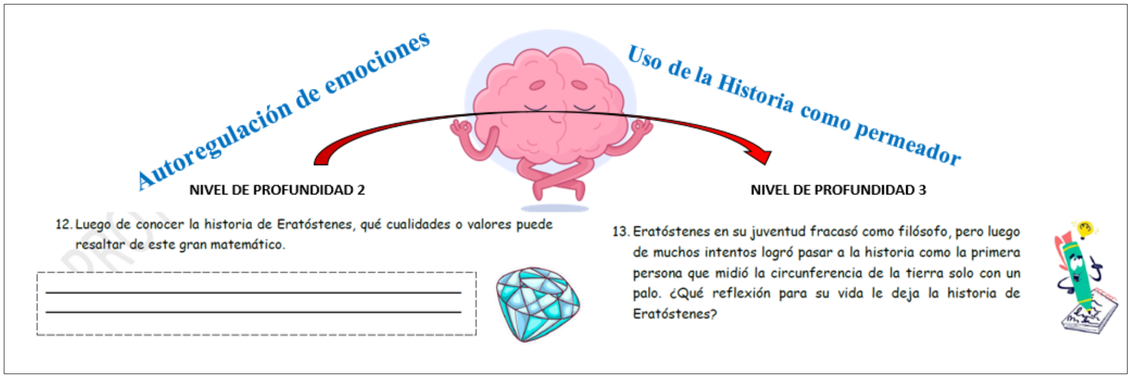
El marco teórico que sustentó el diseño permitió transitar adecuadamente en distintos niveles de complejidad, de acuerdo a las etapas del desarrollo del razonamiento proporcional, y los acercamientos epistemológicos propuestos. Las actividades fueron planteadas para que el estudiante cada vez descubriera, de manera autónoma, respondieran a las preguntas, y así mismo, cada vez se requirió de mayor actividad matemática, mayor concentración, y un nivel creciente de razonamiento y explicación de los hechos matemáticos involucrados.

En este sentido, se hicieron algunas sugerencias al docente sobre la orientación que se debe dar al estudiante de acuerdo a sus características particulares. Lo anterior, de acuerdo a la pauta 8: *proporcionar opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia.* La actividad matemática, también fue favorecida por el uso de la Historia como permeador, pues como se mencionó anteriormente, delimitó el desarrollo del tema, y los niveles de complejidad requeridos, de acuerdo a la evolución histórica-epistemológico de los conceptos involucrados.

Por su parte, la pauta 9: *proporcionar opciones para la auto regulación*, que busca que el estudiante regule sus propias emociones, como parte fundamental del aprendizaje, y se mantenga motivado, fue propiciado especialmente por las tecnologías digitales: el vídeo y las animaciones en Geogebra, suponen una forma diferente en que los estudiantes perciben información, razonan, realizan actividad matemática, conjeturan y verifican sus ideas intuitivas. También, con el propósito de desarrollar una ética personal desde edades tempranas se propuso como pregunta final del diseño, una reflexión personal en torno a la actitud de Eratóstenes cuando, después de varios intentos, logró destacarse como hombre de ciencia.

Figura 29

Relación entre la auto regulación de emociones y la intervención de la Historia como permeador



La valoración de este principio mediante la rúbrica de valoración fue positiva, en la medida en que todas las pautas, según la evaluación, se cumplen a cabalidad. Lo anterior se puede observar en la figura 30.

Figura 30

Valoración tercer principio del DUA: Múltiples formas de implicación

Figura 30.Valoración tercer principio del DUA: Múltiples formas de implicación

Indicador	P1				
	1	2	3	4	5
Pauta 1. Proporciona opciones para captar el interés					X
Pauta 2. Proporciona opciones para mantener el esfuerzo y la persistencia.					X
Pauta 3. Proporciona opciones para la autorregulación.					X

Ahora bien, considerando el potencial didáctico de la Historia y la Epistemología, que hace referencia al cómo de la investigación (ver figura 25), además de lo mencionado en este inciso, se resalta la valoración positiva que tuvo este recurso didáctico, mediante la rúbrica, en donde, de acuerdo a esta valoración se observa el desarrollo del objeto matemático desde lo didáctico en la medida en que se visualiza una intención didácticas en las actividades planteadas, a medida que se desarrolla el diseño hay diferentes representaciones y articulación entre ellas, y la forma en qué se propone el objeto matemático se relaciona con las características de los estudiantes incluidos en los dos niveles de profundidad trabajados. Figura 31.

Figura 31

Valoración del desarrollo del objeto matemático desde lo didáctico

Se observa el desarrollo del objeto matemático desde lo didáctico*					X

5.3. Ajustes a los diseños a partir de la rúbrica de evaluación

De acuerdo a la rúbrica de evaluación, se aprovechó la última actividad del momento 2 (punto 5.b para el nivel de profundidad 2, y punto 4.e para el nivel de profundidad 3) para introducir, sutilmente, el concepto de proporción. Al respecto, se añadió la misma situación para los dos niveles de profundidad (figura 32), lo anterior obedece a que el concepto de proporción es el concepto fundamental que se trabaja en el diseño y no requiere de actividad matemática del estudiante pues esta se propicia en el momento 3, en el cual si diferencia de un nivel a otro.

Figura 32

Situación para introducir el concepto de proporción

Entonces, el profesor le pide que halle la razón entre el valor en niskas y las palas de azafrán. Para ello, le sugiere que divida el valor de la columna izquierda entre el valor de la columna derecha en cada fila y halle el cociente:

David sigue este proceso, el cual se muestra a continuación:

$\frac{6}{2} = 3$ $\qquad$ $\frac{12}{4} = 3$ $\qquad$ $\frac{18}{6} = 3$

El profesor le explica lo siguiente:

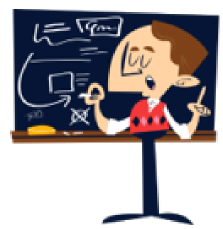
Una relación es llamada **directamente proporcional** si existe la igualdad de razones, esta igualdad se conoce como la **proporción**.

se puede hacer una **proporción**, de la siguiente manera:

	6	es a	2
Cómo	12	es a	4

En lenguaje matemático, lo anterior quiere decir que:

$$\frac{6}{12} = \frac{2}{4}$$



Ahora bien, la adición de esta situación en el momento 2, hizo que se cambiara la introducción del concepto de proporción que se tenía previsto en el momento 3 (en los dos niveles de profundidad). Para ello se modificó de la siguiente manera: Se narra que el profesor le explica el proceso para hallar la proporción ejemplificando en el contexto en el que se está trabajando (medición de la altura de la pirámide). Ver figura 33. Lo anterior, con el objetivo de encauzar el desarrollo del diseño y no repetir información. Se destaca también, que en el momento 2 la proporción se introdujo de manera numérica, mientras en el momento 3 se ejemplifica con variables, lo anterior de acuerdo a lo sugerido por Mochón (2012), el cual afirma que en el desarrollo del razonamiento proporcional se deben propiciar también procesos de generalización y abstracción.

Figura 33

Intervención modificada para abstraer el concepto de proporción

El profesor tal y como le explicó a David, le enseña a Daniel cómo plantear la proporción.

Daniel, observe que la razón entre la medida del bastón de tales y la sombra que proyecta es igual a:

$$\frac{\textit{Altura del bastón}}{\textit{Longitud de la sombra del bastón}}$$

Y también se puede hallar la razón entre la altura de la pirámide y su sombra, la cual es

$$\frac{\textit{Altura de la pirámide}}{\textit{Longitud de la sombra de la pirámide}}$$

Ahora bien, como la relación (altura-longitud de sombra) es directamente proporcional, se puede hacer una **proporción**, la cual es una igualdad de razones, de la siguiente manera:

La altura del bastón es a la longitud de la sombra del bastón

Cómo la altura de la pirámide es a la longitud de la sombra de la pirámide

En lenguaje matemático, lo anterior quiere decir que:

$$\frac{\textbf{\textit{Altura del bastón}}}{\textbf{\textit{Longitud de la sombra del bastón}}} = \frac{\textbf{\textit{Altura de la piramide}}}{\textbf{\textit{Longitud de la sombra de la piramide}}}$$

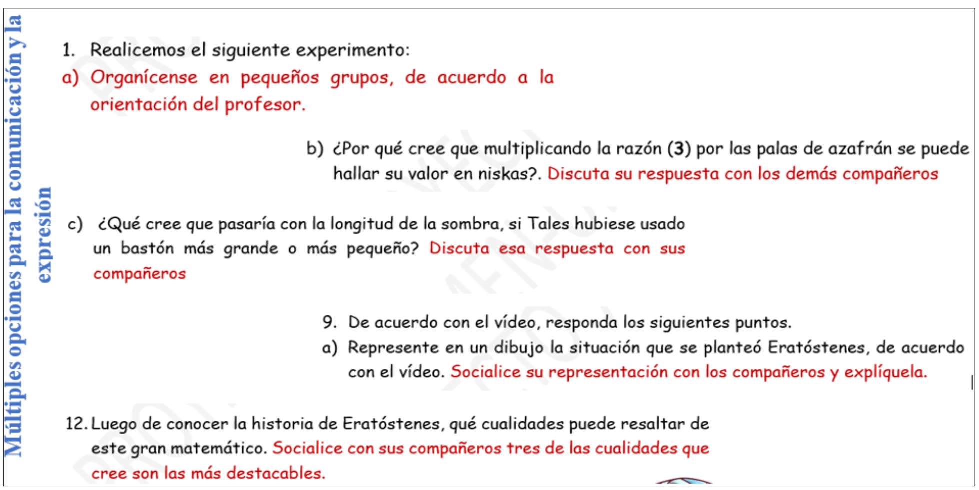
Por otra parte, otro cambio significativo que se hizo, fue el de proporcionar opciones para la comunicación y la expresión (Pauta 4 del DUA). Allí se sugirió hacer explícitos momentos de trabajos en grupo o socialización. Si bien, algunos de estos momentos se mencionaron en la versión docente del diseño, se explicitó en la hoja de trabajo del estudiantes algunas pautas para la socialización. En el nivel de profundidad 2, se sugiere que la actividad inicial en el momento 1 se realice un grupos pequeños para que sea más fácil la medición y se compartan ideas para responder a las preguntas. Así mismo, en el punto 5.b se invita al estudiante a qué discuta su respuesta con los compañeros, igualmente en el punto 6.c en donde se pide que expongan sus conjeturas.

En el momento 4, punto 9.a se le pide explicitamente al estudiante que socialice su representación y la explique ante el grupo. Para finalizar en la última pregunta del diseño, también se pide que compartan las cualidad que al parecer de cada estudiante son las más destacables de Eratóstenes.

Figura 34

Modificaciones para proporcionar opciones para la comunicación

Figura 34.Modificaciones para proporcionar opciones para la comunicación


Múltiples opciones para la comunicación y la expresión

1. Realicemos el siguiente experimento:
a) Organícense en pequeños grupos, de acuerdo a la orientación del profesor.

b) ¿Por qué cree que multiplicando la razón (**3**) por las palas de azafrán se puede hallar su valor en niskas?. Discuta su respuesta con los demás compañeros

c) ¿Qué cree que pasaría con la longitud de la sombra, si Tales hubiese usado un bastón más grande o más pequeño? Discuta esa respuesta con sus compañeros

9. De acuerdo con el vídeo, responda los siguientes puntos.
a) Represente en un dibujo la situación que se planteó Eratóstenes, de acuerdo con el vídeo. Socialice su representación con los compañeros y explíquela.

12. Luego de conocer la historia de Eratóstenes, qué cualidades puede resaltar de este gran matemático. Socialice con sus compañeros tres de las cualidades que cree son las más destacables.

Nota: en rojo se destacan las consignan que se añadieron

Cambios análogos en cuanto a esta pauta del DUA se realizaron en el nivel de profundidad 3.

Los diseños ajustados de acuerdo a la rúbrica de evaluación, en el nivel de profundidad 2 y 3, se encuentran en el apéndice B y C respectivamente.

6. Conclusiones

En el presente capítulo se presentan algunas reflexiones generales sobre el proceso de diseño y valoración desarrollados en este trabajo. Lo anterior, en aras de responder al objetivo de investigación *plantear y valorar diseños didácticos basados en el componente histórico-epistemológico del razonamiento proporcional para favorecer la inclusión en clase de Matemáticas.* Estas conclusiones son suscitadas por la comparación entre lo esperado *a priori* con las actividades del diseño y los resultados de la valoración de acuerdo a la rúbrica.

Referente al proceso de diseño, se tuvo el reto de proponer una alternativa didáctica, en este caso la Historia y la Epistemología, en aras de desarrollar procesos inclusivos en el aula de Matemáticas, que cumplan con unos principios fundamentales, recogidos en el DUA, y favorezca la comprensión en todos los estudiantes. El marco teórico usado, permitió secuenciar las actividades y la generación de nuevo conocimiento en el estudiante, lo que fue muy bien valorado de acuerdo con la rúbrica de evaluación. Además de que se cumplieron las habilidades cognitivas de acuerdo con los niveles de profundidad trabajados, también se promovieron los procesos matemáticos. Ante esto, el balance es muy positivo, en la medida en que el diseño, en general, del cumplió con los requerimientos para una educación inclusiva.

De esta manera, la secuencia de actividades propuesta planteó tareas coherentes con los avances que arroja la literatura, para el desarrollo progresivo del pensamiento proporcional, partiendo de las etapas iniciales, y transitando de un razonamiento pre proporcional a proporcional, lo que permite estudiante una mejor comprensión de estas nociones de la proporcionalidad directa. Se tienen en cuenta las dificultades que plantea la literatura expuesta, presentes en la actividad matemática relacionada con el objeto matemático en cuestión. Estas ideas trabajadas, fueron corroboradas en la rúbrica de evaluación.

En el desarrollo del diseño, se evidenció también cómo se puede enfocar el estudio de la proporcionalidad desde el pensamiento variacional, y distanciarlo un poco del pensamiento numérico, no porque este último no sea necesario, sino que en el contexto en el que surgió históricamente la proporcionalidad relucen las ideas de comparación y variación, fundamentales tanto en el razonamiento proporcional, como también en el razonamiento variacional en general, y que a su vez fundamenta ulteriores objetos matemáticos y posibilita el desarrollo de posteriores habilidades relacionadas con el Cálculo.

Lo anterior es una muestra más de que la Historia y la Epistemología del concepto matemático debe por lo mínimo dar atisbos para guiar la enseñanza. En este trabajo, la Historia y la Epistemología toman un carácter más amplio: no solo apoyan y guían la enseñanza, sino que hacen parte de la enseñanza misma, como parte sustancial del diseño, que no solo capta el interés del estudiante, sino que favorece la superación de los obstáculos epistemológicos y el desarrollo de la comprensión. Lo anterior, se puede corroborar en la discusión de resultados en el capítulo anterior. El desarrollo del objeto matemático desde lo didáctico (uso de la Historia y la Epistemología), fue también valorado positivamente mediante la rúbrica de evaluación.

La Historia y la Epistemología de las Matemáticas, son un recurso invaluable, para el desarrollo de los procesos de enseñanza. No tener en cuenta la evolución histórico-epistemológica del concepto, descontextualiza las matemáticas y le quitan sentido. Por tanto, los maestros en formación deben recibir una fundamentación teórica en estos aspectos para poder desarrollar un aprendizaje significativo en los estudiantes. En este sentido, se debe también, y de acuerdo con uno de los principios del DUA, usar la historia como herramienta de motivación y posibilitar así un aprendizaje significativo.

La complejidad que supone para el sistema educativo desarrollar procesos inclusivos, no hace suficiente que una estrategia para la enseñanza posibilite los requerimientos. Sin embargo, como se resaltó, La Historia y la Epistemología pueden favorecer estos procesos. No obstante, y conscientes de la ardua tarea para hacer real y posible la educación inclusiva, de ninguna manera se debe limitar el proceso de enseñanza y aprendizaje a una sola estrategia para promoverla. Por el contrario, y como se evidenció en el diseño, hay otros recursos que deben considerarse también: el uso de las tecnologías digitales (SGD, vídeos), recursos literarios (historietas, cuentos, anécdotas), actividades con material concreto, etc. Lo anterior, obedece a que la educación inclusiva necesita de insumos que la propicien, y el docente debe ser consciente de este aspecto.

Como perspectivas para trabajos posteriores, se insta al educador matemático a proponer y evaluar alternativas que favorezcan la educación inclusiva. En particular, se invita a considerar la Historia y la Epistemología de las Matemáticas como mediadora de la enseñanza, o como guía para su desarrollo. Más aún cuando las Matemáticas tienen un acervo histórico bastante nutrido. Si bien, los hallazgos en este aspecto puedan ser incipientes, es urgentemente necesario presentar alternativas que posibiliten realmente la inclusión.

7. Referencias Bibliográficas

Arnaiz, P. (2000). Educar en y para la diversidad. En Soto, F. y López, J. (Coords.): *Nuevas Tecnologías, Viejas Esperanzas: Las Nuevas Tecnologías en el Ámbito de las Necesidades*

Especiales y la Discapacidad: Actas (pp. 18-29). Murcia: Consejería de Educación y Universidades.

Artacho, A. (2014). *La pirámide de Keops y el teorema de Tales* [Imagen]. Matemáticas cercanas. https://matematicascercanas.com/2014/04/06/la-piramide-de-keops/

Booth, T. & Ainscow, M. (2000). *ÍNDICE DE INCLUSIÓN: Desarrollando el aprendizaje y la participación en las escuelas* (A. López, trad.)

Constitución Política de Colombia [Const]. Art. 67. Julio 7 de 1991 (Colombia).

Cortés, W. y Cruz, J. (2018). *La enseñanza de la proporcionalidad, más allá de la regla de tres.* (Tesis de Maestría). http://hdl.handle.net/11349/22858

D´Amore, B. (2011). *Didáctica de la Matemática*. Editorial Magisterio.

Decreto 1421 de 2017 [Ministerio de Educación Nacional]. Por el cual se reglamenta en el marco de la educación inclusiva la atención educativa a la población con discapacidad. Agosto 29 de 2017.

Decreto 1860 de 1994 [Ministerio de Educación Nacional]. Por el cual se reglamenta parcialmente la Ley 115 de 1994, en los aspectos pedagógicos y organizativos generales. Agosto 03 de 1994.

Decreto 2028 de 1996 [Ministerio de Educación Nacional]. Por el cual se reglamenta la atención educativa para personas con limitaciones o con capacidades o talentos excepcionales. Noviembre 18 de 1996.

Díaz-Barriga, F., Lule, M., Rojas, S. y Saad, S. (1990). *Metodología de diseño curricular para educación superior*. Trillas. México D.F.

Dubeibi, D. y Parada, S. (2019). *Proceso comunicativo en estudiantes de séptimo grado: una aproximación desde el estudio de la razón y la proporción*. (Tesis de Maestría). Universidad Industrial de Santander. Bucaramanga. Colombia.

Fernández, A. (2009). *Razón y proporción: un estudio en la escuela primaria*. Universidad de Valencia.

Figueroa, I. y Muñoz, M. (2014). La Guía para la Inclusión Educativa como herramienta de autoevaluación Institucional: Reporte de una Experiencia. *Revista Latinoamericana de Inclusión Educativa*, *8*(2), 179-198. https://dialnet.unirioja.es/servlet/articulo?codigo=4994305

Gonzáles, P. (2004). La historia de las matemáticas como recurso didáctico e instrumento para enriquecer culturalmente su enseñanza. *SUMA*. *45*, 17-28. https://revistasuma.fespm.es/

Guacaneme, E. (2002). Una mirada al tratamiento de la proporcionalidad en textos escolares de matemáticas. *Revista EMA*, 7(1), 3-42. http://funes.uniandes.edu.co/1146/1/80_Guacaneme2002Una_RevEMA.pdf

Guacaneme, E. (2016). *Potencial formativo de la historia de la teoría euclidiana de la proporción en la constitución del conocimiento del profesor de Matemáticas*. (Tesis doctoral). http://hdl.handle.net/10893/10093

Gutiérrez, J (2019). *La Historia y la Epistemología en la Formación de un Ciudadano Matemáticamente Competente: un Acercamiento Desde el Estudio de la Trigonometría*. (Tesis de Maestría). http://tangara.uis.edu.co/biblioweb/tesis/2019/177232.pdf

Guzmán, M. (1993). *Tendencias Innovadoras en Educación Matemática*. Editorial Popular.

Guzmán, P. (2017). *La redondez de la tierra* [Imagen]. Ingenieros Especialistas. http://www.ingenierosespecialistas.com/2017/06/la-redondez-de-la-tierra.html

Howe, C., Luthman, S., Ruthven, K., Mercer, N., Hofmann, R., Ilie, S., & Guardia, P. (2015). Rational number and proportional reasoning in early secondary school: towards principled improvement in mathematics. *Research in Mathematics Education*, 17(1), 38-56. DOI: 10.1080/14794802.2015.1019914

Ley 115 de 1994. Por la cual se expide la ley general de educación. Julio 08 de 1994. DO. N°41214

Ley 2216 de 2022. Por medio de la cual se promueve la educación inclusiva y el desarrollo integral de niñas, niños, adolescentes y jóvenes con trastornos específicos de aprendizaje. Junio 23 de 2022. DO. N°52074

López, J. (2015). *La taxonomía de Bloom y sus actualizaciones.*

MEN. (1998). *Lineamientos curriculares del área de Matemáticas*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2003). *Estándares Curriculares para matemáticas*. Bogotá: MEN: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2016). *Derechos básicos de aprendizaje*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

MEN. (2017). *Fundamentación conceptual para la atención en el servicio educativo a estudiantes con necesidades educativas especiales*. Bogotá: Ministerio de Educación Nacional.

Mochón, S. (2012). Enseñanza del razonamiento proporcional y alternativas para el manejo de la regla de tres. *Educación matemática*, *24*(1), 133-157. https://www.redalyc.org/articulo.oa?id=40525850006

Obando, G., Vasco, C. y Arboleda, L. (2014). Enseñanza y aprendizaje de la razón, la proporción y la proporcionalidad: un estado del arte. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, *17*(1), 59-81. https://dx.doi.org/10.12802/relime.13.1713

Oller-Marcén, A. y Gairín J. (2013). La génesis histórica de los conceptos de razón y proporción y su posterior aritmetización. *Revista latinoamericana de investigación en matemática educativa*, 16(3), 317-338. https://www.researchgate.net/publication/260992469_La_genesis_historica_de_los_conceptos_de_razon_y_proporcion_y_su_posterior_aritmetizacion

ONU. (1948). *Declaración Universal de los Derechos Humanos*, United Nations. NR004682.pdf (un.org)

ONU. (2015). *Objetivos de Desarrollo Sostenible*. https://www.un.org/sustainabledevelopment/es/objetivos-de-desarrollo-sostenible/

ONU. (2016). *Comentario General N°4 de la Convención Sobre los Derechos de las Personas con Discapacidad.* CRPD/C/GC/4.https://undocs.org/Home/Mobile?FinalSymbol=CRPD%2FC%2FGC%2F4&Language=E&DeviceType=Desktop&LangRequested=False

Parada, S.E. (2021). Currículo para la inclusión en clase de Matemáticas. Conferencias presentada en el X Congreso Venezolano de Educación Matemática (X COVEM). Trasmitida el 15 de octubre. https://www.youtube.com/watch?v=G48yc931fVI

Pastor, A. (2018). Diseño Universal para el Aprendizaje un modelo para brindar oportunidades de aprender a todos los estudiantes. Educar es ofrecer oportunidades, 374, 21-27.

Torres, E. (2015). *El conocimiento del profesor de matemáticas en la práctica: enseñanza de la proporcionalidad* (tesis doctoral). Universidad Autónoma de Barcelona, Barcelona, España.

UNESCO. (1990). *Conferencia Mundial sobre Educación para Todos*. http://www.unesco.cl/medios/biblioteca/documentos/ept_jomtien_declaracion_mundial.pdf

UNESCO. (1990). *Declaración Mundial Sobre la Educación para todos. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000127583_spa*

UNESCO. (1994). *Conferencia Mundial sobre Necesidades Educativas Especiales: Acceso y Calidad*. https://unesdoc.unesco.org/ark:/48223/pf0000110753_spa

UNESCO. (2000). *Foro Mundial de la Educación* de Dakar. http://iin.oea.org/cursos_a_distancia/lectura%2017_disc.dakar.pdf

Valverde, A. y Castro, E. (2009). Actuaciones de maestros en formación en la resolución de problemas de proporcionalidad directa. En M.J. González, M.T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIII* (p. 523-531). Santander: SEIEM.

Velasco, A. (2022). *Profesores de matemáticas en ejercicio que reflexionan sobre la atención a la diversidad en clase de matemáticas* (Tesis de maestría). Universidad Industrial de Santander, Bucaramanga, Colombia.

Wilhelmi, M. (2017). Proporcionalidad en Educación Primaria y Secundaria. En Contreras, J., Arteaga, P., Cañadas, G., Gea, M., Giacomone, B. y López-Martín, M. (Eds.), *Actas del Segundo Congreso International Virtual sobre el Enfoque Ontosemiótico del Conocimiento y la Instrucción Matemáticos*. enfoqueontosemiotico.ugr.es/civeos.ht

Apéndices

Apéndice A. Estructura curricular ajustada acorde a la valoración

Apéndice A. Estructura curricular ajustada acorde a la valoración

Proyecto 707983: Diseños didácticos para la inclusión en Matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores.

ESTRUCTURA PARA LA INCLUSIÓN EN CLASE DE MATEMÁTICAS PARA EL CONJUNTO DE GRADO DE 4-5

Etapas	**Nivel de profundidad 2**		**Nivel de profundidad 3**	
Preguntas problematizadoras	**Propósito**	**Descriptores**	**Propósito**	**Descriptores**
¿Cómo se han resuelto problemas en la Historia usando razones y proporciones?	**Pensamiento Numérico** Identificar el concepto de razón, como comparación, para comprender problemas de tipo histórico.	**La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos** Plantea y ejecuta estrategias numéricas para resolver problemas históricos de proporcionalidad directa. Reconoce la razón como medida para comparar magnitudes. Compara las razones en una relación directamente proporcional y establece la proporción.	**Pensamiento Numérico** Comprender el concepto de razón y proporción y usarlos para resolver problemas del contexto histórico de las Matemáticas.	**La elaboración, comparación y ejercitación de procedimientos** Propone y realiza estrategias numéricas para resolver problemas históricos de proporcionalidad directa. Interpreta el concepto de razón para realizar comparaciones entre magnitudes.
	Pensamiento variacional Interpretar la variación en situaciones históricas de proporcionalidad directa	**Comunicación** Interpreta situaciones de variación proporcional utilizando el lenguaje natural.	**Pensamiento variacional** Explicar situaciones históricas de	**Comunicación** Explica cualitativamente situaciones de variación proporcional utilizando el lenguaje natural. .

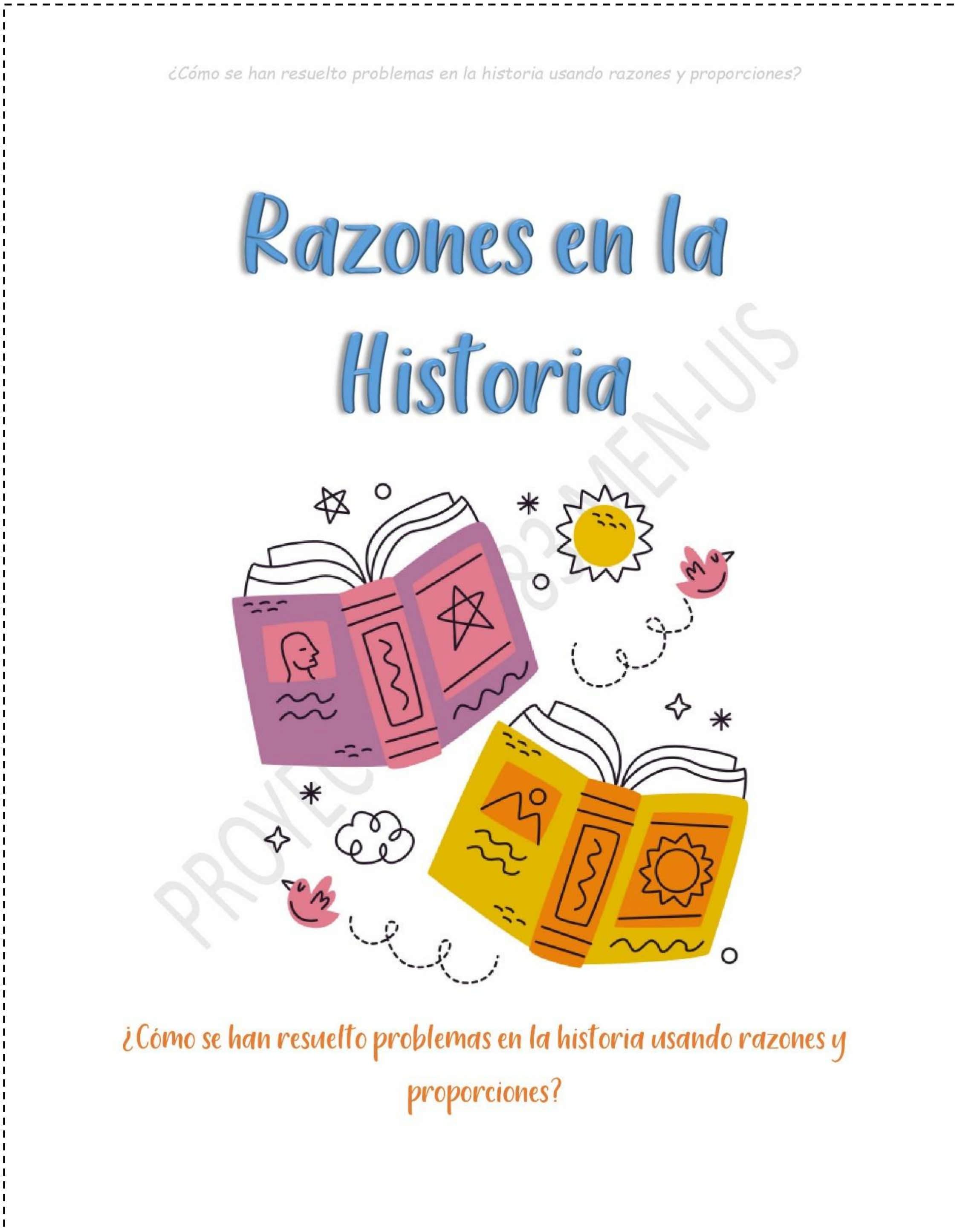
Material elaborado por: Sandra Evely Parada Rico y Jaiver David Rey Gómez

Proyecto 707983: Diseños didácticos para la inclusión en Matemáticas con la mediación de tecnologías: procesos de formación y reflexión con profesores.

		Razonamiento Justifica situaciones de proporcionalidad directa en mediante Geogebra. **Modelación** Interpreta esquemas (gráficos o verbales) que modelan situaciones de proporcionalidad directa.	variación proporcional directa e identificar propiedades de estas relaciones.	. **Razonamiento** Reconoce la razón de cambio en situaciones históricas de proporcionalidad directa, apoyado en Geogebra. Justifica características de una relación directamente proporcional como la igualdad de razones y la constancia de la razón. **Modelación** Construye representaciones gráficas que modelan situaciones de proporcionalidad directa.

Material elaborado por: Sandra Evely Parada Rico y Jaiver David Rey Gómez

Apéndice B. Diseño didáctico-versión estudiante (ajustado). Nivel de profundidad 2



¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

Primer momento

¿Sabías qué?

El planeta Tierra se formó hace aproximadamente 4.500 millones de años, y solo cuenta con un satélite natural conocido como la Luna.

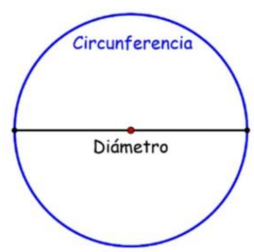
¡JUGUEMOS CON LA TIERRA Y LA LUNA!

1. Realicemos el siguiente experimento:

a) Organícense en pequeños grupos, de acuerdo a la orientación del profesor.

b) Tome la pita y los dos círculos de cartón que le entregará su profesor.

c) Use la pita para calcular la longitud de la circunferencia y el diámetro de cada círculo y registre esas longitudes en la siguiente tabla:



¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

	Tierra 	Luna 
Longitud de la circunferencia		
Diámetro		

2. Respondan grupalmente las siguientes preguntas de acuerdo al experimento

a) Complete la siguiente relación usando las longitudes de la Tierra.

$$\frac{Longitud\ circunferencia\ de\ la\ Tierra}{Diametro\ de\ la\ Tierra} \rightarrow \underline{\qquad\qquad}$$

b) ¿Cuál es la relación entre la longitud de la circunferencia de la Luna y su diámetro?

$$\underline{\qquad\qquad}$$

¿Sabías qué?

Una razón (en matemáticas) es una forma de relacionar dos medidas por medio del cociente.

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

d) Halle la razón entre las longitudes de la circunferencia y del diámetro de la Tierra y la Luna y regístrelas en la siguiente tabla.

	Tierra	Luna
		
Razón entre la longitud de la circunferencia y el diámetro.	__________	__________

e) Calcula el cociente de la razón de la Tierra y la Luna. (puedes usar la calculadora )

	Tierra	Luna
		
Cociente	__________	__________

f) ¿Qué particularidad observa entre los dos cocientes encontradas en el punto anterior?

____

____

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

Segundo momento

El profesor Javier, realizó un proyecto de matemáticas con los niños de 5°A sobre razones y proporciones. Para ello, les pidió que consultaran sobre el desarrollo histórico de este tema. Entre las tareas más interesantes que recibió el profesor destacó la de David, Daniel y Jennifer. Averigüemos por qué fueron las más interesantes para él…

David, es un niño muy curioso, le encanta ver películas, documentales y leer. Por ello, él centró su consulta en un problema del libro **Lilavati**, sobre repartos proporcionales.

Nota histórica

El Lilavati es un antiguo texto hindú, en el cual un padre se dirige a su hija Lilavati por medio de versos para proponerle problemas de Matemáticas.

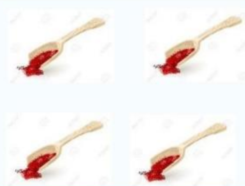
Veamos el problema:

¡Oh! Inteligente Lilavati,
hermosa niña de ojos temblorosos,
si dos palas de azafrán valen 6 niskas,
dime al instante, tú, la mejor comerciante,
¿cuánto azafrán podrás comprar con 18
niskas?

**Una niska era una moneda de oro en la cultura india.*

3. Con base en el problema de Lilavati responde las siguientes cuestiones:

a) Complete la siguiente tabla, dibujando las niskas correspondientes:

Palas de azafrán	Niskas
2 	6 
4 	
6 	

b) ¿Cuánto azafrán podría comprar Lilavati con 18 niskas? ¿Por qué?

____

____

c) ¿Si Lilavati quisiera comprar 4 palas de azafrán cuántas niskas necesitará? ¿Por qué?

____

____

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

Cuando David le muestra la tarea al profesor Javier, el profesor le muestra una manera más sencilla de resolver el problema, tal como lo hacían los chinos, explicándole lo siguiente:

Si sabemos cuánto vale 1 sola pala de azafrán, es mucho más fácil calcular el valor de otras palas de azafrán. Para ello debemos dividir las 6 niskas (que es lo que valen las 2 palas de azafrán) entre 2. Como $6 \div 2 = 3$, entonces **1 pala de azafrán vale 3 niskas.**

Luego de eso solo debo multiplicar ese valor por el número de palas de azafrán que se pidan.

4. Ayúdele a David a desarrollar la idea que le planteó el profesor.

a) Divida el valor de las palas de azafrán (6 niskas) entre 2. ¿Qué valor obtuvo?

$6 \div 2 =$

Procedimiento:

b) Con el valor hallado en el punto anterior, complete la siguiente tabla:

Palas de azafrán	Niskas
3	6
1	

c) ¿Cuál es el valor de una sola pala de azafrán?

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

Luego de completar la tabla, el profesor Javier le explica a David que:

El valor hallado en el punto anterior se conoce como **razón.**

Es decir:

La razón entre el valor en niskas y las palas de azafrán es:

6 $\div$ 2 = **3 niskas por cada pala de azafrán**

5. David, perplejo, comprueba que multiplicando está razón, es decir, **3**, por las palas de azafrán pedidas obtendrá su determinado valor en niskas.

a) Ayúdele a David a completar de nuevo la tabla, multiplicando las palas de azafrán de cada celda por la razón hallada (3) y responda las preguntas:

Palas de azafrán	Niskas
2 $\times 3$	6
4 $\times 3$	
6 $\times 3$	

b) ¿Por qué cree que multiplicando la razón (**3**) por las palas de azafrán se puede hallar su valor en niskas?. Discuta su respuesta con los demás compañeros

____

____

____

David le muestra al profesor la tabla diligenciada:

Palas de azafrán	Niskas
2	6
4	12
6	18

Entonces, el profesor le pide que halle la razón entre el valor en niskas y las palas de azafrán. Para ello, le sugiere que divida el valor de la columna izquierda entre el valor de la columna derecha en cada fila y halle el cociente:

David sigue este proceso, el cual se muestra a continuación:

$$\frac{6}{2} = 3 \qquad \frac{12}{4} = 3 \qquad \frac{18}{6} = 3$$

El profesor le explica lo siguiente:

Una relación es llamada **directamente proporcional** si existe la igualdad de razones, esta igualdad se conoce como la **proporción**.

se puede hacer una **proporción**, de la siguiente manera:

	6	es a	2
Cómo	12	es a	4

En lenguaje matemático, lo anterior quiere decir que:

$$\frac{6}{12} = \frac{2}{4}$$

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

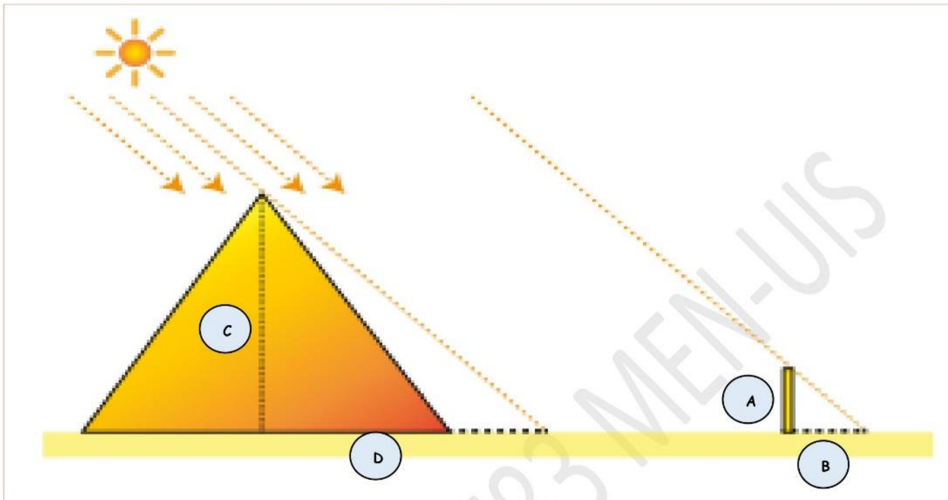
Tercer momento

Daniel, otro estudiante de 5-A, quiere ser arquitecto, ama el arte y pinta desde los cinco años. Daniel consultó sobre la Gran Pirámide de Egipto y cómo Tales de Mileto logró medir su altura.

Daniel, encuentra la siguiente historieta

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

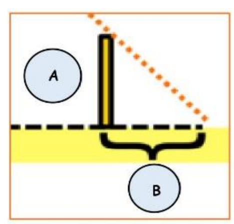
Luego de socializar la tarea con el profesor Javier, éste le explica que Tales usó un esquema como el que se muestra a continuación:



6. De acuerdo al esquema planteado, resuelva las siguientes cuestiones:
   a) Relacione cada medida con la letra en el esquema anterior.

Altura del bastón	C
Sombra del bastón	D
Altura de la pirámide	B
Sombra de la pirámide	A

Daniel observando el esquema que usó Tales, se da cuenta que puede hacer una comparación entre la altura del bastón y la sombra que proyecta. Él establece que puede determinar la razón $\frac{A}{B}$ ente la altura del bastón y la sombra que proyecta.



¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

b) Halle la razón entre la altura del bastón y la longitud de la sombra que proyecta, sabiendo que el bastón medía 2 metros y proyectaba una sombra de 3 metros.

$$\frac{Altura\ del\ bastón}{Longitud\ de\ la\ sombra\ del\ bastón} = \_\_\_$$

c) ¿Qué cree que pasaría con la longitud de la sombra, si Tales hubiese usado un bastón más grande o más pequeño? Discuta esa respuesta con sus compañeros

____

____

7. Comprobemos nuestra hipótesis: Ingrese al siguiente link de Geogebra, https://www.geogebra.org/m/egw5amtc

Observe la situación y mueva el deslizador (altura del bastón). Con base en su observación responda las siguientes preguntas.

a) ¿Qué pasa con la longitud de la sombra que proyecta el bastón cuando el bastón es más pequeño, es decir mide 1 metro de altura?

____

____

b) ¿Qué pasa con la longitud de la sombra que proyecta el bastón cuando el bastón es más grande, es decir mide 3 metros de altura?

____

____

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

c) Cambiando de altura del bastón en Geogebra, escriba las razones encontradas entre la altura del bastón y la longitud de la sombra que proyecta. Realice cada división (puedes usar la calculadora)

$\frac{}{}=$ $\frac{2}{3}=$ $\frac{}{}=$

d) ¿Qué puede observar entre el cociente de las distintas razones? ¿por qué cree que sucede esto?

____

____

Nota histórica

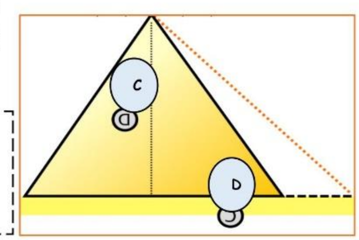
Tales de Mileto es considerado uno de los siete sabios de Grecia, hizo innumerables aportes a las Matemáticas, la Física y la Filosofía

¿Sabías qué?

La Gran pirámide de Egipto es una de las siete maravillas del mundo antiguo, se cree que fue construida por unas 4000 personas.

Ahora, el profesor le dice a Daniel que compare la altura de la pirámide con la longitud de su sombra.

e) ¿Cuál es la razón de la altura de la pirámide con la longitud de su sombra? Si la longitud de la sombra de la pirámide era de 220 m.



$\frac{Altura\ de\ la\ pirámide}{}$

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

El profesor tal y como le explicó a David, le enseña a Daniel cómo plantear la proporción.

Daniel, observe que la razón entre la medida del bastón de tales y la sombra que proyecta es igual a:

$$\frac{\text{Altura del bastón}}{\text{Longitud de la sombra del bastón}}$$

Y también se puede hallar la razón entre la altura de la pirámide y su sombra, la cual es

$$\frac{\text{Altura de la pirámide}}{\text{Longitud de la sombra de la pirámide}}$$

Ahora bien, como la relación (altura-longitud de sombra) es directamente proporcional, se puede hacer una **proporción**, la cual es una igualdad de razones, de la siguiente manera:

La altura del bastón es a la longitud de la sombra del bastón

Cómo la altura de la pirámide es a la longitud de la sombra de la pirámide

En lenguaje matemático, lo anterior quiere decir que:

$$\frac{\textbf{Altura del bastón}}{\textbf{Longitud de la sombra del bastón}} = \frac{\textbf{Altura de la piramide}}{\textbf{Longitud de la sombra de la piramide}}$$

8. Con la anterior explicación, halle usted mismo la altura de la pirámide, realizando los siguientes pasos.
a) Reemplace los datos originales en la proporción.

Recuerde que:

Altura del bastón= 2 m.

Longitud de la sombra del bastón= 3 m.

Altura de la pirámide= ¿?

Longitud de la sombra de la pirámide = 220 m.

$$\frac{\text{Altura del bastón}}{\text{Longitud de la sombra del bastón}} = \frac{\text{Altura de la pirámide}}{\text{Longitud de la sombra de la piramide}} \rightarrow \frac{\quad}{\quad} = \frac{\text{Altura de la pirámide}}{\quad}$$

b) Despeje la altura de la pirámide, para ello, multiplique 220 a ambos lados de la igualdad y luego simplifique.

$$\frac{2}{3} \times 220 = \frac{A.\,de\ la\ piramide}{\cancel{220}} \cancel{\times 220}$$

c) De la igualdad que resultó, realice las operaciones. Primero multiplique 2 × 220, y luego divida este resultado entre 3.

Procedimiento

$$\frac{2}{3} \times 220 = Altura\ de\ la\ pirámide$$

$$\frac{2\ \times\ 220}{3} = Altura\ de\ la\ pirámide$$

$$\frac{\quad}{3} = Altura\ de\ la\ pirámide$$

$Altura\ de\ la\ pirámide =$ m.

d) ¿Cuál es la altura de la pirámide?

Altura de la pirámide ≈ ________ m.

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

Cuarto momento

Jennifer es otra niña de 5-A, sueña desde pequeña con ser astrónoma. Ella consultó sobre cómo Eratóstenes logró medir la longitud de la circunferencia de la tierra con un palo. Para esto, observó el siguiente vídeo.

Obsérvelo usted también

ERASTÓTENES Y LA MEDIDA DE LA TIERRA

https://www.youtube.com/watch?v=2tmiWJLSMcA

Nota histórica

Eratóstenes fue un matemático, geógrafo y astrónomo griego, conocido por ser la primera persona que calculó la longitud de la circunferencia de la tierra.

9. De acuerdo con el vídeo, responda los siguientes puntos.

a) Represente en un dibujo la situación que se planteó Eratóstenes, de acuerdo con el vídeo. Socialice su representación con los compañeros y explíquela.

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

b) ¿Cuál era el ángulo entre los rayos del sol y el palo en Alejandría?

c) ¿Cuál era la distancia en km. entre Alejandría y Siena?

10. Observe la siguiente animación en Geogebra
https://www.geogebra.org/m/m7vaptn3

Mueva el punto H y responda:

a) ¿Qué pasa con el ángulo solar cuando se mueve el punto H?

b) ¿Crees que relación longitud de la tierra y ángulo solar es una relación directamente proporcional? ¿por qué?

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

Jennifer, hace el siguiente esquema de acuerdo a lo planteado por Eratóstenes:

Si	La longitud de la circunferencia de la tierra	es a	360°
Como	800 km	es	7°

Entonces, sabemos que:

$$\frac{longitud\ de\ la\ circunferencia\ de\ la\ tierra}{800\ km} = \frac{360°}{7°}$$

11. Con la anterior proporción, ayúdele a Jennifer a encontrar la longitud de la circunferencia de la tierra, haciendo las operaciones necesarias como en el punto 8.

12. Luego de conocer la historia de Eratóstenes, qué cualidades puede resaltar de este gran matemático. Socialice con sus compañeros tres de las cualidades que cree son las más destacables.

____

____

¡fin!

Apéndice C. Diseño didáctico-versión estudiante (ajustado). Nivel de profundidad 3

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

Proporciones en la Historia

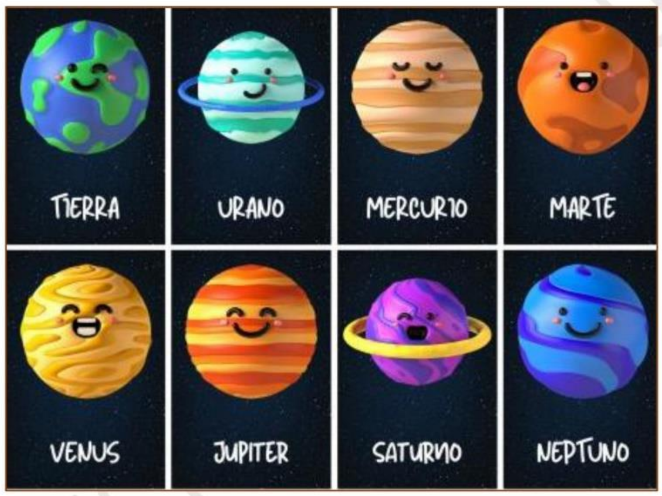
¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

Material elaborado por Sandra Evely Parada Rico y Jaiver David Rey Gómez

Primer momento

¿Sabías qué?

Los planetas se formaron hace unos 4.500 millones de años, en la actualidad nuestro sistema solar está integrado por 8 planetas: Mercurio, Venus, Tierra, Marte, Júpiter, Saturno, Urano y Neptuno.



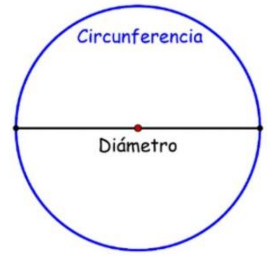
¡JUGUEMOS CON LOS PLANETAS!

1. Realicemos el siguiente experimento:

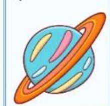
a) Organícense en pequeños grupos, de acuerdo a la orientación del profesor.

b) Tome la pita y los ocho círculos de cartón que le entregará su profesor.

c) Use la pita para calcular la longitud de la circunferencia y el diámetro de cada círculo y registre esas longitudes en la siguiente tabla:



¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

Planeta	Mercurio 	Venus 	Tierra 	Marte 	Júpiter 	Saturno 	Urano 	Neptuno 
Longitud de la circunferencia								
Diámetro								

2. Responda las preguntas de acuerdo a el experimento realizado:

a) Complete la siguiente relación usando las longitudes de Mercurio

$$\frac{Longitud\ circunferencia\ de\ Mercurio}{Diametro\ de\ Mercurio} \rightarrow \_\_\_\_\_$$

b) ¿Cuál es la relación entre la longitud de la circunferencia de la Tierra y su diámetro?

—

¿Sabías qué?

Una razón (en matemáticas) es la comparación entre dos medidas por medio del cociente.

Material elaborado por Sandra Evely Parada Rico y Jaiver David Rey Gómez

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

c) Halle la razón entre las longitudes de la circunferencia y del diámetro de los planetas y regístrelas en la siguiente tabla.

Planeta	Mercurio	Venus	Tierra	Marte	Júpiter	Saturno	Urano	Neptuno
Razón entre la circunferencia y el diámetro	___	___	___	___	___	___	___	___

d) Calcula el cociente la razón de Venus, Júpiter y Saturno. Escriba el procedimiento (puedes usar la calculadora)

Planeta	Venus	Júpiter	Saturno
cocientes			

e) ¿Qué particularidad observa entre los cocientes encontradas en el punto anterior?

____

____

Material elaborado por Sandra Evely Parada Rico y Jaiver David Rey Gómez

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

Segundo momento

El profesor Javier, realizó un proyecto de matemáticas con los niños de 5°A sobre razones y proporciones. Para ello, les pidió que consultaran sobre el desarrollo histórico de este tema. Entre las tareas más interesantes que recibió el profesor destacó la de David, Daniel y Jennifer. Averigüemos por qué fueron las más interesantes para él...

David, es un niño muy curioso, le encanta ver películas, documentales y leer. Por ello, él centró su consulta en un problema del libro **Lilavati**, sobre repartos proporcionales.

Nota histórica

El Lilavati es un antiguo texto hindú, en el cual un padre se dirige a su hija Lilavati por medio de versos para proponerle problemas de Matemáticas.

Veamos el problema:

¡Oh! Inteligente Lilavati,
hermosa niña de ojos temblorosos,
si dos palas de azafrán se compran con 6 niskas, dime al instante, tú, la mejor comerciante,
¿cuánto azafrán podrás comprar con 18 niskas?

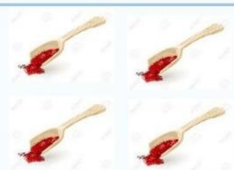
**Una niska era una moneda de oro en la cultura india.*

Material elaborado por Sandra Evely Parada Rico y Jaiver David Rey Gómez

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

3. Teniendo en cuenta la historia de Lilavati, responda las siguientes cuestiones:

a) Complete la siguiente tabla, dibujando las niskas correspondientes:

Palas de azafrán	Niskas
2 	
4 	
6 	
8 	

b) ¿Cuánto azafrán podría comprar Lilavati con 18 niskas? ¿Por qué?

____

____

c) ¿Si Lilavati quisiera comprar 4 palas de azafrán cuántas niskas necesitará? ¿Por qué?

____
____

Si sabemos cuánto vale 1 sola pala de azafrán, es mucho más fácil calcular el valor de otras palas de azafrán. Para ello debemos dividir las 6 niskas (que es lo que valen las 2 palas de azafrán) entre 2. Como 6÷2=3, entonces **1 pala de azafrán vale 3 niskas.**

Luego de eso solo debo multiplicar ese valor por el número de palas de azafrán que se pidan.

Cuando David le muestra la tarea al profesor Javier, el profesor le muestra una manera más sencilla de resolver el problema, tal como lo hacían los chinos, explicándole lo siguiente:

4. Ayúdele a David a desarrollar la idea que le planteó el profesor.

a) Divida el valor de las palas de azafrán (6 niskas) entre 2. ¿Qué valor obtuvo?

b) Con el valor hallado en el punto anterior, complete la siguiente tabla:

Palas de azafrán	Niskas
3	6
1	

Material elaborado por Sandra Evely Parada Rico y Jaiver David Rey Gómez

____

____

c) ¿Cuál es el valor de una sola pala de azafrán?

Luego de completar la tabla, el profesor Javier le explica a David que:

El valor hallado en el punto anterior se conoce como **razón.**

Es decir:

La razón entre el valor en niskas y las palas de azafrán es:

6 $\div$ 2 = **3 niskas por cada pala de azafrán**

David, perplejo, comprueba que multiplicando está razón, es decir, **3**, por las palas de azafrán pedidas obtendrá su determinado valor en niskas.

Palas de azafrán	Niskas
2 $\times 3$	6
4 $\times 3$	
6 $\times 3$	
8 $\times 3$	

d) Ayúdele a David a completar de nuevo la tabla, multiplicando las palas de azafrán de cada celda por la razón ***3***

e) por qué cree que multiplicando por la razón (3) los valores de la columna de la izquierda, se pueden obtener los valores de la columna de la derecha? Discuta su respuesta con los demás compañeros

____

____

le muestra al profesor la tabla diligenciada:

Palas de azafrán	Niskas
2	6
4	12
6	18
8	24

Entonces, el profesor le pide que halle la razón entre el valor en niskas y las palas de azafrán. Para ello, le sugiere que divida el valor de la columna izquierda entre el valor de la columna derecha en cada fila y halle el cociente:

David sigue este proceso, el cual se muestra a continuación:

$$\frac{6}{2} = 3 \qquad \frac{12}{4} = 3 \qquad \frac{18}{6} = 3 \qquad \frac{24}{8} = 3$$

El profesor le explica lo siguiente:

Una relación es llamada **directamente proporcional** si existe la igualdad de razones, esta igualdad se conoce como la **proporción**.

se puede hacer una **proporción**, por ejemplo, de la siguiente manera:

	6	es a	2
Cómo	12	es a	4

En lenguaje matemático, lo anterior quiere decir que:

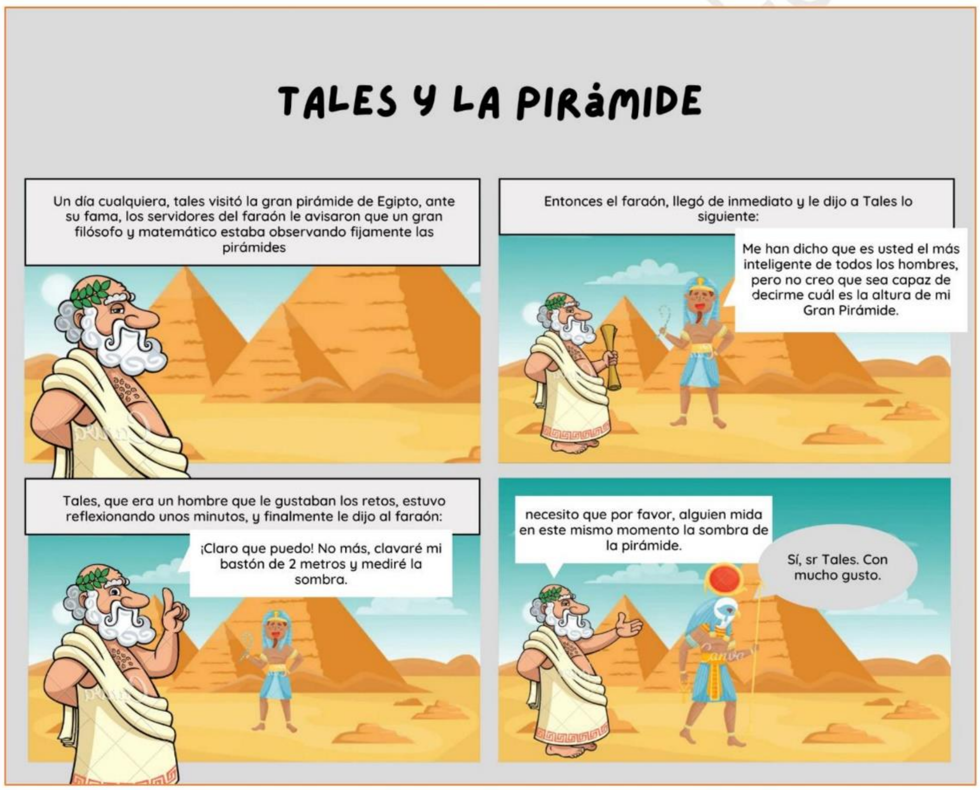
$$\frac{6}{12} = \frac{2}{4}$$

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

Tercer momento

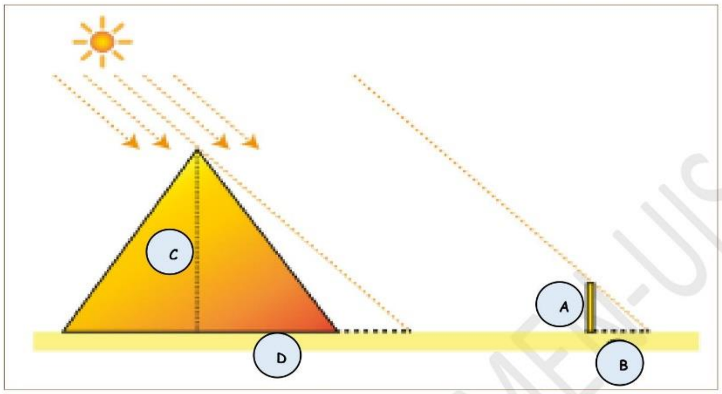
Daniel, otro estudiante de 5-A, quiere ser arquitecto, ama el arte y pinta desde los cinco años. Daniel consultó sobre la Gran Pirámide de Egipto y cómo Tales de Mileto logró medir su altura.

Daniel, encuentra la siguiente historieta



Material elaborado por Sandra Evely Parada Rico y Jaiver David Rey Gómez

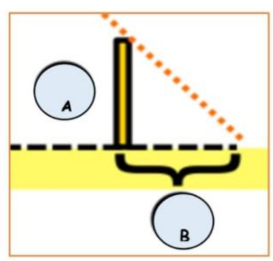
Luego de socializar la tarea con el profesor Javier, éste le explica que Tales usó un esquema como el que se muestra a continuación:



5. Ayúdele a Daniel a relacionar cada medida con la letra en el esquema anterior.

Altura del bastón	C
Sombra del bastón	D
Altura de la pirámide	B
Sombra de la pirámide	A

Daniel observando el esquema que usó Tales, se da cuenta que puede hacer una comparación entre la altura del bastón y la sombra que proyecta. Él establece que puede determinar la razón $\frac{A}{B}$ ente la altura del bastón y la sombra que proyecta.



6. A partir de la historieta, responda:

a) Halle la razón entre la altura del bastón y la longitud de la sombra que proyecta, sabiendo que el bastón medía 2 metros y proyectaba una sombra de 3 metros.

—

b) ¿Qué cree que pasaría con la longitud de la sombra, si Tales hubiese usado un bastón más pequeño? Discuta esta respuesta con sus compañeros.

____

____

c) ¿Y si Tales hubiese usado un bastón más grande? Discuta esta respuesta con sus compañeros.

____

____

7. Comprobemos nuestra hipótesis: Ingrese al siguiente link de Geogebra, https://www.geogebra.org/m/rvrqtbf8 y observe lo que sucede cuando mueve el deslizador (altura del bastón). Con base en su observación responda las siguientes preguntas:

a) ¿Qué pasa con la longitud de la sombra que proyecta el bastón cuando el bastón es más grande?

____

____

b) ¿Qué pasa con la longitud de la sombra que proyecta el bastón cuando el bastón es más pequeño?

____

____

c) Cambiando de altura del bastón en Geogebra, escriba algunas de las razones encontradas entre la altura del bastón y la longitud de la sombra que proyecta. Realice cada división (puedes usar la calculadora)

—= —= —=

d) ¿Qué puede observar entre el cociente de las distintas razones? ¿por qué sucede esto?

____

____

Nota histórica

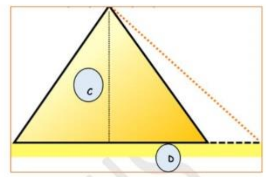
Tales de Mileto es considerado uno de los siete sabios de Grecia, hizo innumerables aportes a las Matemáticas, la Física y la Filosofía

¿Sabías qué?

La Gran pirámide de Egipto es una de las siete maravillas del mundo antiguo, se cree que fue construida por unas 4000 personas.

Ahora, el profesor le dice a Daniel que compare la altura de la pirámide con la longitud de su sombra.

e) ¿Cuál es la razón de la altura de la pirámide con la longitud de su sombra? Si la longitud de la sombra de la pirámide era de 220 m.



$$\frac{Altura\ de\ la\ pirámide}{}$$

El profesor le explicó a Daniel algunos conceptos matemáticos importantes.

Una **razón** es la comparación entre dos medidas por medio del cociente.

Por ejemplo, la razón entre la medida del bastón de tales y la sombra que proyecta es igual a

$$\frac{Altura\ del\ bastón}{Longitud\ de\ la\ sombra\ del\ bastón}$$

Y también se puede hallar la razón entre la altura de la pirámide y su sombra, la cual es

$$\frac{Altura\ de\ la\ pirámide}{Longitud\ de\ la\ sombra\ de\ la\ pirámide}$$

Ahora bien, como la relación (altura-longitud de sombra) es directamente proporcional, se puede hacer una **proporción**, la cual es una igualdad de razones, de la siguiente manera:

La altura del bastón	es a	la longitud de la sombra del bastón
Cómo la altura de la pirámide	es a	la longitud de la sombra de la pirámide

En lenguaje matemático, lo anterior quiere decir que:

$$\frac{\boldsymbol{Altura\ del\ bastón}}{\boldsymbol{Longitud\ de\ la\ sombra\ del\ bastón}} = \frac{\boldsymbol{Altura\ de\ la\ piramide}}{\boldsymbol{Longitud\ de\ la\ sombra\ de\ la\ piramide}}$$

8. Con la anterior explicación, halle usted mismo la altura de la pirámide, realizando los siguientes pasos.

a) Reemplace los datos originales en la proporción.

- Recuerde que:
- Altura del bastón= 2 m.
- Longitud de la sombra del bastón= 3 m.
- Altura de la pirámide= ¿?
- Longitud de la sombra de la pirámide = 220 m.

$$\frac{\quad}{\quad} = \frac{Altura\ de\ la\ pirámide}{\quad}$$

b) Despeje la altura de la pirámide, para ello, multiplique 220 a ambos lados de la igualdad y luego simplifique.

$$\frac{2}{3} \times 220 = \frac{A. de\ la\ piramide}{220} \times 220$$

c) De la igualdad que resultó, realice las operaciones. Primero multiplique 2 × 220, y luego divida este resultado entre 3.

Procedimiento

$$\frac{2}{3} \times 220 = Altura\ de\ la\ pirámide$$

$$\frac{2\ \times\ 220}{3} = Altura\ de\ la\ pirámide$$

$$\frac{\quad}{3} = Altura\ de\ la\ pirámide$$

$Altura\ de\ la\ pirámide =$ m.

Cuarto momento

Jennifer es otra niña de 5-A, sueña desde pequeña con ser astrónoma. Ella consultó sobre cómo Eratóstenes logró medir la longitud de la circunferencia de la tierra con un palo. Para esto, observó el siguiente vídeo.

Obsérvelo usted también

ERASTÓTENES Y LA MEDIDA DE LA TIERRA

https://www.youtube.com/watch?v=2tmiWJLSMCA

Nota histórica

Eratóstenes fue un matemático, geógrafo y astrónomo griego, conocido por ser la primera persona que calculó la longitud de la circunferencia de la tierra.

9. A partir del video Eratóstenes, realice las siguientes actividades.

a) Represente en un dibujo la situación que se planteó Eratóstenes. Socialice su representación con los compañeros y explíquela.

b) ¿Cuál fue el hecho astronómico que ocurrió en Siena al medio día, lo cual le permitió a Eratóstenes calcular la longitud de la circunferencia de la tierra?

____
____

c) ¿Cuál era el ángulo entre los rayos del sol y el palo?

____
____

d) ¿Cuál era la distancia en km. entre Alejandría y Siena?

____
____

10. Observe el archivo de Geogebra https://www.geogebra.org/m/m7vaptn3 y responda:

a) ¿Crees que relación longitud de la tierra y ángulo solar es una relación directamente proporcional? ¿por qué?

____
____
____

b) Realice la operación 800÷ 7 y con esto escriba cuántos kilómetros equivalen a cada grado.

800 KM ÷ 7° = _____ km por cada grado.

Jennifer, hace el siguiente esquema de acuerdo a lo planteado por Eratóstenes:

Si	La longitud de la circunferencia de la tierra	es a	360°
Como	800 km	es	7°

Entonces, sabemos que:

$$\frac{longitud\ de\ la\ circunferencia\ de\ la\ tierra}{800\ km} = \frac{360°}{7°}$$

c) Con la anterior proporción, ayúdele a Jennifer a encontrar la longitud de la circunferencia de la tierra, haciendo las operaciones necesarias.

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

11. Como Jennifer es tan curiosa, le pregunta al profesor que hubiese pasado si Eratóstenes no estuviera en Alejandría sino en otras ciudades (sobre el mismo meridiano). Para ello, registra algunos datos en la siguiente tabla:

Distancia a Siena	Ángulo solar
Alejandría= 800 km	7
El Cairo= 1028 km	9
Atenas= 1600 km	14

a) Observe de nuevo la simulación en Geogebra https://www.geogebra.org/m/m7vaptn3 , y verifique los datos de la tabla anterior. (Recuerde que hay un pequeño margen de error).

b) Halle las razones, entre la distancia a Siena de cada ciudad, y su correspondiente ángulo solar. (puedes usar la calculadora)

Alejandria	El Cairo	Atenas
$\frac{800}{7}=114,2$	$\frac{}{}=$	$\frac{}{}=$

c) ¿Qué observa de las tres razones? ¿por qué sucede esto?

____
____
____

Material elaborado por Sandra Evely Parada Rico y Jaiver David Rey Gómez

d) Si en efecto, Eratóstenes no hubiese estado en Alejandría sino en Atenas o El Cairo, ¿hubiese podido medir la longitud de la circunferencia de la tierra? Explique por qué.

____
____
____
____

12. Según Eratóstenes la longitud de la circunferencia de la tierra era de aproximadamente 41.150 km. Halle **el diámetro** aproximado de la tierra, usando la razón $\frac{longitud\ de\ la\ circunferencia\ de\ la\ tierra}{diámetro}$ encontrada en el punto 5 del primer momento y haciendo las operaciones necesarias.

¿Cómo se han resuelto problemas en la historia usando razones y proporciones?

13. Eratóstenes en su juventud fracasó como filósofo, pero luego de muchos intentos logró pasar a la historia como la primera persona que midió la circunferencia de la tierra solo con un palo. ¿Qué reflexión para su vida le deja la historia de Eratóstenes?
    Socialice esta reflexión con sus compañeros

¡Fin!

Material elaborado por Sandra Evely Parada Rico y Jaiver David Rey Gómez