

**¿Cuándo la función inversa es igual a la función
recíproca?**

ÉRIKA ALEJANDRA VELASCO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2006

¿Cuándo la función inversa es igual a la función
recíproca?

ÉRIKA ALEJANDRA VELASCO

Monografía presentada como
requisito para optar al título de
Licenciada en Matemáticas

Marlio Paredes
Director

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE CIENCIAS
ESCUELA DE MATEMÁTICAS
BUCARAMANGA

2006

*A Dios y mi familia
por su amor incondicional*

Agradecimientos

Agradezco muy especialmente a:

- **Dios**, por darme la fortaleza y la sabiduría para lograr todos mis propósitos.
- **Mis padres Ligia Velasco y Jorge Rodríguez**, por brindarme apoyo incondicional, comprensión, amor y porque sin ellos hoy este proyecto no sería una realidad.
- **Mis hermanos Jorge, Jonathan, Esthefany**, por estar conmigo cada instante de mi vida. por su apoyo moral, afectivo y ser quienes han compartido conmigo muy bellos momentos.
- **Mi tío Alfonso**, por su cariño y apoyo en el transcurso de mi vida.
- Al profesor **Marlio Paredes**, por su colaboración y por su acertada orientación para la realización de este trabajo.
- Los **profesores**, por sus aportes en mi formación académica.
- Mis **compañeros Adriana, Elver, John Edwin, Luisa, Tilson**, que de una u otra manera me apoyaron, colaboraron y me brindaron amistad incondicional.

TITLE: WHEN IS THE INVERSE FUNCTION THE SAME TO THE RECIPROCAL FUNCTION*

AUTHOR: ÉRIKA ALEJANDRA VELASCO**

KEY WORDS: function, inverse, reciprocal, continuity, disconnex, n -cycle, n -circuito .

DESCRIPTION

This monograph presents the article “When does $f^{-1} = \frac{1}{f}$?”, take from the American Mathematical Monthly Magazine, Vol 105, the article works on the solution in the real case, in the complex case and in regions simply connex. We will only show the case concerned to the real solution, because the other two parts require tools that we do not use. The objective is to show when the reciprocal function and the inverse function are the same, and to find the conditions that f must have to let it to happen. Suppose that f is a function one to one of any G subset of the reals in the same, then f has inverse, and applies G in the same. We assume that G does not contain the origin for that $1/f$ is defined completely in G . Then we ask can f have the property of inverse function the same to the reciprocal function. It has been proved that in the elemental calculus courses that functions with the property exist, but they are not easy to find.

The monograph consists of three chapter, the first one talk about some concepts and properties of the functions, the second one presents properties of the continuous functions indispensables for the reading of the third chapter where we work on the solution of the property in the real numbers, we show some examples and their respective graphics.

*Monograph.

** Faculty of Sciences. Mathematics School. Director: Marlio Paredes.

TÍTULO: ¿CUÁNDO LA FUNCIÓN INVERSA ES IGUAL A LA FUNCIÓN RECÍPROCA?*

AUTOR: ÉRIKA ALEJANDRA VELASCO**

PALABRAS CLAVES: función, inversa, recíproca, continuidad, disconexo, n -ciclo, n -circuito.

DESCRIPCIÓN

Esta monografía, presenta el artículo “When does $f^{-1} = \frac{1}{f}$?”, tomado de la revista American Mathematical Monthly, Vol 105, el artículo trabaja la solución en el caso real, en el caso complejo y en regiones simplemente conexas. Nosotros sólo mostraremos el caso concerniente a la solución real, ya que las otras dos partes requieren herramientas que no manejamos. El objetivo es mostrar cuando la función recíproca y la función inversa son iguales, y encontrar las condiciones que f debe cumplir para que esto suceda. Supongamos que f es una función uno a uno de algún subconjunto G de los reales sobre el mismo, entonces f tiene inversa, y aplica a G sobre el mismo. Asumimos que G no contiene el origen, para que $1/f$ esté definida completamente en G . Entonces nos preguntamos ¿puede f tener la propiedad de que la función inversa sea igual a la función recíproca? Se ha demostrado en los cursos de cálculo elemental que funciones con la propiedad existen, pero no son fáciles de encontrar .

La monografía contiene tres capítulos, el primero trata sobre algunos conceptos y propiedades de las funciones, en el segundo presenta propiedades de las funciones continuas indispensables para la lectura de el tercer capítulo donde tratamos la solución de la propiedad en los números reales y mostramos algunos ejemplos y sus respectivas gráficas.

*Monografía.

** Facultad de Ciencias. Escuela de Matemáticas. Director: Marlio Paredes.

Índice general

INTRODUCCIÓN	1
1. Funciones	2
1.1. Definición de función	2
1.2. Funciones monótonas	5
2. Funciones continuas	7
3. Solución en \mathbb{R}	17
3.1. Soluciones continuas a trozos	20
3.2. Un ejemplo con gráfica densa	29
BIBLIOGRAFÍA	31

Introducción

Esta monografía, presenta el artículo “When does $f^{-1} = \frac{1}{f}$?”, tomado de la revista American Mathematical Monthly, Vol 105, el artículo trabaja la solución en el caso real, en el caso complejo y en regiones simplemente conexas. Nosotros sólo mostraremos el caso concerniente a la solución real, ya que las otras dos partes requieren herramientas que no manejamos. El objetivo es mostrar cuando la función recíproca y la función inversa son iguales, y encontrar las condiciones que f debe cumplir para que esto suceda. Supongamos que f es una función uno a uno de algún subconjunto G de los reales sobre el mismo, entonces f tiene inversa, y aplica a G sobre el mismo. Asumimos que G no contiene el origen, para que $1/f$ esté definida completamente en G . Entonces nos preguntamos ¿puede f tener la propiedad de que

$$f^{-1} = \frac{1}{f} ? \tag{1}$$

Se ha demostrado en los cursos de cálculo elemental que funciones con la propiedad (1) existen, pero no son fáciles de encontrar .

La monografía contiene tres capítulos, el primero trata sobre algunos conceptos y propiedades de las funciones, en el segundo presenta propiedades de las funciones continuas indispensables para la lectura de el tercer capítulo donde tratamos la solución de la ecuación (1) en los números reales y mostramos algunos ejemplos.

Capítulo

1

Funciones

1.1. Definición de función

Una función $f : A \rightarrow B$, consta de tres partes, un conjunto A llamado dominio de la función o conjunto donde la función esta definida, un conjunto B llamado codominio de la función o conjunto donde la función toma valores y una regla que permite asociar de modo bien determinado a cada elemento $x \in A$, un único elemento $f(x) \in B$, llamado valor que asume la función en x .

Definición 1. *La gráfica de una función $f : A \rightarrow B$ es un subconjunto $G(f)$ del producto cartesiano $A \times B$ formado por parejas ordenadas $(x, f(x))$, donde $x \in A$, es decir:*

$$\text{Gr}(f) = \{(x, y) \in A \times B : y = f(x)\}.$$

Para que un subconjunto $G \subset A \times B$ sea la gráfica de una función $f : A \rightarrow B$, es necesario y suficiente que para $x \in A$, exista un único punto $(x, y) \in G$ cuya primera coordenada sea x .

Definición 2. *Una función $f : A \rightarrow B$ se llama inyectiva o uno a uno, cuando dados x, y cualesquiera en A , $f(x) = f(y)$ implica $x = y$. En otras palabras $x \neq y$ en A implica $f(x) \neq f(y)$ en B .*

Definición 3. Una función $f : A \rightarrow B$ se llama *sobreyectiva*, cuando para todo $y \in B$, existe por lo menos un $x \in A$ tal que $f(x) = y$.

Ejemplo 1. Sea $f : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por $f(x) = x^2$. Entonces f no es *inyectiva*, pues $f(-3) = f(3)$, sin embargo $-3 \neq 3$. Tampoco es *sobreyectiva*, pues no existe $x \in \mathbb{Z}$ tal que $x^2 = -1$.

Ejemplo 2. Sea $g : \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}$, definida por $g(x) = 3x + 1$, entonces g es *inyectiva*, pues si $3x + 1 = 3y + 1$, entonces $3x = 3y$, de donde $x = y$; pero g no es *sobreyectiva*, ya que no existe un $x \in \mathbb{Z}$ tal que $3x + 1 = 0$.

Ejemplo 3. Sea $h : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, definida por $h(1) = 1$ y para todo número natural $x > 1$, $h(x)$ es el número de factores primos distintos de la descomposición de x . Entonces h es *sobreyectiva*, pues $h(2) = 1$, $h(6) = 2$, $h(30) = 3$, $h(210) = 4$, etc., es claro que h no es *inyectiva*, ya que si x, y son dos primos distintos, entonces $h(x) = h(y)$.

Definición 4. Una función $f : A \rightarrow B$ se llama *biyectiva*, cuando es *inyectiva* y *sobreyectiva* al mismo tiempo.

Ejemplo 4. Dados $a, b \in \mathbb{Q}$, con $a \neq 0$, la función $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$, definida por $f(x) = ax + b$, es una *biyección*.

1. Si $f(x) = f(y)$, es decir $ax + b = ay + b$, entonces $ax = ay$, de ahí $x = y$, luego f es *inyectiva*.
2. Dado $y \in \mathbb{Q}$, el número $x = \frac{y-b}{a}$ es tal que $f(x) = y$, pues

$$f(x) = f\left(\frac{y-b}{a}\right) = a\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = y - b + b = y.$$

Por tanto, f es *sobreyectiva*.

Definición 5. Sea $X \subset A$, sea una función $f : A \rightarrow B$. La imagen de X por la función f es el conjunto $f(X)$ formado por los valores $f(x)$ que f asume en los puntos $x \in X$. Es decir

$$f(X) = \{f(x) : x \in X\} = \{y \in B : y = f(x), x \in X\}.$$

Es claro que $f(X)$ es subconjunto de B .

Definición 6. Sea $X \subset A$, sea una función $f : A \rightarrow B$, consideremos un conjunto $Y \subset B$. La imagen inversa de Y por la función f es el conjunto $f^{-1}(Y)$, formado por todos los puntos $x \in A$ tales que $f(x) \in Y$. Es decir

$$f^{-1}(Y) = \{x \in A : f(x) \in Y\}.$$

Ejemplo 5. Sea \mathbb{R} el conjunto de números reales. Definimos $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ por $f(x) = x^2$. Entonces la imagen de f , es decir el conjunto $f(\mathbb{R})$, es el conjunto de números reales mayores o iguales a 0.

La imagen inversa de f , es decir $f^{-1}(\mathbb{R})$, es el conjunto de los números reales.

Teorema 1. Sea $f : A \rightarrow B$ una función de A en B . Si $X \subset A$ y $Y \subset B$, entonces:

1. $A = f^{-1}(B)$ implica $f(A) \subseteq B$;
2. $B = f(A)$ implica $A \subseteq f^{-1}(B)$.

Demostración.

1) Sea $z \in f(A)$, entonces existe $x \in A$ y $A = f^{-1}(B)$, $f(x) \in B$. Pero $f(x) = z$ por lo tanto $z \in B$.

2) Sea $y \in A$, luego $f(y) \in f(A) = B$ implicando que $y \in f^{-1}(f(A))$, entonces $y \in f^{-1}(B)$. ▼

Definición 7 (Composición de funciones). Sean $f : A \rightarrow B$ y $g : B \rightarrow C$ funciones tales que el dominio de g es igual al codominio de f . En este caso podemos definir la función compuesta $g \circ f : A \rightarrow C$, de tal manera que:

$$\forall x \in A : (g \circ f)(x) = g(f(x)).$$

Ejemplo 6. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2$ y $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(x) = x + 2$, entonces $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = g(x^2) = x^2 + 2$.

Definición 8. Una restricción de una función $f : A \rightarrow B$ a un subconjunto $X \subset A$, es una función $f|_X : X \rightarrow B$, definida por $f|_X(x) = f(x)$, para todo $x \in X$.

Ejemplo 7. Sea $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $f(x) = x^2 + 2$. Una restricción de f a $(0, \infty) \subset \mathbb{R}$, es $f|_{(0, \infty)} : (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f|_{(0, \infty)} = f(x)$, para todo $x \in (0, \infty)$

Definición 9. Una extensión de una función $g : X \rightarrow B$ a un conjunto $A \supset X$, es una función $f : A \rightarrow B$, que coincide con g en X , es decir $f|_X = g$.

Ejemplo 8. Sea $g : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ una función definida por $g(x) = x + 1$. Una extensión de g al conjunto \mathbb{R} es $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $f|_{\mathbb{N}}(x) = g(x)$.

1.2. Funciones monótonas

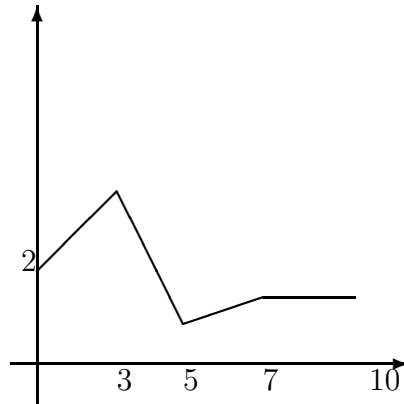
Definición 10. Sea una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$, $x, y \in X$.

1. Si la función satisface que si $x < y$, entonces $f(x) < f(y)$, se dice que f es creciente.
2. Si la función satisface que si $x < y$, entonces $f(x) \leq f(y)$, se dice que f es no decreciente.
3. Si la función satisface que si $x < y$, entonces $f(x) > f(y)$, se dice que f es decreciente.
4. Si la función satisface que si $x < y$, entonces $f(x) \geq f(y)$, se dice que f es no creciente.

Una función de cualquiera de estos tipos se llama monótona.

Ejemplo 9. Sea una función $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida como sigue:

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, & \text{si } x \in [0, 3], \\ -2x + 11, & \text{si } x \in [3, 5], \\ \frac{x - 2}{3}, & \text{si } x \in [5, 7], \\ 5/3, & \text{si } x \in [7, 10]. \end{cases}$$



Esta función es monótona creciente en $[0, 3]$ y $[5, 7]$, monótona decreciente en $[3, 5]$.

Veamos:

Sea $x, y \in [0, 3]$ y $x < y$, entonces $x + 2 < y + 2$, luego $f(x) < f(y)$, por tanto f es creciente en $[0, 3]$. Así podemos analizar la monotonía en los demás intervalos.

Proposición 1. $X \subset \mathbb{R}$, Sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función tal que :

1. Si f es creciente, entonces $1/f$ es decreciente.
2. Si f es creciente, entonces f^{-1} es creciente.

Demostración.

1. Sea $x < y$, como f es creciente, entonces $f(x) < f(y)$, luego $1/f(y) < 1/f(x)$, por tanto $1/f$ es decreciente.
2. Como f es creciente, es uno a uno, luego f^{-1} existe. Para ver que f^{-1} es creciente, sean $y_1 < y_2$ dos elementos del dominio de f^{-1} tales que $x_1 = f^{-1}(y_1)$, $x_2 = f^{-1}(y_2)$, donde x_1, x_2 son elementos del dominio de f . Entonces si $y_1 < y_2$ debemos ver que $f^{-1}(y_1) < f^{-1}(y_2)$. Pero no puede ser que $x_1 \geq x_2$, ya que entonces tendríamos también que $y_1 \geq y_2$, pues f es creciente. La única alternativa es $x_1 < x_2$, y esto significa que f^{-1} es creciente.

▼

Capítulo 2

Funciones continuas

En este capítulo presentaremos algunas definiciones y teoremas acerca de las funciones continuas, con el fin de facilitar la comprensión de la lectura del tercer capítulo, pero antes de ello recordaremos conceptos indispensables a la hora de trabajar con estas funciones.

Definición 11. Sea $x \in \mathbb{R}$, sea $\varepsilon > 0$, la vecindad- ε de x es el conjunto $V_\varepsilon(x)$, definido por $V_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$.

Ejemplo 10.

1. $V_{1/2}(1/2) = (0, 1)$.

2. $V_{\frac{a+b}{2}}(\frac{a+b}{2}) = (a, b)$.

Definición 12.

1. Se dice que $A \subset \mathbb{R}$, es abierto en \mathbb{R} si para cada $x \in A$, existe una $V_\varepsilon(x)$ tal que $V_\varepsilon(x) \subset A$.

2. Se dice que $B \subset \mathbb{R}$, es cerrado en \mathbb{R} , si el complemento $B^C = \mathbb{R} \setminus B$ (los reales menos B) es abierto en \mathbb{R} . De otra forma B es cerrado si y sólo si para cada $y \notin B$, existe $\varepsilon_y > 0$ tal que $B \cap (y - \varepsilon_y, y + \varepsilon_y) = \emptyset$.

Teorema 2.

1. *La unión de una colección cualesquiera de subconjuntos abiertos en \mathbb{R} es un conjunto abierto.*
2. *La intersección de cualquier colección finita de conjuntos abiertos en \mathbb{R} es un conjunto abierto.*

Demostración.

1. Sea $\{A_i : i \in I\}$ una familia de conjuntos abiertos en \mathbb{R} , y sea A su unión. Considérese un elemento $x \in A$; por la definición de unión, x debe pertenecer a A_{i_0} para algún $i_0 \in I$. Puesto que A_{i_0} es abierto, existe una vecindad $V_\varepsilon(x)$ tal que $V_\varepsilon(x) \subset A_{i_0}$. Pero $A_{i_0} \subset A$, por lo que $V_\varepsilon(x) \subset A$. Puesto que x es un elemento cualquiera de A , se concluye que A es un conjunto abierto en \mathbb{R} .
2. Supongamos que A_1 y A_2 son abiertos y sea $A = A_1 \cap A_2$. Para demostrar que A es un conjunto abierto se considera una $x \in A$ cualquiera; entonces $x \in A_1$ y $x \in A_2$. Puesto que A_1 es abierto, existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que $(x - \varepsilon_1, x + \varepsilon_1)$ está contenido en A_1 . De manera similar, puesto que A_2 es abierto, existe $\varepsilon_2 > 0$ tal que $(x - \varepsilon_2, x + \varepsilon_2)$ está contenido en A_2 . Si se toma ahora ε como el menor de ε_1 y ε_2 , entonces la vecindad $U_\varepsilon(x) = (x - \varepsilon, x + \varepsilon)$ satisface tanto $U_\varepsilon(x) \subset A_1$ como $U_\varepsilon(x) \subset A_2$. Por tanto, $x \in U_\varepsilon(x) \subset A$. Puesto que x es un elemento cualquiera de A , se concluye que A es un conjunto abierto en \mathbb{R} .

▼

Teorema 3.

1. *La intersección de una colección cualesquiera de conjuntos cerrados en \mathbb{R} es un conjunto cerrado*
2. *La unión de cualquier colección finita de conjuntos cerrados en \mathbb{R} es un conjunto cerrado.*

Demostración.

1. Si $\{B_i : i \in I\}$ es una familia de conjuntos cerrados en \mathbb{R} y $B = \bigcap_{i \in I} B_i$, entonces $B^c = \bigcup_{i \in I} B_i^c$ es la unión de los conjuntos abiertos. Por tanto, B^c es abierto por el teorema 2 i) y, por consiguiente, B es un conjunto cerrado.
2. Supongamos que los conjuntos B_1, B_2, \dots, B_n son cerrados en \mathbb{R} y sea

$$B = B_1 \cup B_2 \cup \dots \cup B_n$$

. Por la identidad de Morgan, el complemento de B está dado por

$$B^c = B_1^c \cap \dots \cap B_n^c.$$

Puesto que cada B_i^c es abierto, por el Teorema 2. (ii) se sigue que B^c es abierto. Por tanto, B es un conjunto cerrado.

▼

Definición 13. Sea $X \subset \mathbb{R}$. Un número $a \in \mathbb{R}$ se llama punto de acumulación del conjunto X cuando todo intervalo abierto $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ de centro a contiene algún punto $x \in X$ diferente de a . Notaremos el conjunto de puntos de acumulación por X' .

Definición 14. Un punto $a \in X$ que no es punto de acumulación de X se llama punto aislado. Para que $a \in X$ sea un punto aislado es necesario y suficiente que exista $\varepsilon > 0$ tal que $(a - \varepsilon, a + \varepsilon) \cap X = \{a\}$.

Ejemplo 11. Sea $X = \{0, 1/2, 1/3, \dots, 1/n, \dots\}$.

X es un conjunto no abierto, pues $0 \in X$ y para $\varepsilon > 0$, $(-\varepsilon, \varepsilon) \not\subset X$. $X' = \{0\}$, 0 es el único punto de acumulación, ya que cualquier intervalo abierto con centro en 0 contendrá puntos del conjunto X .

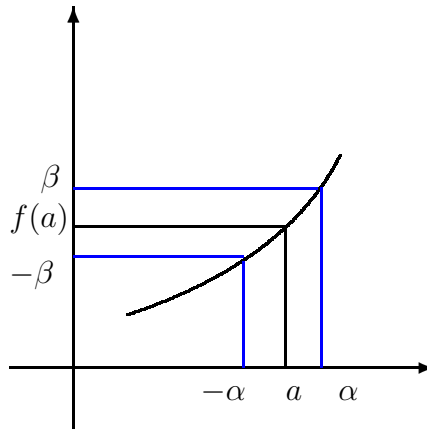
Los puntos aislados de X son $X - \{0\}$.

Definición 15. Se dice que $X \subset \mathbb{R}$, es desconexo, o no conexo, si existen conjuntos abiertos A y B de X no vacíos, tales que $A \cap B = \emptyset$ y $X = A \cup B$. Diremos que X es conexo si no es desconexo.

Ejemplo 12. El conjunto $X = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, es no conexo, ya que es la unión de dos conjuntos abiertos disjuntos no vacíos, los números reales positivos y los números reales negativos.

Ahora presentaremos varias definiciones de funciones continuas.

Definición 16. Una función $f : X \rightarrow \mathbb{R}$, $X \subset \mathbb{R}$ se dice continua en un punto $a \in X$, cuando es posible tomar $f(x)$ arbitrariamente próximo de $f(a)$ desde que se tome x suficientemente próximo de a .



Definición 17. Sea $X \subset \mathbb{R}$, sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua so es continua en un punto $a \in X$ cuando, para todo $\varepsilon > 0$ dado arbitrariamente, podemos encontrar $\delta > 0$ tal que $x \in X$ y $|x - a| < \delta$ implica $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, simbólicamente

$$f \text{ es continua en } a \Leftrightarrow$$

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \delta > 0 : x \in X, |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(a)| < \varepsilon.$$

Definición 18. Sea $X \subset \mathbb{R}$, sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ y sea $a \in X$. Se dice que f es continua en a si dada cualquier vecindad V_ε de $f(a)$, existe una vecindad V_δ de a tal que si x es cualquier punto de $X \cap V_\delta$, entonces $f(x)$ pertenece a V_ε .

Definición 19. Sea $X, Y \subset \mathbb{R}$. Una función $f : X \rightarrow Y$ se dice que es continua si para cada subconjunto abierto V de Y , el conjunto $f^{-1}(V)$ es un subconjunto abierto de X .

Teorema 4. Las tres definiciones anteriores son equivalentes.

Demostración.

Definición 17 \Rightarrow Definición 18.

Sea $a \in X$, sea $V_\varepsilon(f(a))$ definida por $V_\varepsilon = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$, existe una vecindad $V_\delta(a)$ tal que si $x \in X \cap V_\delta(a)$, entonces $x \in V_\delta(a) = (a - \delta, a + \delta)$, esto es $|x - a| < \delta$, entonces por la definición 17, $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, entonces $f(a) - \varepsilon < f(x) < f(a) + \varepsilon$, luego $f(x) \in V_\varepsilon(f(a))$, que era lo que se quería.

Definición 18 \Rightarrow Definición 19.

Sea V un conjunto abierto de Y , sea a un punto de $f^{-1}(V)$. Entonces $f(a) \in V$ así por hipótesis, existe una vecindad U_a de a tal que $f(U_a) \subset V$. Entonces $U_a \subset f^{-1}(V)$. Se sigue que f^{-1} se puede escribir como la unión de conjuntos abiertos U_a por lo que es abierto.

Definición 19 \Rightarrow Definición 17.

Dado $a \in X$ y dado $\varepsilon > 0$, la vecindad $V_\varepsilon(f(a)) = (f(a) - \varepsilon, f(a) + \varepsilon)$ es un conjunto abierto del conjunto de llegada \mathbb{R} . Por tanto, f^{-1} es un conjunto abierto del conjunto de salida X . Puesto que f^{-1} contiene al punto a , contiene algún intervalo abierto (x^*, y^*) al rededor de a . Elegimos δ así: $\delta = \min\{a - x, y - a\}$. Entonces, si $|x - a| < \delta$ el punto a debe estar en (x^*, y^*) , por lo que $f(x) \in V_\varepsilon(f(a))$, y $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, como se deseaba.

▼

Definición 20. Sea $X \subset \mathbb{R}$ y $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Diremos que f es continua cuando es continua en todos los puntos de X .

Teorema 5.

1. Si $a \in X$ es un punto de acumulación de X , f es continua en a si y sólo si

$$f(a) = \lim_{x \rightarrow a} f(x)$$

2. f es continua en los puntos aislados de X .

Demostración.

1. Como f es continua por 17, para todo $\varepsilon > 0$, existe $\delta > 0$ tal que si $|x - a| < \delta$, entonces $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$, luego por definición de límite $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.
2. Si $a \in X$, es un punto aislado de X (un punto que no es de acumulación), entonces toda f definida en a será continua en a , ya que para δ suficientemente pequeño, existe un único x que satisface $|x - a| < \delta$, a saber $x = a$ y $|f(x) - f(a)| = |f(a) - f(a)| = 0 < \varepsilon$. Así se concluye que f es continua en los puntos aislados.

▼

Ejemplo 13. La función $g(x) = x$ es continua en \mathbb{R} .

Sea $a \in \mathbb{R}$. Dado $\varepsilon > 0$, tomando $\delta = \varepsilon$ tenemos que $|g(x) - g(a)| = |x - a| < \varepsilon$, por lo tanto g es continua.

Ejemplo 14. La función $f(x) = x^2$ es continua en \mathbb{R} . Sea a un punto de acumulación de \mathbb{R} , entonces $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} x^2 = a^2 = f(a)$, luego f es continua.

Teorema 6. Toda restricción de una función continua es continua. Es decir, sea $X \subset \mathbb{R}$, sea $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ continua en un punto $a \in X$. Entonces $g = f|_Y$, es continua en el punto a .

Demostración. Sea $V_\varepsilon(g(a))$ una vecindad donde $g(a) = f|_Y(a) = f(a)$, pues $a \in Y$. Como f es continua en a existe $V_\delta(a)$ tal que si $x \in Y \cap V_\delta(a)$, entonces $f(x) \in V_\varepsilon(g(a))$, pero $f(x) = f|_Y(x) = g(x)$, ya que $x \in Y$, luego $g(x) \in V_\varepsilon(g(a))$, por tanto g es continua. ▼

Teorema 7. Sea $X, Y \subset \mathbb{R}$ y sean $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ y $g : Y \rightarrow \mathbb{R}$ funciones tales que $f(X) \subset Y$. Si f es continua en un punto $a \in X$ y g es continua en $b = f(a) \in Y$, entonces la composición $g \circ f : X \rightarrow Y$ es continua en a .

Demostración. Sea $W_\varepsilon(g(b))$ una vecindad. Puesto que g es continua en b existe $V_\delta(b)$ donde $b = f(a)$ tal que si $y \in Y \cap V_\delta(b)$ entonces $g(y) \in W_\varepsilon(g(b))$, ya que f es continua en a , existe $U_\gamma(a)$ tal que si $x \in X \cap U_\gamma(a)$, entonces $f(x) \in V_\delta(b)$. como $f(X) \subset Y$, se sigue que si $x \in X \cap U_\gamma(a)$, entonces $f(x) \in Y \cap V_\delta(b)$, de modo que $g \circ f(x) = g(f(x)) \in W_\varepsilon(g(b))$. Pero como $W_\varepsilon(g(b))$ es una vecindad cualquiera de $g(b)$, esto indica que $g \circ f$ es continua en a ▼

Ahora estudiaremos las propiedades de las discontinuidades de las funciones reales.

Sea f una función real definida sobre un intervalo (a, b) . Supongamos que $c \in [a, b)$. Si $f(x) \rightarrow L$ cuando $x \rightarrow c$ con $x > c$, diremos que L es el límite lateral por la derecha de f en c y lo indicaremos escribiendo

$$\lim_{x \rightarrow c^+} f(x) = L.$$

El límite lateral por la derecha se designa también por medio de $f(c+)$. En la terminología ε, δ significa que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $\delta > 0$ tal que

$$|f(x) - f(c+)| < \varepsilon \quad \text{siempre que} \quad c < x < c + \delta < b.$$

Note que f no necesita estar definida en el punto c . Si f está definida en c y es $f(c+) = f(c)$, diremos que f es continua por la derecha en c . Los límites laterales por la izquierda y la continuidad por la izquierda en c se define análogamente si $c \in (a, b]$.

Si $a < c < b$, entonces f es continua en c si y sólo si,

$$f(c+) = f(c) = f(c-).$$

Diremos que c es discontinuidad de la función f , si f no es continua en el punto c . En este caso deberá darse alguna de las siguientes condiciones:

1. O no existe $f(c+)$ o no existe $f(c-)$.
2. Tanto $f(c+)$ como $f(c-)$ existen pero son distintos.
3. Tanto $f(c+)$ como $f(c-)$ existen y $f(c+) = f(c-) \neq f(c)$.

En el caso 3) se dice que el punto c es una discontinuidad evitable, ya que la discontinuidad podría evitarse volviendo a definir f en c de suerte que el valor de f en c fuese $f(c+) = f(c-)$. En los casos 1) y 2), se dice que c es una discontinuidad inevitable dado que la discontinuidad no puede evitarse aunque volvamos a definir f en c .

Definición 21. Sea f una función definida sobre un intervalo cerrado $[a, b]$. Si $f(c+)$ y $f(c-)$ existen en un punto interior c , entonces:

1. $S_f(c-) = f(c) - f(c-)$ se llama salto de f a la izquierda de c ;
2. $S_f(c+) = f(c+) - f(c)$ se llama salto de f a la derecha de c ;
3. $S_f(c) = f(c+) - f(c-)$ se llama salto de f en c .

Si algunos de ellos es distinto de 0, entonces se dice que f tiene una discontinuidad de salto en c .

Ejemplo 15. La función f definida por $f(x) = x/|x|$ si $x \neq 0$, $f(0) = K$, tiene una discontinuidad de salto en 0, independientemente del valor de la constante K . Aquí $f(0+) = 1$ y $f(0-) = -1$.

Teorema 8. Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ continua. Si $f(a)f(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tales que $f(c) = 0$

Demostración. Supongamos que $f(a) < 0 < f(b)$. Sea $A = \{x \in [a, b] : f(x) < 0\}$, $a \in A$, $b \notin A$, $A \neq \emptyset$ y A acotado superiormente por b , por el axioma del extremo superior, existe $\sup A = c$.

Afirmación $f(c) = 0$.

A no tiene máximo, si $x^* \in A$, entonces $f(x^*) < 0$, como f es continua en x^* , para cada $\varepsilon = -f(x^*) > 0$ existe $\delta > 0$ tal que $[x^*, x^* + \delta) \subset [a, b]$ y $f(x) \in (f(x^*) - \varepsilon, f(x^*) + \varepsilon)$. Si $x \in (x^*, x^* + \delta) \cap [a, b]$, entonces $x \in A$.

Como $c = \sup A$ y c es el límite de una sucesión de puntos $x_n \in A$, pues f es continua. Tenemos que $f(c) = \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) \leq 0$. Como A no posee elemento máximo, entonces $c \in A$. Luego no se puede tener que $f(c) < 0$, por tanto $f(c) = 0$. ▼

Teorema 9. (Teorema del Valor Intermedio) Sea $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, una función continua. Sea $f(a) < d < f(b)$, entonces existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = d$.

Demostración. Sea $g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$, una función definida por:

$$g(x) = d - f(x),$$

$$g(a) = d - f(a) < 0,$$

$$g(b) = d - f(b) > 0,$$

g es continua.

$g(a)g(b) < 0$, entonces existe $c \in (a, b)$ tales que $g(c) = 0 = d - f(c)$, entonces $f(c) = d$.

▼

Corolario 1. Sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$, una función continua en un intervalo I . Entonces $f(I)$ es un intervalo.

Demostración. Sea $\alpha = \inf_{x \in I} f(x)$ y $\beta = \sup_{x \in I} f(x)$. Afirmamos que $f(I)$ es un intervalo, cuyos extremos son α y β . Es decir, dado y con $\alpha < y < \beta$, debe existir $x \in I$ tal que $y = f(x)$, por las definiciones de inf y sup existen $a, b \in I$ tales que $f(a) < y < f(b)$. Por el teorema del valor intermedio existe un punto x , entre a y b , tal que $f(x) = y$. ▼

Teorema 10. Sea $I \subseteq \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ creciente en I . Si $c \in I$, entonces f es continua en c si y sólo si $S_f(c) = 0$.

Demostración. Si c es un punto interior de I , entonces $f(c) = f(c+) = f(c-)$, luego f es continua.

Si c es punto terminal (o extremo del intervalo) de I . Veamos si c es punto terminal izquierdo (o extremo izquierdo del intervalo), entonces, f es continua en c si y sólo si $f(c) = \lim_{x \rightarrow c^+} f = f(c-)$, que es equivalente $S_f(c) = f(c) - f(c-) = 0$. Análogamente si c es punto terminal derecho (o extremo derecho del intervalo). ▼

Teorema 11. Sea $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo y sea $f : I \rightarrow \mathbb{R}$ una función monótona y continua en I . Entonces su inversa $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ es monótona y continua en $f(I)$.

Demostración. Se considera el caso en que f es creciente. Puesto que f es continua e I es un intervalo, por el Corolario 1 se sigue que $f(I)$ es un intervalo. Además, puesto que f es creciente en I , es inyectiva en I ; por lo tanto, existe la función $f^{-1} : f(I) \rightarrow \mathbb{R}$ inversa de f . Se afirma que f^{-1} es creciente por la Proposición 1. Probaremos que f^{-1} es continua. De hecho, si f^{-1} es discontinua en un punto $c \in f(I)$, entonces el salto de f^{-1} en c es diferente de 0, de tal modo que

$$\lim_{y \rightarrow c^-} f^{-1} < \lim_{y \rightarrow c^+} f^{-1}.$$

Si se elige cualquier número $x \neq f^{-1}(c)$ que satisfaga $\lim_{y \rightarrow c^-} f^{-1} < x < \lim_{y \rightarrow c^+} f^{-1}$, entonces x tiene la propiedad de que $x \neq \lim_{y \rightarrow c^-} f^{-1} < \lim_{y \rightarrow c^+} f^{-1}(y)$ para cualquier $y \in f(I)$. Por tanto, $x \notin I$, lo cual contradice el hecho de que I es un intervalo. Se concluye por lo tanto que f^{-1} es continua en $f(I)$. ▼

Capítulo 3

Solución en \mathbb{R}

En este capítulo daremos solución a la pregunta de cuando la función inversa es igual a la función recíproca, mostrando una forma de la construcción de todas las soluciones en $(0, \infty)$. Consideraremos el caso en el que el dominio de f es un subconjunto de \mathbb{R} . Por $\text{dom}(f)$, $\text{rec}(f)$ y $\text{Gr}(f)$, entenderemos el dominio, el recorrido y la gráfica de la función f respectivamente. Si G es un subconjunto de \mathbb{R} , entonces definimos los conjuntos $-G = \{-x : x \in G\}$ y $1/G = \{1/x : x \in G\}$.

Para que una función f , cumpla $f^{-1} = 1/f$ es necesario que $\text{dom}(f) = \text{rec}(f) = 1/\text{dom}(f)$ y en particular $\text{dom}(f)$, no debe contener el valor cero. Si $(a, b) \in \text{Gr}(f)$, entonces $(b, a) \in \text{Gr}(f^{-1})$. Pero la propiedad $f^{-1} = 1/f$ requiere que (b, a) pertenezca a la $\text{Gr}(1/f)$ lo cual implica que $(b, 1/a)$ pertenezca a la $\text{Gr}(f)$. Continuando en esta forma vemos que la pareja (a, b) es parte de $\text{Gr}(f)$ si y sólo si los puntos $(b, 1/a)$, $(1/a, 1/b)$ y $(1/b, a)$ son también parte de $\text{Gr}(f)$. Así bajo la iteración, una función f con la propiedad (1), actúa en ciclo de orden a lo más cuatro. Entenderemos por n -ciclo a la aplicación de la función n veces de tal manera que vuelva a su valor inicial.

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{f} & b \\ f \uparrow & & \downarrow f \\ \frac{1}{b} & \xleftarrow{f} & \frac{1}{a} \end{array} \quad (3.1)$$

Por otra parte si un conjunto de parejas ordenadas puede ser particionado en subconjuntos de la forma $\{(a, b), (b, 1/a), (1/a, 1/b), (1/b, a)\}$, entonces esta es la gráfica de la solución de $f^{-1} = 1/f$ con tal de que esta sea la gráfica de una función. El comportamiento cíclico puede ser entendido de otra forma, si f cumple que $f^{-1} = 1/f$, entonces

$$f\left(\frac{1}{f(x)}\right) = x.$$

y

$$\frac{1}{f(f(x))} = x. \tag{3.2}$$

para todo x ; estas dos son equivalentes a la condición $f^{-1} = 1/f$. De (3.2) podemos escribir

$$f(f(x)) = \frac{1}{x}. \tag{3.3}$$

Claramente $f \circ f \circ f \circ f$ es la función idéntica,

$$\begin{aligned} f(f(f(f(x)))) &= f(f(1/x)), \\ &= f(1/f(x)) = x. \end{aligned}$$

Ahora, mostraremos una forma de construir todas las soluciones de $f^{-1} = 1/f$ en el intervalo $(0, \infty)$.

Primero se debe tener que $f(1) = 1$. Veamos si $f(1) = b$, utilizando el 4-ciclo, tenemos:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \xrightarrow{f} & b \\ f \uparrow & & \downarrow f \\ \frac{1}{b} & \xleftarrow{f} & \frac{1}{1} \end{array}$$

entonces $f(b) = 1/1 = 1$, luego $f(1) = 1/b$; ahora $b = 1/b$ en $(0, \infty)$, luego $b = 1$. Después particionando $(0, \infty) \setminus \{1\}$ en dos clases de equivalencia bajo la relación $x \sim x$, $x \sim 1/x$. Partiendo el espacio resultante S en dos subconjuntos U y V de la misma cardinalidad. Sea $g : U \rightarrow V$ una biyección arbitraria, y definamos $\phi : S \rightarrow S$ por

$$\phi(s) = \begin{cases} g(s), & \text{si } s \in U, \\ g^{-1}(s), & \text{si } s \in V. \end{cases} \quad (3.4)$$

Observe que $\phi \circ \phi$ es la idéntica sobre $S = U \cup V$.

Si $s \in U$

$$\begin{aligned} \phi \circ \phi(s) &= \phi \circ g(s), \\ &= \phi(g(s)), \\ &= g^{-1}(g(s)) = s. \end{aligned}$$

Análogamente si $s \in V$.

Sea C un subconjunto arbitrario de $(0, \infty) \setminus \{1\}$ que contiene exactamente un miembro de cada clase de equivalencia $\{x, 1/x\}$ en S ; el axioma de elección es necesario para este paso. Para cada $x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$, $[x]$ denota el representante de $\{x, 1/x\}$ que pertenece a C .

Definamos la función f de $(0, \infty)$ en $(0, \infty)$ por

$$f(x) = \begin{cases} [\phi(\{x, 1/x\})], & \text{si } \{x, 1/x\} \in U \text{ y } [x] = x \\ & \text{ó si } \{x, 1/x\} \in V \text{ y } [x] = 1/x, \\ 1, & \text{si } x = 1, \\ \frac{1}{[\phi(\{x, 1/x\})]}, & \text{si } \{x, 1/x\} \in V \text{ y } [x] = x \\ & \text{ó si } \{x, 1/x\} \in U \text{ y } [x] = 1/x. \end{cases} \quad (3.5)$$

Teorema 12. *Toda solución de $f^{-1} = 1/f$ en $(0, \infty)$ es obtenida por la construcción (3.5)*

Demostración. Supongamos que f satisface $f^{-1} = 1/f$ en $(0, \infty)$. Partiendo $(0, \infty) \setminus \{1\}$, usando el 4-ciclo obtenemos conjuntos de la forma $\{x, f(x), 1/x, 1/f(x)\}$ de f ; un ciclo de orden 2 ó 1 puede surgir solo de $f(1) = 1$. Sea E el conjunto que contiene exactamente

un miembro de cada 4-ciclo. Definamos:

$$U = \{\{x, 1/x\} : x \in E\} \quad y \quad V = \{\{f(x), 1/f(x)\} : x \in E.\}$$

Entonces $S = U \cup V$ es el conjunto de todas las parejas $\{x, 1/x\}$ de $(0, \infty)$. Note también que f induce un aplicación invertible g de U en V por $g(\{x, 1/x\}) = (\{f(x), 1/f(x)\})$. Tomemos $C = E \cup f(E)$, notemos que C selecciona precisamente un miembro de cada pareja $\{x, 1/x\}$, $x \in (0, \infty) \setminus \{1\}$. Con U , V , S , g y C así definidas y con ϕ definida como sigue:

$$\phi(s) = \begin{cases} g(s), & \text{si } s \in U, \\ g^{-1}(s), & \text{si } s \in V. \end{cases}$$

La función construida en (3.5), es efectivamente la función original f . Para probar esto, sea $a \in E$ y $f(a) = b$, entonces $\{a, 1/a\} \in U$, $\{b, 1/b\} \in V$ y $\{a, b\} \subset C$. Así la función construida (3.5) produce un 4-ciclo, (3.1) de acuerdo con la función f dada. \blacktriangledown

Ejemplo 16. Una solución continua para $f^{-1} = 1/f$ en $\mathbb{R} - \{0\}$.

$$f(x) = \begin{cases} -x, & \text{si } x \in (0, \infty), \\ -1/x, & \text{si } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

$$\frac{1}{f(x)} = \begin{cases} -1/x, & \text{si } x \in (0, \infty,) \\ -x, & \text{si } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} -1/x, & \text{si } x \in (0, \infty), \\ -x, & \text{si } x \in (-\infty, 0). \end{cases}$$

3.1. Soluciones continuas a trozos

Si la ecuación $f^{-1} = 1/f$ es válida, no puede suceder que f sea monótona creciente en todas partes del dominio; pues entonces f^{-1} debería ser monótona creciente y $1/f$ monótona decreciente. En forma similar vemos que f no puede ser monótona decre-

ciente. Así $f^{-1} = 1/f$, obliga al $\text{dom}(f)$ a ser desconexo ó f a ser discontinua.

Examinaremos las funciones que satisfacen la condición $f^{-1} = 1/f$, las cuales restringidas para ciertos intervalos son continuas. Llamaremos a una sucesión finita $(I_1, I_2, I_3, \dots, I_n)$ de parejas disjuntas, de intervalos no degenerados un **n-circuito** de f , y por parejas disjuntas de intervalos entenderemos que la intersección de los intervalos dos a dos, es vacía. Si $\cup_{i=1}^n I_k \subset \text{dom}(f)$, f restringida para cada I_k es continua, $f(I_k) = I_{k+1}$ para todo $k \in \{1, 2, \dots, n\}$ y $f(I_n) = I_1$.

Lema 1. *Supongamos que f satisface $f^{-1} = 1/f$, si $n \notin \{2, 4\}$ entonces f no tiene un n -circuito.*

Demostración. Supongamos que (I_1) es un 1-circuito de f . Entonces la restricción de f a I_1 es continua y cumple que $f^{-1} = 1/f$. Pero esta posibilidad es descartada. Ahora asumimos que (I_1, I_2, I_3) es un 3-circuito. Entonces $I_3 = f^{-1}(I_1) = 1/f(I_1) = 1/I_2$ y $I_2 = f^{-1}(I_3) = 1/f(I_3) = 1/I_1$, así se tiene que $I_1 = 1/I_2 = I_3$ lo que contradice que sean disjuntos. Finalmente, si hay un n -circuito (I_1, I_2, \dots, I_n) con $n \geq 4$, entonces tenemos que $I_n = f^{-1}(I_1) = 1/f(I_1) = 1/I_2$ por otra parte, $I_2 = f^{-1}(I_3) = 1/f(I_3) = 1/I_4$, se sigue $I_n = 1/I_2 = I_4$ por lo tanto $n=4$. ▼

Se dice que una función es continua a trozos, si $\text{dom}(f)$ es la unión de intervalos disjuntos $\{J_1, J_2, J_3, \dots\}$ tal que f restringida a cada J_k es continua. Insistimos que cada J_k es maximal en el sentido que si $J_k \subset J$ para algún J y f es continua en J , entonces $J_k = J$. Asumimos por simplicidad que cada J_k es también no degenerado.

Ejemplo 17. *una solución continua de $f^{-1} = 1/f$ con un 4-circuito; el dominio de f es desconexo, como es necesario para la continuidad.*

$$f(x) = \begin{cases} 2x, & \text{si } x \in [2, 3], \\ 2/x, & \text{si } x \in [4, 6], \\ x/2, & \text{si } x \in [1/3, 1/2], \\ 1/2x, & \text{si } x \in [1/6, 1/4]. \end{cases}$$

Veamos como es la función $1/f(x)$.

Si $x \in [2, 3]$, entonces $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x}$.

Si $x \in [4, 6]$, entonces $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2/x} = \frac{x}{2}$.

Si $x \in [1/3, 1/2]$, entonces $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x/2} = \frac{2}{x}$.

Si $x \in [1/6, 1/4]$, entonces $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1/2x} = 2x$.

Luego

$$1/f(x) = \begin{cases} 1/2x, & \text{si } x \in [2, 3], \\ x/2, & \text{si } x \in [4, 6], \\ 2/x, & \text{si } x \in [1/3, 1/2], \\ 2x, & \text{si } x \in [1/6, 1/4]. \end{cases}$$

Para calcular la función inversa recordemos que $f(x) = y \iff f^{-1}(y) = x$, que el $\text{rec}(f) = \text{dom}(f^{-1})$ y que $\text{dom}(f) = \text{rec}(f^{-1})$.

Ahora calculemos $f^{-1}(x)$:

Si $x \in [2, 3]$, entonces $f(x) = 2x$.

$$y = f(x),$$

$$y = 2x,$$

$$x = \frac{y}{2}.$$

Luego en la función inversa $f^{-1}(y) = \frac{y}{2}$, lo cual quiere decir que $f^{-1}(x) = \frac{x}{2}$.

Además como el $\text{dom}(f) = [2, 3]$, entonces el dominio de f^{-1} es $[4, 6]$, pues en $y = 2x$, tenemos que $y = 2(2) = 4$ y $y = 2(3) = 6$.

Si $x \in [4, 6]$, entonces $f(x) = 2/x$.

$$y = f(x),$$

$$y = \frac{2}{x},$$

$$x = \frac{2}{y}.$$

Luego en la función inversa $f^{-1}(y) = \frac{2}{y}$, lo cual quiere decir que $f^{-1}(x) = \frac{2}{x}$.

Además como el $\text{dom}(f) = [4, 6]$, entonces el dominio de f^{-1} es $[1/3, 1/2]$, pues en $y = 2/x$ tenemos que $y = 2/4 = 1/2$ y $y = 2/6 = 1/3$.

Si $x \in [1/3, 1/2]$, entonces $f(x) = x/2$.

$$y = f(x),$$

$$y = x/2,$$

$$x = 2y$$

Luego en la función inversa $f^{-1}(y) = 2y$, lo cual quiere decir que $f^{-1}(x) = 2x$.

Además como el $\text{dom}(f) = [1/3, 1/2]$, entonces el dominio de f^{-1} es $[1/6, 1/4]$, pues en $y = x/2$, tenemos que $y = (1/3)/2 = 1/6$ y $y = (1/2)/2 = 1/4$.

Si $x \in [1/6, 1/4]$, entonces $f(x) = 1/2x$.

$$y = f(x),$$

$$y = 1/2x,$$

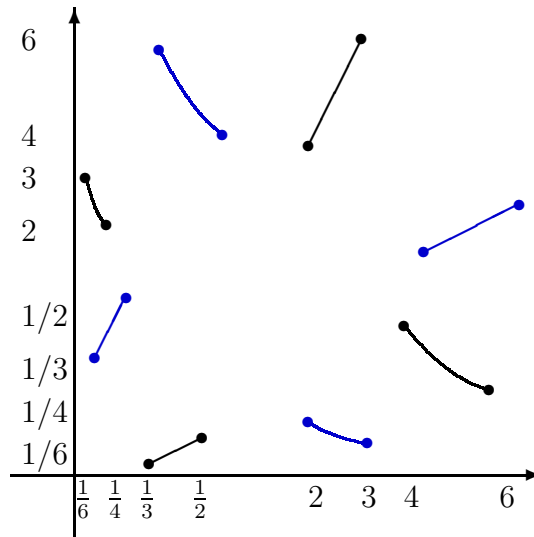
$$x = 1/2y$$

Luego en la función inversa $f^{-1}(y) = 1/2y$, lo cual quiere decir que $f^{-1}(x) = 1/2x$.

Además como el $\text{dom}(f) = [1/6, 1/4]$, entonces el dominio de f^{-1} es $[2, 3]$, pues en $y = 1/2x$ tenemos que $y = \frac{1}{2(1/6)} = 3$ y $y = \frac{1}{2(1/4)} = 2$.

Por tanto

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} 1/2x, & \text{si } x \in [2, 3], \\ x/2, & \text{si } x \in [4, 6], \\ 2/x, & \text{si } x \in [1/3, 1/2], \\ 2x, & \text{si } x \in [1/6, 1/4]. \end{cases}$$



En la figura anterior la gráfica de color negra es $f(x)$, y la gráfica de color azul es f^{-1} . Las soluciones continuas a trozos de $f^{-1} = 1/f$ poseen la siguiente característica.

Teorema 13. *Supongamos que f es una función continua a trozos y sea $\mathfrak{F} = \{J_1, J_2, J_3, \dots\}$ la sucesión asociada de intervalos maximales de continuidad. Entonces f satisface $f^{-1} = 1/f$ si y sólo si \mathfrak{F} puede ser particionado en $\{\mathfrak{F}_k : k = 1, 2, 3, \dots\}$ tal que para cada k , \mathfrak{F}_k es un 2 o 4-circuito de f , $f|_{\cup \mathfrak{F}_k}$ es continua y $f|_{\cup \mathfrak{F}_k}$ satisface $f^{-1}|_{\cup \mathfrak{F}_k} = 1/f|_{\cup \mathfrak{F}_k}$.*

Demostración. Es fácil ver que si f tiene la estructura indicada, entonces f satisface $f^{-1} = 1/f$, de otra manera, supongamos que f cumple que $f^{-1} = 1/f$, entonces para cada k el conjunto conexo J_k aplica en el intervalo. Ahora f^{-1} es también continua a trozos con alguna sucesión de intervalos maximales. Se sigue que $f(J_k)$ debe ser un miembro de \mathfrak{F} por el Lema 1, cualquier $(J_k, f(J_k))$ es un 2-circuito de f , o $(J_k, f(J_k), [f \circ f](J_k), [f \circ f \circ f](J_k))$ es un 4-circuito de f . ▼

Simplemente una solución continua a trozos es una unión de soluciones continuas en n -circuitos disjuntos donde n es 2 ó 4, esto permanece para describir esas funciones continuas con la propiedad $f^{-1} = 1/f$ definida sobre un solo n -circuito.

Una solución continua f en un 2-circuito puede ser construida sobre los intervalos $I_1 \subset (0, \infty)$ y $I_2 \subset (-\infty, 0)$ tal que $I_1 = 1/I_2$ y $I_2 = 1/I_1$. Se escoge $f_1 : I_1 \rightarrow I_2$ continua y monótona con $f_1(1) = -1$. Definimos $f_2 : I_2 \rightarrow I_1$ por $f_2(x) = 1/f_1^{-1}(x)$, $x \in I_2$.

Entonces $f = f_1 \cup f_2$ satisface (1) en el 2-circuito (I_1, I_2) .

De otra manera la necesidad de $I_1 = 1/I_1$, se sigue de $I_1 = f(I_2) = f(f(I_1)) = 1/I_1$. Así hace que por fuerza el dominio contenga tanto a 1 como a -1 , con lo cual se puede elegir $1 \in I_1 \subset (0, \infty)$ y $-1 \in I_2 \subset (-\infty, 0)$.

Una solución continua f para la ecuación $f^{-1} = 1/f$ en un 4 - circuito puede ser construido sobre

$(A, B, 1/A, 1/B)$ donde A y B son intervalos disjuntos, que no contienen $-1, 0$ ó -1 . Escogiendo arbitrariamente $f_1 : A \rightarrow B$ continua y monótona, . Definimos $f_2 : B \rightarrow 1/A$ por $f_2(x) = 1/f_1^{-1}(x)$, $x \in B$; $f_3 : 1/A \rightarrow 1/B$ por $f_3(x) = 1/f_2^{-1}(x)$, $x \in 1/A$; y finalmente definimos $f_4 : 1/B \rightarrow A$ por $f_4(x) = 1/f_3^{-1}(x)$, $x \in 1/B$. Entonces $f = f_1 \cup f_2 \cup f_3 \cup f_4$ es continua y satisface (1) sobre $A \cup B \cup 1/A \cup 1/B$.

Toda solución continua en un 4-circuito se forma de esta manera.

Note que todo 2-circuito ocasiona un 4-circuito cuando los puntos $(1, -1)$ y $(-1, 1)$ son suprimidos de la gráfica de f .

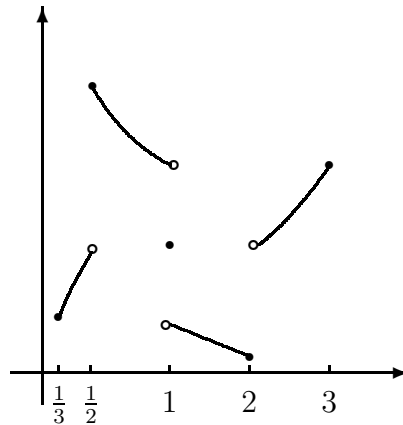
Ejemplo 18. Una solución para la ecuación $f^{-1} = 1/f$ en $(0, \infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1/(x+1), & \text{si } x \in (2n-1, 2n], n \in \mathbb{N} \\ x-1, & \text{si } x \in (2n, 2n+1], n \in \mathbb{N} \\ 1, & \text{si } x = 1 \\ (x+1)/x, & \text{si } x \in [1/2n, 1/(2n-1)), n \in \mathbb{N} \\ x/(1-x), & \text{si } x \in [1/(2n+1), 1/2n), n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

el dominio de f es la unión disjunta de $\{1\}$ y una sucesión de 4-circuitos. El dominio es conexo, y f tiene infinitas discontinuidades.

Observemos este ejemplo para el caso $n = 1$.

$$f(x) = \begin{cases} 1/(x+1), & \text{si } x \in (1, 2], \\ x-1, & \text{si } x \in (2, 3], \\ 1, & \text{si } x = 1 \\ (x+1)/x, & \text{si } x \in [1/2, 1), \\ x/(1-x), & \text{si } x \in [1/3, 1/2). \end{cases}$$



Ejemplo 19. Una solución de $f^{-1} = 1/f$ con solo 3 discontinuidades en $(0, \infty)$.

$$f(x) = \begin{cases} 1/(x+1/2) & \text{si } x \in (0, 1/2) \\ x-1/2 & \text{si } x \in (1/2, 1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ 2x/(2-x) & \text{si } x \in (1, 2) \\ (x+2)/2x & \text{si } x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Esto es posible cuando $1/2$ y 2 son excluidos del dominio.

Calculemos $1/f(x)$:

Si $x \in (0, 1/2)$, entonces $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1/(x+1/2)} = x + 1/2$.

Si $x \in (1/2, 1)$, entonces $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{x-1/2}$.

Si $x = 1$, entonces $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{1} = 1$.

Si $x \in (1, 2)$, entonces $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{2x/(2-x)} = (2-x)/2x$.

Si $x \in (2, \infty)$, entonces $\frac{1}{f(x)} = \frac{1}{(x+2)/2x} = 2x/(x+2)$.

Luego

$$1/f(x) = \begin{cases} (x + 1/2) & \text{si } x \in (0, 1/2), \\ 1/(x - 1/2) & \text{si } x \in (1/2, 1), \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ (2 - x)/2x & \text{si } x \in (1, 2), \\ 2x/(x + 2) & \text{si } x \in (2, \infty). \end{cases}$$

Calculemos $f^{-1}(x)$:

Si $x \in (0, 1/2)$, entonces $f(x) = 1/(x + 1/2)$.

$$\begin{aligned} y &= f(x), \\ y &= \frac{1}{(x + 1/2)}, \\ x &= \frac{(2 - y)}{2y}. \end{aligned}$$

Luego en la función inversa $f^{-1}(y) = \frac{(2-y)}{2y}$, lo cual quiere decir que $f^{-1}(x) = \frac{(2-x)}{2x}$.

Además como $\text{dom}(f) = (0, 1/2)$, entonces el dominio de f^{-1} es $(1, 2)$, pues en $y = 1/(x + 1/2)$ tenemos que $y = 1/(0 + 1/2) = 2$ y $y = 1/(1/2 + 1/2) = 1$.

Si $x \in (1/2, 1)$, entonces $f(x) = x - 1/2$.

$$\begin{aligned} y &= f(x), \\ y &= x - 1/2, \\ x &= y + 1/2. \end{aligned}$$

Luego en la función inversa $f^{-1}(y) = y + 1/2$, lo cual quiere decir que $f^{-1}(x) = x + 1/2$.

Además como $\text{dom}(f) = (1/2, 1)$, entonces el dominio de f^{-1} es $(0, 1/2)$, pues en $y = x - 1/2$ tenemos que $y = 1/2 - 1/2 = 0$ y $y = 1 - 1/2 = 1/2$.

Si $x = 1$, entonces $f(x) = 1$.

$$y = f(x),$$

$$y = 1.$$

Luego en la función inversa $f^{-1}(y) = 1$, lo cual quiere decir que $f^{-1}(x) = 1$.

Si $x \in (1, 2)$, entonces $f(x) = 2x/(2-x)$.

$$\begin{aligned} y &= f(x), \\ y &= \frac{2x}{(2-x)} \\ x &= \frac{2y}{y+2}. \end{aligned}$$

Luego en la función inversa $f^{-1}(y) = \frac{2y}{y+2}$, lo cual quiere decir que $f^{-1}(x) = \frac{2x}{x+2}$.

Además como $\text{dom}(f) = (1, 2)$, entonces el dominio de f^{-1} es $(2, \infty)$, pues en $y = 2x/(2-x)$ tenemos que $y = 2(1)/(2-1) = 2$ y $y = 2(2)/(2-2)$, como observamos, nos da un cociente con denominador cero, entonces apliquemos límite:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x}{(2-x)} = \infty$$

Si $x \in (2, \infty)$, entonces $f(x) = (x+2)/2x$.

$$\begin{aligned} y &= f(x), \\ y &= \frac{x+2}{(2x)}, \\ x &= \frac{1}{y-1/2}. \end{aligned}$$

Luego en la función inversa $f^{-1}(y) = \frac{1}{y-1/2}$, lo cual quiere decir que $f^{-1}(x) = \frac{1}{x-1/2}$.

Además como $\text{dom}(f) = (2, \infty)$, entonces el dominio de f^{-1} es $(1/2, 1)$, pues en $y = (x+2)/2x$ tenemos que $y = (2+2)/2(2) = 1$ y utilicemos límite para hallar y en $x = 2$,

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{(x+2)}{2x} = \frac{1}{2}.$$

Luego

$$f^{-1}(x) = \begin{cases} (x + 1/2) & \text{si } x \in (0, 1/2) \\ 1/(x - 1/2) & \text{si } x \in (1/2, 1) \\ 1 & \text{si } x = 1 \\ (2 - x)/2x & \text{si } x \in (1, 2) \\ 2x/(x + 2) & \text{si } x \in (2, \infty). \end{cases}$$

3.2. Un ejemplo con gráfica densa

En esta sección presentaremos una proposición que nos dice que existe una función f que cumple la condición $f^{-1} = 1/f$ y que su gráfica es densa; también recordaremos conceptos útiles para su mejor comprensión.

Definición 22. *Un conjunto $X \subset \mathbb{R}$ se llama denso en \mathbb{R} cuando todo intervalo abierto (a, b) contiene algún punto de X , es decir, un conjunto de números reales es denso en \mathbb{R} , cuando dados arbitrariamente $a < b$ en \mathbb{R} , es posible encontrar $x \in X$ tal que $a < x < b$.*

Ejemplo 20. *Sea $X = \{x : x \in \mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}\}$. X es un conjunto denso en \mathbb{R} .*

Definición 23. *Una topología sobre un conjunto X es una colección τ de subconjuntos de X con las siguientes propiedades:*

1. \emptyset y X están en τ .
2. La unión de los elementos de cualquier subcolección de τ está en τ .
3. La intersección de los elementos de cualquier subcolección finita de τ está en τ .

Un conjunto X para el que se ha definido una topología τ se llama espacio topológico.

Ejemplo 21. *Sea X un conjunto de tres elementos $X = \{a, b, c\}$. Hay muchas topologías posibles sobre X . Indicaremos algunas.*

$$\tau_1 = \{\emptyset, X\},$$

$$\tau_2 = \{\emptyset, \{a\}, \{a, b\}, X\},$$

$$\begin{aligned}\tau_3 &= \{\emptyset, \{a\}, \{c\}, \{a, c\}, X\}, \\ \tau_4 &= \{\emptyset, \{b\}, \{a, b\}, \{b, c\}, X\}, \\ \tau_5 &= \{\emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}, X\}.\end{aligned}$$

Definición 24. Si X es un conjunto, una base para una topología sobre X es una colección β de subconjuntos de X tales que:

1. para cada $x \in X$, hay al menos un elemento básico $B \in \beta$ que contiene a x .
2. Si x pertenece a la intersección de dos elementos básicos $B_1 \in \beta$ y $B_2 \in \beta$, entonces existe un elemento básico $B_3 \in \beta$ que contiene a x y tal que $B_3 \subset B_1 \cap B_2$.

Proposición 2. Existe una función f que satisface $f^{-1} = 1/f$ sobre $(0, \infty)$ tal que el $\text{Gr}(f)$ es densa en $(0, \infty) \times (0, \infty)$.

Demostración. Construyamos la gráfica semejante a la función f . La estrategia es escoger un conjunto denso de puntos que cumplan el papel de a en el 4-ciclo (3.1), entonces obliga al 4-ciclo (3.1) a tener la propiedad (1).

Sea $\{E_k\}$ una base abierta contable respectivamente de $(0, 1) \times (0, 1)$. Sea $(a_1, b_1) \in E_1$ escogidos arbitrariamente. Sea $F_1 = \{(a_1, b_1), (b_1, 1/a_1), (1/a_1, 1/b_1), (1/b_1, a_1)\}$.

Teniendo definido F_{n-1} , escojamos $(a_n, b_n) \in E_n$, tal que ninguno de los a_n o b_n se encuentran en $\bigcup_{k=1}^{n-1} \{a_k, b_k, 1/a_k, 1/b_k\}$.

Sea $F_n = F_{n-1} \cup \{(a_n, b_n), (b_n, 1/a_n), (1/a_n, 1/b_n), (1/b_n, a_n)\}$. Entonces la función $f_1 = \bigcup_{k=1}^{\infty} F_k$ satisface (1) sobre un subconjunto contable de $(0, \infty)$, y su gráfica es densa en el primer cuadrante.

Existe un conjunto de puntos no contables en $(0, \infty) \setminus \text{dom}(f_1)$. Definimos f_2 que satisface (1) sobre $(0, \infty) \setminus \text{dom}(f_1)$ usando el esquema (3.5). Entonces $f = f_1 \cup f_2$ satisface (1) en $(0, \infty)$, y esta gráfica es densa en el primer cuadrante. \blacktriangledown

Bibliografía

- [1] APOSTOL Tom M. *Analisis Matemático*. Barcelona España, Editorial Reverté, 1977.
- [2] LIMA Elon Lages. *Curso de analise*. Instituto de Matematica Pura y Aplicada, Rio de Janeiro, 1929.
- [3] ANSCHUETZ R.Sherwood H. *When is a Function's Inverse Equal to its Reciprocal?*. Collage Math.j 27,1996.
- [4] CHENG R. DASGUPTA AEBANKS B.R. KINCH L.F. LARSON L.M. and McFADDEN R.B. When Does $f^{-1} = 1/f$. American Mathematical Monthly, Vol 105, 1998.
- [5] EULER and FORAN. *On functions whose inverse is therir reciprocal*, Math.Mag 54. 1981.