

**COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE UN METAMATERIAL CON
CONFIGURACIÓN PENTAMODAL**

**DANIEL FELIPE ROJAS CASTRO
CARLOS ÁNGEL GRANADOS TUTA**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
BUCARAMANGA**

2018

**COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE UN METAMATERIAL CON
CONFIGURACIÓN PENTAMODAL**

**DANIEL FELIPE ROJAS CASTRO
CARLOS ÁNGEL GRANADOS TUTA**

Trabajo de Grado para optar el título de Ingeniero Civil

Director

**OSCAR JAVIER BEGAMBRE CARRILLO
Ingeniero Civil, PhD.**

Codirector

**LEONARDO MORENO DE LUCA
Ingeniero Civil, M.Sc.& Arquitecto.**

**UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER
FACULTAD DE INGENIERÍAS FÍSICO-MECÁNICAS
ESCUELA DE INGENIERÍA CIVIL
BUCARAMANGA**

2018

DEDICATORIA

A DIOS, por iluminar mi camino y ayudarme en haber tomado las decisiones que hasta ahora me han llevado hasta donde estoy en este momento, porque es gracias a ÉL que todas mis ambiciones y anhelos se han hecho realidad.

A mi madre Maria Isabel Castro Correa, por darme durante todo este tiempo un amor y apoyo incondicional y real sobre todo el trayecto académico que tuve que acarrear en este ciclo universitario que, a pesar de no estar acompañándome directamente, siempre está pendiente de mí, dándome todo lo que necesitaba, ya que sin ella hubiera sido imposible.

A mis abuelos Ismael de Jesús Castro Fuentes y Gilma Sofía Correa López, que siempre estuvieron ahí dándome esos consejos y fortalezas en los momentos más difíciles para continuar adelante.

A mi hermana Diana Paola Rojas Castro por estar ahí a mi lado en todo momento dándome su apoyo incondicional.

A mi novia Angie Judith Sánchez Barajas por querer siempre lo mejor de mí y lograr que yo me esmerara más por alcanzar mis objetivos.

A todas aquellas personas que se involucraron conmigo en este trayecto que de una u otra manera contribuyeron en la toma de mis decisiones.

Daniel Felipe Rojas Castro

DEDICATORIA

A mi padre y a mi madre, por su apoyo, soporte y guía incondicional a lo largo de mi vida.

A mi hermano, por ser mi cómplice en la vida y su apoyo en todo.

A mis primos, por estar conmigo y darme sus consejos en todos estos años de universidad.

A todas las personas que conocí e hicieron parte de esta etapa en el pregrado.

Carlos Ángel Granados Tuta

AGRADECIMIENTOS

A DIOS.

Al profesor Oscar Javier Begambre Carrillo por su excelente acompañamiento, asesoría, liderazgo, consejos y dirección en el desarrollo del proyecto.

Al ingeniero Leonardo Moreno De Luca por su colaboración, apoyo, paciencia y dirección en la elaboración del proyecto.

A nuestros padres que estuvieron en todo momento acompañándonos, apoyándonos y orientándonos en la toma de las mejores decisiones.

A todas aquellas personas que se involucraron en este trayecto que de una u otra manera contribuyeron en el desarrollo del proyecto.

CONTENIDO

	Pág.
INTRODUCCIÓN	17
1. OBJETIVOS.....	21
1.1 OBJETIVO GENERAL	21
1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	21
2. CUERPO DEL TRABAJO	22
2.1 MARCO REFERENCIAL.....	22
2.1.1 Manufactura Aditiva	22
2.2 METAMATERIAL PENTAMODAL	23
2.3 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS	27
2.3.1 Elementos tipo barra en 3 dimensiones.....	28
2.4 ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN PARTICLE SWARM OPTIMIZATION (PSO).....	30
2.4.1 Método.....	31
2.5 PROPIEDADES DEL POLÍMERO ABS	31
2.6 DEFINICIÓN DE LOS PARÁMETROS GEOMÉTRICOS	37
2.6.1. Conectividad de los elementos a partir de RHINOCEROS + GRASSHOPPER	38
2.6.2. Algoritmo en MATLAB.....	39
2.6.2.1. Comprobación FEM	39
2.6.2.2. Comprobación PSO	42
2.6.2.3. Función objetivo	43
2.6.2.4. Resultados de la optimización en MATLAB	45
2.6.3 Definición de la sección variable.....	47
2.7 MODELO NUMÉRICO	49
2.8 ELABORACIÓN DE LOS ESPECÍMENES	51

2.8.1 Resultados.....	53
2.8.1.1 Modelo Numérico.....	53
2.9 MODELO EXPERIMENTAL.....	55
2.9.1 Datos obtenidos.....	55
2.9.2 Forma de falla de los especímenes.....	58
2.10 DISCUSIÓN.....	59
3. CONCLUSIONES.....	61
4. RECOMENDACIONES.....	63
BIBLIOGRAFÍA.....	64

LISTA DE FIGURAS

	Pág.
Figura 1. Celda cúbica unitaria de la configuración pentamodal.....	18
Figura 2. Variables de distribución y dimensionamiento de un arreglo constituido por cuatro celdas cúbicas unitarias.....	19
Figura 3. Foto de una motocicleta a escala real creada mediante FDM.	23
Figura 4. Clasificación de los Metamateriales a partir del coeficiente de Poisson y los módulos de elasticidad y de cortante.	24
Figura 5. Grados nodales de libertad en un problema en tres dimensiones cuando la variable de campo es un vector.	25
Figura 6. Extracción del material pentamodal a partir del material bimodal bidimensional.	26
Figura 7. Estructura discretizada con elementos tipo barra	27
Figura 8. Grados de libertad de un elemento barra en el espacio	28
Figura 9. Matriz de rigidez para un elemento barra en el espacio.	29
Figura 10. Ensayo a compresión de la probeta No 1 en el equipo MTS Bionix.	33
Figura 11. Probetas después del ensayo a compresión.	34
Figura 12. Resultado de las propiedades a compresión obtenidas junto con la gráfica de Esfuerzo-deformación del ensayo de la primera muestra cilíndrica.	35
Figura 13. Módulo de elasticidad de algunos materiales.	37
Figura 14. Arreglo pentamodal con un ancho de 6 celdas cúbicas unitarias a cada lado y una sección transversal constante en sus elementos.	38
Figura 15. Pórtico propuesto para hacer la comprobación del FEM programado. .	40
Figura 16. Función de Rosembrock graficada en MATLAB.	42
Figura 17. Optimización función de Rosembrock en Matlab con el PSO.	43
Figura 18. Gráfica de energía vs peso por unidad de volumen del modelo optimizado.....	46

Figura 19. Gráfica de optimización de la Función Objetivo vs el número de iteraciones.....	46
Figura 20. Modelo de la estructura con relación de diámetro de 0.53 elaborado en SAP2000.....	50
Figura 21. Modelo de la estructura con relación de diámetro de 0.18 elaborado en Rhinoceros.....	52
Figura 22. Impresora Ultimaker Original en proceso.....	52
Figura 23. Modelos impresos con relación de diámetros de 0.18, 0.38, 0.53, 1, 2 y 3, de izquierda a derecha.	53
Figura 24. Gráfica fuerza vs desplazamiento con una relación de diámetros de 0.38 obtenido del modelo con placa superior en SAP2000.	53
Figura 25. Gráfica de rigidez vs relación de diámetros de los modelos propuestos obtenidos del análisis numérico para modelos con y sin placa superior.	54
Figura 26. Ensayo a compresión del modelo con relación de diámetros de 0.18. .	55
Figura 27. Gráfica fuerza vs desplazamiento para el modelo con relación de diámetros de 0.53.	56
Figura 28. Gráfica fuerza vs desplazamiento para el modelo con relación de diámetros de 0.53 delimitada en la parte lineal para obtener su rigidez.	57
Figura 29. Gráfica rigidez vs relación de diámetros (d/D).	57
Figura 30. Gráfica carga última vs relación de diámetros (d/D).	58
Figura 31. Modelo fallado con relación de diámetros de 0.53.....	58
Figura 32. Modelo fallado con relación de diámetros de 3.....	59
Figura 33. Comparativa resultados numéricos con experimentales.....	60

LISTA DE TABLAS

	Pág.
Tabla 1. Propiedades a compresión después de realizar el análisis estadístico en los 8 ensayos.	35
Tabla 2. Propiedades utilizadas en el modelo de comprobación.	40
Tabla 3. Coordenadas de los nodos en el modelo de comprobación.	41
Tabla 4. Resultados obtenidos en SAP2000.	41
Tabla 5. Resultados obtenidos en MATLAB.	41
Tabla 6. Porcentaje de error para cada una de las soluciones encontradas.	41
Tabla 7. Valores de diámetros obtenidos analíticamente para cada relación de diámetro.	48
Tabla 8. Valores de diámetros de sección variable a utilizar.	51

LISTA DE ANEXOS

(Ver anexos adjuntos en el CD y pueden visualizarlos en la Base de Datos de la Biblioteca UIS)

Anexo A. Ficha de datos técnicos del polímero ABS

Anexo B. Ensayos y propiedades a compresión del polímero ABS

Anexo C. Información preliminar extraída de Rhinoceros+Grasshopper

Anexo D. Comprobación de algoritmos FEM y PSO

Anexo E. Algoritmo de optimización

Anexo F. Resultados del algoritmo de optimización

Anexo G. Definición de la sección variable

Anexo I. Elaboración de los modelos

Anexo J. Fabricación de los especímenes

Anexo K. Resultados del análisis numérico

Anexo L. Resultados experimentales

RESUMEN

TÍTULO: COMPORTAMIENTO MECÁNICO DE UN METAMATERIAL CON CONFIGURACIÓN PENTAMODAL*

AUTORES: DANIEL FELIPE ROJAS CASTRO
CARLOS ÁNGEL GRANADOS TUTA**

PALABRAS CLAVE: RIGIDEZ, CARGA ÚLTIMA, PENTAMODAL, SECCIÓN VARIABLE, MANUFACTURA ADITIVA, MESOESCALA.

DESCRIPCIÓN:

Los metamateriales son materiales que cambian sus propiedades mecánicas conforme a su geometría (topología), independientemente del material en el que estén hechos. Recientemente su estudio ha aumentado, debido a la aparición de la manufactura aditiva, que permite la fabricación de modelos físicos para estudiar su comportamiento experimentalmente. Dentro de los metamateriales se encuentra la configuración pentamodal, que se caracteriza por tener 4 barras unidas al centroide de una celda cúbica unitaria. Ésta posee un módulo de rigidez a cortante G mucho más pequeño que el módulo de rigidez a compresión vertical K_v . Sus módulos de corte pueden modificarse alterando el número de celdas y sus variables de distribución y dimensionamiento. En el presente estudio se determinó el comportamiento mecánico de la configuración pentamodal óptima para un arreglo compuesto por un número de celdas cúbicas unitarias definidas dentro de la categoría de mesoescala de forma experimental observando el cambio en su rigidez y resistencia (carga última) ante cargas axiales a compresión, con distintas variaciones de su sección transversal manteniendo constante el volumen de material consumido (polímero tipo ABS) utilizando modelos fabricados mediante la manufactura aditiva (impresión 3D) y de forma numérica observando el cambio en su rigidez utilizando modelos analizados en un software de análisis de elementos finitos.

* Trabajo de grado

** Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Civil. Director: Oscar Javier Begambre Carrillo, Ingeniero Civil, PhD. Codirector: Leonardo Moreno de Luca, Ingeniero Civil, M.Sc.& Arquitecto

ABSTRACT

TITLE: MECHANICAL BEHAVIOR OF A METAMATERIAL WITH PENTAMODAL CONFIGURATION*

AUTHORS: DANIEL FELIPE ROJAS CASTRO
CARLOS ÁNGEL GRANADOS TUTA**

KEYWORDS: STIFFNESS, ULTIMATE LOAD, PENTAMODAL, VARIABLE SECTION, ADDITIVE MANUFACTURING, MESOSCALE.

DESCRIPTION:

The metamaterials are materials that change their mechanical properties according to their geometry (topology), independently of the material in which they are made. Recently their study has increased, due to the appearance of additive manufacturing, which allows the manufacture of physical models to study their behavior experimentally. Within the metamaterials is the pentamodal configuration, which is characterized by having 4 bars attached to the centroid of a unit cubic cell. It has a modulus of shear stiffness G much smaller than the vertical compression stiffness module K_v . Its cutting modules can be modified by altering the number of cells and their distribution and sizing variables. In the present study, the mechanical behavior of the optimal pentamodal configuration was determined for an array composed of a number of unit cubic cells defined within the mesoscale category experimentally observing the change in their rigidity and strength (ultimate load) before axial loads in compression, with different variations of its cross section, keeping the volume of material consumed constant (polymer type ABS) using models manufactured by additive manufacturing (3D printing) and numerically observing the change in its rigidity using models analyzed in a software package. finite element analysis.

* Bachelor Thesis

** Facultad de Ingenierías Físico-Mecánicas. Escuela de Ingeniería Civil. Director: Oscar Javier Begambre Carrillo, Ingeniero Civil, PhD. Codirector: Leonardo Moreno de Luca, Ingeniero Civil, M.Sc.& Arquitecto.

INTRODUCCIÓN

Los metamateriales mecánicos son materiales artificiales cuyas propiedades mecánicas no provienen de su composición química, sino de su topología generalmente diseñada en células unitarias conformando una estructura por la repetición de un patrón periódico ^{1 2}. Por otra parte, esta clase de "materiales extremos" está atrayendo la atención de diferentes campos de investigación debido a su comportamiento inusual ³. Estas estructuras conforman configuraciones unimodales, bimodales, trimodales, tetramodales, pentamodales y hexamodales, de acuerdo con el número de modos de deformación suaves que puede lograr el tensor de elasticidad en cada una de sus direcciones (traducción de los autores) ^{4 5}.

Cada configuración presenta un comportamiento diferente y cumple una función dependiendo el uso que se le dé ^{6 7 8}.

La configuración Pentamodal presenta una celda unitaria primitiva equipada con cuatro elementos que se unen en un punto como se muestran en las figuras 1 y 2⁹.

Un metamaterial con configuración pentamodal es aquel que presenta alta rigidez axial y baja rigidez a cortante, en otros términos, el módulo de corte (G) es mucho menor que el módulo de compresibilidad (K) y se comportan muy blandos en cinco

¹ FABBROCINO, F., AMENDOLA, A., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., op. Cit.

² YU, X., ZHOU, J., LIANG, H., JIANG, Z., & WU, L., op. Cit.

³ FABBROCINO, F., AMENDOLA, A., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., "Discrete-to-Continuum approaches to the mechanics of pentamode bearings," *Composite Structures*, 167, 2017, pp. 219–226

⁴ MILTON, G. W. & CHERKAEV, "Which Elasticity Tensors are Realizable?," *J. Eng. Mater, Technol*, Vol. 117, 1995, pp. 483-493

⁵ FABBROCINO, F., AMENDOLA, A., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., Op. Cit.

⁶ YU, X., ZHOU, J., LIANG, H., JIANG, Z., & WU, L., op. Cit.

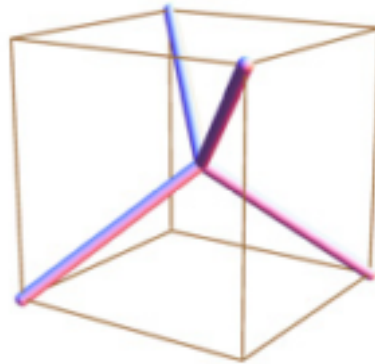
⁷ MILTON, G. W. & CHERKAEV, Op. Cit.

⁸ FABBROCINO, F., AMENDOLA, A., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., Op. Cit.

⁹ *Ibíd.*

de las seis direcciones principales del tensor de elasticidad ^{10 11 12}. La configuración Pentamodal la han propuesto para el electromagnetismo, pero su potencial en diferentes campos de ingeniería aún se explora parcialmente ¹³.

Figura 1. Celda cúbica unitaria de la configuración pentamodal



Fuente: FABBROCINO, F., AMENDOLA, A., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., “Seismic application of pentamode lattices,” *Ingegneria Sismica*, 33(1–2), 2016, pp. 62–70

En este trabajo se determinó de forma numérica y experimental la configuración pentamodal óptima para un arreglo compuesto por un número definido de celdas cúbicas unitarias, elaborado con un polímero tipo ABS y empleando la tecnología de manufactura aditiva (impresión en 3D). Mediante variaciones de la geometría, optimizando la cantidad de material a utilizar.

Esta optimización del material se hace mediante los parámetros d , D y a definidos en la figura 2, usando la configuración pentamodal, iterando sus variables de distribución y dimensionamiento ¹⁴.

¹⁰ YU, X., ZHOU, J., LIANG, H., JIANG, Z., & WU, L., op. Cit.

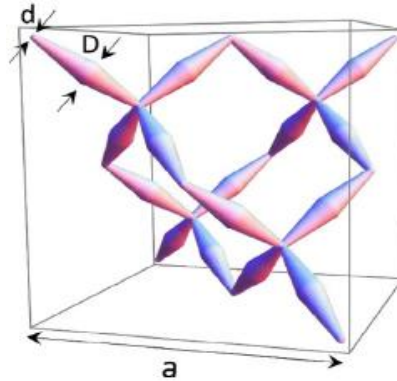
¹¹ MILTON, G. W. & CHERKAEV, Op. Cit.

¹² FABBROCINO, F., AMENDOLA, A., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., Op. Cit.

¹³ YU, X., ZHOU, J., LIANG, H., JIANG, Z., & WU, L., op. Cit.

¹⁴ AMENDOLA, A., SMITH, C. J., GOODALL, R., AURICCHIO, F., FEO, L., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., Op. Cit.

Figura 2. Variables de distribución y dimensionamiento de un arreglo constituido por cuatro celdas cúbicas unitarias.



Fuente: AMENDOLA, A., SMITH, C. J., GOODALL, R., AURICCHIO, F., FEO, L., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., "Experimental response of additively manufactured metallic pentamode materials confined between stiffening plates," *Composite Structures*. Elsevier Ltd, 142, 2016, pp. 254-262.

Se van a manejar las dimensiones para la celda cúbica unitaria en un rango de 0.1 mm hasta 10 mm para lograr alcanzar la categoría de mesoescala no estocástica, que son celdas unitarias compuestas de elementos atados entre sí por nodos, las cuales son construidas mediante manufactura aditiva ¹⁵.

De igual manera se van a comparar 6 diferentes tipos de arreglos de relaciones de diámetros distintos con su respectiva rigidez para determinar cuál es el modelo más óptimo que presente mejor comportamiento.

En la actualidad se han utilizado estos metamateriales en la ingeniería civil para diseñar nuevas celosías pentamodales con arquitectura de tensegridad, mediante la inserción de puntales accionados y / o cables pretensados dentro de celosías

¹⁵ TAMBURRINO, F., GRAZIOSI, S. & BORDEGONI, M, "The Design Process of Additively Manufactured Mesoscale Lattice Structures: A Review," *J. Comput. Inf. Sci. Eng.* 18, 040801, 2018

pentamodales básicas ¹⁶. Dichos sistemas se proponen como dispositivos de aislamiento de base sísmicos sintonizables, que se benefician de sus módulos de corte bajo y ajustable, que se pueden adaptar fácilmente a las propiedades dinámicas de la estructura que se va a aislar ¹⁷.

Para estos aisladores de base pueden constituirse placas rígidas compuestas en paralelo que trabajan simultáneamente obteniendo módulos de corte mucho más bajos que los módulos a compresión ¹⁸.

En el desarrollo del proyecto se va a fundamentar con qué configuración se obtiene el mejor comportamiento optimizando la cantidad de material a utilizar.

¹⁶ BLANCO BLANCH, P., "Pretensado de columnas tensegrity para el incremento de rigidez axial" [Tesis de maestría]. Universitat Politècnica de catalunya, Barcelona (España), 2010

¹⁷ FABBROCINO, F., AMENDOLA, A., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., Op. Cit.

¹⁸ FABBROCINO, F., AMENDOLA, A., BENZONI, G., & FRATERNALI, F.,

1. OBJETIVOS

1.1 OBJETIVO GENERAL

Determinar el comportamiento mecánico de un metamaterial pentamodal a base de termoplástico tipo ABS con geometría óptima, ante cargas a compresión.

1.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS

- Establecer la configuración pentamodal óptima empleando la literatura científica y un modelo numérico.
- Elaborar un prototipo a base de termoplástico tipo ABS empleando la técnica de manufactura aditiva para determinar la rigidez y la resistencia (carga última) del cuerpo de prueba ante cargas a compresión.

2. CUERPO DEL TRABAJO

2.1 MARCO REFERENCIAL

2.1.1 Manufactura Aditiva Manufactura aditiva se define como el proceso de agregar o unir materiales, usualmente capa por capa para crear objetos a partir de modelos de computo CAD 3D. Algunos sinónimos son impresión 3D, fabricación aditiva, manufactura por capas o fabricación de forma libre.

Las aplicaciones principales de manufactura aditiva son para la creación de prototipos rápidos usando diseño y modelado, para fabricación directa de partes, revisión de ajustes de formas en ensamblajes y verificación de prototipos funcionales. Alrededor del mundo, la manufactura aditiva está cambiando la forma en que las organizaciones diseñan y manufacturan sus productos. Cuando se usa de manera correcta, puede ahorrar mucho a las organizaciones en costos de calidad y reducción dramática de tiempos de proceso ¹⁹.

Dentro del proceso de manufactura aditiva para polímeros actualmente se encuentran 7 diferentes métodos, de los cuales pueden generar como producto un comportamiento mecánico diferente para el mismo modelo, ya que cada uno de estos métodos soporta diferentes tipos de polímeros, por la manera en el que este es aplicado. Los 7 métodos son: Fused deposition modeling (FDM), Stereolithography (SLA), Digital light processing (DLP), Selective layer sintering (SLS), Three-dimensional printing (3DP), Laminated object manufacturing (LOM) y PolyJet technology ²⁰.

¹⁹ TERRY WOHLERS, What is Additive Manufacturing?. Recuperado de: <http://wohlersassociates.com/additive-manufacturing.html>

²⁰ DIZON, J. R. C., ESPERA, A. H., CHEN, Q., & ADVINCULA, R. C., "Mechanical characterization of 3D-printed polymers," Additive Manufacturing, 20, 2018, pp. 44–67

Figura 3. Foto de una motocicleta a escala real creada mediante FDM.



Fuente: TERRY WOHLERS, What is Additive Manufacturing?. Recuperado de: <http://wohlersassociates.com/additive-manufacturing.html>

2.2 METAMATERIAL PENTAMODAL

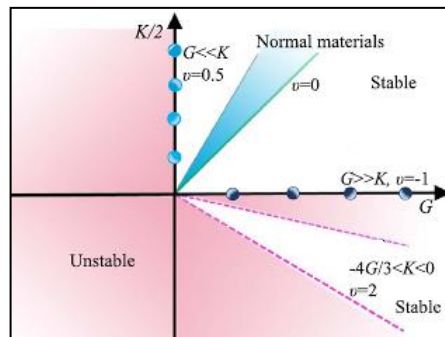
Desde la aparición de la manufactura aditiva en combinación con el avance de las herramientas de análisis de ingeniería ha llevado a un nuevo paradigma en el diseño de materiales, en el que la organización de la geometría que componen estos materiales juega un papel central. Apareció una nueva clase de materiales artificiales que presentan propiedades estáticas y dinámicas que típicamente no se encuentran en los materiales naturales y han sido nombrados como metamateriales. En este contexto, se usa el término metamateriales para caracterizar materiales artificiales que obtienen sus características mecánicas de su arquitectura interna (topología) y no de su composición química, generalmente diseñada en células unitarias conformando una estructura por la repetición de un patrón periódico ²¹.

Hasta ahora, una cantidad considerable de trabajos se ha dedicado a la concepción y análisis de metamateriales auxéticos, por lo tanto, materiales con relaciones negativas de Poisson. La relación de Poisson ofrece una métrica fundamental para comparar el rendimiento del material. Mientras que para materiales isotrópicos el

²¹ YU, X., ZHOU, J., LIANG, H., JIANG, Z., & WU, L.,

valor de la relación de Poisson está limitado en el rango de $-1 \leq \mu \leq 0.5$, los materiales anisotrópicos pueden exceder estos límites ²².

Figura 4. Clasificación de los Metamateriales a partir del coeficiente de Poisson y los módulos de elasticidad y de cortante.



Fuente: YU, X., ZHOU, J., LIANG, H., JIANG, Z., & WU, L., "Mechanical metamaterials associated with stiffness, rigidity and compressibility: A brief review," Progress in Materials Science, 94, 2018, pp. 114–173

Por otra parte, la clase de "materiales extremos" está atrayendo la atención de diferentes campos de investigación debido a su comportamiento inusual, los cuales son aquellos materiales cuyos valores propios del tensor de elasticidad son muy pequeños o muy grandes. Estas estructuras se denominan materiales unimodales, bimodales, trimodales, tetramodales, pentamodales y hexamodales, de acuerdo con el número de modos de deformación suaves que puede lograr el tensor de elasticidad en sus direcciones ^{23 24}

Cada configuración presenta un comportamiento diferente y cumple una función dependiendo el uso que se le dé ^{25 26 27}

²² TERRY WOHLERS, Op. Cit.

²³ MILTON, G. W. & CHERKAEV, Op. Cit.

²⁴ FABBROCINO, F., AMENDOLA, A., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., Op. Cit.

²⁵ YU, X., ZHOU, J., LIANG, H., JIANG, Z., & WU, L.,

²⁶ MILTON, G. W. & CHERKAEV, Op. Cit

²⁷ FABBROCINO, F., AMENDOLA, A., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., Op. Cit.

Estos tensores de elasticidad de los materiales extremos en tercera dimensión, pueden ser representados así:

$$T_{ijkl} = \sum_{a=1}^6 \lambda_a * v_{ij}^{(a)} * v_{kl}^{(a)} \quad (1)$$

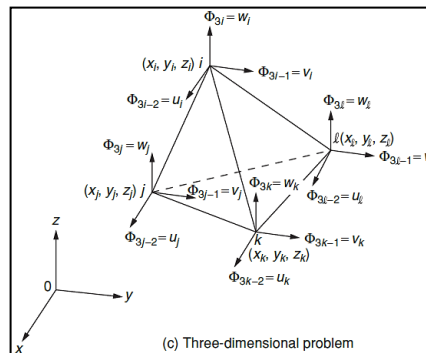
El cual, $\sum_{i,j=1}^6 \lambda_a * v_{ij}^{(a)} * v_{ij}^{(a)} = 1, \quad \lambda_a > 0$

Para $a = 1,2,3,4,5,6$.

Donde λ_a son los valores propios del tensor y $v^{(a)}$ son las matrices asociadas a los tensores propios simétricos de segundo orden ²⁸.

A continuación, se representan los nodos i, j, k, l para un problema en tres dimensiones cuando la variable de campo es un vector:

Figura 5. Grados nodales de libertad en un problema en tres dimensiones cuando la variable de campo es un vector.

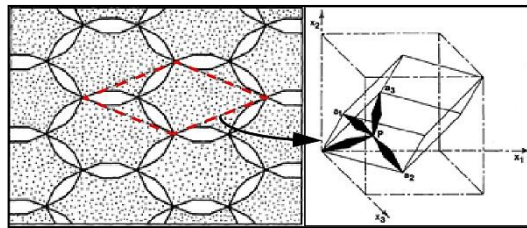


Fuente: RAO, S. SINGIRESU, The Finite Element Method in Engineering, fifth edition. Department of Mechanical and Aerospace Engineering University of Miami, 2011, p. 3-332

²⁸ MILTON, G. W. & CHERKAEV, Op. Cit

Los materiales pentamodales son los análogos tridimensionales de los materiales bimodales bidimensionales por lo que sólo pueden soportar una única tensión. De esta manera la configuración se extrae de este mismo modelo a partir del nodo en el que llegan 3 de sus elementos, por lo que al transformarse a un sistema de referencia en 3 dimensiones este formará un cubo con 4 elementos que llegan a un nodo central. Esto sugiere que un candidato natural para los materiales extremos pentamodales podría ser una estructura "tipo diamante" en la que cuatro enlaces se unen en un punto ²⁹.

Figura 6. Extracción del material pentamodal a partir del material bimodal bidimensional.



Fuente: MILTON, G. W. & CHERKAEV, "Which Elasticity Tensors are Realizable?," J. Eng. Mater, Technol, Vol. 117, 1995,pp. 483-493

Por tal razón, la configuración Pentamodal son metamateriales que presentan una celda unitaria primitiva equipada con cuatro varillas que se unen en un punto ³⁰

Un metamaterial con configuración pentamodal es aquel que presenta alta rigidez axial y baja rigidez a cortante, en otros términos, el módulo de corte (G) es mucho menor que el módulo de compresibilidad (K) y se comportan muy blandos en cinco de las seis direcciones principales del tensor de elasticidad ^{31 32 33}.

²⁹ Ibíd.

³⁰ FABBROCINO, F., AMENDOLA, A., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., Op. Cit.

³¹ YU, X., ZHOU, J., LIANG, H., JIANG, Z., & WU, L., Op. Cit.

³² MILTON, G. W. & CHERKAEV, Op. Cit

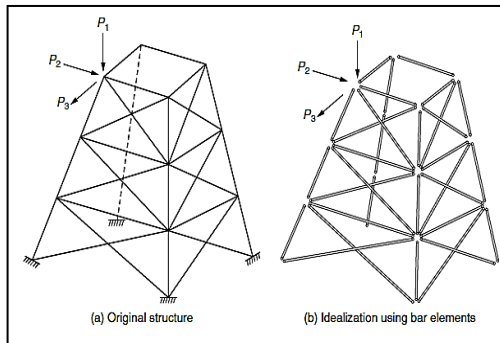
³³ FABBROCINO, F., AMENDOLA, A., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., Op. Cit.

2.3 MÉTODO DE LOS ELEMENTOS FINITOS

Este método es utilizado para hallar la solución aproximada de un sistema inicialmente complejo, reemplazándolo por un problema más sencillo ³⁴.

Esta simplificación se lleva a cabo en el caso de elementos sólidos, reemplazando el cuerpo continuo por una serie de subdivisiones ensamblados entre sí llamados elementos finitos ³⁵

Figura 7. Estructura discretizada con elementos tipo barra



Fuente: RAO, S. SINGIRESU, The Finite Element Method in Engineering, fifth edition. Department of Mechanical and Aerospace Engineering University of Miami, 2011, p. 3-332

Dichas divisiones se conectan entre sí en puntos denominados nodos, en los cuales, para el caso de un problema estático, es de interés determinar los esfuerzos y desplazamientos en todos los puntos ³⁶.

³⁴ RAO, S. SINGIRESU, The Finite Element Method in Engineering, fifth edition. Department of Mechanical and Aerospace Engineering University of Miami, 2011, p. 3-332

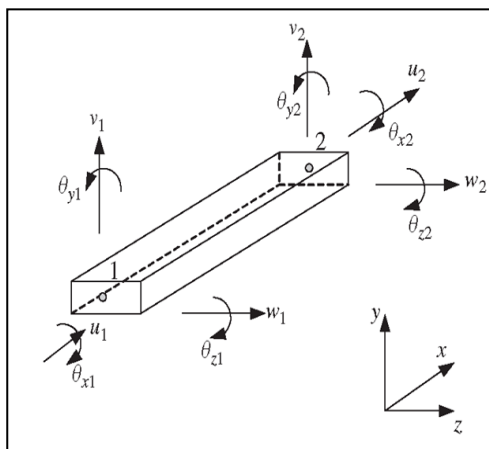
³⁵ Ibid.

³⁶ Ibid.

2.3.1 Elementos tipo barra en 3 dimensiones Son barras rectas que pueden soportar carga axial y momento en las dos direcciones principales de su sección transversal, además de torsión en su eje centroidal.

Este elemento cuenta con dos nodos, 6 grados de libertad en cada uno, teniendo 3 desplazamientos y 3 rotaciones, uno por cada dirección en el espacio ³⁷.

Figura 8. Grados de libertad de un elemento barra en el espacio



Fuente: WHEN-HOW Degrees of freedom of a bar element in space. [en línea] disponible en: http://what-when-how.com/wp-content/uploads/2012/06/tmpabe437_thumb_thumb.png

Teniendo esto en cuenta, el tamaño de la matriz de rigidez del elemento barra, es de 12x12, resultado de la suma de los 6 grados de libertad por cada nodo ³⁸

³⁷ Ibíd.

³⁸ Ibíd.

Figura 9. Matriz de rigidez para un elemento barra en el espacio.

$$\left[k^f \right] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & \frac{2EI_y}{L} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ -\frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{EA}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & \frac{12EI_z}{L^3} & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} \\ 0 & 0 & -\frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} & 0 & 0 & \frac{12EI_y}{L^3} & 0 & 0 & \frac{6EI_y}{L^2} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{GJ}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{GJ}{L} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{4EI_y}{L} & 0 & 0 & 0 & 0 & -\frac{6EI_y}{L^2} & 0 & -\frac{2EI_y}{L} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} \\ 0 & \frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{2EI_z}{L} & 0 & -\frac{6EI_z}{L^2} & 0 & 0 & 0 & \frac{4EI_z}{L} \end{bmatrix}$$

Fuente: KATTAN, P. I., “MATLAB guide to finite elements: An interactive approach,” MATLAB guide to finite elements: An interactive approach, 10, 2008, pp. 193

Por lo cual es necesario determinar las matrices de rigidez para todos los elementos que conforman la estructura de interés y ensamblarlas de la manera adecuada, conformando la matriz de rigidez global del sistema ³⁹, conformando el conjunto de ecuaciones a resolver:

$$F = K * U \quad (2)$$

Donde F son las fuerzas aplicadas, K la matriz de rigidez global y U los desplazamientos en los nodos ⁴⁰

Resolviendo el sistema de ecuaciones se obtiene los valores de desplazamiento en cada uno de los nodos, así como todas las reacciones en los apoyos ⁴¹.

³⁹ Ibíd.

⁴⁰ Ibíd.

⁴¹ Ibíd.

2.4 ALGORITMO DE OPTIMIZACIÓN PARTICLE SWARM OPTIMIZATION (PSO)

El PSO es un método de optimización que tiene su origen en los intentos por simular el movimiento de ciertos grupos de animales como aves y peces para buscar alimento. Fue presentado por primera vez por Kennedy & Eberhart, en 1995, y a partir de esa fecha se han publicado diferentes modificaciones al algoritmo original. En forma general, un enjambre (*swarm*), está constituido por un número N de partículas o individuos, los cuales se encuentran moviéndose en el espacio de búsqueda. Cada posición de una partícula representa una posible solución al problema. En cada iteración, las partículas se van moviendo de una posición a otra, es decir, se genera un cambio en la solución que cada una representa. Las modificaciones en la posición de la partícula i , durante la iteración k , se hacen en función de la mejor posición encontrada tanto por todo el enjambre como por la partícula hasta esa iteración ⁴² ⁴³[13, 14].

De esta forma, se obtiene que el vector solución para cada una de las partículas se actualiza haciendo:

$$x_i^{k+1} = x_i^k + v_i^{k+1} \quad (3)$$

$$v_i^{k+1} = w * v_i^k + C_1 * r_1 * (P_i^k - x_i^k) + C_2 * r_2 * (G^k - x_i^k) \quad (4)$$

Donde x_i^{k+1} representa la nueva posición de la partícula i en la iteración $k+1$, v_i^{k+1} es el cambio de una posición a otra (también se le llama velocidad), w se conoce como factor inercial, C_1 es el coeficiente cognitivo, C_2 es el coeficiente social, y r_1 y

⁴² TOSCANO-PULIDO, G., COELLO COELLO, C. A. & SANTANA-QUINTERO, L. V., "EMOPSO: A Multi-Objective Particle Swarm Optimizer with Emphasis on Efficiency," *Evol. Multi-Criterion Optim.*, 2007, pp. 272–285

⁴³ LAPADULA SEQUERA, V. A., "Estudio comparativo sobre la aplicación de los algoritmos PSO y SQP en la optimización de pórticos planos de concreto armado [Msc Thesis]. Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá, 2014

r_2 son dos números aleatorios que se generan uniformemente entre 0 y 1, P_i^k es la mejor solución encontrada por la partícula i hasta la iteración k y G^k es la mejor solución encontrada por todo el enjambre. También el algoritmo de PSO se puede trabajar de forma local, dividiendo el enjambre de partículas en grupos que realizan la búsqueda de forma independiente entre sí. De esta forma se tienen varios G^k , uno por cada grupo de partículas ^{44 45}

En las ecuaciones (3) y (4), se identifican tres parámetros dentro del algoritmo, los cuales son el peso inercial w , el coeficiente cognitivo C_1 y el social C_2 . El primero busca controlar la influencia de la velocidad anterior v_i^k en la nueva velocidad v_i^{k+1} . Los coeficientes cognitivo y social, representan la importancia que le da cada partícula tanto a la mejor solución encontrada por ella P_i^k , como a la mejor encontrada por todo el enjambre G_i^k . La diferencia entre las versiones de PSO está en la forma en cómo se modifican estos parámetros durante las iteraciones. En algunos trabajos se dejan como constantes, mientras que en otros se van modificando según las condiciones de la búsqueda ⁴⁶.

2.4.1 Método. El proceso de manufactura aditiva que se utilizó es el de *Fused deposition modeling* (FDM), el cual va elaborando los especímenes capa por capa de acuerdo al modelo que se vincule ⁴⁷.

2.5 PROPIEDADES DEL POLÍMERO ABS

La impresora 3D a disposición trabaja con dos tipos materiales, PLA y ABS. Se escogió este último debido a que tiene un mejor comportamiento mecánico y es más

⁴⁴ TOSCANO-PULIDO, G., COELLO COELLO, C. A. & SANTANA-QUINTERO, L. V., "EMOPSO: A Op. Cit.

⁴⁵ LAPADULA SEQUERA, V. A., Op. Cit.

⁴⁶ *Ibíd.*

⁴⁷ DIZON, J. R. C., ESPERA, A. H., CHEN, Q., & ADVINCULA, R. C., Op. Cit.

flexible que el PLA, lo que favorece a la hora de hacer ensayos de carga. Las propiedades de interés para el modelo numérico a desarrollar son el módulo de elasticidad crítico del material y la relación de Poisson, esto debido a que no se sabe con certeza las reacciones de cada uno de los elementos que están trabajando.

Para un análisis lineal, a partir del módulo de elasticidad y la relación de Poisson, es posible obtener el módulo de corte, como sigue:

$$G = \frac{E}{2 * (1 + \nu)} \quad (5)$$

Donde G es el módulo de corte, E es el módulo de elasticidad y ν es el coeficiente de poisson.

Primeramente, se extrajo el módulo de elasticidad a tensión que proporciona el proveedor ULTIMAKER junto con otras propiedades a tensión y la densidad del polímero tipo ABS [Ver Anexo A].

$$E_T = 1681.5 \text{ MPa}$$

$$\rho = 1.1 \frac{\text{g}}{\text{cm}^3}$$

Donde E_T es el módulo de elasticidad a tensión y ρ es la densidad.

Para determinar el módulo de elasticidad a compresión, el coeficiente de poisson y sus otras propiedades a compresión, se tuvo que realizar una caracterización del material a compresión.

Para ello, se elaboraron muestras de acuerdo a la norma ASTM D695, donde se indica que éstas deben ser ya sea de forma prismática o cilíndrica. Para facilidad de impresión, se escogió la forma cilíndrica, cuyas especificaciones son:

Diámetro = 12.7 mm

Largo = 50.8 mm

Donde se observa que tiene una relación de esbeltez 1:4. En base a esto, se imprimieron 8 muestras cilíndricas, para tener una buena cantidad de datos experimentales.

Se procedió a ensayar a compresión las 8 probetas en el equipo MTS Bionix con un incremento de 1.3 ± 0.3 mm/min, hasta alcanzar su falla ⁴⁸.

Figura 10. Ensayo a compresión de la probeta No 1 en el equipo MTS Bionix.



⁴⁸ SPECIMENS, P. Compressive Properties of Rigid Plastics 1. Annu. B. ASTM Stand. i, D695, 2008, p. 1–8

Las propiedades de los elementos varían de acuerdo a la dirección de las fibras con respecto a la dirección de la carga y del espesor de capa que se haya utilizado para su elaboración ^{49 50}.

Considerando que ante cargas a compresión para espesores de capas menores a 0.2 mm se obtiene mayor resistencia a una orientación de 0°, mientras que para capas mayores con la misma orientación es más crítico porque sus fibras tienden a separarse ⁵¹.

Figura 11. Probetas después del ensayo a compresión.



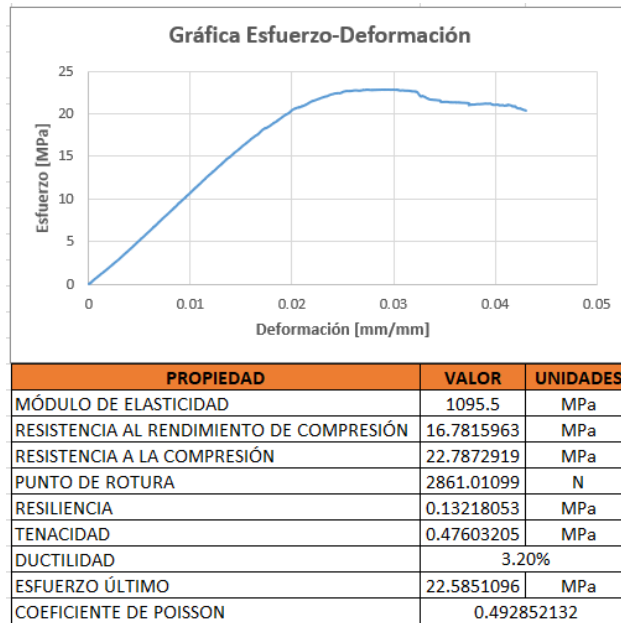
Después de realizar los ensayos respectivos, se procedió a realizar un análisis de resultados para obtener las propiedades mecánicas a compresión para cada uno de los cuerpos de prueba.

⁴⁹ DIZON, J. R. C., ESPERA, A. H., CHEN, Q., & ADVINCULA, R. C., Op. Cit.

⁵⁰ KIM H., PARK E., KIM S., PARK B., KIM N., AND LEE S., "Experimental Study on Mechanical Properties of Single- and Dual-material 3D Printed Products," *Procedia Manuf.*, 10, 2017, pp. 887–897

⁵¹ DIZON, J. R. C., ESPERA, A. H., CHEN, Q., & ADVINCULA, R. C., Op. Cit.

Figura 12. Resultado de las propiedades a compresión obtenidas junto con la gráfica de Esfuerzo-deformación del ensayo de la primera muestra cilíndrica.



Después de haber realizado los 8 ensayos respectivos y caracterizarlo de acuerdo a la norma ASTM D695, se obtuvieron los resultados finales a partir de un análisis estadístico [Ver Anexo B].

Tabla 1. Propiedades a compresión después de realizar el análisis estadístico en los 8 ensayos.

PROPIEDAD	ANÁLISIS ESTADÍSTICO		UNIDADES
	X [Media]	S [Desviación]	
MÓDULO DE ELASTICIDAD	1111.61	60.84	MPa
PUNTO DE FLUENCIA	16.76	1.87	MPa
RESISTENCIA A LA COMPRESIÓN	23.25	1.10	MPa
PUNTO DE ROTURA	2808.21	181.52	N
RESILIENCIA	0.13	0.03	MPa
TENACIDAD	0.62	0.13	MPa
DUCTILIDAD	0.04	0.01	%
ESFUERZO ÚLTIMO	22.17	1.43	MPa

PROPIEDAD	ANÁLISIS ESTADÍSTICO		UNIDADES
	X [Media]	S [Desviación]	
COEFICIENTE DE POISSON	0.45	0.09	-
MÓDULO DE CORTE	383.31	-	MPa

Finalmente, redondeando los valores a utilizar anteriormente mencionados sobre las propiedades a compresión:

$$E_c = 1100 \text{ MPa}$$

$$\nu = 0.45$$

Donde E_c es el módulo de elasticidad a compresión.

De acuerdo a los dos módulos de elasticidad dados, se elige el valor crítico para garantizar su resistencia en todos los elementos:

$$E = E_c = 1100 \text{ MPa} = 11216.92 \text{ kg/cm}^2$$

De tal manera que:

$$G = \frac{1100}{2 * (1 + 0.45)} = 379.31 \text{ MPa}$$

Para tener una noción de esta cantidad, se compara el valor obtenido de módulo de elasticidad del ABS con el de otros materiales:

Figura 13. Módulo de elasticidad de algunos materiales.

TABLA DE MÓDULOS DE ELASTICIDAD	
MATERIAL	VALOR MÓDULO DE ELASTICIDAD APROXIMADO [Kg/cm ²]
Mampostería de ladrillo	E = 30000 - 50000
Maderas duras (en la dirección paralela a las fibras)	E = 100000 - 225000
Maderas blandas (en la dirección paralela a las fibras)	E = 90000 - 110000
Acero	E = 2100000
Hierro de fundición	E = 1000000
Vidrio	E = 7000000
Aluminio	E = 700000
Concreto (Hormigon) de Resistencia:	E =
110 Kg/cm ²	215000
130 Kg/cm ²	240000
170 Kg/cm ²	275000
210 Kg/cm ²	300000
300 Kg/cm ²	340000
380 Kg/cm ²	370000
470 Kg/cm ²	390000
Rocas:	E =
Basalto	800000
Granito de grano grueso y en general	100000 - 400000
Cuarcita	100000 - 450000
Marmol	800000
Caliza en general	100000 - 800000
Dolomia	100000 - 710000
Arenisca en general	20000 - 636000
Arenisca calcárea	30000 - 60000
Arcilla esquistosa	40000 - 200000
Gneis	100000 - 400000

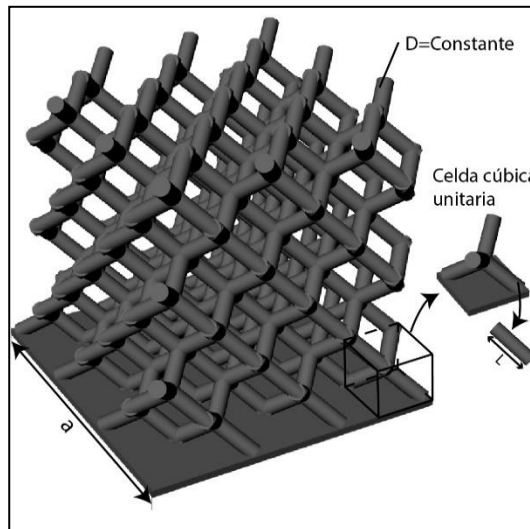
Fuente: SCRIBD Tabla de módulos de elasticidad. [en línea] disponible en: <https://es.scribd.com/doc/88898307/Tabla-de-Modulos-de-Elasticidad>

2.6 DEFINICIÓN DE LOS PARÁMETROS GEOMÉTRICOS

Para el arreglo pentamodal se decidió utilizar un ancho de 6 celdas cúbicas unitarias a cada lado y una sección transversal constante en sus elementos, para lograr tener un tamaño suficiente a la hora de la impresión 3D. Para observar el comportamiento de las variables (ver figura 14) que componen el arreglo pentamodal: ancho del módulo constituido por las celdas cúbicas unitarias (a) y el diámetro de cada elemento (D), se programó en Matlab el método de elementos finitos (FEM) para elementos tipo frame asociado a el algoritmo de optimización Particle Swarm Optimization (PSO).

A partir de este planteamiento se considera que cada celda cúbica unitaria se encuentra constituida por 4 elementos de forma cilíndrica.

Figura 14. Arreglo pentamodal con un ancho de 6 celdas cúbicas unitarias a cada lado y una sección transversal constante en sus elementos.



2.6.1. Conectividad de los elementos a partir de RHINOCEROS + GRASSHOPPER Partiendo de que el arreglo pentamodal se quiere definir dentro de la categoría de mesoescala no estocástica cuyas dimensiones para la celda cúbica unitaria comprenden un rango de 0.1 mm hasta 10 mm ⁵².

Inicialmente se trabajó con una estructura cilíndrica de sección circular constante. A su vez se limitó el ancho de celda en un rango de valores con un máximo y un mínimo, a partir de una variable que multiplica las coordenadas para controlar el tiempo de impresión, de manera que estuviera en el rango de 5 horas, se pudiera controlar el proceso de fabricación y se lograra alcanzar el tamaño en mesoescala.

⁵² TAMBURRINO, F., GRAZIOSI, S. & BORDEGONI, M, Op. Cit.

Se decidió escoger un ancho de celda cúbica unitaria inicial de 20 mm, siendo este el valor inicial para el algoritmo de optimización.

Con ayuda del plug-in Grasshopper vinculado al software de diseño RHINOCEROS se logró desarrollar un algoritmo gráfico para poder lograr vincular y conectar los elementos, conformando la estructura pentamodal planteada. Este algoritmo se encuentra vinculado a un conjunto de líneas constituyentes a la estructura alámbrica de la configuración dentro del plano de trabajo de Rhinoceros.

Se extrajeron en tres archivos de texto (.txt) las coordenadas de los nodos organizadas por niveles a partir del inferior, las coordenadas de los nodos iniciales y de los nodos finales que conforman cada elemento para formar una matriz con la conectividad de los elementos [Ver Anexo C].

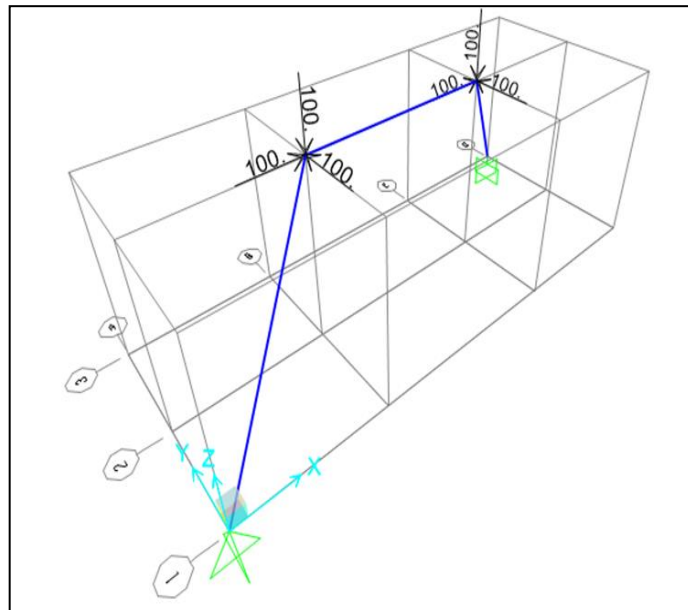
2.6.2. Algoritmo en MATLAB A partir del algoritmo realizado se comprobó el método de elementos finitos (FEM) con un modelo de sistema de vigas comparando los desplazamientos de nodos y fuerzas internas generadas dentro del programa de SAP2000.

Mientras que el algoritmo de optimización (PSO) se comprobó a partir de la función de Rosembrock ⁵³ [Ver Anexo D].

2.6.2.1. Comprobación FEM Se propuso un pórtico de 3 elementos con cargas puntuales en los nodos superiores. Éstas cargas fueron de 100 N en las direcciones i,j,k.

⁵³ IGUAL J., Algoritmos iterativos: método de Newton para resolver la función de Rosenbrock. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/10251/13844>

Figura 15. Pórtico propuesto para hacer la comprobación del FEM programado.



Las propiedades del material utilizado, así como de la sección transversal y las coordenadas de los nodos se muestran a continuación.

Tabla 2. Propiedades utilizadas en el modelo de comprobación.

E(Mpa)	2300
Poisson	0.3
G(Mpa)	884.6153846
Densidad(Kg/mm3)	0.0000011
Sección circular	
d(mm)	20
r(mm)	10
A(mm2)	314.1593
Iz(mm4)	7853.9816
Iy(mm4)	7853.9816
J(mm4)	15707.963

Tabla 3. Coordenadas de los nodos en el modelo de comprobación.

Nodo/Coordenadas	x	y	z
1	0	0	0
2	300	200	350
3	700	200	350
4	1000	400	0

Con esto, se extrajeron los resultados del análisis realizado en SAP, así como los resultados obtenidos en el algoritmo programado en MATLAB.

Tabla 4. Resultados obtenidos en SAP2000.

Joint	U1	U2	U3	R1	R2	R3
Text	mm	mm	mm	Radianes	Radianes	Radianes
1	0	0	0	-1.64709	-0.461372	-0.302364
2	-102.22771	440.265956	-163.961046	-1.393153	-0.56302	-0.461939
3	-102.283898	241.635443	50.099768	-0.867586	-0.397616	-0.43807
4	0	0	0	0	0	0

Tabla 5. Resultados obtenidos en MATLAB.

Nodo	U1 (mm)	U2 (mm)	U3 (mm)	R1 (rad)	R2 (rad)	R3 (rad)
1	0	0	0	-1.6469925	-0.46148445	-0.30242487
2	-102.24351	440.13647	-163.87354	-1.3930899	-0.56303312	-0.46202782
3	-102.29972	241.56991	50.048746	-0.86759422	-0.39751531	-0.43814484
4	0	0	0	0	0	0

Realizando un cálculo sencillo del error, se obtuvieron los siguientes valores.

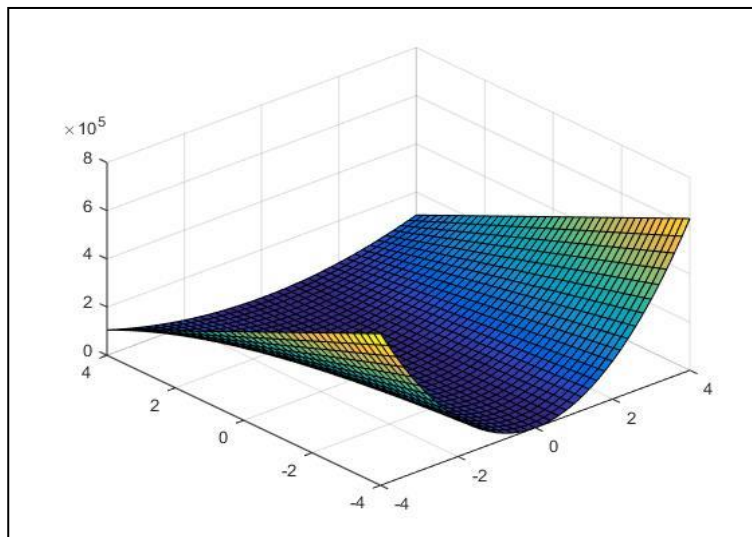
Tabla 6. Porcentaje de error para cada una de las soluciones encontradas.

Nodo	U1 (%)	U2 (%)	U3 (%)	R1 (%)	R2 (%)	R3 (%)
1	0	0	0	0.005919531	0.024372957	0.020131365
2	0.015455692	0.029410859	0.053369994	0.004529294	0.00233029	0.019227647
3	0.01546871	0.027120607	0.101840791	0.000947457	0.025323428	0.017084028
4	0	0	0	0	0	0

En base a esto, se puede afirmar que el algoritmo programado en MATLAB es lo suficientemente preciso para utilizarlo.

2.6.2.2. Comprobación PSO. Para el algoritmo de optimización Particle Swarm Optimization, se utilizó la función de Rosembrock ⁵⁴18], la cual es bastante usada para comprobar la eficiencia de este tipo de algoritmos, debido a la dificultad que se tiene para converger a su mínimo global. Esta función se define como: $f(x,y)=((1-x)^2)+100*((y-x^2)^2)$. Su mínimo global se encuentra en $f(1,1)$, donde f tiene un valor de 0.

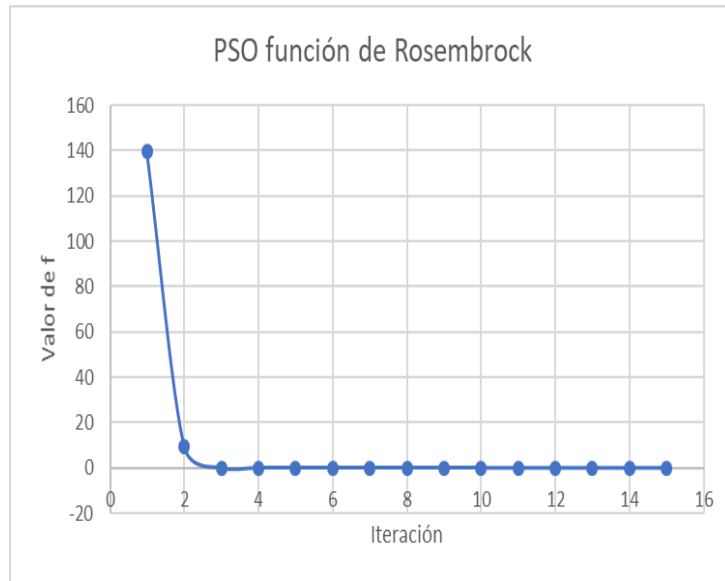
Figura 16. Función de Rosembrock graficada en MATLAB.



Se emplearon 20 partículas para la utilización del PSO, esto para acelerar la convergencia del algoritmo. Los resultados obtenidos se muestran en la siguiente gráfica.

⁵⁴ Ibíd.

Figura 17. Optimización función de Rosembrock en Matlab con el PSO.



A medida que avanzan las iteraciones, se observa que el valor de f para la mejor partícula global, se mantiene muy cercano a 0, que es el valor del mínimo global de la función.

2.6.2.3. Función objetivo En un principio se tomó un ancho de celda unitaria de 20 mm, y se creó la variable que multiplicaba las coordenadas, siendo ésta junto con el diámetro de la sección de los elementos las variables a iterar para optimizar la función objetivo.

Se programó el análisis para elementos tipo frame, el cual fue expuesto en 3.3.1, pudiendo obtener las fuerzas y desplazamientos en todos los nodos de la estructura, calculando la energía de deformación de la siguiente manera:

$$En = [F]^T * [U] = fo1 \quad (6)$$

Donde En es la energía de deformación, F es el vector de fuerzas, U el vector de desplazamientos y $fo1$ la función objetivo No 1.

Siendo la energía de deformación la primera función a optimizar.

Adicionalmente, se calculó el peso de los elementos tomando en cuenta su sección transversal, volumen y densidad del material utilizado:

$$Peso = \frac{1}{4} * \pi * d^2 * \rho * g * \sum Li \quad (7)$$

Donde d es el diámetro de la sección transversal, ρ es la densidad, g es la gravedad y Li es la longitud de cada elemento tipo frame.

La segunda función objetivo se planteó como el peso de la estructura pentamodal que se encuentra dentro del espacio cúbico que forma su longitud total, como se muestra a continuación:

$$Vcubo = (6 * anchodecelda)^3 \quad (8)$$

Donde $Vcubo$ es el volumen total del módulo a tratar.

La constante 6 es debido a que se usó el ancho de 6 celdas cúbicas unitarias por cada lado, quedando el peso por unidad de volumen como la segunda función a optimizar de manera simultánea de la siguiente forma:

$$\gamma = \frac{Peso}{Vcubo} = fo2 \quad (9)$$

Donde γ es el peso por unidad de volumen y $fo2$ la función objetivo No 2.

Con las dos funciones a optimizar definidas, se optó por darle el mismo aporte a cada una en la optimización, con el objetivo de llegar a una solución con los mejores valores para ambas funciones, siendo:

$$FO = 0.5 * fo1 + 0.5 * fo2 \quad (10)$$

Donde FO es la función objetivo global del algoritmo [Ver Anexo E].

2.6.2.4. Resultados de la optimización en MATLAB Utilizando el algoritmo Particle Swarm Optimization (PSO), se realizó el proceso de minimización de la función objetivo dada por la ecuación 9, empleando 5 partículas y 10 iteraciones. Las limitaciones para el ancho de celda se aplicaron a la variable que multiplica las coordenadas, dejándola entre 0.4 y 0.45, debido a que en este rango de valores el tiempo de impresión oscilaba en el tiempo de interés y se lograba alcanzar la mesoescala.

Los mejores valores encontrados por el PSO para las variables son los que siguen:

$$d = 2.8876 \text{ mm}$$

$$vancho = 0.45$$

Quedando las dimensiones para el modelo a ensayar, compuesto por el ancho de 6 celdas cúbicas unitarias por cada lado:

$$anchocelda = vancho * 20mm$$

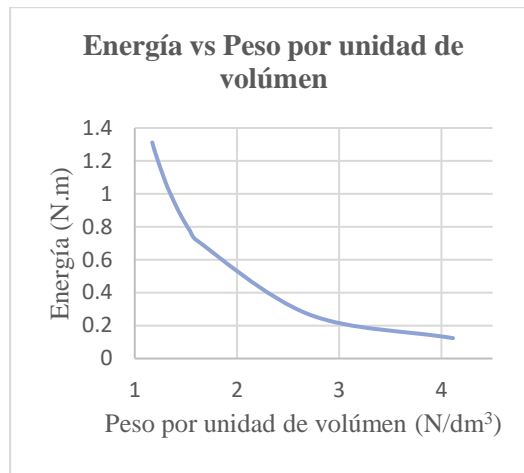
$$anchocelda = 0.45 * 20mm = 9mm$$

$$a = 6 * 9 = 54mm$$

Donde *anchocelda* es el ancho de la celda cúbica unitaria, *vancho* es la variable que multiplica las coordenadas variando el ancho de la celda cúbica unitaria inicial y *a* es el ancho del arreglo compuesto por las celdas cúbicas unitarias (ver figura 14).

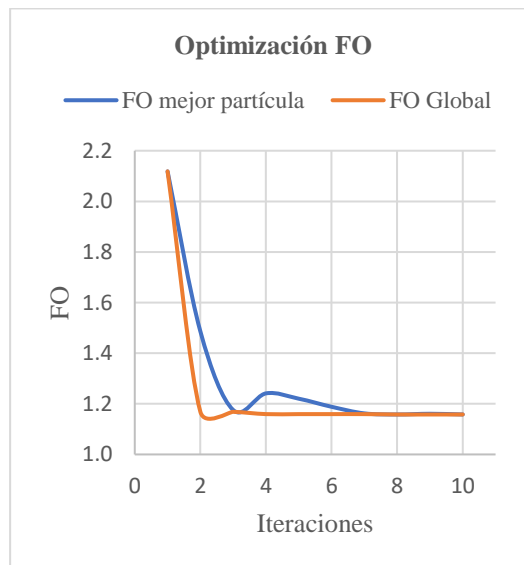
A lo largo de las iteraciones, se observa un par de valores que representan la energía y peso por unidad de volumen en cada iteración de la mejor partícula:

Figura 18. Gráfica de energía vs peso por unidad de volumen del modelo optimizado.



Así como el valor de FO a lo largo de las iteraciones para la mejor partícula:

Figura 19. Gráfica de optimización de la Función Objetivo vs el número de iteraciones.



Llegando a los mejores valores de energía y peso por unidad de volumen para el diámetro y ancho de celda encontrados [Ver Anexo F].

$$\text{Energía} = 0.8041 [N.m]$$

$$\gamma = 1.5112 \left[\frac{N}{dm^3} \right]$$

2.6.3 Definición de la sección variable Los diámetros de sección variable utilizados se tomaron a partir de las tres relaciones de diámetros d/D recomendados en la literatura, los cuales fueron 0.18, 0.38 y 0.53 ⁵⁵.

Con base en esto se definen las ecuaciones que relacionan los dos diámetros:

$$d = 0.18 * D \quad (11)$$

$$d = 0.38 * D \quad (12)$$

$$d = 0.53 * D \quad (13)$$

Adicionalmente se tomaron las relaciones de diámetros mayores a uno para observar su comportamiento y poder encontrar el modelo con mayor rigidez y resistencia (carga última). Cuyas relaciones tomadas fueron:

$$d = 2 * D \quad (14)$$

$$d = 3 * D \quad (15)$$

Se tomó como límite esta última relación debido a que en el proceso constructivo se presentaban inconvenientes debido al poco espesor que contenían los elementos en su parte central.

Con base en esta relación de diámetros y buscando que los elementos con distintas secciones tengan la misma cantidad de material, para mantener el peso por unidad

⁵⁵ AMENDOLA, A., SMITH, C. J., GOODALL, R., AURICCHIO, F., FEO, L., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., Op. Cit.

de volumen, se quiere observar la influencia de la relación d/D en el comportamiento mecánico. Para ello se calculó el volumen de un elemento de sección constante (volumen de un cilindro) con el diámetro anteriormente obtenido:

$$V = \frac{\pi}{4} * d^2 * L \quad (16)$$

$$V = \frac{\pi}{4} * 2.8876^2 * 7.794 = 51.04 \text{ mm}^3$$

Donde V es el volumen, d es el diámetro de sección constante y L es la longitud de cada elemento (ver figura 14).

Posteriormente se calcula el volumen de un elemento de sección circular variable en función de sus dos diámetros:

$$V(x) = 2 * \int_0^{0.5*L} \frac{\pi}{4} * \left(d + \frac{(D-d)*x}{0.5*L} \right)^2 * dx \quad (17)$$

Donde D es el diámetro mayor y d el diámetro menor. Igualando las dos ecuaciones se tiene:

$$2 * \int_0^{0.5*7.7942} \frac{\pi}{4} * \left(d + \frac{(D-d)*x}{0.5*7.7942} \right)^2 * dx = 51.0431054 \quad (18)$$

Reemplazando d por las relaciones entre diámetros obtenidas anteriormente, resolviendo para D y reemplazando los valores de d se obtiene [Ver Anexo G]:

Tabla 7. Valores de diámetros obtenidos analíticamente para cada relación de diámetro.

d/D	d [mm]	D [mm]
0.18	0.818	4.542
0.38	1.539	4.051
0.53	1.970	3.717

d/D	d [mm]	D [mm]
1	2.888	2.888
2	3.780	1.890
3	4.161	1.387

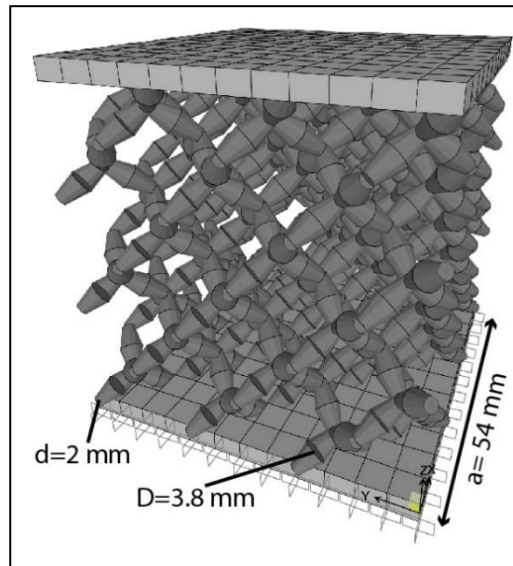
2.7 MODELO NUMÉRICO

Se empleó el software SAP2000 para observar el comportamiento teórico de la estructura de interés.

Utilizando los parámetros geométricos anteriormente definidos, se realizó el montaje de la geometría pentamodal en el programa, Tomando el ancho de celda y parejas de diámetros, se realizaron varios modelos numéricos, variando su relación de diámetro en un rango de 0.1D a 15D.

Debido a que cada modelo tiene una base homogénea adherida en la parte inferior de su estructura y a que en los ensayos realizados (ver figura nueva) el émbolo cubre en su totalidad la parte superior, se definieron capas en superficie tipo Shell en la parte superior e inferior.

Figura 20. Modelo de la estructura con relación de diámetro de 0.53 elaborado en SAP2000.



De igual manera se analizaron los modelos sin placa en la parte superior, aplicando cargas puntuales a los nodos en contacto con el émbolo, para simular una superposición de este sin adherencia.

Con base en estos modelos se estimó la rigidez ante cargas verticales graduales para cada uno de ellos. Esto se realizó en base a la carga aplicada y el desplazamiento provocado en el nodo central de la parte superior, de la siguiente forma:

$$Kv = \frac{Fv}{\delta v} \quad (19)$$

Donde Fv es la carga aplicada y δv es el desplazamiento provocado por dicha carga en el nodo central de la parte superior, debido a que este es el que soporta la carga concentrada del émbolo. Resultando Kv como la pendiente de la curva formada por los distintos valores de fuerza y desplazamiento obtenidos en los distintos modelos numéricos [Ver Anexo H].

2.8 ELABORACIÓN DE LOS ESPECÍMENES

El tiempo de impresión depende del espesor de capa, así que se tomó un valor de 0.2 mm debido a que equilibra su rigidez y resistencia a la tracción y compresión con el tiempo de impresión ⁵⁶.

Se redondearon los valores de diámetros para que sea factible su fabricación, resultando las siguientes parejas de diámetros:

Tabla 8. Valores de diámetros de sección variable a utilizar.

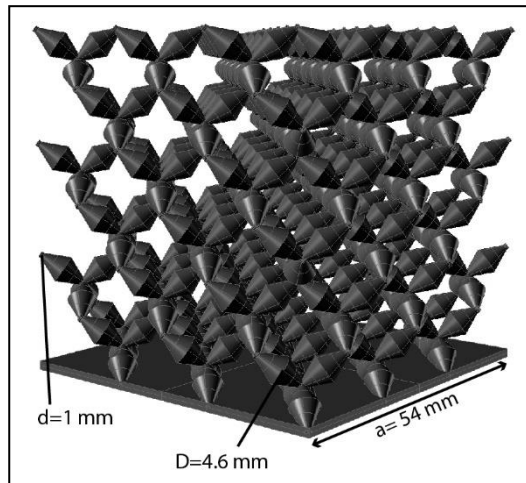
d/D Teórico	d [mm]	D [mm]	d/D Construido
0.18	1	4.6	0.2
0.38	1.6	4	0.4
0.53	2	3.8	0.53
1	3	3	1
2	3.8	2	1.9
3	4.2	1.4	3

De manera que los modelos a fabricar son estos 6 tipos de estructura de los cuales fueron ensayados en laboratorio para analizar su comportamiento.

Retomando a Rhinoceros, se modeló el elemento base definido a partir de su relación de diámetros. En el algoritmo gráfico realizado en Grasshopper, se estableció el dimensionamiento final y se vinculó el elemento base a cada una de las líneas para generarlo en un modelo sólido definitivo dentro del entorno de Rhinoceros y finalmente exportarlo a un archivo de Standard Triangle Language (.stl) [Ver Anexo I].

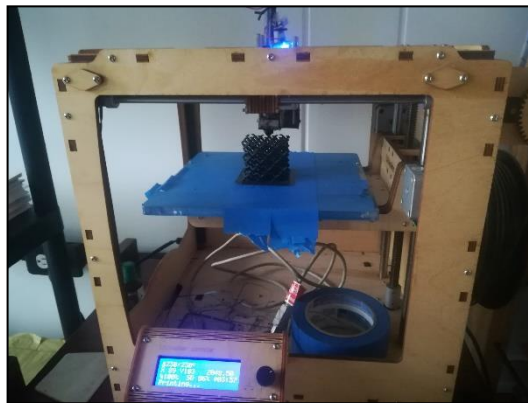
⁵⁶ DIZON, J. R. C., ESPERA, A. H., CHEN, Q., & ADVINCULA, R. C., Op. Cit.

Figura 21. Modelo de la estructura con relación de diámetro de 0.18 elaborado en Rhinoceros.



Utilizando una impresora 3D Ultimaker Original, se debió definir en un software suministrado por la empresa el tipo de material y espesor de capa, para finalmente exportar un archivo tipo GitHub Enterprise Software Package (.ghp) y proceder a la impresión [Ver Anexo A0].

Figura 22. Impresora Ultimaker Original en proceso.



Repitiendo este proceso para cada una de las configuraciones propuestas, se obtiene los modelos físicos que se van a ensayar.

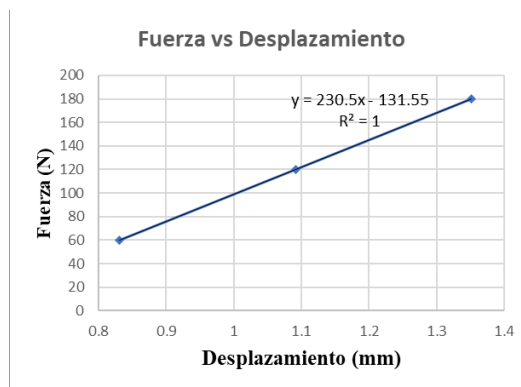
Figura 23. Modelos impresos con relación de diámetros de 0.18, 0.38, 0.53, 1, 2 y 3, de izquierda a derecha.



2.8.1 Resultados.

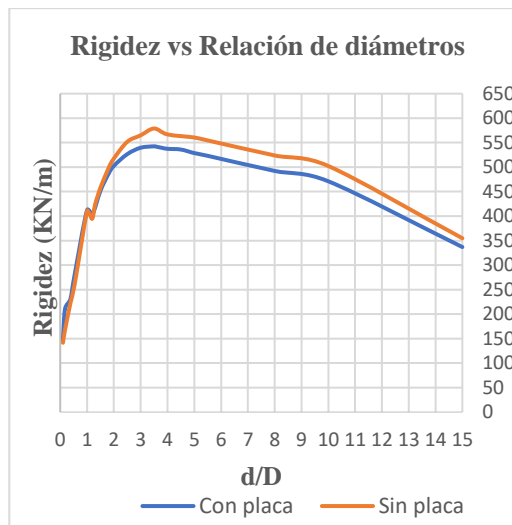
2.8.1.1 Modelo Numérico A partir de los modelos realizados en el software se obtuvo una rigidez para cada relación de diámetro (d/D) por medio de un análisis lineal estático, tomando varios puntos de análisis con relaciones de diámetros distintos usando incrementos de carga de 60 N. Con estos puntos se ajustó una línea recta a la gráfica de fuerza vs desplazamiento y se tomó la pendiente de la misma, que representa la rigidez.

Figura 24. Gráfica fuerza vs desplazamiento con una relación de diámetros de 0.38 obtenido del modelo con placa superior en SAP2000.



A continuación, se puede observar el cambio en el comportamiento para cada una de las distintas configuraciones (d/D) considerando los modelos analizados con placa superior y sin placa superior, representado como un elemento tipo Shell:

Figura 25. Gráfica de rigidez vs relación de diámetros de los modelos propuestos obtenidos del análisis numérico para modelos con y sin placa superior.



Donde se puede observar que teóricamente, la rigidez ante cargas verticales es mayor en el intervalo con relaciones d/D entre 3 y 4.

Pudimos apreciar que da una tendencia creciente a medida que la relación de diámetro aumentaba, pero con fines prácticos realizamos otros tipos de modelos con la relación de diámetro mayores a 1, para obtener un mayor rango en la tendencia creciente de este, y saber cuál va a ser el punto en el que empiece a decaer [Ver Anexo A1].

2.9 MODELO EXPERIMENTAL

Con base en la configuración y diámetros establecidos e impresos, se propuso realizar un ensayo a compresión para medir la rigidez y carga última de cada una de las estructuras propuestas.

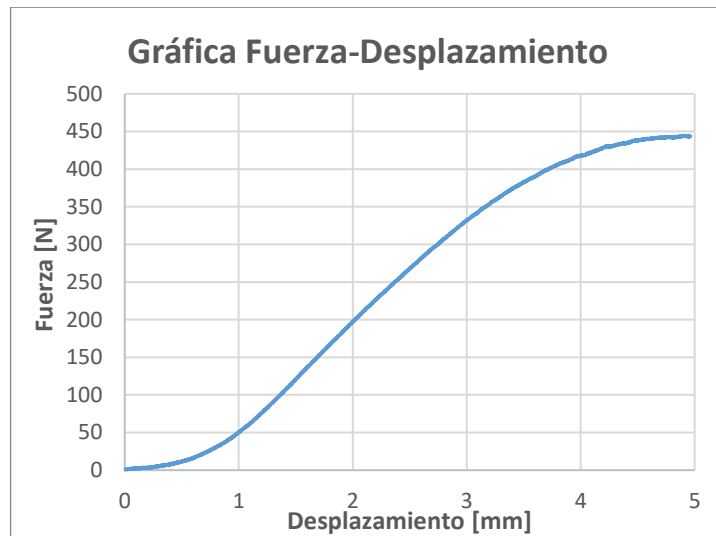
El ensayo a compresión se llevó a cabo en la MTS Bionix que dispone la escuela de ingeniería mecánica, para cada uno de las configuraciones propuestas.

Figura 26. Ensayo a compresión del modelo con relación de diámetros de 0.18.



2.9.1 Datos obtenidos Una vez realizado el ensayo, se obtuvieron las gráficas de fuerza vs desplazamiento para cada uno de los modelos ensayados.

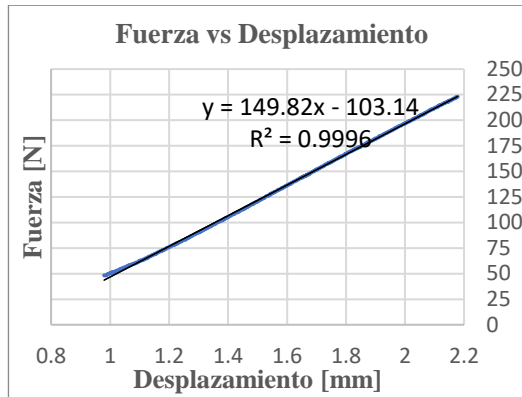
Figura 27. Gráfica fuerza vs desplazamiento para el modelo con relación de diámetros de 0.53.



Como puede observarse, el comportamiento inicial de la curva no es completamente lineal en el tramo antes de 1 mm de desplazamiento, esto se debe a que el ensayo se vio afectado por la acomodación inicial de la probeta al inicio de la compresión.

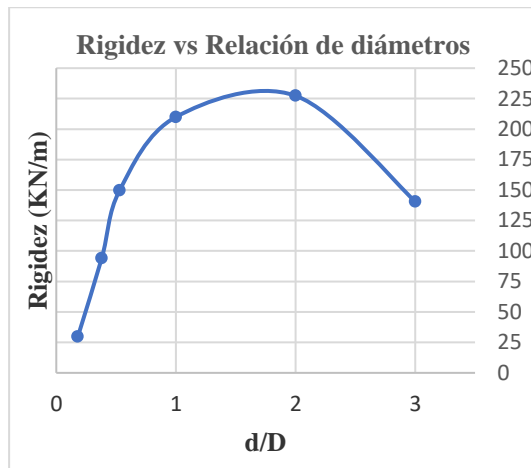
Debido a esto, se procedió a sacar la pendiente de la parte lineal, es decir, del tramo a partir de 1 mm de desplazamiento (ver figura 25) con el fin de obtener la rigidez de cada una de los modelos.

Figura 28. Gráfica fuerza vs desplazamiento para el modelo con relación de diámetros de 0.53 delimitada en la parte lineal para obtener su rigidez.



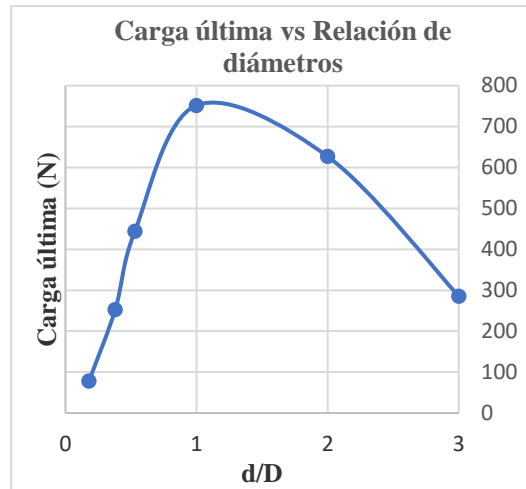
Después de obtener la rigidez de cada uno de los modelos, se pudo obtener los gráficos de Rigidez vs relación de diámetros:

Figura 29. Gráfica rigidez vs relación de diámetros (d/D).



De la misma manera se obtuvo la carga última de cada uno de los modelos considerando la máxima carga soportada justo antes de su falla, resultando la gráfica de carga última vs relación de diámetros [Ver Anexo A2].

Figura 30. Gráfica carga última vs relación de diámetros (d/D).



2.9.2 Forma de falla de los especímenes Dependiendo de la relación de diámetros (d/D), los modelos ensayados presentaron distintas formas de falla, mayormente marcado por el límite $d/D < 1$, principalmente a la poca rigidez en los nodos ya que estos son los que van a soportar la mayor cantidad de momentos que se presentan.

De modo que para $d/D < 1$, la falla se presentó en los nodos de las celdas superiores, produciéndose una rotura en dichos puntos y no a lo largo de los elementos.

Figura 31. Modelo fallado con relación de diámetros de 0.53.



En los modelos con $d/D \geq 1$, la falla se produjo aproximadamente en el centro de los elementos de las celdas superiores, dejando para este caso los nodos intactos.

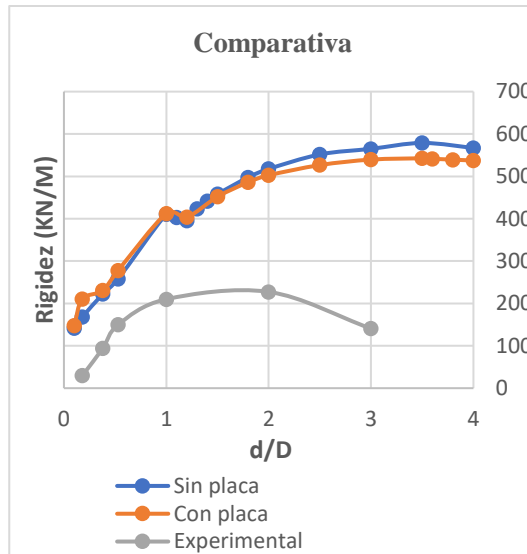
Figura 32. Modelo fallado con relación de diámetros de 3.



2.10 DISCUSIÓN

Tomando los resultados numéricos y experimentales, se superponen en una sola gráfica, de la siguiente forma:

Figura 33. Comparativa resultados numéricos con experimentales.



Como se observa en la figura 30, la rigidez experimental es menor a la obtenida en el modelo numérico, esto puede deberse a que en dicho modelo existe un ambiente ideal, donde las conexiones entre los elementos son perfectas, sin posibles errores de fabricación, donde un elemento muy esbelto en su parte central puede analizarse sin inconveniente, mientras que fabricarlo es más laborioso y posiblemente quede con algún imperfecto, además, el software asume un material homogéneo e isotrópico, cosa que no es completamente cierta en el modelo físico construido, cosa que se observa después de $d/D > 2$, donde la rigidez empieza a disminuir en los ensayos experimentales, ya que los elementos comienzan a ser más débiles en su parte central.

3. CONCLUSIONES

- Se pudo observar que de acuerdo al análisis de resultados generado por el modelo numérico se obtuvo una tendencia del comportamiento para un material ideal con conexiones completamente continuas.
- Se apreció que los mayores valores de rigidez que podría tomar ese material ideal en el análisis numérico se encuentran en: $3 \leq \frac{d}{D} \leq 4$.
- Se obtuvo un desfase en la tendencia creciente de la rigidez del metamaterial con relación al obtenido en el modelo numérico, debido a las condiciones ideales que este análisis considera.
- Independientemente del material en el que este compuesto el metamaterial, la máxima rigidez tenderá a estar en una relación de diámetros $\frac{d}{D} > 1$.
- Para $\frac{d}{D} < 1$ el punto de falla se encuentra en los nodos, debido a que las conexiones no presentan alta rigidez para soportar los momentos generados.
- Para $\frac{d}{D} > 1$,el punto de falla se encuentra en medio de los elementos, debido a que, al ser más esbelto, los esfuerzos concentrados en ese punto lo llevan a la falla.
- Para todo tipo de metamaterial la carga última presenta un valor máximo alrededor de $\frac{d}{D} = 1$, debido a que toda su sección transversal homogénea no presentará un punto de falla específico.

- A partir del proceso de manufactura empleado: *Fused deposition modeling (FDM)*, se obtuvo un análisis experimental con resultados por debajo de lo que se hubiera podido obtener con otro método constructivo, debido a la composición de los especímenes.
- Experimentalmente se comprobó que la relación de diámetros (d/D) que presenta mejor comportamiento mecánico en términos de rigidez y carga última ante cargas de compresión se encuentra en el intervalo $1 \leq d/D \leq 2$.

4. RECOMENDACIONES

- Para la obtención de un mejor resultado dentro del proceso de manufactura empleado, se debe usar una resolución de capa $\leq 0.1 \text{ mm}$, de tal manera que tienda a generar especímenes homogéneos.
- Para los ensayos a compresión sobre los especímenes elaborados con el método de manufactura empleado, la dirección de las fibras debe ir perpendicularmente con respecto a la dirección de la carga para lograr obtener un mejor resultado.
- Se recomienda complementar el presente estudio con el análisis ante cargas laterales, para observar la incidencia de las variables estudiadas en la rigidez a cortante.
- Debido a que una de las posibles aplicaciones es en el aislamiento de base, es necesario comprobar el orden de magnitud entre la rigidez a compresión y la rigidez a cortante, verificando que esta última sea bastante baja a comparación de la primera.
- Con el fin de obtener unos resultados experimentales más precisos, es recomendable utilizar otro tipo de manufactura aditiva que produzca modelos más uniformes y homogéneos.
- A su vez, para estudios complementarios, en la medida de lo posible utilizar un material más resistente en la elaboración de los cuerpos de prueba.

BIBLIOGRAFÍA

AMENDOLA, A., SMITH, C. J., GOODALL, R., AURICCHIO, F., FEO, L., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., “Experimental response of additively manufactured metallic pentamode materials confined between stiffening plates,” *Composite Structures*. Elsevier Ltd, 142, 2016, pp. 254-262.

BLANCO BLANCH, P., “Pretensado de columnas tensegrity para el incremento de rigidez axial” [Tesis de maestría]. Universitat Politècnica de catalunya, Barcelona (España), 2010.

DIZON, J. R. C., ESPERA, A. H., CHEN, Q., & ADVINCULA, R. C., “Mechanical characterization of 3D-printed polymers,” *Additive Manufacturing*, 20, 2018, pp. 44–67.

FABBROCINO, F., AMENDOLA, A., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., “Discrete-to-Continuum approaches to the mechanics of pentamode bearings,” *Composite Structures*, 167, 2017, pp. 219–226.

FABBROCINO, F., AMENDOLA, A., BENZONI, G., & FRATERNALI, F., “Seismic application of pentamode lattices,” *Ingegneria Sismica*, 33(1–2), 2016, pp. 62–70.

IGUAL J., Algoritmos iterativos: método de Newton para resolver la función de Rosenbrock. Recuperado de: <http://hdl.handle.net/10251/13844>

KATTAN, P. I., “MATLAB guide to finite elements: An interactive approach,” *MATLAB guide to finite elements: An interactive approach*, 10, 2008, pp. 193.

KIM H., PARK E., KIM S., PARK B., KIM N., AND LEE S., “Experimental Study on Mechanical Properties of Single- and Dual-material 3D Printed Products,” *Procedia Manuf.*, 10, 2017, pp. 887–897.

LAPADULA SEQUERA, V. A., “Estudio comparativo sobre la aplicación de los algoritmos PSO y SQP en la optimización de pórticos planos de concreto armado [Msc Thesis]. Pontificia Universidad Javeriana de Bogotá, 2014.

MILTON, G. W. & CHERKAEV, “Which Elasticity Tensors are Realizable?,” *J. Eng. Mater, Technol*, Vol. 117, 1995, pp. 483-493.

RAO, S. SINGIRESU, *The Finite Element Method in Engineering*, fifth edition. Department of Mechanical and Aerospace Engineering University of Miami, 2011, p. 3-332.

SCRIBD Tabla de módulos de elasticidad. Recuperado de: <https://es.scribd.com/doc/88898307/Tabla-de-Modulos-de-Elasticidad>

SPECIMENS, P. Compressive Properties of Rigid Plastics 1. Annu. B. ASTM Stand. i, D695, 2008, p. 1–8.

TAMBURRINO, F., GRAZIOSI, S. & BORDEGONI, M, “The Design Process of Additively Manufactured Mesoscale Lattice Structures: A Review,” *J. Comput. Inf. Sci. Eng.* 18, 040801, 2018.

TERRY WOHLERS, What is Additive Manufacturing?. Recuperado de: <http://wohlersassociates.com/additive-manufacturing.html>.

TOSCANO-PULIDO, G., COELLO COELLO, C. A. & SANTANA-QUINTERO, L. V., "EMOPSO: A Multi-Objective Particle Swarm Optimizer with Emphasis on Efficiency," *Evol. Multi-Criterion Optim.*, 2007, pp. 272–285.

WHEN-HOW Degrees of freedom of a bar element in space. Recuperado de: http://what-when-how.com/wp-content/uploads/2012/06/tmpabe437_thumb_thumb.png.

YU, X., ZHOU, J., LIANG, H., JIANG, Z., & WU, L., "Mechanical metamaterials associated with stiffness, rigidity and compressibility: A brief review," *Progress in Materials Science*, 94, 2018, pp. 114–173.