

EVALUACIÓN DE UNA IMPLEMENTACIÓN DE SITUACIONES A-DIDÁCTICAS  
PARA LA ENSEÑANZA DE SIMETRÍA AXIAL UTILIZANDO CABRI COMO  
MEDIO

CRISTIAN EDUARDO CARREÑO GRANADOS  
ANGY MELISSA DÍAZ LIZARAZO

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER  
FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS  
ESCUELA DE MATEMÁTICAS  
LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS  
BUCARAMANGA

2014

EVALUACIÓN DE UNA IMPLEMENTACIÓN DE SITUACIONES A-DIDÁCTICAS  
PARA LA ENSEÑANZA DE SIMETRÍA AXIAL UTILIZANDO CABRI COMO  
MEDIO

CRISTIAN EDUARDO CARREÑO GRANADOS

ANGY MELISSA DÍAZ LIZARAZO

Trabajo de grado presentado como requisito para obtener el título de  
LICENCIADO EN MATEMÁTICAS

Director

MARTÍN ACOSTA GEMPELER

Doctor en Ciencias de la Educación

Codirector

JORGE ENRIQUE FIALLO LEAL

Doctor en Educación Matemática

UNIVERSIDAD INDUSTRIAL DE SANTANDER

FACULTAD DE CIENCIAS BÁSICAS

ESCUELA DE MATEMÁTICAS

LICENCIATURA EN MATEMÁTICAS

BUCARAMANGA

2014

*"Mientras el alumno y el profesor estén convencidos de que hay uno que sabe y otro que no sabe, y que el que sabe va a informar e ilustrar al que no sabe, sin que el otro, el alumno, tenga un espacio para su propio juego, su propio pensamiento y sus propias inquietudes, la educación es un asunto perdido".*

Zuleta (1995)

## **AGRADECIMIENTOS**

Expreso mis más sinceros agradecimientos:

A Dios por brindarme la fortaleza y sabiduría para asumir grandes retos.

A Mis padres por darme la vida y creer en mí apoyándome siempre. Fueron, junto con mis hermanos, la base de este largo proceso.

A todos los docentes de la Universidad Industrial de Santander que hicieron posible mi formación profesional y humana dentro y fuera de clase. En especial al profesor y director de proyecto Martín Acosta, por manifestarme su interés en dirigirlo, por su confianza y colaboración constante. Al profesor Juan de Dios Urbina por su apoyo, entrega y sabios consejos en este tiempo.

A los estudiantes de Séptimo grado del colegio Liceo Patria y a la docente a cargo del grupo, porque sin ellos no habría sido posible este proyecto.

A Cristian Carreño por su tolerancia y colaboración en la escritura de esta tesis.

A Juan Mantilla por su comprensión, ayuda y constante apoyo.

A mis amigos y compañeros de pregrado quienes trabajaron conmigo durante varios años compartiendo siempre los mejores momentos durante esta etapa como estudiante.

A todos, gracias totales.

*Angy Melissa Díaz Lizarazo.*

Agradezco:

Primeramente a Dios, sin él nada de esto sería posible. Les agradezco de todo corazón a esas dos mujeres que siempre confiaron en mí, que estuvieron conmigo en las buenas y en las malas, y que por sobretodo quiero demasiado, mi mamá Miriam Granados y mi novia Jazmín Gómez. A mi papá Vicente Carreño que a su manera siempre estuvo pendiente de mí. A toda mi familia por su apoyo incondicional, en especial a mi tía Adela por estar siempre pendiente y preocupada por mí.

Al director del proyecto, el profesor Martin Acosta por cada segundo de su tiempo que dedicó a enseñarme, corregirme y tolerarme; por depositar su confianza para desarrollar este proyecto en mis manos y en la de mi compañera, pero más que nada le agradezco por ser mi maestro e infundirme el amor a la geometría. A Melissa Díaz, mi compañera, mi amiga, le agradezco por su esfuerzo inigualable para que este proyecto se hiciera realidad. Al profesor Juan de Dios Urbina por esta siempre pendiente del proyecto, por brindarme su amistad y sus sabios consejos.

A la institución donde desarrollamos la investigación, a la profesora y sus estudiantes, por brindarnos el espacio y el tiempo que requeríamos.

A todos mi Profesores, por todos sus consejos y enseñanzas. A mis amigos por hacer esta etapa de mi vida inolvidable y finalmente le agradezco a todos los que han hecho parte de este camino, y espero me disculpen por no poderlos nombrar en este espacio tan corto.

*Cristian Eduardo Carreño Granados.*

## CONTENIDO

<b>INTRODUCCIÓN</b>	<b>16</b>
<b>OBJETIVO</b>	<b>20</b>
<b>1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA</b>	<b>21</b>
<b>1.1 APRENDIZAJE POR ADAPTACIÓN</b>	<b>21</b>
<b>1.2 SITUACIÓN DIDÁCTICA Y SITUACIÓN A-DIDÁCTICA</b>	<b>23</b>
<b>1.3 CABRI COMO MEDIO</b>	<b>27</b>
<b>2. METODOLOGÍA</b>	<b>29</b>
<b>2.1 INGENIERÍA DIDÁCTICA</b>	<b>29</b>
2.1.1 ANÁLISIS PRELIMINAR	29
2.1.2 DISEÑO	29
2.1.3 EXPERIMENTACIÓN	30
2.2.4 ANÁLISIS A POSTERIORI	30
<b>2.2 POBLACIÓN</b>	<b>31</b>
<b>2.3 RECOLECCIÓN DE DATOS</b>	<b>31</b>
<b>3. ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES</b>	<b>32</b>
<b>3.1 ACTIVIDAD 1</b>	<b>33</b>
3.1.1 PRIMERA TAREA: LLEVAR LOS TRIÁNGULOS GRUESOS DENTRO DEL CUADRADO	33
3.1.1.1 Análisis a priori	34
3.1.1.2 Análisis a posteriori	35
3.1.2 SEGUNDA TAREA: LLEVAR TODOS LOS TRIÁNGULOS DELGADOS DENTRO DEL CUADRADO	38
3.1.2.1 Análisis a priori	38
3.1.2.2 Análisis a posteriori	38
3.1.3 TERCERA TAREA: LLEVAR TODOS LOS TRIÁNGULOS DENTRO DEL CUADRADO	39
3.1.3.1 Análisis a priori	40
3.1.3.2 Análisis a posteriori	41
3.1.4 CUARTA TAREA: COLOCAR LOS TRES CUADRADOS EN LA PANTALLA DE MODO QUE PUEDAN PONERSE UN TRIÁNGULO DELGADO Y EL GRUESO CORRESPONDIENTE EN CADA UNO	43
3.1.4.1 Análisis a priori	43
3.1.4.2 Análisis a posteriori	45
3.1.5 SECUENCIA	48

3.1.5.1 Análisis a priori	48
3.1.5.2 Análisis a posteriori	49
3.1.6 PUESTA EN COMÚN	52
3.1.6.1 Análisis a priori	52
3.1.6.2 Análisis a posteriori	52
3.1.7 CONCURSO	53
3.1.7.1 Análisis a priori	53
3.1.7.2 Análisis a posteriori	56
<b>3.2 ACTIVIDAD 2</b>	<b>64</b>
3.2.1 TAREA: SUPERPONER EL TRIÁNGULO GRUESO Y EL TRIÁNGULO PUNTEADO	65
3.2.1.1 Análisis a priori	65
3.2.1.2 Análisis a posteriori	67
3.2.2 SECUENCIA	72
3.2.2.1 Análisis a priori	73
3.2.2.2 Análisis a posteriori	73
<b>3.3 ACTIVIDAD 3</b>	<b>75</b>
3.3.1 PRIMERA TAREA	76
3.3.1.1 Análisis a priori	76
3.3.1.2 Análisis a posteriori	80
3.3.2 SECUENCIA	84
3.3.2.1 Análisis a posteriori	84
3.3.3 PUESTA EN COMÚN	86
3.3.3.1 Análisis a priori	86
3.3.3.2 Análisis a posteriori	87
3.3.4 SEGUNDA TAREA – PRIMERA PARTE	91
3.3.4.1 Análisis a priori	91
3.3.4.2 Análisis a posteriori	92
3.3.5 SEGUNDA TAREA – SEGUNDA PARTE	94
3.3.5.1 Análisis a priori	94
3.3.5.2 Análisis a posteriori (a)	95
3.3.5.3 Análisis a posteriori (b)	98
3.3.5.4 Análisis a posteriori (c)	101
<b>4. CONCLUSIONES</b>	<b>104</b>
<b>4.1 CONCLUSIONES GENERALES</b>	<b>104</b>
<b>4.2 RESPECTO AL ANÁLISIS A PRIORI Y EL MEDIO</b>	<b>106</b>
4.2.1 ACTIVIDAD 1	106
4.2.2 ACTIVIDAD 2	109
4.2.3. ACTIVIDAD 3	109

<b>4.3 REFLEXIONES PARA EL PROFESOR</b>	<b>112</b>
<b>5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS</b>	<b>115</b>
<b>6. ANEXOS</b>	<b>117</b>

## TABLA DE FIGURAS

Figura 1: Aprendizaje por adaptación.....	22
Figura 2: Relación entre situación didáctica y situación a-didáctica .....	26
Figura 3: Uso del cuadro de selección para mover el triángulo.....	35
Figura 4: Seleccionar el triángulo grueso directamente .....	35
Figura 5: Primer Triángulo grueso dentro del cuadrado.....	36
Figura 6: La estudiante indica donde debe ir el cuadrado.....	37
Figura 7: Segunda tarea .....	39
Figura 8: Primera pareja de triángulos juntos fuera del cuadrado.....	42
Figura 9: Parejas de triángulos no correspondientes dentro de los cuadrados. ....	44
Figura 10: Ubicación de los tres cuadrados en la pantalla.....	46
Figura 11: Cuadrado superpuesto en una pareja de triángulos. ....	46
Figura 12: Tarea cuatro terminada en la serie 1.....	47
Figura 13: Tarea 1 completada para la serie 2.....	49
Figura 14: Orientaciones en las diferentes series.....	51
Figura 15: Solución al primer concurso.....	58
Figura 16: Ejemplos de simetría de los cuadrados .....	60
Figura 17: Estudiante señalando un par de triángulos correspondientes.....	63
Figura 18: Primer archivo de la actividad 2.....	64
Figura 19: El estudiante intenta arrastrar el triángulo a partir de su lado. ....	69
Figura 20: Secuencia de solución utilizando noción de paralelismo. ....	70
Figura 21: Secuencia, solución superponiendo los triángulos.....	71
Figura 22: Secuencia, solución utilizando un punto guía.....	71
Figura 23: Posiciones del eje de simetría para las series. ....	77
Figura 24: Círculo, triángulo punteado y continuo. ....	78
Figura 25: Aparición del letrero ¡Muy Bien! .....	78
Figura 26: Posibles estrategias de solución para la actividad tres-cinco.....	79
Figura 27: Ejemplo de acción 1. ....	79
Figura 28: Letrero ¡Muy bien! .....	82
Figura 29: Secuencia de solución extendiendo el segmento.....	83
Figura 30: Colinealidad de los vértices con un extremo del segmento .....	84
Figura 31: Secuencia de solución para segunda tarea de la actividad 3.....	89
Figura 32: Solución usando traza. ....	90
Figura 33: Solución usando rectas entre vértices no correspondientes.....	90
Figura 34: El triángulo simétrico construido no coincide con el punteado .....	91
Figura 35: El triángulo simétrico coincide con el punteado.....	92
Figura 36: Movimiento del punto sobre el círculo.....	92
Figura 37: Verificación del triángulo simétrico.....	93
Figura 38: Estrategia usando segmentos entre vértices no correspondientes. ....	96

Figura 39: Estrategia usando circunferencias. ....	97
Figura 40: Estrategia de solución para la segunda tarea de la actividad 3. ....	97
Figura 41: Estrategia de solución relacionando los triángulos y el círculo. ....	99
Figura 42: Estrategia de solución usando aproximación del segmento. ....	100
Figura 43: Estrategia de solución correcta.....	100
Figura 44: Uso de la herramienta punto medio.....	102
Figura 45: Secuencia correcta de solución.....	103

## RESUMEN

**TÍTULO\*:** EVALUACIÓN DE UNA IMPLEMENTACIÓN DE SITUACIONES ADIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE SIMETRÍA AXIAL UTILIZANDO CABRI COMO MEDIO.

**AUTORES:** *CARREÑO GRANADOS, Cristian Eduardo y DÍAZ LIZARAZO, Angy Melissa \*\**

**PALABRAS CLAVE:** Simetría axial, Análisis a posteriori, Cabri Geometry, Ingeniería Didáctica.

### DESCRIPCIÓN:

En este documento se presenta el análisis a posteriori de actividades en las que se estudia la simetría axial (las cuales fueron diseñadas por el director de este proyecto). Dichas actividades fueron aplicadas en el año 2013 a cuarenta y dos (42) estudiantes de séptimo grado del Colegio Liceo Patria en Bucaramanga. Basándonos en la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) se evaluó el aprendizaje de los estudiantes confrontando el análisis a priori<sup>1</sup> con los registros fílmicos de cada actividad de una pareja de estudiantes.

El análisis a priori, previamente realizado por Pérez y Quiñones (2012) adjunto en los anexos, contiene hipótesis sobre los posibles procedimientos de los estudiantes al tratar de resolver un problema en Cabri, las reacciones del medio, y el aprendizaje por adaptación que se deriva de la interacción del estudiante y el software Cabri.

El objetivo de este estudio fue realizar un análisis a posteriori de tres (de cuatro) actividades de simetría axial, donde Cabri se usó como software de geometría dinámica; partiendo de la confrontación entre las hipótesis del análisis a priori con el comportamiento real de una pareja de estudiantes.

Al comparar la información recolectada con el análisis a priori ya hecho, se confirma la idea de que el uso de Cabri permite a los estudiantes construir aprendizajes partiendo, en este caso, de la identificación de las propiedades de la simetría axial. Esto se logró a medida que los estudiantes realizaban sus acciones para completar las tareas propuestas recibiendo las respectivas retroacciones en forma de fenómenos visuales en la pantalla.

---

\*Trabajo de Grado.

\*\* Facultad de Ciencias- Escuela de Matemáticas, Licenciatura en Matemáticas.

Director: ACOSTA GEMPELER Martín Eduardo – Doctor en didáctica de las matemáticas.

Codirector: FIALLO LEAL Jorge Enrique – Doctor en educación matemática.

<sup>1</sup> Anexo 1

## ABSTRACT

**TITLE\*:** EVALUATION OF IMPLEMENTATION OF ADIDACTIC SITUATIONS FOR AXIAL SYMMETRY TEACHING USING CABRI AS ENVIRONMENT.

**WRITERS:** CARREÑO GRANADOS, Cristian Eduardo y DÍAZ LIZARAZO, Angy Melissa\*\*

**KEYWORDS:** Axial symmetry, posteriori analysis, Cabri Geometry, Didactic Engineering.

### OVERVIEW:

In this paper presents the posteriori analysis of activities in which the axial symmetry was studied (that were designed by the director of this project). These activities were implemented in 2013 to forty- two (42) seventh graders at Colegio Liceo Patria from Bucaramanga. On the basis of the theory of didactic situations (TDS), students' learning was evaluated by comparing the a priori analysis with the film records of every activity of a pair of students.

The a priori analysis previously conducted by Pérez and Quiñones (2012) attached in the annexes, contains hypotheses about the possible procedure of students trying to solve a problem in Cabri, the reactions of the environment, and adaptive learning that results from the interaction of the student with the software Cabri.

The aim of this study was to conduct a post hoc analysis of three (of four) axial symmetry activities where the dynamic geometry software Cabri was used, based on the confrontation between the priori analysis assumptions with the actual behavior of a couple of students.

By comparing the data collected with the priori analysis already done, the idea that the use of Cabri allows constructing learning based, in this case, on identifying axial symmetry properties is confirmed. This was achieved as students made their actions to complete tasks proposed receiving the respective feedbacks in visual phenomena form on the screen.

---

\*Graduate Project.

\*\* Faculty of Sciences- School of Mathematics, Mathematics Teaching.

Director: PhD. ACOSTA GEMPELER Martín Eduardo.

Codirector: PhD. FIALLO LEAL Jorge Enrique

## INTRODUCCIÓN

En la última década la incorporación de la tecnología en el currículo ha sido una de las principales preocupaciones de los investigadores en educación, haciendo que estas giren en torno a cómo hacer una correcta vinculación entre las matemáticas y la tecnología. Por ejemplo, para Murillo (2005), la integración y utilización de la tecnología en el proceso educativo de las matemáticas es un asunto que hace tiempo viene ocupando el trabajo de los investigadores en Educación Matemática, intentando determinar con estas los posibles beneficios que su utilización conlleva, junto con los diseños metodológicos y entornos interactivos multimedia de aprendizaje que produzcan mejoras en los procesos de enseñanza-aprendizaje. No lejos de esta idea, Parada y Fiallo (2012), afirman que la vinculación de las Tecnologías Digitales en la clase es un proceso complejo que requiere del acompañamiento y seguimiento constante para potenciar la actividad matemática esperada por parte de los estudiantes.

Referente a este proceso de vinculación, en Colombia el Ministerio de Educación Nacional para dar auge a la incorporación de las tecnologías en la clase de matemáticas entre los años 2000 y 2004 desarrolló el Proyecto de Incorporación de Nuevas Tecnologías al Currículo de la Educación Media, el cual tenía como objetivo mejorar la calidad de la enseñanza-aprendizaje de las matemáticas a través de la mediación recursos tecnológicos.

Una de las ramas de las matemáticas que se benefició más de esta incorporación tecnológica fue la geometría; según MEN (2004), los software de Geometría Dinámica (SGD) cambian la forma de enseñanza de la geometría, pues las herramientas tecnologías pueden transformar

la práctica docente permitiendo la producción de actividades radicalmente nuevas.

En el departamento de Santander, con el fin de fomentar la incorporación de las nuevas tecnologías en las aulas de clase, en particular la geometría, en la Universidad Industrial de Santander se creó el subgrupo de Tecnologías del grupo de investigación en educación matemática (EDUMAT-UIS). Torres, B. (2013) integrante del subgrupo amplía la información acerca del mismo en el apartado contextualización de la investigación, el cual hace parte de su proyecto de investigación.

El subgrupo inició sus actividades en 1984, con la realización de un diagnóstico sobre la enseñanza y el aprendizaje de las matemáticas en primaria y bachillerato. Inicialmente estuvo bajo la coordinación de las profesoras Carmen Luisa Arias de Torres y Rosalba Osorio Aguillón, quienes se dieron a la tarea de vincular profesores de diferentes niveles educativos para hacer seguimiento a problemáticas educativas desde el análisis de los textos utilizados por los docentes, el estudio y la interpretación de la reforma curricular, hasta la elaboración de materiales educativos para áreas de mayor dificultad como el caso de la geometría.

Hasta 1990 el Grupo trabajó sin reconocimiento de la Universidad Industrial de Santander, por considerarse, en la facultad a la cual estaban adscritos los profesores, que no eran temas de interés para el desarrollo de ésta. En ese año se le aceptó al grupo la inscripción del proyecto de investigación "Elaboración de material instruccional para la enseñanza de la geometría", quedando así reconocida en el ámbito institucional la existencia del grupo.

...En un comienzo el grupo de tecnologías era un espacio de reunión donde profesores interesados en el tema y los coordinadores (investigadores) de la UIS planeaban, analizaban y evaluaban actividades que serían aplicadas en diferentes colegios vinculados con este proyecto. Con el pasar de los años muchos profesores y colegios abandonaron el grupo por diferentes razones, pero también nuevos profesores se vincularon al proceso de formación. En el año 2008 el grupo inicio el proyecto Institucional de Uso de la Geometría Dinámica, fundamentado metodológicamente en la Ingeniería Didáctica y teóricamente en la Teoría de las Situaciones Didácticas.

En la actualidad, se encuentran vinculados al proyecto dos colegios de Bucaramanga, docentes investigadores (coordinadores del grupo) y

estudiantes de Licenciatura en Matemáticas de la UIS, los cuales exploran los diferentes usos de la tecnología en la enseñanza con software como Cabri, CarMetal y Geogebra, por mencionar algunos. Cada integrante del grupo se une a él por diferentes razones; sin embargo, los estudiantes se vinculan con la finalidad de desarrollar sus proyectos de grado en pro de las necesidades del grupo.

El trabajo del subgrupo de Tecnologías se evidencia en la formación de los docentes y estudiantes vinculados; en los proyectos de investigaciones orientados al mejoramiento de la Educación Matemática; y especialmente en la creación de actividades de geometría con el software Cabri Geometry. Las actividades están fundamentadas teóricamente desde la Teoría de las Situaciones Didácticas y metodológicamente desde el proceso de ingeniería didáctica; sin embargo, algunas actividades diseñadas cuentan con un respectivo análisis a priori, pero no con un análisis a posteriori. Esta situación es el motivo de nuestro ingreso al grupo y la base de esta investigación.

En nuestro trabajo de grado queremos hacer el respectivo análisis a posteriori de una de las actividades diseñadas por el grupo de Tecnologías (EDUMAT-UIS), en concreto sobre las actividades del concepto de simetría axial. El concepto de simetría axial cuenta con cuatro actividades, pero en este trabajo analizaremos solo las tres primeras.

Para mostrar cómo se llevó a cabo esta investigación expondremos brevemente la estructura del trabajo escrito.

En el primer capítulo, FUNDAMENTACIÓN TEORICA, presentamos los dos ejes de esta investigación. El primero de ellos es la Teoría de las Situaciones Didácticas que fundamenta cada una de las actividades, el

segundo lo constituyen las características de Cabri como medio a-  
didáctico.

En el segundo capítulo, METODOLOGÍA, explicamos en qué consiste la  
Ingeniería Didáctica y sus conceptos relevantes. También damos a  
conocer la población con la que trabajaremos y la forma como se  
recolectaran los datos.

En el tercer capítulo, ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES, exponemos  
para cada una de las tres actividades: el análisis a-priori, la  
transcripción del video y un análisis a-posteriori. Esto nos permitirá  
confrontar los dos análisis.

Finalmente en el cuarto capítulo, CONCLUSIONES, escribimos nuestras  
apreciaciones respecto al cumplimiento de los objetivos planteados en la  
investigación, además de hacer contribuciones y sugerencias para la  
reformulación del análisis a-priori basados en el análisis a-posteriori de  
cada una de las actividades.

## **OBJETIVO**

Validar el análisis a priori de una serie de actividades de simetría axial diseñadas en un software de geometría dinámica con el sustento de la Teoría de las Situaciones Didácticas, las cuales fueron experimentadas con estudiantes de séptimo grado de un colegio en Bucaramanga.

## 1. FUNDAMENTACIÓN TEÓRICA

En este trabajo asumimos la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD) de Guy Brousseau como marco teórico y las actividades se analizarán desde el punto de vista de dicha teoría. A continuación se expondrán los principales conceptos de la TSD:

### 1.1 APRENDIZAJE POR ADAPTACIÓN

El principal concepto de la Teoría de las Situaciones Didácticas es el aprendizaje por adaptación, que definimos en primera instancia como aquel que se produce sin la mediación del profesor. Aunque el concepto de aprendizaje por adaptación proviene del campo de la biología que considera los procesos de adaptación de los seres vivos al medio que los rodea, para la TSD se define como el producto de la interacción entre un sujeto y un medio, definido por Brousseau como:

Conjunto de condiciones exteriores en las cuales vive y se desarrolla un individuo humano, juega un papel importante en la determinación que el sujeto, su antagonista, debe desarrollar para controlar una situación de acción. Las teorías modernas le asignan un rol fundamental en los aprendizajes. (Brousseau, 1988)

Según Acosta (En prensa) los elementos de dicha interacción entre el sujeto y el medio se pueden describir en La Figura 1<sup>2</sup>:

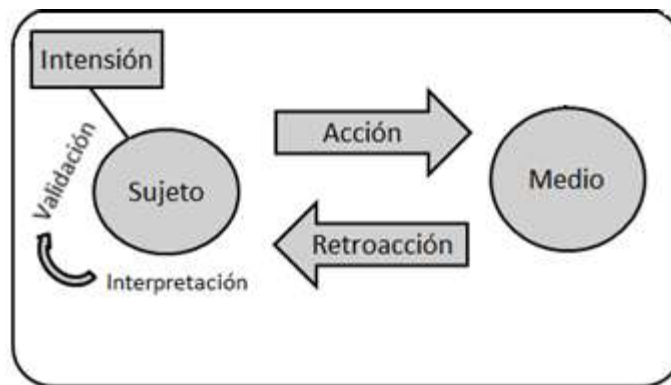
El primer elemento del aprendizaje por adaptación es una *intención* del sujeto; es decir, el sujeto tiene una necesidad, un propósito, un objetivo. Para alcanzar esa intención, el sujeto realiza una *acción* sobre el medio. El medio reacciona a la acción del sujeto; esta reacción recibe el nombre de *retroacción*. El sujeto *interpreta* esta retroacción del medio, que adquiere un sentido para él y así puede *validar* o invalidar la acción, es decir, puede decidir si la acción realizada le sirvió para alcanzar su

---

<sup>2</sup> La figura es tomada del artículo: Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando cabri como medio, de Acosta, M., Monroy, L., & Rueda, K. (2010)

intención o no. Esta validación puede tomar dos valores: validación negativa, en cuyo caso el sujeto abandonará la acción realizada y comenzará un nuevo ciclo de interacción con una acción diferente; o validación positiva, en cuyo caso el sujeto reforzará la acción, es decir la integrará como una respuesta automática a su intención.

**Figura 1: Aprendizaje por adaptación.**



De los cinco elementos de la interacción del sujeto con el medio mencionados anteriormente, sólo son observables la acción y la retroacción, pues los demás son internos al sujeto. Pero también son observables los efectos de la validación, cambio o refuerzo de la acción. Estos dos últimos son signos de aprendizaje: cuando el sujeto abandona una acción y la cambia por otra; o cuando el sujeto refuerza una acción, mostrando un uso reiterado de la misma.

Según la concepción de Brousseau, las retroacciones del medio son fundamentales para el aprendizaje, puesto que el sujeto produce conocimiento como resultado de la adaptación a un “medio” resistente con el que interactúa:

El estudiante aprende adaptándose a un medio que es factor de contradicciones, dificultades, desequilibrios, un poco como lo hace la sociedad humana. Ese saber fruto de la adaptación del estudiante, se manifiesta por las respuestas nuevas que son la prueba del aprendizaje. (Brousseau, 1986)

Corzo y Delgado (2010), explicitan que para Brousseau el medio es un ente que el profesor puede moldear con el fin de obtener los objetivos de aprendizaje planeados. Este debe tener las siguientes características:

1. Ser exterior al estudiante: el estudiante debe reconocerle una existencia objetiva.
2. Ser material: el estudiante puede interactuar con él por medio de acciones.
3. No debe tener ninguna intención: no debe ser percibido como una persona.
4. Reaccionar: las acciones del estudiante tienen efectos reconocibles.
5. Imponer restricciones a la acción: no cualquier acción es posible.

Podemos concluir que un aprendizaje por adaptación se da cuando el sujeto, al interactuar con el medio, cambia de acciones o las refuerza para alcanzar sus intenciones. Como puede apreciarse, en este análisis del aprendizaje no consideramos la intervención de un profesor. Dichas intervenciones las aclararemos en el proceso de enseñanza según la Teoría de las Situaciones Didácticas.

## **1.2 SITUACIÓN DIDÁCTICA Y SITUACIÓN A-DIDÁCTICA**

La Teoría de las Situaciones Didácticas define una *situación didáctica* como aquella en la que intervienen tres factores: un profesor, un estudiante y un saber. Según la TSD no es posible transmitir de manera directa el saber a los estudiantes; es decir, el problema de la enseñanza no puede ser reducido a un proceso de comunicación. Por el contrario, el profesor debe usar una estrategia indirecta para transmitir el saber,

creando las condiciones necesarias para que se dé un aprendizaje por adaptación.

Así pues, el ciclo de aprendizaje por adaptación pasa a ser parte de la situación didáctica, y recibe el nombre de *situación a-didáctica*, porque el medio es impersonal y no tiene ninguna intención didáctica; es decir, no desea enseñarle nada al estudiante.

A continuación vamos a examinar las relaciones entre la situación didáctica y la situación a-didáctica, para aclarar el rol del profesor. Sin embargo, antes de esto, necesitamos explicar la distinción que hace la TSD entre *saber* y *conocimiento*.

En el lenguaje cotidiano, estos dos términos son sinónimos, pero para la Teoría de las Situaciones Didácticas son dos conceptos diferentes, pues el conocimiento es fruto de una experiencia, y por lo tanto es personal y contextualizado. Cada sujeto tiene un conocimiento diferente, marcado por su experiencia personal y por el contexto de la misma. Por su parte, el saber es impersonal y descontextualizado, por lo tanto se opone al conocimiento. El saber es un “saber sabio”, porque es el producto de una comunidad con autoridad reconocida y por ende es institucional.

Por tanto, siguiendo con nuestro análisis del modelo teórico, podemos afirmar que el conocimiento es producto del ciclo de aprendizaje por adaptación, completando así lo que llamamos una situación a-didáctica.

El profesor utiliza una situación a-didáctica como estrategia para que el estudiante construya un conocimiento determinado gracias a la interacción con el medio, utilizando ese conocimiento personal y contextualizado para realizar la *institucionalización*, la cual consiste en explicitar las relaciones entre el conocimiento construido por los estudiantes y el saber.

El hecho de introducir el saber únicamente a partir de los conocimientos construidos por los estudiantes garantiza que el saber adquiera sentido para ellos, pues pueden relacionarlo con su experiencia personal. Por el contrario, cuando se intenta transmitir directamente el saber, los estudiantes están en la incapacidad de relacionarlo con sus experiencias, y por lo tanto no adquiere sentido para ellos.

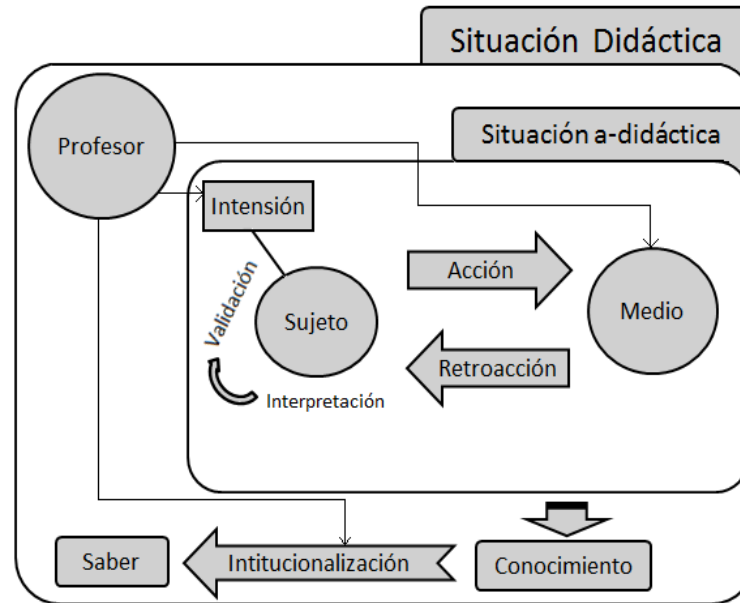
En La Figura 2<sup>3</sup> tenemos la situación global de la situación didáctica que comprende una situación a-didáctica.

En la Teoría de las Situaciones Didácticas el rol del profesor es muy importante, pues ciertas intervenciones podrían impedir el aprendizaje por adaptación. Según Acosta (En prensa), una característica fundamental de la situación a-didáctica es la posibilidad que tiene el estudiante de validar o invalidar por sí mismo las estrategias que pone en práctica para resolver el problema; así que toda intervención del profesor para señalar errores o sugerir estrategias anula la validación por parte del estudiante, quien acepta los juicios del profesor, y por lo tanto se interrumpe el aprendizaje por adaptación. Inclusive, los estudiantes buscarán obtener informaciones del profesor que les permitan resolver el problema sin tener que realizar un razonamiento, o simplemente buscarán confirmación de sus estrategias; por lo tanto, durante la situación a-didáctica, el profesor deberá abstenerse de juzgar (con palabras o con gestos) el trabajo del estudiante, de intervenir voluntariamente o por solicitud del mismo para corregir su trabajo o para sugerir una estrategia de solución. Por el contrario, deberá animar a los estudiantes a poner en práctica sus propias estrategias y a validarlas o invalidarlas en la interacción con el medio.

---

<sup>3</sup> La figura es tomada del artículo: Situaciones a-didácticas para la enseñanza de la simetría axial utilizando cabri como medio, de Acosta, M., Monroy, L., & Rueda, K. (2010)

**Figura 2: Relación entre situación didáctica y situación a-didáctica**



Ante la solicitud de ayuda por parte de los estudiantes, el profesor debe devolverles sus preguntas. En caso de que el estudiante abandone el problema ('no soy capaz de hacerlo'), el profesor debe intervenir para relanzar el problema: debe hacer caer en cuenta al estudiante que puede realizar acciones sobre el medio y hacerle tomar conciencia de las retroacciones del mismo.

El profesor es el encargado de presentar al estudiante un problema y un medio. El problema debe desencadenar un intención en el estudiante y el medio debe garantizar que el estudiante pueda validar o invalidar sus acciones para que el ciclo de interacción produzca un aprendizaje por adaptación.

Según Acosta (En prensa), la preparación de la situación a-didáctica no debe recaer sobre el profesor, sino que debe ser asumida por expertos en didáctica de las matemáticas. Pues son ellos quienes preparan el problema y el medio, quienes prevén todas las posibles acciones que

realizará el sujeto, y verifican que las retroacciones del medio le permitirán invalidar aquellas acciones incorrectas desde el punto de vista del saber a enseñar, y validar aquellas acciones correctas. De esta manera, el profesor puede concentrarse en su campo de experticia, que es la gestión de la clase.

### **1.3 CABRI COMO MEDIO**

De acuerdo con todo lo anterior, para que una situación a-didáctica pueda ser utilizada para la enseñanza de un saber determinado, el conocimiento producido por la interacción con el medio debe tener una relación con el saber a enseñar. Es más, según Margolinas (2009), el profesor debe abstenerse de intervenir señalando los errores de los estudiantes confiando plenamente en el medio, pues este generará las retroacciones necesarias para que el estudiante mismo encuentre sus errores.

Consideramos que el software Cabri puede utilizarse como medio en situaciones a-didácticas para el aprendizaje de la geometría, pues garantiza que las retroacciones que ofrece a las acciones del sujeto están de acuerdo con la teoría de la geometría. Por lo tanto, los conocimientos que produzcan los estudiantes en la interacción con Cabri necesariamente tendrán una relación estrecha con el saber a enseñar.

Cabri puede realizar dos tipos de retro-acciones que se resumen a continuación en acuerdo con Acosta, Monroy y Rueda (2010):

- Tipo de acción Construir: haciendo uso de los menús de herramientas podemos pedir a Cabri que dibuje en la pantalla diferentes objetos geométricos (rectas, segmentos, círculos, polígonos, etc.) con relaciones entre ellos (pertenencia, perpendicularidad, paralelismo, etc.). La retroacción correspondiente a construir es un dibujo estático en la pantalla,

que corresponde a lo que se le pidió que construyera. Por ejemplo, si se selecciona la herramienta 'Segmento' y se hacen dos clics en la pantalla, aparece un segmento de recta limitado por dos puntos.

- Tipo de acción Arrastrar: La herramienta 'apuntador' permite asir los objetos ya construidos y desplazarlos en la pantalla, garantizando que las relaciones geométricas construidas se mantienen durante el movimiento. Las retroacciones correspondientes a la acción de arrastrar son fenómenos dinámicos en la pantalla: algunos objetos se mueven, y ese movimiento tiene patrones determinados.

El comportamiento de los objetos en el software Cabri es geométrico, como comentan y aclaran Castiblanco, Urquina y Acosta (2004): "se conservan intactas las relaciones geométricas que hayan sido declaradas en la construcción, así como las propiedades geométricas implícitas" tanto al construir como al arrastrar.

## **2. METODOLOGÍA**

### **2.1 INGENIERÍA DIDÁCTICA**

La ingeniería didáctica es una metodología de investigación de la escuela francesa que hace una confrontación entre un análisis a priori y un análisis a posteriori. El análisis a priori es un conjunto de hipótesis sobre el aprendizaje que se puede lograr considerando a un estudiante y controlando un conjunto de variables didácticas en el funcionamiento del medio con el cual el estudiante va a interactuar para resolver un problema. El análisis a posteriori es la confrontación de esas hipótesis con los datos recogidos de un experimento aplicado a una población determinada.

Según Artigue (1995), una ingeniería didáctica comprende cuatro fases:

#### **2.1.1 Análisis preliminar**

Hace referencia al análisis de la epistemología de los contenidos (el análisis del saber), a las concepciones de los estudiantes, las dificultades, las hipótesis y las condiciones bajo las cuales se presentará la situación didáctica. En general, en esta fase se analizan y determinan todos los actores del sistema didáctico y las relaciones entre ellos.

#### **2.1.2 Diseño**

En esta fase el investigador es el encargado de tomar la decisión de actuar sobre variables del sistema que no estén fijadas por las restricciones. Artigue (1995) distingue dos tipos de variables de comando:

- Variables macro-didácticas o globales.
- Variables micro-didácticas o locales.

Ambas variables pueden ser generales o bien dependientes del contenido didáctico en el que se enfoca la enseñanza. Pero la última hace referencia propiamente a la organización y la gestión de la secuencia de clase.

Las dos primeras etapas de la ingeniería didáctica fueron realizadas con anticipación por el director de este proyecto y ex-integrantes del grupo Nuevas Tecnologías EDUMAT-UIS, entre ellos Pérez, L. y Quiñones (2012); Monroy, L., y Rueda, K. (2010); Corzo, O. y Delgado, P. (2010).

### **2.1.3 Experimentación**

En esta fase se aplica la actividad diseñada tal cual se especifica en el análisis a priori. El investigador controla las actividades y toma registro de calidad de los sucesos; pues los datos obtenidos serán de vital importancia ya que son la base de la siguiente etapa.

### **2.2.4 Análisis a posteriori**

Se analizan totalmente los datos recolectados a lo largo de la experimentación; es decir, las observaciones realizadas, las producciones de los estudiantes en el aula o fuera de ella, los cuestionarios planteados y las entrevistas individuales o grupales.

La confrontación de los análisis, el a priori y a posteriori valida o refuta las o las hipótesis formuladas.

La tercera fase se llevó a cabo en un colegio de Bucaramanga, con 42 estudiantes. La docente a cargo del grupo aplicó las actividades diseñadas y los autores de esta investigación tomaron registro de lo sucedido en el aula. Esta fase se retoma nuevamente y más a fondo en el siguiente apartado de esta sección.

Los datos recolectados de la experimentación se confrontaron con el análisis a priori, con el objetivo de producir un análisis a posteriori de

una serie de actividades en torno a la simetría axial, análisis que se expondrá a lo largo de esta tesis.

## **2.2 POBLACIÓN**

La experimentación se realizó en un periodo de cuatro meses con aproximadamente; cuarenta estudiantes de séptimo grado del colegio Liceo Patria de Bucaramanga integraron la población a la cual se le aplicarían tres de las cuatro actividades de simetría axial. Las actividades se implementaron una vez por semana dentro del horario de clases de dos horas, en el salón de informática y con la dirección de la profesora titular del grupo.

La profesora recibió tutorías por parte de los autores de este trabajo a lo largo de la experimentación, con el fin de lograr el entendimiento y apropiación de las actividades de simetría axial junto con su análisis a priori.

## **2.3 RECOLECCIÓN DE DATOS**

Se filmó el trabajo de una pareja de estudiantes durante todas las actividades y las intervenciones hechas por la profesora. Los videos no se transcribieron en su totalidad para este trabajo, pues la extensión de los mismos no lo permite. De manera que solamente aparecen secciones transcritas en los anexos que aportan al análisis a posteriori.

Se recogieron registros de las actividades tomando nota del trabajo de otros grupos, filmando puestas en común durante las sesiones de clase y recogiendo escritos de los estudiantes.

### 3. ANÁLISIS DE LAS ACTIVIDADES

En este trabajo se presenta un análisis secuencial de tres actividades de clase, donde cada actividad está compuesta de series, todas alrededor del concepto de simetría axial. El análisis a posteriori que aparece a continuación se realiza con la misma estructura del análisis a priori en el cual nos basamos; es decir, se presenta por actividades. En cada actividad las series tienen una secuencia que es analizada a medida que se avanza en el documento.

Para facilitar la confrontación del análisis a posteriori con el análisis a priori, se explicitará por cada tarea el análisis a priori respectivo tomado de Pérez y Quiñonez (2012), y luego el análisis a posteriori.

En la transcripción de los videos se usan algunas convenciones que se aplican a lo largo de las transcripciones de los videos, esas convenciones son las siguientes:

- Los estudiantes filmados son llamados estudiante 1 y estudiante 2.
- Las acciones que aparecen en el video van entre paréntesis abiertos y en tablas.
- Las opiniones personales o aclaraciones aparecen en corchetes.
- Cuando se habla de estudiantes (en plural), nos referimos a la mayoría de los estudiantes.
- Cuando hablamos de estudiante 3, estudiante 4, estudiante 5... Nos referimos a intervenciones de otros estudiantes distintos a los estudiantes 1 y 2.
- Los puntos suspensivos que aparecen en la transcripción quieren decir que se omiten partes no relevantes del video.

Las transcripciones harán parte de los anexos, estas están organizadas por actividades y tareas. Por tanto para una mejor comprensión del análisis a posteriori es necesario recurrir a ellas cuando se mencione alguna Tabla.

### **3.1 ACTIVIDAD 1**

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes se familiaricen con algunos fenómenos visuales relativos de la simetría axial, como por ejemplo, que la unión de dos triángulos simétricos sólo ocurre en el eje de simetría (lo que los estudiantes pueden llamar espejo), que siempre existe la dependencia entre dos figuras (triángulos) y que los movimientos de las figuras son contrarios con respecto al eje. Los fenómenos anteriores implican que cada estudiante logre identificar el eje de simetría y prediga su ubicación en la última tarea.

A continuación se confronta el análisis a priori con los datos de la experimentación. Para esto, presentamos segmentos transcritos de los videos donde se observan acontecimientos que refuerzan las hipótesis del análisis a priori. Con detalle hacemos explícitas en Tablas las acciones que los estudiantes efectuaron, las retroacciones correspondientes que recibieron por parte del medio, así como las interpretaciones y las validaciones de los ellos una vez reciben la respuesta del medio.

#### **3.1.1 Primera tarea: llevar los triángulos gruesos dentro del cuadrado**

El propósito de esta tarea es que los estudiantes usen el arrastre para tratar de mover los triángulos. Se espera que intenten agarrar los triángulos gruesos directamente y no puedan. Si los estudiantes no lo hacen de manera espontánea, el profesor puede sugerirles que intenten meter primero los triángulos delgados dentro del cuadrado para que se percaten de que al mover uno delgado, se mueve uno grueso, y puedan

encontrar la manera de concluir la tarea. Es de suma importancia que los estudiantes descubran cómo funciona la figura por sí solos, de modo que el profesor debe limitar sus intervenciones, es decir, lo hará para evitar que los estudiantes abandonen la tarea o para recordar el objetivo de la misma.

### **3.1.1.1 Análisis a priori**

- ✓ Análisis de la interacción sujeto-medio

**Intención:** llevar los triángulos gruesos dentro del cuadrado.

**Acción 1:** agarrar un triángulo grueso para llevarlo al cuadrado.

**Retroacción 1:** el triángulo no se mueve.

**Interpretación 1:** no se puede arrastrar el triángulo hacia el cuadrado.

**Validación 1:** la acción 1 no permite lograr el objetivo, por lo cual se debe cambiar de acción.

**Acción 2:** agarrar un triángulo delgado y arrastrarlo hasta que el grueso correspondiente quede dentro del cuadrado.

**Retroacción 2:** el triángulo delgado se deja arrastrar, siguiendo el movimiento del ratón, y el grueso correspondiente se mueve hasta quedar dentro del cuadrado.

**Interpretación 2:** para meter un triángulo grueso en el cuadrado se debe mover el delgado correspondiente y además sus movimientos son contrarios, es decir, se acercan entre sí cuando se arrastra el delgado hacia el grueso, y se alejan entre sí cuando el delgado se arrastra en sentido opuesto al grueso.

**Validación 2:** la acción 2 permite lograr el objetivo, de modo que la tarea ha sido concluida y no se necesita cambiar de acción.

En este caso, al darse cuenta los estudiantes de que los triángulos gruesos no se dejan arrastrar, deberían cambiar de acción e intentar arrastrar los otros triángulos. Si no lo hacen espontáneamente, el profesor puede sugerirles hacerlo.

De acuerdo al análisis hecho, el desarrollo de esta tarea genera un aprendizaje por adaptación en el estudiante, puesto que si decide arrastrar los triángulos gruesos el medio no lo dejará y tendrá que cambiar de estrategia. En cambio, si decide arrastrar los triángulos delgados podrá resolver la tarea. Al arrastrar los triángulos delgados constatará que el movimiento de los gruesos depende del de los delgados que es el objetivo de la actividad.

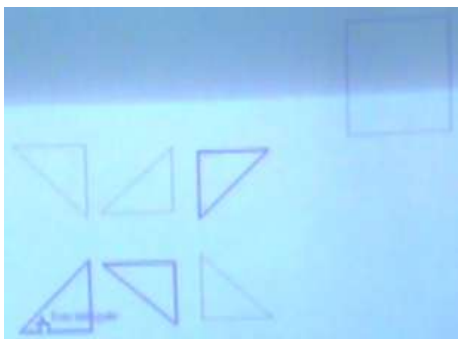
### 3.1.1.2 Análisis a posteriori

La primera acción realizada por los estudiantes, se presenta en la Tabla 1<sup>4</sup> de la transcripción. En el primer párrafo, se describe cómo los estudiantes intentan arrastrar el triángulo grueso directamente. Sin embargo el medio invalidó esta acción, haciendo que el estudiante la abandonara inmediatamente. El análisis a priori tenía prevista esta situación como acción 1.

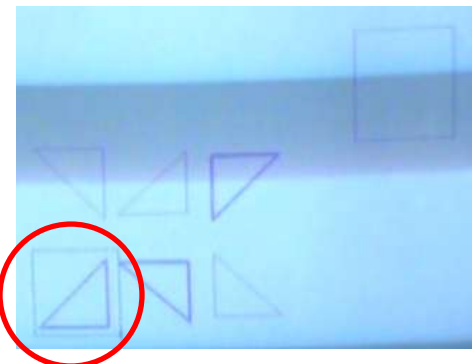
La segunda acción que realizan los estudiantes, se presenta en el segundo párrafo de la Tabla 1 de la transcripción, en esta se muestra cómo los estudiantes hacen uso de un cuadro de selección sobre un triángulo grueso para intentar arrastrarlo. Esta acción no está prevista en el análisis a priori; sin embargo, a pesar de esto, la retroacción de medio conduce a su invalidación.

En las Figuras 3 y 4 se muestra cómo los estudiantes realizaron las acciones descritas en los dos párrafos anteriores.

**Figura 4: Seleccionar el triángulo grueso directamente**



**Figura 3: Uso del cuadro de selección para mover el triángulo**



Una acción que no está presente en el análisis a priori es la descrita en la Tabla 2, donde los estudiantes haciendo clic derecho en el ratón sobre el triángulo grueso buscan una opción o herramienta en el menú

---

<sup>4</sup> Anexo 2, Actividad 1- Tarea 1. Las demás tablas hasta la número 6 se analizarán en esta misma sección.

desplegable que les permita arrastrar el triángulo. De igual forma esta acción quedó invalidada por el medio.

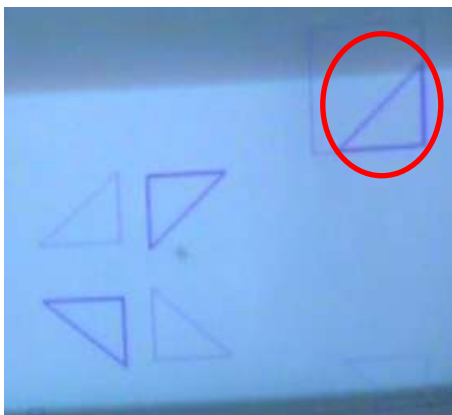
En las Tablas 3, 4, 5 y 6 de la transcripción podemos observar cómo los estudiantes mueven los triángulos delgados. En las Tablas 3 y 4 se ve cómo los estudiantes notan la dependencia en el movimiento de los triángulos y logran llevar el primer triángulo grueso dentro del cuadrado.

**Estudiante 1:** (Selecciona el triángulo delgado y lo dirige a la parte inferior de la pantalla haciendo que su triángulo grueso correspondiente también se mueva, pero este lo hace en sentido opuesto hacia la parte superior de la pantalla).

(Mueve el triángulo delgado y ubica el triángulo grueso dentro del cuadrado pegando sus catetos a dos lados del cuadrado, como se ve en la figura 5).

En la Tabla 5 llevan el segundo triángulo al cuadrado y finalmente en la Tabla 6 llevan el tercer triángulo dentro del cuadrado. Estas acciones están previstas en el análisis a priori como acción 2.

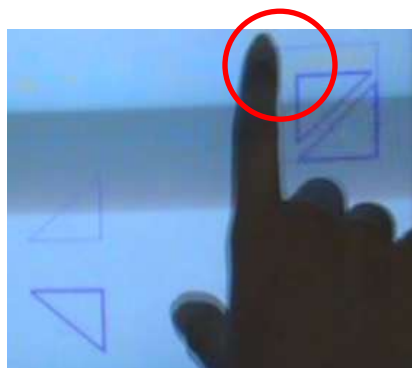
**Figura 5: Primer Triángulo grueso dentro del cuadrado.**



En cierto momento durante las últimas acciones, los estudiantes pensaron en formar el cuadrado con los triángulos; esto se ve cuando la estudiante 2 indica con su dedo el vértice del cuadrado como el lugar donde debería ir el segundo triángulo delgado (ver Figura 6). Pensamos que los estudiantes interpretaron de esta manera la tarea como un

efecto del contrato didáctico de la clase de geometría. Los estudiantes asumen que la tarea “meter los triángulos dentro del cuadrado” no es una tarea de geometría y por tanto interpretan la tarea cómo intentar formar el cuadrado con los triángulos.

**Figura 6: La estudiante indica donde debe ir el cuadrado**



Al finalizar esta primera tarea podemos constatar que los estudiantes lograron uno de los objetivos de la actividad: tomar conciencia de que el movimiento de los triángulos gruesos depende del movimiento de los triángulos delgados.

Las intervenciones de la profesora están acordes con el propósito de tarea. Sus intervenciones fueron adecuadas, pues evitó que los estudiantes abandonaran la tarea y los motivó sobre la misma. Se muestra a continuación el segmento de la transcripción para hacerlo más claro:

**Profesora [dirigiéndose a toda la clase]:** Tarea 1: Llevar los triángulos grueso dentro del cuadrado.

...

**Estudiantes:** Profesora, ¿cómo se arrastran?

**Profesora [dirigiéndose a toda la clase]:** Cacharree a ver como lo hace.

**Estudiantes:** Ah ya.

**Profesora [dirigiéndose a toda la clase]:** Intenten hacer.

**Estudiante 3:** Los gruesos.

...

**Profesora [dirigiéndose a toda la clase]:** La instrucción es llevar los triángulos gruesos dentro del cuadrado.

**Profesora [dirigiéndose a toda la clase]:** Cada pareja o cada grupo deben estar cacharreando con su computador.

### **3.1.2 Segunda tarea: llevar todos los triángulos delgados dentro del cuadrado**

Durante las reuniones de capacitación del grupo EDUMAT- UIS se discutió la posibilidad de añadir esta tarea como una tarea independiente, pero se había propuesto como primera tarea.

El propósito aquí, es que los estudiantes sigan usando el arrastre para tratar de mover los triángulos. El desarrollo de esta tarea genera un aprendizaje por adaptación en el estudiante, pues al arrastrar los triángulos delgados se constata que el movimiento entre los triángulos gruesos y delgados es dependiente.

#### ***3.1.2.1 Análisis a priori***

El análisis a priori sugiere proponer esta tarea únicamente si los estudiantes deciden que es imposible mover los triángulos gruesos, por lo cual esta tarea no tiene análisis a priori.

#### ***3.1.2.2 Análisis a posteriori***

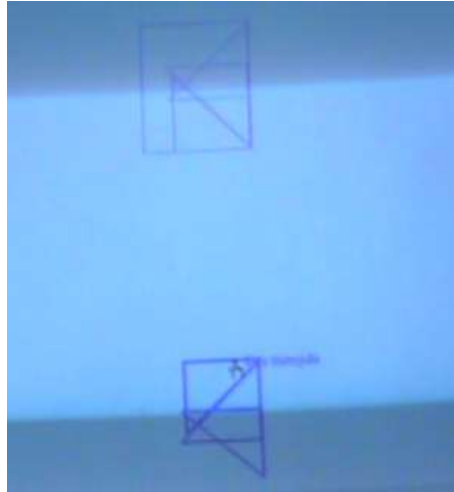
Pensamos que proponer esta tarea como segunda tarea no tiene ningún propósito, ya que se supone de antemano que los estudiantes han identificado el movimiento dependiente de los triángulos.

**Profesora [dirigiéndose a toda la clase]:** Tarea 2: Ahora van a hacer lo siguiente, van a llevar los delgados dentro del cuadrado.

**Estudiante 1:** (Sitúa el puntero sobre un lado de un triángulo delgado y cuando sale la leyenda “este triángulo” lo selecciona para arrastrarlo dentro del cuadrado. El triángulo grueso correspondiente sale del cuadrado y se ubica sobre los otros dos triángulos delgados)

[De igual modo arrastra el segundo y el tercer triángulo delgado dentro del cuadrado, quedando los triángulos gruesos fuera de él].

**Figura 7: Segunda tarea**



Basándonos en la transcripción anterior, que es la descrita en la Tabla 7<sup>5</sup>, el análisis a priori correspondiente a esta tarea es el siguiente:

**Intención:** llevar los triángulos delgados dentro del cuadrado.

**Acción 1:** agarrar un triángulo delgado para llevarlo al cuadrado.

**Retroacción 1:** el triángulo se mueve.

**Interpretación 1:** se puede arrastrar el triángulo hacia el cuadrado.

**Validación 1:** la acción 1 permite lograr el objetivo, de modo que la tarea ha sido concluida y no se necesita cambiar de acción.

### **3.1.3 Tercera tarea: llevar todos los triángulos dentro del cuadrado**

El propósito de esta tarea es que los estudiantes sigan usando el arrastre para tratar de mover los triángulos. Se espera que intenten agarrar los triángulos delgados directamente, pues ya deben estar apropiándose de la dependencia de los triángulos. El objetivo de la tercera tarea es la identificación de otros fenómenos visuales como por ejemplo, la idea de que dos figuras son simétricas cuando se tocan en el

---

<sup>5</sup> Anexo 2, Actividad 1- Tarea 2.

eje de simetría. Específicamente, en esta tarea se quiere que los estudiantes sigan reforzando la dependencia con el movimiento de los triángulos, pues los gruesos no se podrán arrastrar directamente por la pantalla; y refuercen la idea de los movimientos contrarios de los triángulos, ya que los estudiantes descubren que un triángulo delgado y el grueso correspondiente tienen movimientos contrarios con respecto al eje de simetría.

Además los estudiantes deben descubrir que hay lugares en los que el triángulo delgado se superpone con el grueso (su simétrico); y que dos figuras simétricas coinciden a lo largo de una recta llamada eje de simetría. Queremos que los estudiantes constaten que las distintas posiciones en las que se superponen un triángulo delgado y su simétrico están a lo largo de una recta.

### **3.1.3.1 Análisis a priori**

El objetivo es que los estudiantes confirmen que los movimientos de un triángulo y su simétrico son contrarios e intenten argumentar que es imposible ejecutar la tarea.

- ✓ Análisis de la interacción sujeto-medio
  - Intención:** llevar todos los triángulos dentro del cuadrado.
  - Acción 1:** meter los triángulos delgados en el cuadrado.
  - Retroacción 1:** los triángulos gruesos quedan por fuera del cuadrado.
  - Interpretación 1:** no basta meter los triángulos delgados en el cuadrado para que queden todos dentro de él.
  - Validación:** la acción 1 no es válida, se debe cambiar de acción.
  - Acción 2:** meter los triángulos gruesos dentro del cuadrado.
  - Retroacción 2:** los triángulos delgados quedan por fuera del cuadrado.
  - Interpretación 2:** no basta meter los triángulos gruesos en el cuadrado para que queden todos dentro de él.
  - Validación:** La acción 2 no permite realizar la tarea, es necesario cambiar de acción nuevamente.
  - Acción 3:** juntar todos los triángulos.
  - Retroacción 3:** los triángulos quedan por fuera del cuadrado.
  - Interpretación 3:** no hay manera de ubicar todos los triángulos dentro del cuadrado.
  - Validación 3:** la acción 3 no es válida, y como no es posible juntar todos los triángulos dentro del cuadrado, es imposible realizar la tarea.

Esta vez los estudiantes se percatan de que los triángulos solo se unen en algunos sitios de la pantalla, y que allí debería estar ubicado el cuadrado. Pero por no darse estas condiciones, la tarea es imposible.

Como resultado de llevar a cabo estas acciones previstas, los estudiantes descubren que si se meten los triángulos delgados en el cuadrado, los gruesos quedan por fuera; y en caso de querer meter los gruesos, es necesario sacar los delgados. Pero mientras se realizan estas acciones, se evidencia que al arrastrar un triángulo delgado en algunas direcciones, el grueso correspondiente se mueve en sentido contrario. En particular, estando en la figura 1 donde el eje de simetría (oculto) es horizontal, al mover el triángulo delgado hacia arriba el grueso se mueve hacia abajo, y viceversa. Lo cual implica que el aprendizaje por adaptación producto de concluir la tarea, corresponde con el propósito de la misma.

### **3.1.3.2 Análisis a posteriori**

Antes de realizar cualquier acción uno de los estudiantes expresó que no se podía realizar la tarea:

**Estudiante 2:** Pero no se puede.

**Profesora [dirigiéndose a toda la clase]:** Inténtenlo, inténtenlo a ver si se puede o no.

**Profesora [dirigiéndose a toda la clase]:** Llevar todos los triángulos dentro del cuadrado.

El análisis a priori tenía previsto que los estudiantes argumentaran que era imposible realizar la acción, aunque no se esperaba que lo dijeran antes de iniciar la tarea.

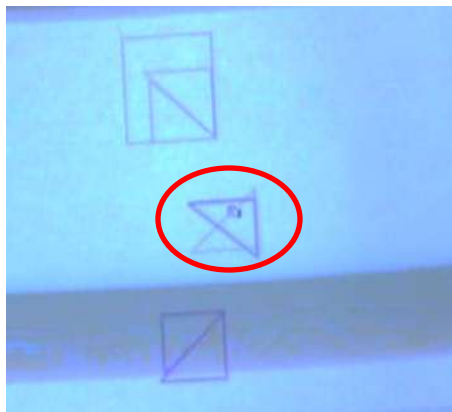
Los estudiantes trabajaron en la tarea realizando como primera acción la descrita en la Tabla 8<sup>6</sup> y sus párrafos siguientes. El análisis a priori tenía prevista esta situación como acción 3. Explicaremos para una mejor comprensión cómo los estudiantes llevaron todos los triángulos a un mismo punto:

**Estudiante 1:**(Toma el triángulo delgado fuera del cuadrado y lo lleva al centro de la pantalla donde se junta con el triángulo grueso que estaba dentro del cuadrado. Hace el mismo proceso con los dos restantes pares de triángulos, dejando en el centro de la pantalla los seis triángulos juntos, pero fuera del cuadrado).

---

<sup>6</sup>Anexo 2, Actividad 1- Tarea 3.

**Figura 8: Primera pareja de triángulos juntos fuera del cuadrado.**



Sin embargo, los estudiantes no solo juntaron todos los triángulos en un punto de la pantalla. También realizaron otra acción que no está prevista en el análisis a priori:

(El estudiante 1 dirige el puntero a un lado del cuadrado e intenta arrastrarlo, el cuadrado no se mueve).

El medio no les permitió mover el cuadrado, haciendo que los estudiantes invaliden la acción. Además la profesora interviene para evitar esta acción:

“Profesora [dirigiéndose a todo el grupo]: Yo no les dije que tenían que mover el cuadrado.”

Aclaramos que esta intervención es innecesaria, ya que el mismo medio invalidó la acción.

La siguiente acción del estudiante que se describe en la transcripción fue llevar los triángulos delgados dentro del cuadrado. De igual manera realizó la acción para los triángulos gruesos. A continuación se escribirá la sección de la transcripción dónde se evidencian las acciones que se tenía prevista en el análisis a priori como acción 1 y acción 2 respectivamente:

(Los estudiantes 1 y 2 siguen arrastrando los triángulos delgados metiéndolos dentro del cuadrado. Cuando dejan esta opción, meten los triángulos gruesos dentro del cuadrado. Los estudiantes no logran meter todos los triángulos dentro del cuadrado).

Aunque los estudiantes lograron confirmar que los movimientos de un triángulo y su correspondiente son contrarios, el objetivo de la actividad quedó incompleto, puesto que los estudiantes no intentan argumentar por qué no es posible realizar la tarea. Consideramos entonces que es necesario que la profesora formule explícitamente la pregunta: “¿Por qué creen ustedes que es imposible resolver esta tarea?”

#### **3.1.4 Cuarta tarea: colocar los tres cuadrados en la pantalla de modo que puedan ponerse un triángulo delgado y el grueso correspondiente en cada uno**

El objetivo de la tarea es que los estudiantes sigan reforzando los fenómenos visuales y que arrastren un triángulo delgado para juntarlo con su pareja en algún lugar de la pantalla, luego podrán mover uno de los cuadrados a esa posición, quedando un triángulo y su simétrico dentro de él. Se espera que hagan lo mismo para meter las dos parejas de triángulos restantes en los otros dos cuadrados y así poder culminar con éxito la tarea.

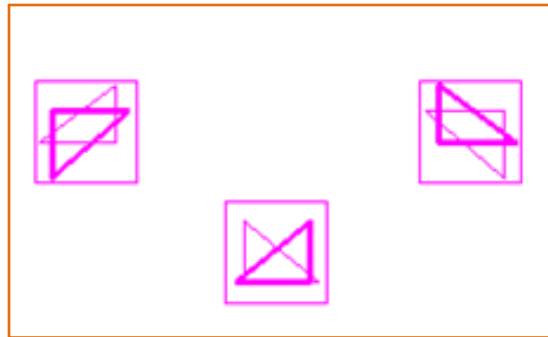
##### **3.1.4.1 Análisis a priori**

La intención es que los estudiantes se percaten de que los cuadrados deben ubicarse a lo largo de una recta, y el profesor debe asegurarse de que los estudiantes son conscientes de que hay más posiciones en las que se pueden ubicar los cuadrados.

También debe asegurarse de que en cada pareja que queda dentro de un cuadrado, un triángulo es simétrico del otro, porque podría presentarse la situación descrita en la Figura 9.

Aparentemente la tarea está concluida, pero dentro de los dos cuadrados de la parte superior, los triángulos no son simétricos con respecto al eje vertical que permanece oculto.

**Figura 9: Parejas de triángulos no correspondientes dentro de los cuadrados.**



Se espera que los estudiantes arrastren un triángulo delgado para juntarlo con su pareja en algún lugar, dado que en la actividad anterior se percataron de que un triángulo y su pareja se unen en algunos sitios de la pantalla; de esta manera podrán mover uno de los cuadrados a esa posición, quedando un triángulo y su simétrico dentro de él. Luego se esperaría que hagan lo mismo para meter las dos parejas de triángulos restantes en los otros dos cuadrados.

✓ Análisis de la interacción sujeto-medio

**Intención:** colocar los tres cuadrados en la pantalla de modo que puedan ponerse un triángulo delgado y el grueso correspondiente en cada uno.

**Acción 1:** ubicar los tres cuadrados en cualquier lugar de la pantalla e intentar llevar las parejas dentro de cada uno.

**Retroacción 1:** Como la posición de los cuadrados es escogida al azar, será muy improbable que queden los tres sobre el eje de simetría oculto, y por lo tanto no podrán meterse dentro de ellos un triángulo delgado y su correspondiente grueso.

**Interpretación:** las parejas de triángulos no se pueden superponer en cualquier parte de la pantalla.

**Validación:** la acción no es válida, se debe usar otra estrategia.

**Acción 2:** arrastrar un triángulo delgado hasta superponerlo con otro que no sea su pareja.

**Retroacción 2:** dos pares de triángulos quedan superpuestos.

**Interpretación:** se pueden unir dos pares de triángulos (grueso-delgado) en algunos sitios de la pantalla.

**Validación:** la acción no es válida dado que no quedó superpuesto un triángulo delgado y el grueso correspondiente.

En caso de que el estudiante lleve a cabo esta acción, el profesor deberá intervenir y pedirle que mueva cada triángulo delgado, para mostrarle que los pares de triángulos que están dentro de los cuadrados, no son parejas.

**Acción 3:** arrastrar cada triángulo delgado hasta donde se superponga con su correspondiente grueso y llevar un cuadrado a esa posición.

**Retroacción 3:** las parejas se superponen en algunos puntos de la pantalla.

**Interpretación:** los triángulos se unen en distintas posiciones y éstas están a lo largo de una línea recta.

**Validación:** la acción permite completar la tarea.

En este momento, se espera que los estudiantes hayan descubierto la dependencia entre las figuras simétricas, los movimientos opuestos de las mismas.

Nuevamente el aprendizaje por adaptación producto de efectuar las posibles acciones, termina siendo que las parejas de triángulos solo se unen a lo largo de una recta, y que además no hay otras posiciones donde suceda esto. Ello implica que la única manera de concluir la tarea es percatándose de la presencia del eje de simetría, que es en últimas lo que se quiere.

### **3.1.4.2 Análisis a posteriori**

Según el análisis a priori, el objetivo de la actividad es que los estudiantes constaten que al resolver la tarea los cuadrados quedan alineados. La profesora debe asegurarse que ellos sean conscientes de que hay más posiciones en las que se pueden ubicar los cuadrados.

La tarea fue realizada dos veces, primero el estudiante 1 estuvo a cargo del ratón y luego la estudiante 2.

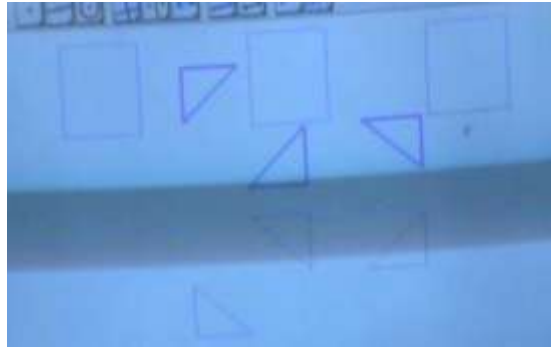
La primera acción que realizó el estudiante 1 está descrita en la Tabla 9<sup>7</sup>. Él ubicó los cuadrados de forma horizontal en la pantalla, pero no donde se encontraba el eje de simetría oculto. El análisis a priori tenía prevista esta situación como acción 1.

**Estudiante 1:** (Saca los dos cuadrados restantes arrastrando el segmento inferior del cuadrado. Él los coloca de forma horizontal. El estudiante comienza a arrastrar cada uno de los triángulos delgados por toda la pantalla. Ninguna pareja de triángulos logra entrar en algún cuadrado).

---

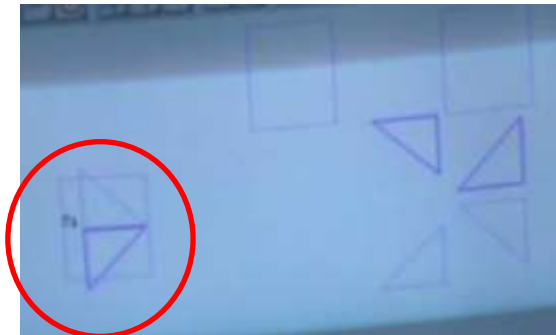
<sup>7</sup> Anexo 2, Actividad 1- Tarea 4. Las demás tablas hasta la número 15 se analizarán en esta misma sección.

**Figura 10: Ubicación de los tres cuadrados en la pantalla.**



Las Tablas 11 y 12 de la transcripción muestran cómo los estudiantes ubican los cuadrados sobre las parejas de triángulos correspondientes, un ejemplo de ello es la Figura 11 donde se evidencia esta acción. El análisis a priori tenía prevista esta situación como acción 3.

**Figura 11: Cuadrado superpuesto en una pareja de triángulos.**



Lo único que no estaba previsto en el análisis a priori es la forma como el estudiante movió los cuadrados (haciendo cuadro de selección y no arrastrándolo de su segmento inferior como se esperaba). De igual modo su compañera le recuerda posteriormente cómo se hace el arrastre.

Cada uno de los estudiantes verificó que los triángulos dentro de cada cuadrado fueran los correspondientes. Lo hicieron para completar la tarea de manera correcta, esto se evidencia en la transcripción:

(El estudiante 1 se ubica sobre una de las parejas de triángulos correspondientes y arrastra el triángulo delgado, el triángulo grueso se mueve en sentido contrario. Luego, regresa el triángulo delgado dentro del cuadrado. El triángulo grueso también lo hace.

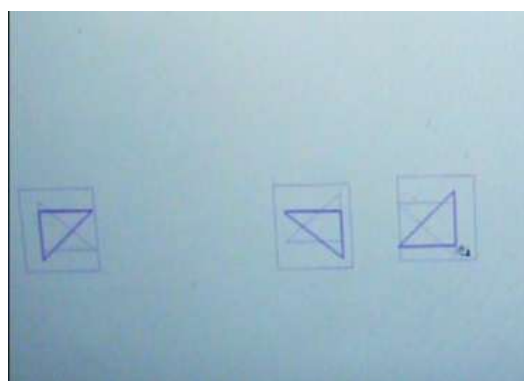
Con las dos parejas de triángulos restantes realiza el mismo ejercicio de mover los triángulos y luego regresarlos a su posición original).

Las Tablas 13 y 14 de la transcripción muestran las acciones que realizó la estudiante 2 cuando estaba a cargo del ratón. Estas acciones estaban previstas en el análisis a priori como acción 2. En este caso, la estudiante metió parejas de triángulos no correspondientes dentro de los cuadrados. Para estas situaciones el profesor está encargado de pedirle al estudiante el movimiento de cada triángulo delgado para mostrarle que los pares de triángulos que están dentro de los cuadrados no son correspondientes. Sin embargo, en este caso no fue necesaria la intervención de la profesora, pues los mismos estudiantes notaron el error que habían cometido. A continuación se mostrará una parte de la transcripción donde la estudiante 2 corrige su error hasta completar la tarea:

(La estudiante selecciona el triángulo delgado de la parte inferior y lo arrastra hasta que se encuentre con su correspondiente triángulo grueso que está en otro cuadrado. El tercer triángulo delgado también lo selecciona y lo arrastra hasta que coincida con su correspondiente triángulo grueso.

Las tres parejas de triángulos quedan alineadas horizontalmente. El estudiante selecciona los cuadrados de su segmento inferior y los arrastra hasta que cada pareja de triángulos quede cubierta por un cuadrado).

**Figura 12: Tarea cuatro terminada en la serie 1.**



No está claro si el objetivo de la tarea se cumplió o no, ya que la profesora no se cercioró que los estudiantes tuvieran conciencia de que los triángulos pueden juntarse en otros lugares de la pantalla a lo largo de una recta. Consideramos que en el análisis a priori debe solicitarse explícitamente al profesor que le pregunte a los estudiantes: “¿Si tuviera más cuadrados dónde podría colocarlos de manera que pudieran meterse un triángulo delgado y su correspondiente grueso?”

Además sugerimos cambiar la formulación de la tarea para evitar el caso en que los estudiantes meten triángulos no correspondientes dentro de los cuadrados. La tarea reformulada es la siguiente: “Colocar los cuadrados en la pantalla de manera que puedan meterse todos los triángulos en cada uno de ellos”.

### **3.1.5 Secuencia**

Se espera que los estudiantes avancen de una serie a la otra y a medida que pasan hasta la cuarta actividad se espera que ellos renuncien a las acciones que anteriormente no les han permitido lograr sus intenciones, y que refuercen las que sí. Además, esperamos que tomen conciencia de las diferencias entre una serie y otra.

#### **3.1.5.1 Análisis a priori**

##### ✓ Análisis de la interacción sujeto-medio

En general en cada una de las cuatro actividades, cuando los estudiantes avancen de una serie a otra esperamos que renuncien a las acciones que anteriormente no les han permitido lograr sus intenciones, y que refuercen las que sí. Además, esperamos que tomen conciencia de las diferencias entre una serie y otra.

En esta primera actividad esperamos que los estudiantes al pasar de la primera a la segunda serie (o en su defecto, de la segunda a la tercera), no intenten agarrar los triángulos gruesos sino que arrastren directamente los delgados cuando quieran mover los gruesos. Esto para cada tarea.

**Primera tarea:** esperamos que tomen conciencia de que en distintas series los movimientos de un triángulo y su pareja tienen diferentes orientaciones. Es decir, que en la primera serie al arrastrar un triángulo delgado hacia arriba su pareja se mueve hacia abajo y viceversa, pero al arrastrarlo en dirección horizontal la distancia entre ellos no varía; mientras que en la segunda serie al arrastrar un triángulo delgado hacia la derecha su pareja se mueve hacia la izquierda y viceversa, pero al arrastrarlo en dirección vertical la distancia entre ellos no varía.

**Segunda tarea:** esperamos que al avanzar de una serie a otra demoren menos tiempo intentando meter todos los triángulos en el cuadrado antes de argumentar que no es posible resolver la tarea, incluso no sería extraño que al pasar de la segunda a la tercera serie o de la tercera a la cuarta argumenten que no es posible resolver la tarea antes de intentar arrastrar los triángulos.

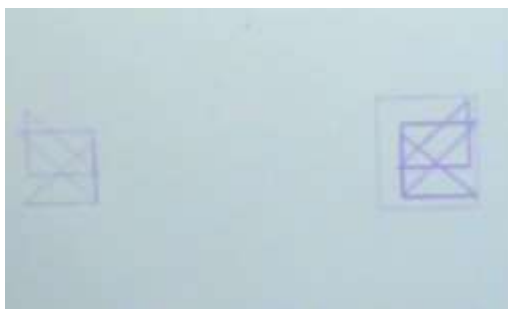
**Tercera tarea:** esperamos que los estudiantes tomen conciencia de que para diferentes series los cuadrados quedan ubicados en distintas direcciones (horizontal, vertical y diagonal).

### **3.1.5.2 Análisis a posteriori**

A medida que se avanzaba en las series, los estudiantes renunciaban a estrategias que no les brindaban solución a sus problemas. Además, iban identificando los diferentes cambios entre una serie y otra.

**Primera Tarea:** A partir de la serie uno-uno los estudiantes abandonaron la estrategia de intentar mover los triángulos gruesos. En la Tabla 16<sup>8</sup> podemos ver cómo los estudiantes en la serie uno-dos movían directamente los triángulos delgados para meter los gruesos dentro del cuadrado y así poder completar la tarea.

**Figura 13: Tarea 1 completada para la serie 2.**



<sup>8</sup> Anexo 2, Actividad 1- Secuencia. Las demás tablas hasta la número 19 se analizarán en esta misma sección.

También identificaron en cada serie el movimiento de los triángulos (cuando se movían en sentido contrario). Todas estas apreciaciones están en el análisis a priori.

**Segunda Tarea:** A lo largo de las series los estudiantes no presentaron ningún problema al realizar esta tarea. Por esta razón, se omitió en la transcripción lo referente a ella. Aunque podemos anotar que la tarea reforzó la identificación de los movimientos contrarios de los triángulos.

Como el análisis a priori no tiene prevista esta tarea, no es posible confrontarla.

**Tercera Tarea:** En la serie uno-dos, uno-tres y uno-cuatro la profesora corrige el error que se cometió en la serie uno-uno, el no hacer que los estudiantes justificaran la pregunta: ¿por qué los triángulos no podían entrar todos dentro del cuadrado? Este hecho lo podemos ver en una parte de la transcripción que mostraremos a continuación:

**Profesora [dirigiéndose a todo el grupo]:** ... Van a seguir con la tercera instrucción, ojo, van a llevar todos los triángulos dentro del cuadrado y ya deben irse preguntando y justificando de alguna manera ¿qué es lo que pasa en esta tercera tarea?, tanto en la serie uno-uno como en la serie uno-dos como en la serie uno-tres.

Los estudiantes a lo largo de las series empiezan a justificar por qué la tarea no se puede realizar:

**Estudiante 5:** Es que cuando se mueven, se mueven en diagonal al lado opuesto, se pueden juntar pero no en el punto donde está el cuadrado. [Aclaremos que el movimiento de los triángulos es en diagonal porque los estudiantes están trabajando en la serie uno-tres]

...

**Profesora [dirigiéndose a todo el grupo]:** ¿Por qué no se puede o por qué si se puede?

**Estudiante 7:** No se puede porque son opuestos.

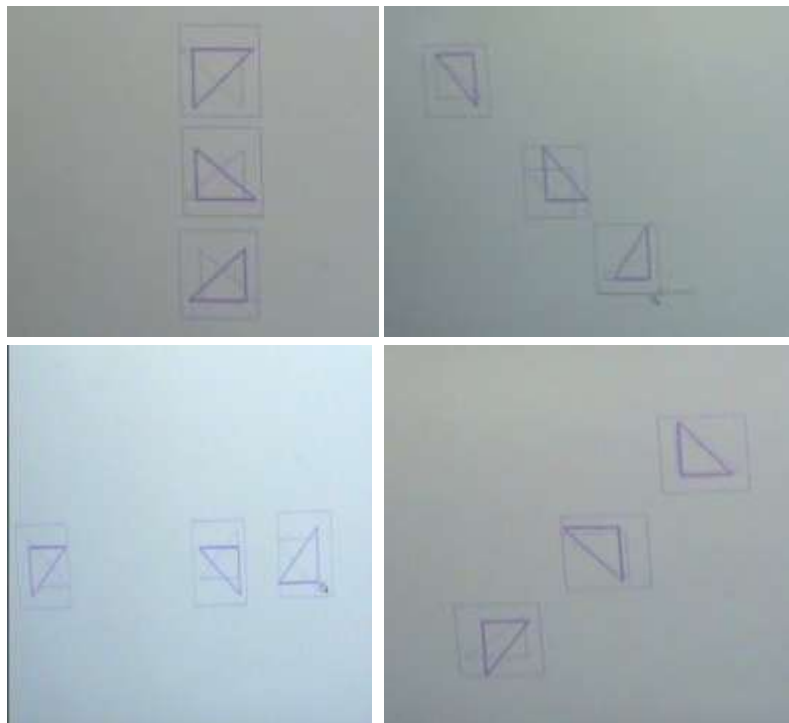
...

Los estudiantes al avanzar en la serie decían que la tarea no se podía realizar sin ni siquiera hacer el intento de mover los triángulos. Esta acción de los estudiantes se menciona en el análisis a priori.

**Cuarta Tarea:** A medida que se avanza en las series, los estudiantes no siguieron cometieron el error de meter triángulos no correspondientes dentro de un mismo cuadrado.

Pero respecto a la posición de los cuadrados no podemos asegurar que los estudiantes hayan caído en cuenta que su posición cambiaba de una serie a la otra, como lo muestra la Figura 14. Aunque realizaban la tarea correctamente no hubo discusión entre ellos o con la profesora que nos permitiera asegurar que identificaban los diferentes cambios entre series.

**Figura 14: Orientaciones en las diferentes series.**



### 3.1.6 Puesta en común

Es indispensable realizar una puesta en común al terminar las cuatro tareas con las cuatro series, ya que todos los grupos no están a un mismo ritmo de aprendizaje y no todos tienen claros los fenómenos visuales que se pretendía que descubrieran.

#### 3.1.6.1 *Análisis a priori*

Es de esperarse que haya grupos de trabajo más adelantados que otros, entonces el profesor puede disponer una puesta en común una vez finalizadas las tres tareas con las cuatro series, con el fin de constatar que los estudiantes manifiestan los fenómenos visuales que se pretendía que descubrieran y que de alguna manera se hayan familiarizado con ellos. El profesor pedirá a algunos estudiantes que pasen al frente del grupo para que expliquen a los demás cómo desarrollaron las tareas. Es importante que el profesor identifique cuáles grupos terminaron y cuáles no, con el propósito de pasar primero a los grupos más rezagados. También es conveniente que en su mayoría los grupos expongan su trabajo.

#### 3.1.6.2 *Análisis a posteriori*

Una vez finalizadas las cuatro tareas con las cuatro series, se realizó la puesta en común con el fin de constatar que los estudiantes manifestaran los fenómenos visuales que se pretendía que descubrieran. Además, que de alguna manera se hayan familiarizado con estos fenómenos.

A continuación mostraremos dos fragmentos de la transcripción de la puesta en común donde se reflejan dos fenómenos visuales, la dependencia y los movimientos contrarios:

**Profesora:** Ah, los delgados si, ok, listo. Señorita María Fernanda ¿Cómo hizo para realizar la segunda tarea?

**Estudiante 13:** Movía los triángulos delgados.

**Profesora:** ¿y qué?, ¿para qué lo hacía?

**Estudiante 13:** Para que los gruesos se movieran.

...

**Profesora:** Ah ok, muy bien. Señorita Serrano ¿Cómo hizo usted para terminar la tercera tarea?, llevar todos los triángulos dentro del cuadrado.

**Estudiante 14:** Movía el delgado, para que se moviera el grueso.

**Profesora:** Y ¿Se pudo?, ¿los pudo todos llevar dentro del cuadrado?

**Estudiante 6:** Si profesora.

**Estudiante 2:** No, no se puede.

**Profesora:** ¿Por qué no se puede? ¿Por qué señor Luis Carlos?

**Estudiante 6:** por si se mueve uno se mueve el otro.

**Profesora:** ¿Hacia dónde se mueve?

**Estudiantes:** Hacia la dirección contraria.

**Profesora:** Ah, hacia la dirección contraria, bueno, listo.

Resaltando el trabajo de la profesora en la puesta en común, podemos decir que dio participación a todos sus estudiantes. Además, identificó primero a los estudiantes más rezagados y les pidió sus contribuciones, dando pie a discusiones abiertas.

### **3.1.7 Concurso**

La profesora organizó el salón de clase en varios equipos de manera que cada uno de ellos formalizara una estrategia ganadora para la tarea que debían realizar: “colocar los cuadrados donde puedan meterse un triángulo grueso y su correspondiente delgado, pero no podrán mover los triángulos antes de colocar los cuadrados”. Sin embargo, cada pareja de estudiantes debía generar su estrategia trabajando antes en las series, para luego compartirla en el grupo que le correspondió.

Los estudiantes una vez terminaron la puesta en común y escucharon la tarea, comenzaron a trabajar por parejas o en algunos casos por tríos, intentando buscar una estrategia basándose en las cuatro tareas de las cuatro series en la actividad 1.

El análisis del concurso está dividido en dos etapas debido a que la profesora no supo organizarlo de manera adecuada; además no siguió el análisis a priori del mismo. Por esta razón el concurso está dividido en varias sesiones, pues es muy extenso para trabajarlo en un solo análisis a posteriori.

#### **3.1.7.1 Análisis a priori**

En esta instancia se supone que ya los estudiantes están familiarizados con los fenómenos visuales que hemos mencionado anteriormente, pero para ello solo han utilizado estrategias meramente perceptivas. El propósito de este concurso es bloquear esa estrategia, y llevar a los estudiantes a que

utilicen los conocimientos que han adquirido para anticipar la posición del eje de simetría.

Para este concurso se organizan dos equipos competidores dentro del salón de clase, el profesor explica que deberán solucionar la tercera tarea: colocar los cuadrados donde puedan meterse un triángulo grueso y su correspondiente delgado, pero no podrán mover los triángulos antes de colocar los cuadrados. Para garantizar que los estudiantes se comuniquen y se pongan de acuerdo en una estrategia, el profesor explica que él seleccionará un representante de cada equipo para realizar la tarea.

Uno de los dos representantes escogidos por el profesor deberá ubicar los tres cuadrados sin mover los triángulos y luego otro estudiante o en su defecto el profesor, moverá los triángulos para comprobar si es posible meter un triángulo delgado y el grueso simétrico dentro de cada cuadrado. Del mismo modo lo hará el otro representante. En caso de que uno de los representantes no logre resolver la tarea puede repetirse el concurso, y finalmente organizar una puesta en común para que los grupos expongan sus estrategias.

Para resolver la tarea, los estudiantes deben identificar cuál es la pareja de cada triángulo (sin moverlos), y además identificar los puntos donde se unen, que deben estar sobre el eje de simetría.

Para el análisis a priori de este concurso tendremos en cuenta que se llevará a cabo en dos etapas; la primera consiste en ubicar los cuadrados, acción llevada a cabo por parte del representante del grupo escogido por el profesor. La segunda consiste en validar la acción intentando meter las parejas de triángulos en los cuadrados.

✓ Análisis de la interacción sujeto-medio

**Intención:** ubicar los cuadrados de modo que luego se pueda llevar una pareja de triángulos simétricos dentro de cada uno. Sin mover los triángulos.

**Estrategia 1:** arrastrar cada uno de los tres cuadrados y ubicarlos en cualquier lugar de la pantalla.

**Acción de validación 1:** arrastrar los triángulos delgados para meter cada pareja dentro de un cuadrado.

**Retroacción 1:** Como la posición de los cuadrados es escogida al azar, será muy improbable que queden los tres sobre el eje de simetría oculto, y por lo tanto no podrán meterse dentro de ellos un triángulo delgado y su correspondiente grueso.

**Interpretación:** las parejas de triángulos no se pueden juntar en cualquier lugar de la pantalla.

**Validación:** la estrategia no es válida, se debe llevar a cabo otra.

**Estrategia 2:** ubicar los cuadrados de modo que queden alineados (línea distinta del eje de simetría).

**Acción de validación 2:** arrastrar los triángulos delgados para meter cada pareja dentro de un cuadrado.

**Retroacción 2:** no es posible meter las parejas de triángulos simétricos dentro de cada cuadrado.

**Interpretación:** no es suficiente que los cuadrados queden alineados para alcanzar la meta.

**Validación:** la estrategia no permite lograr el objetivo, se debe cambiar.

**Estrategia 3:** anticipar la posición del eje de simetría y ubicar los cuadrados sobre éste. Esto lo pueden lograr dado que en la tarea tres descubrieron que los cuadrados deben quedar sobre una recta que pasa por la mitad de cada pareja de triángulos y que cada pareja tiene orientación contraria con respecto a esa recta. En caso de que esto les genere dificultad, podrían mover cada triángulo delgado solo un “poco”, para identificar las parejas.

**Acción de validación 3:** arrastrar los triángulos delgados para meter cada pareja dentro de un cuadrado.

**Retroacción 3:** cada pareja de triángulos simétricos queda dentro de un cuadrado distinto.

**Interpretación:** las parejas de triángulos se unen a lo largo de una recta que pasa por la mitad de cada una.

**Validación:** la estrategia usada es la ganadora.

Los estudiantes siempre tienen la posibilidad de invalidar las estrategias perdedoras gracias a las retroacciones del medio, y de darse cuenta que la estrategia ganadora consiste en identificar las parejas de triángulos simétricos para anticipar la posición del eje de simetría y ubicar los cuadrados sobre este eje, ya que de la tarea tres, ellos han descubierto que un objeto y su simétrico se superponen sobre el eje de simetría.

Como consecuencia del concurso, es ineludible que los estudiantes intenten anticipar la posición del eje de simetría, siendo esta la única estrategia ganadora, porque las demás no permiten concluir la tarea. Además, si no todos han descubierto la estrategia, la puesta en común permite confrontar esta situación, ya que los dos grupos expondrán la manera como planearon desarrollar la tarea.

En conclusión, como producto del desarrollo de las tres tareas de esta primera actividad, los estudiantes lograrán identificar la dependencia de los triángulos gruesos y los delgados; los movimientos contrarios con respecto a una recta que pasa por la mitad de un triángulo delgado y su pareja; las orientaciones contrarias de los triángulos con respecto a tal recta; además precisar su ubicación; por último, del concurso lograrán anticipar la posición del eje de simetría sin mover los triángulos. Correspondiendo estos hechos al objetivo de la actividad.

### **3.1.7.2 Análisis a posteriori**

#### **Primera Etapa**

Se espera que la profesora en esta etapa comienza siga el análisis a priori tal y como está, Sin embargo, mostraremos en el análisis a posteriori que no ocurrió de esta manera.

La profesora antes de aplicar los concursos puso a sus estudiantes a experimentar de nuevo con las series y en algunos casos en los mismos concursos. Al hacer que los estudiantes trabajaran sobre las cuatro series propuestas en la primera actividad de simetría axial, obtuvo inconscientemente en ellos una interiorización de sólo cuatro posiciones del eje de simetría.

#### **Análisis a posteriori (a)**

A pesar de no tener evidencia en el video sobre la organización de la clase, recordamos que la profesora organizó el salón en cuatro equipos de diez personas; además ella explicó la tarea que debían realizar: “colocar los cuadrados donde puedan meterse un triángulo grueso y su correspondiente delgado, pero no podrán mover los triángulos antes de colocar los cuadrados”.

La profesora aclaró a sus estudiantes que primero trabajarían en parejas, buscarían una estrategia que luego sería compartida en el grupo de diez personas. Por último ella seleccionaría dos representantes de dos equipos distintos. Uno de ellos debería ubicar los tres cuadrados sin mover los triángulos y el otro verificaría si la posición de los cuadrados es correcta o no moviendo los triángulos.

Es importante resaltar que para resolver la tarea exitosamente, los estudiantes debían identificar cuál era la pareja de cada triángulo (sin moverlos), y además identificar los puntos donde se unen, es decir, que

los cuadrados deben formar una línea recta (identificar el eje de simetría).

Los estudiantes trabajaron por parejas en la tarea propuesta en cada una de las series, luego se reunieron en los grupos de diez para generar una estrategia grupal. En este primer caso, uno de los estudiantes logró resolver el primer concurso. En la Tabla 20<sup>9</sup> podemos observar que el estudiante usó la estrategia ganadora de ubicar los cuadrados en la mitad de cada par de triángulos correspondientes; esta estrategia luego es confirmada por otro estudiante seleccionado que mete las parejas de triángulos dentro de los cuadrados. Esto se tenía previsto en el análisis a-priori como estrategia 3.

**Estudiante 3:** (Selecciona el primer cuadrado y lo ubica en la mitad de una pareja de triángulos correspondientes.

Usando el mismo método selecciona el segundo cuadrado y lo ubica en medio de otros dos triángulos correspondientes).

**Profesora:** Listo, ok. Gracias Kevin.

**Profesora:** Por favor...

**Estudiante 4:** ¿Podían quedar así?

**Profesora:** Pasa el señor Parada.

**Estudiante 5:** Profesora, ¿podían quedar así?

**Profesora:** Sí. La Condición era ubicar los tres cuadrados, de tal forma que cuando yo ubique o mueva los triángulos delgados y arrastre el grueso, queden totalmente dentro. Cada pareja dentro del cuadrado.

(El estudiante 5 se ubica en el computador base y con el puntero selecciona cada uno de los triángulos delgados. Arrastra el primero de ellos hasta un cuadrado de tal manera que su triángulo correspondiente grueso y él queden dentro de uno de los cuadrados).

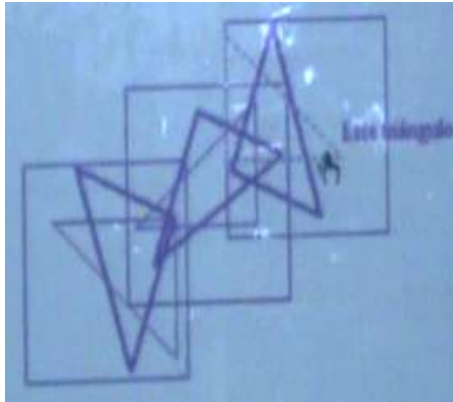
[Usa la misma estrategia para meter las otras dos parejas de triángulos en los cuadrados restantes].

(En la pantalla se proyecta la solución que da el estudiante al concurso, como se muestra en la figura 15)

---

<sup>9</sup> Anexo 2, Actividad 1- Concurso Primera Etapa (a). Las demás tablas hasta la número 22 se analizarán en esta misma sección.

**Figura 15: Solución al primer concurso.**



Una vez es explicada la estrategia ganadora, la profesora pone a sus estudiantes a trabajar en parejas como se ve a continuación. Esta acción no estaba prevista en el análisis a priori:

**Profesora [dirigiéndose a toda la clase]:** Ya están en concurso número dos por favor, entonces coloquen atención, en este concurso la indicación es la misma, ojo, van a ubicar los cuadrados dentro de la pantalla. Entonces, por favor primero cacharrea cada pareja, mira cómo, cómo se pueden desplazar, cómo se pueden desplazar y ahorita, pueden cacharrear cinco minutos, porque ahorita como grupo van a tener otra opción de, entonces por favor cada pareja va a hacer exactamente lo mismo.

Se esperaba que la profesora seleccionara a un estudiante para un concurso nuevo; sin embargo, ella dejó trabajar a sus estudiantes en las series y sobre los archivos del concurso, además pasó al mismo estudiante a explicitar la estrategia ganadora. Esta acción no está prevista en el análisis a priori y no es adecuada, pues desde el punto de vista de la Teoría de las Situaciones Didácticas no tiene sentido compartir la estrategia ganadora y seguir con los concursos, pues de antemano la mayoría de estudiantes conocerán la estrategia y sabrán cómo resolver los demás concursos.

En el análisis a priori no se tenía previsto que los estudiantes no aceptaran la idea de que los cuadrados se pueden intersecar o quedar

unos encima de otros. En este caso, la aclaración de la profesora fue acertada, dando a entender a sus estudiantes que esa estrategia es correcta.

La profesora en sus últimas intervenciones da a entender a los estudiantes que pueden existir otro tipo de estrategias diferentes e invalida la estrategia ganadora pidiendo a sus estudiantes encontrar otra. En consecuencia, los estudiantes se preocuparon por encontrar otras soluciones para el concurso y así poder ganar puntos. De acuerdo con el análisis a priori esta intervención de la profesora no es acertada, ya que ella no puede invalidar una estrategia ganadora o pedir una nueva.

**Profesora [dirigiéndose a todos los estudiantes]:** Es el momento a escuchar al señor Lizcano. A ver cuál estrategia fue la que su grupo estableció para poder verificar que cuando usted ubicaba los cuadrados y se hiciera, y se hacía posteriormente el arrastre de los triángulos, cumplía con la condición.

**Estudiante 6:** La misma.

**Profesora [dirigiéndose uno de los estudiantes]:** ¿La misma?, o sea que si yo, si yo no los hubiera puesto de esa manera, de esa manera que los cuadrados se intersectan de alguna manera en algún punto, o sea que no cumplen otra, con la condición.

**Estudiantes:** No...Había otra.

**Profesora [dirigiéndose a un estudiante]:** Ah, había otra, a bueno señor Devia cuéntenos. Vamos a hacerlo, vamos a hacer archivo precedente, vista precedente, ok. Entonces nos va a plantear otra estrategia.

**Profesora:** Ojo, no se deben intersectar los cuadrados.

### **Análisis a posteriori (b)**

En la Tabla 23<sup>10</sup> podemos ver que el estudiante usa la estrategia de guiarse por la simetría de los cuadrados y no por la de los triángulos como se esperaba. Esta estrategia no estaba prevista en el análisis a priori y es una estrategia incorrecta, pero no queda invalidada por el medio mientras no se trabaje el eje de simetría con distintas pendientes, pues aparentemente funciona para las cuatro serie propuestas. Hay que

---

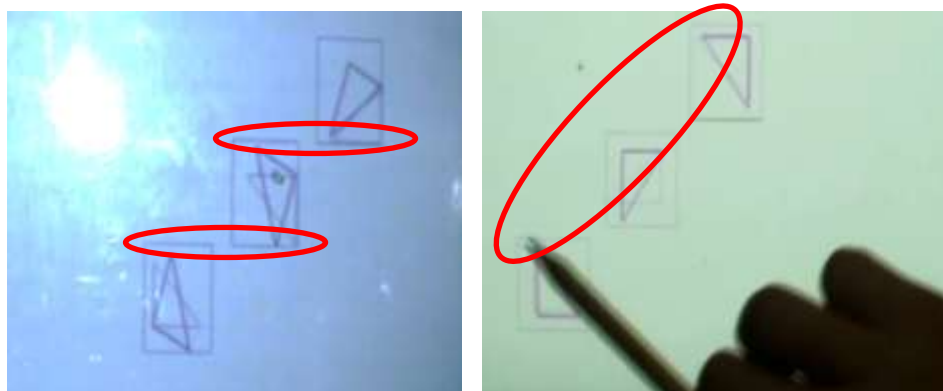
<sup>10</sup> Anexo 2, Actividad 1- Concurso Primera Etapa (b). Las demás tablas hasta la número 26 se analizarán en esta misma sección.

tener en cuenta que no es una estrategia para todos los casos. Además, la profesora la acepta y la aprueba, acción no correcta por parte de ella.

La estrategia mencionada anteriormente se refleja en la Tabla 23 y en las conclusiones de las estrategias hechas por los estudiantes 1 y 2 para cada una de las series. Donde se evidencia que los estudiantes se guían por la simetría de los cuadrados y no la de los triángulos. Esta estrategia es incorrecta y no es invalidada por el medio.

Los estudiantes aparentemente cumplen con la tarea pero no con el objetivo que se desea. A continuación se muestran dos imágenes donde ocurrió esta situación a lo largo del concurso:

**Figura 16: Ejemplos de simetría de los cuadrados**



Después de la clase, se le hizo caer en cuenta a la profesora que el concurso no estaba bien guiado y que debían presentar a los estudiantes nuevos archivos en los que el eje de simetría variara y no fuese solamente horizontal, vertical o a cuarenta y cinco (45) grados.

Los profesores deben tener cuidado con las intervenciones que hagan a lo largo del concurso, pues en este caso varias intervenciones de la profesora no son adecuadas. Aparentemente la finalidad de dichas intervenciones en esta serie era lograr que los estudiantes resaltarán los fenómenos visuales de dependencia y movimientos contrarios.

Un ejemplo de estas intervenciones inadecuadas se refleja en un segmento de la transcripción, cuando ella lanza una pregunta a sus estudiantes después de ser explícitas dos estrategias diferentes para un mismo concurso: “¿quién nos quiere pasar a decir con sus palabras cuál es la estrategia?” No se entiende por qué la profesora formula esta pregunta, no se sabe si ella quiere que los estudiantes hagan una estrategia nueva o quiere que todos los estudiantes entiendan las dos estrategias descritas. En este punto, podemos concluir que la actitud de la profesora es desconcertante, puesto que invalidó una estrategia que era ganadora y validó una que no lo era, además motivó a sus estudiantes a generar nuevas estrategias.

Otra intervención en forma de pregunta hecha por la profesora se evidencia en la siguiente transcripción:

**Estudiante 5:** Profesora, la estrategia fue primero, fue guiarse por los triángulos.

**Profesora [dirigiéndose a un estudiante]:** ¿Cuáles triángulos?

**Estudiante 5:** O sea, la estrategia de mi grupo que primero nos guiamos por los triángulos de la mitad para el primer cuadro que sacamos lo midiéramos y entre los dos triángulos lo colocáramos ahí para poder ir alineando.

**Profesora:** Y ¿si no hubieran estado esos dos triángulos ahí que hubiesen hecho?

**Estudiante 5:** Pues la verdad, cuadrar otra estrategia diferente pero, la estrategia mayor es guiarnos por los triángulos para que se puedan entrar.

Exactamente la última pregunta formulada por la profesora es inadecuada o no está bien formulada, a lo mejor la profesora esperaba que los estudiantes respondieran que los triángulos son correspondientes, como lo admite el mismo estudiante 5 cuando dice que “son pareja”.

En general, hasta el momento los concursos aplicados a los estudiantes que están ubicados por grupos fueron los adjuntos en la carpeta de simetría axial. Creemos que los estudiantes no realizaban correctamente

la tarea porque practicaban sobre las series, haciendo que interiorizaran inconscientemente solo las cuatro posiciones del eje de simetría propuestas. Una vez la profesora notó el error, pidió a sus estudiantes trabajar sobre los concursos propuestos en la carpeta y de ahí escribir una estrategia; pues ella pondría más archivos con nuevos concursos.

## **Segunda Etapa**

### **Análisis a posteriori**

Queda completamente claro que los estudiantes no realizaban correctamente la tarea en los concursos porque practicaban sobre las series. Una vez la profesora notó el error, pidió a sus estudiantes trabajar sobre los concursos propuestos en la carpeta de simetría axial. Los estudiantes a lo largo de los concursos notaron y comprendieron que había más posiciones y que los concursos serían diferentes, como lo manifiestan ellos mismos:

**Estudiante 3 [Refiriéndose a sus compañeros de subgrupo]:** Es que las que nos ponen son diferentes.

**Estudiante 4:** Si<sup>11</sup>.

En el análisis a priori no se resalta la importancia del trabajo en grupo. En este caso, algunos de los estudiantes cuando se reunieron en principio para socializar las estrategias no tenían claro que no bastaba con trabajar en la serie, o con discutir sobre una estrategia ganadora. Ellos se dieron cuenta que para ganar debían ensayar lo que decían y generar una estrategia grupal probando las afirmaciones de cada uno.

Al final la mayoría de los estudiantes logró resolver la tarea correctamente; sin embargo, no se sabe si el objetivo del concurso se cumplió del todo, pues los estudiantes debían lograr dos conocimientos, uno de ellos era colocar cada cuadrado en la mitad de una pareja de

---

<sup>11</sup> Anexo 2, Actividad 1- Concurso Segunda Etapa.

triángulos correspondientes y el otro era interiorizar que los cuadrados forman una línea recta. El primer conocimiento se dio y se evidencia en la puesta en común de la estrategia ganadora; sin embargo, el segundo conocimiento no se menciona.

**Profesora [Dirigiéndose al grupo 1]:** Ajá...y luego ¿Qué tienen que hacer?

**Estudiante 12:** Ubicar los cuadros.

**Profesora [Dirigiéndose al grupo 1]:** ¿En dónde?

**Estudiante 12:** En la mitad.

**Profesora [Dirigiéndose al grupo 1]:** ¡Ah! En la mitad... ¡Ah! Listo, en la mitad.

Como todos los estudiantes no descubrieron la estrategia ganadora, la puesta en común permitió confrontar las distintas situaciones. Además, la táctica de la profesora al final fue adecuada, ya que colocar a los estudiantes a escribir la estrategia ganadora con sus palabras muestra si en realidad fue interiorizada.

**Profesora [Hablando con todos los estudiantes]:** ¿Ya todos saben la estrategia?

**Profesora [Hablando con todos los estudiantes]:** Me gustaría que la señorita Ayala pasara acá y nos contara cual fue la estrategia que dijo su compañera para poder hacer eso exitosamente. Los demás por favor en silencio.

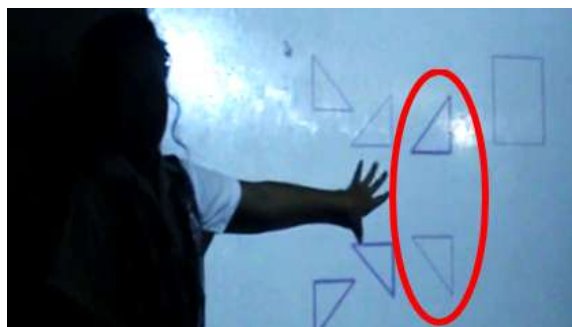
**Profesora [Hablando con todos los estudiantes]:** Por favor ahorita cada uno saca su cuaderno y van a escribir la estrategia ganadora, pero primero escuchemos a la señorita Ayala.

**Estudiante 25:** ¡Eh! Pues ubicar los cuadrados en medio de... De los triángulos.

**Profesora [Hablando con la estudiante 25]:** ¿Cuáles triángulos?

**Estudiante 25:** Digamos... Entre los dos triángulos correspondientes.

**Figura 17: Estudiante señalando un par de triángulos correspondientes.**

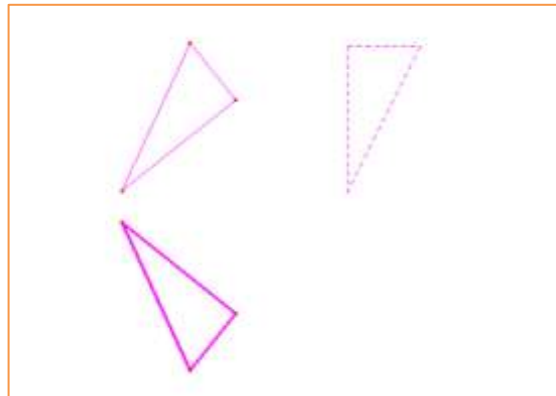


### 3.2 ACTIVIDAD 2

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes pasen de una visión global de los triángulos, a considerar sus vértices y lados. En esta actividad los estudiantes vuelven a identificar fenómenos visuales como la dependencia de un triángulo con respecto al otro; y los movimientos contrarios con respecto al eje (los estudiantes podrían asimilarlo como un espejo imaginario). Trayendo como resultado al final de tarea la identificación del eje de simetría y la predicción de su ubicación.

Esta actividad contiene una sola tarea. La profesora dedicó un tiempo considerable de la clase a una actividad introductoria, antes de plantear la tarea. Por lo tanto analizaremos la actividad en dos secciones, antes y después de que la profesora la propone.

**Figura 18: Primer archivo de la actividad 2.**



Adoptaremos para esta actividad una convención para el triángulo delgado, específicamente para el movimiento de sus vértices:

- El vértice que permite arrastrar el triángulo por la pantalla lo denotaremos A.
- El vértice que permite girar el triángulo lo denotaremos B.
- El vértice que no permite ningún movimiento en el triángulo lo denotaremos C.

### 3.2.1 Tarea: superponer el triángulo grueso y el triángulo punteado

Los estudiantes debían seguir teniendo en cuenta que no podían mover el triángulo grueso directamente para dar solución al problema, pues para esta actividad seguiría existiendo la relación de dependencia entre el triángulo delgado y el grueso. El objetivo de la tarea es lograr que los estudiantes descubran que el triángulo delgado se mueve por dos de sus vértices, uno lo hace girar y el otro desplazarse.

Se supone que ellos podrán intentar agarrar el triángulo punteado para llevarlo hacia el grueso y así completar la tarea. Sin embargo, éste no se dejará arrastrar, por lo que los estudiantes tendrán que llevar el triángulo grueso sobre el punteado para luego girarlo y hacerlo coincidir completamente. Esto último les permitirá descubrir que al girar en sentido horario el triángulo delgado, el grueso lo hará en sentido contrario.

#### 3.2.1.1 Análisis a priori

- ✓ Análisis de la interacción sujeto-medio

**Intención:** superponer el triángulo grueso y el punteado

**Acción 1:** agarrar el triángulo punteado para llevarlo hacia el triángulo grueso.

**Retroacción:** el triángulo punteado no se mueve.

**Interpretación:** el triángulo punteado no se deja arrastrar.

**Validación:** la acción no es válida, se debe cambiar.

**Acción 2:** agarrar el triángulo grueso para llevarlo hacia el triángulo punteado.

**Retroacción 2:** el triángulo grueso no se deja arrastrar.

**Interpretación:** el triángulo grueso depende del delgado (como en la actividad anterior).

**Validación:** la acción no es válida, se debe cambiar.

**Acción 3:** agarrar el triángulo delgado por sus lados para mover el grueso.

**Retroacción 3:** el triángulo delgado no se mueve.

**Interpretación:** el triángulo delgado no se deja arrastrar por sus lados.

**Validación:** la acción no permite resolver la tarea.

**Acción 4:** agarrar los puntos del triángulo delgado para moverlo.

**Retroacción 4:** un punto no se deja arrastrar, los otros dos sí. Además los triángulos gruesos se mueven cuando se arrastran dos puntos específicos del triángulo delgado.

**Interpretación:** de los puntos que se mueven uno hace que el triángulo gire y el otro que se traslade.

**Validación:** la acción no es suficiente para resolver la tarea, se deben ejecutar otras.

**Acción 5:** mover un punto del triángulo delgado para llevar el grueso sobre el punteado.

**Retroacción 5:** el triángulo grueso queda sobre el punteado pero no superpuesto.

**Interpretación:** no basta mover el triángulo grueso hacia el punteado, se necesita que gire.

**Validación:** la acción es válida pero la tarea aún no está resuelta.

**Acción 6:** girar el triángulo grueso arrastrando un punto del delgado hasta que coincidan.

**Retroacción 6:** el triángulo delgado y el grueso quedan superpuestos.

**Interpretación:** para superponer los triángulos se necesita girar y trasladar el grueso con movimientos del delgado.

**Validación:** la acción es válida.

Lo más probable es que los estudiantes utilicen las acciones 5 y 6 combinadas para hacer coincidir los triángulos, esto les permitirá concluir la tarea, pero también podrían presentarse otras acciones válidas.

**Acción 7:** arrastrar el punto que permite trasladar el triángulo delgado hasta superponer el punto correspondiente del triángulo grueso con el del punteado.

**Retroacción 7:** el triángulo grueso y el punteado quedan superpuestos.

**Interpretación:** al trasladar el triángulo delgado por uno de sus puntos, el punto correspondiente del grueso se mueve en sentido contrario con respecto al espejo.

**Validación:** la acción es válida pero no es suficiente.

**Acción 8:** girar el triángulo delgado de modo que el grueso gire hasta coincidir con el punteado.

**Retroacción 8:** el triángulo grueso coincide con el triángulo punteado.

**Interpretación:** para girar el triángulo grueso en cierto sentido se debe girar el delgado en sentido contrario.

**Validación:** la acción es válida y permite concluir la tarea.

Note que para poder finalizar la tarea es necesario que el estudiante descubra que una figura y su simétrica giran en sentidos contrarios, ya que para girar el triángulo grueso debe girar el delgado, y no hay otra forma de hacerlo. Además, ellos al intentar hacer coincidir los triángulos, se fijarán en los vértices, siendo que al girar el triángulo delgado sin trasladarlo, un punto de éste y el grueso permanecen fijos, mientras los otros dos se giran tanto en el triángulo delgado como en el grueso, pero en sentidos opuestos. Entonces se concluye que el aprendizaje producto del desarrollo de la actividad corresponde al objetivo propuesto.

### **3.2.1.2 Análisis a posteriori**

**Antes de la tarea.** La profesora plantea preguntas para explicar o hacer ver las condiciones del medio. Los estudiantes responden las preguntas y van descubriendo propiedades que deberían descubrir por sí solos gracias a la interacción con el medio. Un ejemplo de esto, es cuando la profesora les hace notar que el movimiento de los triángulos delgado y grueso son dependientes uno del otro. Traemos a colación el segmento de transcripción donde esto sucede para una mejor comprensión:

**Profesora:** Ah! Ok; y ¿qué relación existe entre el delgado y el grueso?

**Estudiante 2:** Que si se mueve el delgado, se mueve el grueso.

**Profesora:** O sea, existe una relación de dependencia, ¿Cierto?

**Profesora:** Ok, perfecto.

La profesora también quiere que los estudiantes identifiquen las propiedades de los vértices del triángulo delgado, es decir, que uno gira, uno se mueve y el otro no permite ningún movimiento en el triángulo. El segmento de transcripción donde esto sucede se mostrará a continuación:

**Profesora:** A ver Sharit, Ayúdele.

**Estudiante 12:** Que con uno de los vértices se puede girar.

**Profesora:** ¿Se puede qué?

**Estudiante 12:** Girar.

**Profesora:** ¡Ah se puede girar! ¿Y qué le pasa al otro?

**Estudiantes:** También se gira.

**Profesora:** ¿Pero en igual sentido?

**Estudiantes:** No.

**Estudiante 13:** En diferente. En diferente sentido.

**Profesora:** ¡Ah! Contrario, ¿cierto?

...

**Profesora:** Con uno se desplaza.

**Estudiantes:** Con el otro se gira.

**Profesora:** Con el otro se rota o se gira. ¿Y con el otro?

**Estudiante 2:** No se puede hacer nada.

**Profesora:** ¡Ay! No se hace nada. Bueno. Listo. Ok.

Esto no estaba previsto en el análisis a priori. Se esperaba que los estudiantes descubrieran todas las propiedades anteriores interactuando con el medio sin intervención de la profesora.

Según la Teoría de las Situaciones Didácticas, para que se dé un aprendizaje por adaptación, la interacción del sujeto con el medio debe tener cinco elementos: una intención, una acción, una retroacción, una interpretación y una validación. En el segmento analizado la profesora hace preguntas y propone acciones sin plantear un problema. En consecuencia los estudiantes realizan acciones y reciben retroacciones del medio sin tener una intención. En estas condiciones no es posible que se produzca un aprendizaje por adaptación, puesto que los estudiantes no están en capacidad de validar sus acciones. En efecto, la validación es una comparación de las retroacciones del medio con la intención; en ausencia de intención esta comparación no es posible.

Posiblemente esta intervención de la profesora se deba a que no tiene suficiente confianza en que el problema y el medio permitirán a los estudiantes alcanzar los objetivos de la actividad. Sin embargo, esa “exploración guiada por la profesora” elimina el aprendizaje por adaptación y hace que el problema que vendrá a continuación no tenga ningún propósito.

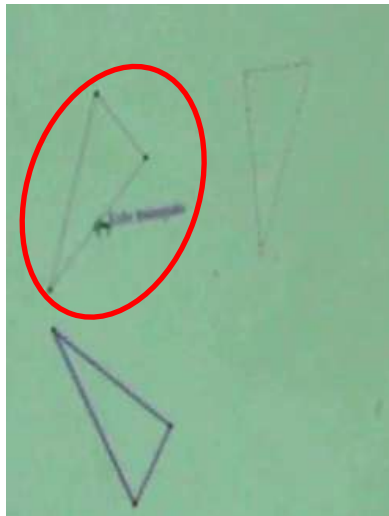
Una discusión como la realizada por la profesora debería hacerse en la puesta en común; es decir, justamente después de que los estudiantes realicen la tarea en todas las series. En ese momento, los estudiantes habrán alcanzado un aprendizaje por adaptación gracias a la interacción con el medio. La discusión le permitirá a la profesora confirmar que los estudiantes aprendieron lo que ella esperaba y en caso contrario retomar la actividad para lograr ese aprendizaje.

**Después de plantear la tarea.** En este punto la mayoría de las acciones previstas en el análisis a priori no se realizaron durante la tarea porque los estudiantes ya conocían de antemano los movimientos de los puntos,

pero durante la intervención de la profesora los estudiantes realizaron algunas de estas acciones previstas:

Cuando la profesora pregunta a sus estudiantes qué se puede hacer con los triángulos, la estudiante 2 pone el puntero sobre uno de los lados del triángulo delgado para arrastrarlo, pero el triángulo no se mueve, luego la retroacción es negativa. El análisis a-priori lo tenía previsto como acción 3.

**Figura 19: El estudiante intenta arrastrar el triángulo a partir de su lado.**



La estudiante 2 también realizó una acción prevista en el análisis a priori como acción 1:

**Estudiante 2:** (Arrastra el vértice A del triángulo delgado, el triángulo grueso también se arrastra. Lleva el puntero hasta el vértice donde se forma el ángulo de  $90^\circ$  en el triángulo punteado e intenta arrastrar, pero no puede).

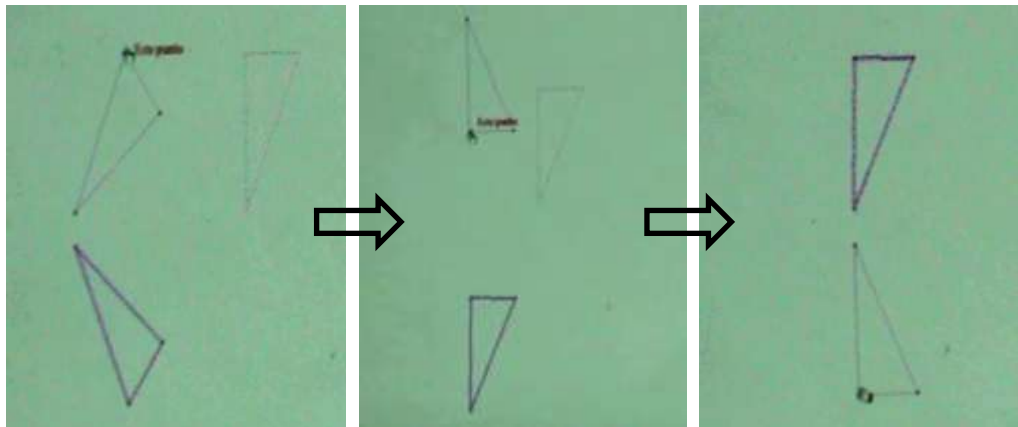
En la tabla 33<sup>12</sup> se muestra cómo el estudiante 1 utilizó el vértice B hasta que los lados del triángulo grueso quedaron paralelos a los lados del triángulo punteado. Luego arrastró el vértice A y movió el triángulo

---

<sup>12</sup> Anexo 2, Actividad 2- Después de la tarea. Las demás Tablas hasta la 35 se analizarán en esta misma sección.

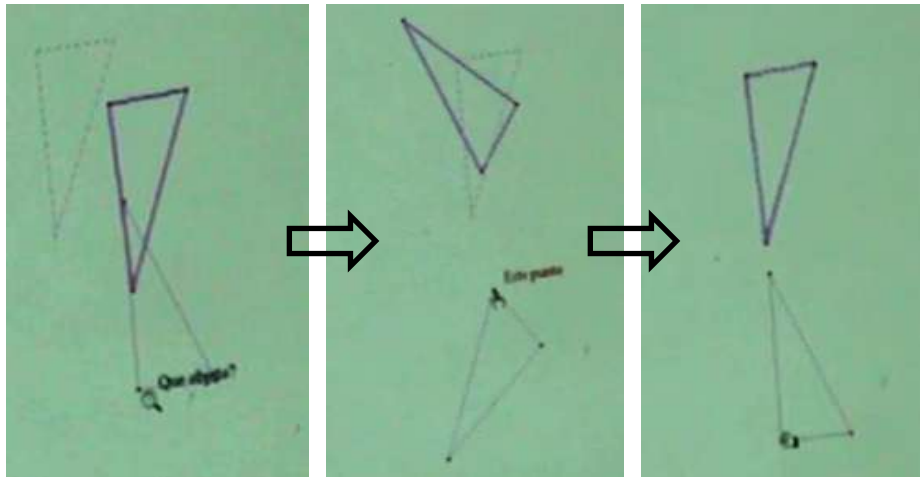
delgado por toda la pantalla, para así llevar el triángulo grueso sobre el punteado y poder terminar la tarea. Esta acción no estaba prevista en el análisis a priori y además es válida, por lo cual es indispensable incluirla en el análisis a priori. En la imagen a continuación se muestra la secuencia de la solución.

**Figura 20: Secuencia de solución utilizando noción de paralelismo.**



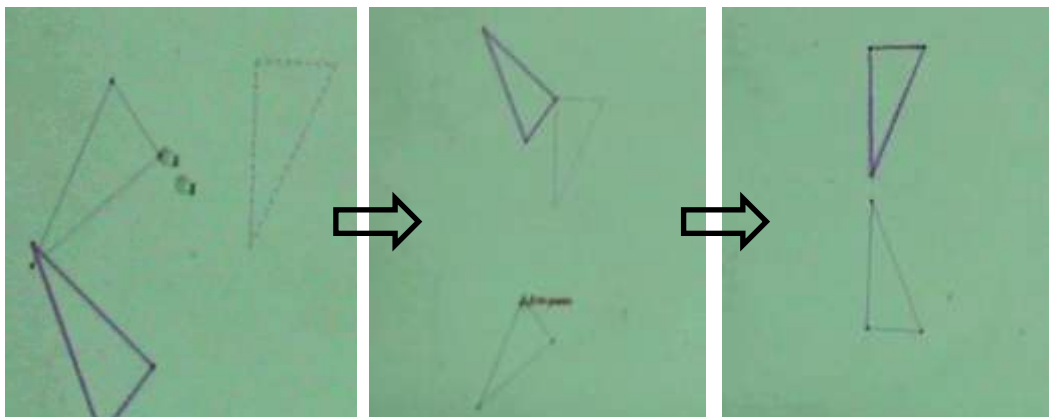
Las estudiante 2 realizó la tarea de forma distinta a pesar de observar la solución y la estrategia de su compañero, el estudiante 1. En la tabla 34 podemos ver cómo la estudiante arrastra el triángulo delgado hasta que el triángulo grueso queda sobre el triángulo punteado. Luego girando y arrastrando el triángulo delgado logró superponer el triángulo grueso sobre el delgado completamente. El análisis a priori tenía prevista esta situación como acción 5 y acción 6 respectivamente. En la imagen a continuación se muestra la secuencia de la solución hecha por la estudiante:

**Figura 21: Secuencia, solución superponiendo los triángulos.**



Los estudiantes 1 y 2 también utilizan las acciones 7 y 8 previstas en el análisis a priori. Esto se ve reflejado cuando el estudiante 1 con ayuda del triángulo delgado lleva el triángulo grueso sobre el triángulo punteado de tal forma que coincida uno de sus vértices correspondientes. Luego, solo gira el triángulo delgado para que el triángulo grueso quede superpuesto sobre el triángulo punteado. En la imagen a continuación se muestra la secuencia de la solución.

**Figura 22: Secuencia, solución utilizando un punto guía.**



Podemos concluir que las acciones y retroacciones previstas en el análisis a priori aparecieron. Sin embargo, no podemos asegurar que se haya producido un aprendizaje por adaptación, puesto que muchas de estas acciones no se dieron dentro de una interacción con el medio guiada por una intención, sino guiada directamente por la profesora.

Por otra parte, aparentemente la profesora busca que todos los estudiantes encuentren las diferentes estrategias de solución previstas en el análisis a priori:

**Profesora [Dirigiéndose a todo el grupo]:** ¿Habría otra opción o será la única, señores? Por favor revisen. Por parejitas van a revisar si hay otras opciones diferentes a...la que ya platearon.

...

Es necesario aclarar que las tareas propuestas en el análisis a priori no necesariamente son tareas matemáticas. Su función es provocar en los estudiantes las acciones que serán validadas o invalidadas. En el caso de la presente actividad, la tarea propuesta: “superponer el triángulo grueso y el punteado” debería desencadenar acciones de arrastre de los distintos triángulos, para producir la invalidación del arrastre del triángulo a partir de un lado y validar el arrastre a partir de un vértice. De esta manera los estudiantes deberían comenzar a identificar los vértices de los triángulos y los diferentes efectos del arrastre.

Las diferentes estrategias señaladas en el análisis a priori buscan garantizar que todas las acciones posibles podrán ser validadas o invalidadas por los estudiantes. Pero no es importante que cada estudiante realice cada una de esas acciones.

### **3.2.2 Secuencia**

Por todas las discusiones propuestas por la profesora en la serie dos-uno, se anularon las estrategias inválidas para solucionar la tarea antes de trabajar en las series dos-dos, dos-tres y dos-cuatro. Todo lo que se

había anticipado para desarrollar a lo largo de la secuencia se desarrolló en la serie dos-uno.

En la transcripción<sup>13</sup> podemos ver cómo los estudiantes ya tenían una estrategia correcta para solucionar las series, y cómo la profesora centró su trabajo a lo largo de la series en la identificación de la orientación del eje de simetría.

### **3.2.2.1 Análisis a priori**

A medida que los estudiantes avancen por las cuatro series, esperamos que abandonen algunas estrategias que no le son útiles para lograr su objetivo, las cuales con bastante probabilidad usarán en la primera serie. Esperamos que al pasar a la segunda serie, no usen las acciones uno y dos que serían intentar arrastrar el triángulo punteado y el triángulo grueso respectivamente, puesto que estos no se dejarán arrastrar. Otra acción que esperamos que no repitan a partir de la segunda o tercera serie es intentar arrastrar el triángulo delgado por sus lados, puesto que sólo se podrá arrastrar por sus vértices.

También esperamos que tomen conciencia de que en cada serie la posición del eje de simetría es diferente (horizontal, vertical y oblicua). Teniendo en cuenta que ellos podrían identificar éste eje como una recta imaginaria que se comporta como espejo entre los dos triángulos.

Lo más importante de esta actividad, es que ellos refuercen la percepción y manipulación de la figura por los elementos que la conforman y no de una manera global, que independientemente de la posición de lo que la mayoría llamaría espejo (eje de simetría) un triángulo y su imagen giran y se mueven en sentidos opuestos.

### **3.2.2.2 Análisis a posteriori**

En las Tablas<sup>14</sup> 36, 37 y 38, los estudiantes manejaron la misma estrategia utilizada anteriormente para solucionar las series dos-dos, dos-tres y dos-cuatro (utilizar un punto como guía). En el análisis a priori se esperaba que los estudiantes desarrollaran la estrategia correcta a través del trabajo con las series, pero esto no se dio de esta

---

<sup>13</sup> Anexo 2, Actividad 2- Secuencia.

<sup>14</sup> Anexo 2, Actividad 2- Secuencia.

forma porque con la primera intervención de la profesora los estudiantes desarrollaron la estrategia en la primera serie.

En más de una intervención los estudiantes filmados afirmaron que el triángulo delgado y el grueso son opuestos. Esta observación es interesante y es una propiedad de la simetría axial, por lo cual creemos conveniente su inclusión en el análisis a priori.

**Profesora:** ¿Qué pasa con el triángulo delgado y el triángulo grueso?

**Estudiante 1:** Quedan en dirección opuesta.

**Profesora:** Quedan en dirección opuesta... ¿Qué más?

**Estudiante 1:** Es que el delgado y el grueso son **opuestos**, por eso...

Otro aspecto que se desarrolla a lo largo de la transcripción es cómo la profesora después de cada serie quiere que sus estudiantes identifiquen la orientación del eje de simetría. Sin embargo, los estudiantes y la profesora hablan de dos cosas diferentes mientras mantienen la conversación:

**Profesora:** Entonces, ¿Cómo quedaban esos?

**Estudiante 1:** El triángulo delgado quedaba... Quedaba hacia abajo. En cambio en la serie dos-dos el triángulo delgado quedaba hacia acá (Señalando con su dedo la parte izquierda de la pantalla).

**Profesora:** ¡Ah! Entonces, ¿El triángulo delgado en la serie dos- uno queda dónde?

**Estudiante 2:** Abajo.

**Profesora:** ¿En la dos-dos queda...?

**Estudiante 2:** Al lado.

**Estudiante 1:** Al lado izquierdo.

...

**Estudiante 2:** En los dos queda, o sea al poner los vértices quedan alineados, los vértices de la parte de arriba...

(Señala con su lápiz los dos vértices del triángulo delgado, el vértice B y el vértice A. Señala también los vértices correspondientes a estos dos, en el triángulo grueso).

**Profesora:** ¡Ah! Los vértices quedan alineados.

Aclaremos que el término alineados no es correcto, pues cualquier par de puntos están alineados. Pensamos que los estudiantes se refieren a que los puntos coinciden, mientras que la profesora cuando habla de linealidad se refiere a segmentos alineados. Así pues, el objetivo en la

serie no se logró, ya que los estudiantes no tomaron conciencia de que en cada serie la posición del eje de simetría era diferente (horizontal, vertical y oblicua).

Todas las intervenciones que entabló la profesora con los estudiantes pueden evitarse, ya que distorsionan los objetivos de las actividades y pueden interferir en los aprendizajes por adaptación. Una solución es proponer cada actividad, dejar que los estudiantes trabajen en las series sin interrupciones y pedirles que dibujen las soluciones en el cuaderno, además que generen una estrategia y la escriban. De esta manera todos los estudiantes pueden trabajar y logran los objetivos propuestos en la actividad.

Finalmente el objetivo de pasar de una visión global del triángulo a una visión de sus partes se logró. Pues al pasar de una actividad a otra, los estudiantes tenían más claro que los triángulos ya no se podían arrastrar de los segmentos sino de los vértices. Esta idea la podemos reforzar cuando los estudiantes hablan de vértices correspondientes entre triángulos.

Podemos concluir que al final de la Actividad 2 los estudiantes no identifican la presencia de un eje de simetría o espejo en medio de los dos triángulos. Aunque se cumplió gran parte del objetivo de la actividad, las intervenciones de la profesora interfirieron en la construcción del aprendizaje por adaptación de los estudiantes. Por esta razón recomendamos que las intervenciones del profesor se reduzcan a las mínimas posibles.

### **3.3 ACTIVIDAD 3**

El objetivo de esta actividad es que los estudiantes precisen la posición del eje de simetría. Más concretamente, que argumenten que el eje de simetría pasa por los puntos medios de los puntos simétricos.

Finalmente se desea que los estudiantes puedan construir el eje haciendo uso de herramientas geométricas.

Esta actividad comprende dos tareas y cinco series; la primera tarea consiste en ubicar un segmento para que funcione como eje de simetría (poner el segmento sobre el eje de simetría que no está visible) y la segunda en construir este eje. La primera tarea se aplica en las cuatro primeras series (tres-uno, tres-dos, tres-tres y tres-cuatro), y la segunda tarea en la tres-cinco.

### **3.3.1 Primera tarea**

En las cuatro primeras series se presenta un triángulo continuo, uno punteado y un segmento. En el triángulo continuo hay dos vértices que permiten su movimiento, uno deja trasladarlo y el otro rotarlo, de modo que no cambia su forma ni tamaño. El triángulo punteado es simétrico del triángulo continuo respecto a un eje que se encuentra oculto.

El segmento puede desplazarse arrastrándolo directamente o arrastrando alguno de sus puntos extremos. La tarea consiste en ubicar este segmento de tal forma que represente el eje de simetría entre el triángulo continuo y el triángulo punteado. Cuando el segmento coincida 'aproximadamente' con el eje de simetría, aparecerá en la pantalla un punto con el letrero '¡Muy bien!'.

Como en la actividad anterior los estudiantes no habían hablado del espejo (refiriéndose al eje de simetría), la profesora decidió hacer una actividad previa para introducir este término y así poder dar la tarea. Por esta razón esta actividad será analizada en dos secciones: antes y después de propuesta la tarea.

#### **3.3.1.1 Análisis a priori**

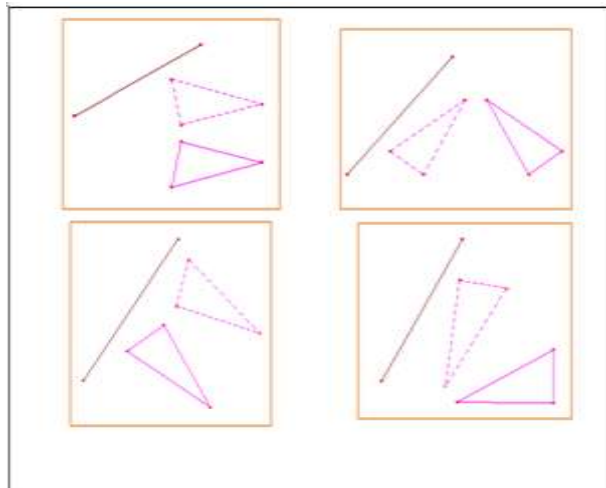
En las dos actividades anteriores estudiantes han aprendido a predecir la posición del eje de simetría de manera aproximada, esta vez se quiere que

precisen esa posición. Más concretamente, que argumenten que el eje de simetría pasa por los puntos medios de los puntos simétricos, de modo que puedan construir el eje haciendo uso de herramientas geométricas.

**Descripción del medio.** Para el desarrollo de esta actividad se usan cinco figuras. En las cuatro primeras se presenta un triángulo continuo, uno punteado y un segmento. El triángulo punteado es simétrico del continuo con respecto a un eje que permanece oculto, por lo tanto no se deja arrastrar. El triángulo continuo se deja arrastrar por dos de sus vértices; uno permite trasladarlo y el otro rotarlo, de modo que no cambia su forma ni tamaño. El segmento puede desplazarse arrastrándolo directamente o arrastrando sus puntos extremo. Cuando el segmento coincida 'aproximadamente' con el eje de simetría, aparecerá en la pantalla un punto con el letrero '¡Muy bien!'.

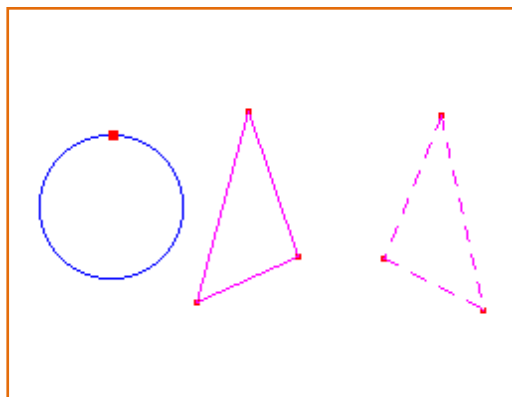
La diferencia entre cada una de las cuatro primeras figuras es la posición del eje, siendo horizontal, vertical, oblicuo con pendiente positiva y oblicuo con pendiente negativa respectivamente.

**Figura 23: Posiciones del eje de simetría para las series.**



En la quinta figura se presenta un triángulo punteado, uno continuo y un círculo con un punto sobre él. El triángulo continuo se deja arrastrar por cualquiera de sus vértices, cambiando de forma y tamaño mientras el punteado se mueve de modo que conserva la simetría. El círculo funciona como interruptor al mover el punto para cambiar la pendiente del eje de simetría.

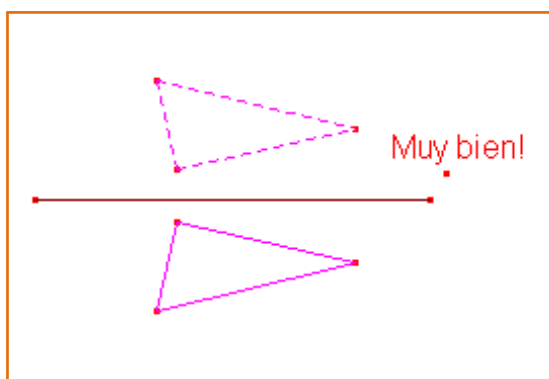
**Figura 24: Círculo, triángulo punteado y continuo.**



**Descripción de la actividad.** Al trabajar con las cuatro primeras figuras se quiere que los estudiantes comprendan que el eje de simetría debe ubicarse de modo que pase por los puntos medios de puntos simétricos; esto puede ser manifestado por los estudiantes con frases como “el espejo debe quedar en la mitad de los triángulos” o aún más preciso, “el segmento debe quedar en la mitad entre este punto y este punto (señalando dos puntos simétricos)”. Para ello se les pide que realicen dos tareas. Primera tarea (En las cuatro primeras figuras): Mover el segmento hasta que represente el espejo entre el triángulo continuo y el punteado.

En esta tarea, se espera que los estudiantes lleven el segmento a la posición en la que ellos creen que debe ubicarse el espejo. Logrado esto con cierta precisión, debe aparecerles un punto con un letrero que dice ‘¡Muy bien!’.

**Figura 25: Aparición del letrero ¡Muy Bien!**

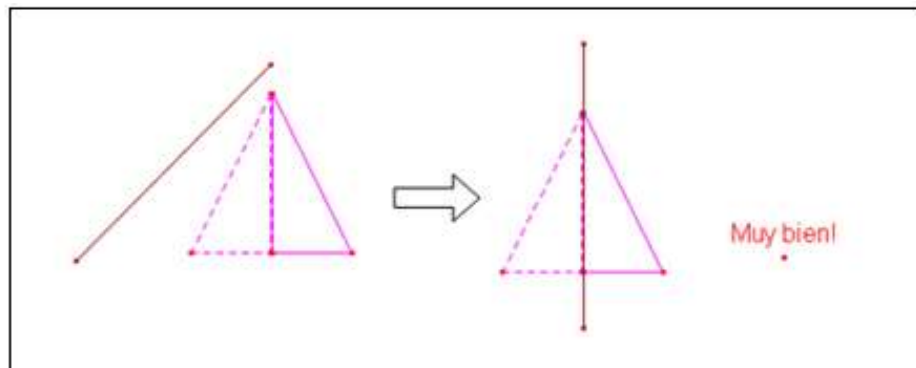


Es posible que algunos estudiantes utilicen una de las siguientes estrategias para solucionar la tarea:

1. Mover el triángulo continuo hasta que se cruce con el triángulo punteado y hacer que el segmento pase por los puntos de intersección.
2. Mover el triángulo continuo hasta que uno de sus lados coincida con el triángulo punteado y hacer que el segmento pase por ese lado.

Estas estrategias son correctas, pero el profesor deberá pedirles a estos estudiantes que intenten resolver el problema sin mover los triángulos, a fin de que utilicen las relaciones entre los puntos simétricos y el eje.

**Figura 26: Posibles estrategias de solución para la actividad tres-cinco.**



✓ Análisis de la interacción sujeto-medio

**Intención:** ubicar el segmento de modo que represente el espejo entre el triángulo continuo y el punteado.

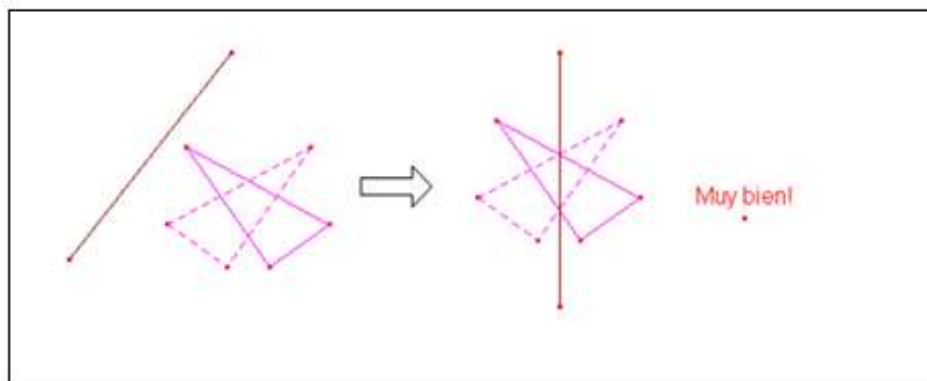
**Acción 1:** llevar el segmento a la mitad de una pareja de triángulos y acomodarlo hasta que salga el letrero '¡Muy bien!'.

**Retroacción 1:** el segmento queda ubicado en la posición adecuada y sale el letrero '¡Muy bien!'.

**Interpretación:** el segmento queda ubicado en la mitad entre los dos triángulos.

**Validación:** la estrategia es válida.

**Figura 27: Ejemplo de acción 1.**



**Acción 2:** arrastrar y girar el triángulo continuo hasta hacer coincidir un lado de éste con el lado correspondiente del punteado y ubicar el segmento sobre ese lado.

**Retroacción 2:** el triángulo queda unido al otro por un lado, el segmento queda ubicado en esa posición y aparece el letrero ‘¡Muy bien!’.

**Interpretación:** se pueden unir los dos triángulos por un lado y ubicar el segmento en esa posición para que represente el espejo.

**Validación:** la estrategia es válida.

**Acción 3:** Mover el triángulo continuo hasta que se cruce con el triángulo punteado y hacer que el segmento pase por los puntos de intersección de los dos triángulos.

**Retroacción 3:** el segmento queda ubicado en la posición adecuada y aparece el letrero ‘¡Muy bien!’.

**Interpretación:** basta hacer que los triángulos se crucen y ubicar el segmento sobre las intersecciones.

**Validación:** la estrategia es válida.

Como ya mencionamos antes, cuando los estudiantes utilicen las dos últimas estrategias, es necesaria la intervención del profesor para pedirles que resuelvan la tarea nuevamente sin mover los triángulos, con el propósito de que los estudiantes usen la relación entre los puntos simétricos y el eje.

**Acción 4:** ubicar una regla sobre la pantalla para medir la distancia entre dos pares de puntos correspondientes y calcular la mitad entre ellos, luego llevar el segmento sobre la “mitad” de cada par de puntos.

**Retroacción 4:** el segmento queda ubicado en la posición adecuada y aparece el letrero ‘¡Muy bien!’.

**Interpretación:** el segmento debe ubicarse en la mitad entre los puntos correspondientes.

**Validación:** la acción es válida.

Veamos que como producto de llevar a cabo estos ciclos de acción-retroacción-interpretación-validación para esta tarea, los estudiantes interpretan que el espejo debe ubicarse sobre los puntos medios de los puntos simétricos, lo que es el propósito de esta tarea.

### **3.3.1.2 Análisis a posteriori**

**Antes de la tarea.** Antes de proponerse la tarea la profesora realizó una introducción para la misma, pues los estudiantes hasta ese punto no identificaban la presencia del eje de simetría. Ellos solo identificaban la orientación de la simetría guiándose por los triángulos. Esta introducción no está prevista en el análisis a priori, pues se esperaba que los estudiantes espontáneamente hablaran de un espejo. Como la primera tarea menciona el espejo, no era posible darla a los estudiantes sin tener conocimiento de la existencia del mismo.

Pensamos que la decisión de la profesora de realizar una actividad introductoria para presentar el término “espejo” es adecuada. Sin embargo, usar la herramienta traza como ayuda para la misma puede tener efectos inesperados en la actividad. Habría sido posible retomar la actividad anterior y proponerles a los estudiantes el término espejo para describir los fenómenos observados, o simplemente reemplazar la palabra espejo en el enunciado de la tarea refiriéndose a la posición de la pantalla donde los triángulos se “juntan”.

La profesora obtuvo el resultado que deseaba, los estudiantes identificaron el espejo:

**Profesora [Dirigiéndose a todos los estudiantes]:** ¿Qué relación hay con respecto a esa trayectoria [la descrita por la traza] y las figuras?

**Profesora:** El movimiento es opuesto ¿pero qué pasa con eso que está ahí? [Refiriéndose a la traza]. ¿Actúa como qué?

**Estudiante 8:** Actúa como si en la mitad hubiesen un espejo.

**Profesora:** Ah muy bien, miren actúa como si en la mitad hubiese ¿Qué?

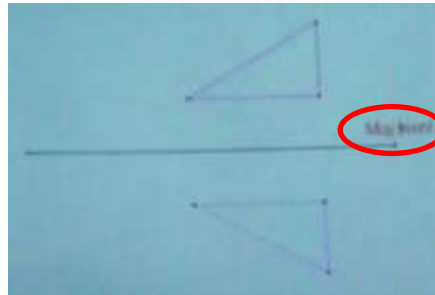
**Estudiante 9:** Un espejo.

**Después de la tarea.** Lo primero que se debe resaltar en este análisis es que la profesora no dio la tarea como estaba prevista en el análisis a priori. La tarea prevista era: “Mover el segmento hasta que represente el espejo entre el triángulo continuo y el punteado”, la tarea que dio la profesora fue la siguiente: “Mover el segmento de tal manera que quede entre los triángulos continuo y punteado hasta que el segmento represente el espejo”. Aunque parece ser la misma indicación, no es así, ya que la profesora añadió las palabras “quede entre”, limitando de inmediato el trabajo de los estudiantes a ubicar el segmento entre los dos triángulos, privándolos de trabajar con otro tipo de estrategias.

La primera acción que tenía previsto el análisis a priori para esta tarea, es que los estudiantes identificaran la presencia del letrero ¡Muy bien!

cuando el segmento está correctamente ubicado. En la Tabla 42<sup>15</sup> podemos ver cómo un estudiante notó este hecho y lo comunicó a la profesora.

**Figura 28: Letrero ¡Muy bien!**



Respecto a lo anterior, la profesora hace una intervención no esperada. A continuación traemos a colación el segmento de diálogo donde esto sucede:

**Estudiante 3:** Sale un letrero que dice ¡Muy bien!

**Profesora:** y si el letrero no sale muy bien, ¿Qué implica?

**Estudiante 3:** que no está bien alineado.

**Profesora:** y ¿Qué debe hacer?

**Estudiante 3:** Alinearlo.

**Profesora:** Pues moverlo de tal forma hasta que le salga la palabra ¡Muy bien!

Exactamente la última intervención de la profesora no es adecuada ya que pudo dañar el objetivo de la tarea. Ella tenía que resaltar que el segmento debía quedar en la mitad y no que debía mover el segmento hasta que apareciera el letrero ¡Muy bien! Los estudiantes con esa indicación pueden centrarse en mover el segmento hasta que el letrero aparezca y olvidarse de las condiciones que cumple el segmento en ese lugar.

Debido a estos acontecimientos y con los datos recolectados no es posible decidir si los estudiantes estaban buscando ubicar el segmento

---

<sup>15</sup> Anexo 2, Actividad 3- Después de la tarea. Las demás Tablas hasta la 43 se analizarán en esta misma sección.

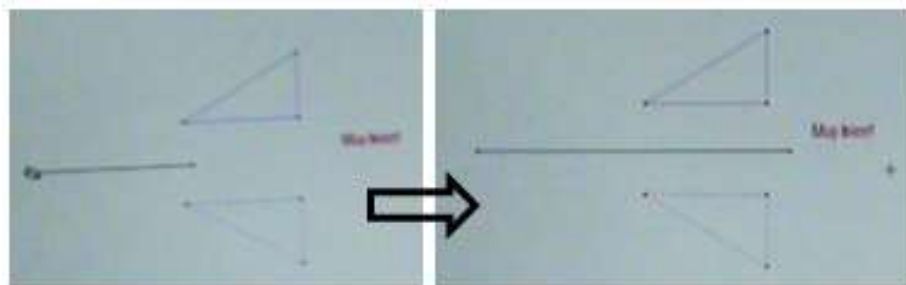
de manera que se mantuviera la equidistancia entre los triángulos o solo estaban moviendo el segmento hasta que apareciera el letrero ¡Muy bien! Si los estudiantes buscaban que el letrero apareciera, el objetivo no se estaba logrando.

En los tres primeros párrafos de la Tabla 43 vemos cómo la estudiante 2 realizó la tarea llevando el segmento en medio de los dos triángulos para luego cuadrarlo de los extremos hasta que apareciera el letrero ¡Muy bien! Esta acción está prevista en el análisis a priori como acción 1.

Las demás acciones previstas en el análisis a priori no se dieron en esta clase. Pero se presentaron otras dos acciones que no están previstas en el análisis a priori:

Una de estas acciones la encontramos al final de la Tabla 43, donde el estudiante 1 no ubicó el segmento entre los dos triángulos y el letrero ¡Muy bien! apareció (el segmento estaba sobre el eje de simetría). El estudiante no contento con la solución, extendió el segmento de uno de sus extremos para que quedara en medio de los triángulos, como se observa en la Figura 29. Esta acción puede deberse a que desde la primera actividad quedó inconcluso el objetivo, por lo tanto es importante que el profesor les recuerde a los estudiantes lo que se había trabajado en la cuarta tarea de esa actividad: los cuadrados una vez ubicados están sobre una línea recta en la mitad de los triángulos.

**Figura 29: Secuencia de solución extendiendo el segmento.**



### 3.3.2 Secuencia

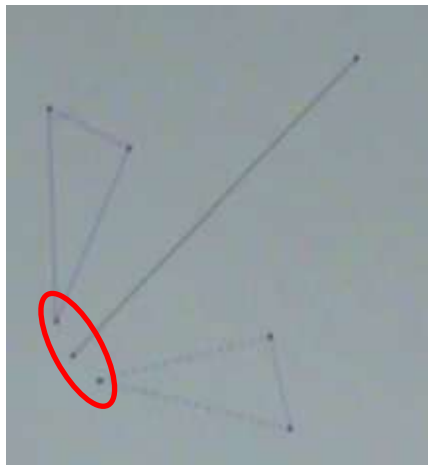
En el análisis a priori está ausente el análisis de la secuencia para esta primera parte de la actividad. A pesar de esto se decidió hacer uno, pues creemos indispensable estudiar cada una de las acciones y cambios que se dan de una serie a otra.

#### 3.3.2.1 Análisis a posteriori

Los estudiantes durante la secuencia no presentaron mayores inconvenientes al momento de ubicar el espejo, siguieron usando la misma estrategia de la serie tres-uno para realizar las demás series.

En la Tabla 45<sup>16</sup> podemos ver que la estudiante 2 ubicó un punto extremo del segmento colineal con los vértices correspondientes de los triángulos y luego arrastró el otro extremo hasta que el letrero ¡Muy bien! apareció. Esta acción no se volvió a repetir, por lo cual presumimos que se trató de una coincidencia. Aun así, es una acción válida para solucionar el problema, por lo cual debería estar presente en el análisis a priori.

**Figura 30: Colinealidad de los vértices con un extremo del segmento**



---

<sup>16</sup> Anexo 2, Actividad 3- Secuencia. Las demás Tablas hasta la 46 se analizarán en esta misma sección.

En base a lo anterior, vemos necesaria la inclusión de un análisis de la secuencia para la actividad 3, debido a que existen estrategias y resultados que no necesariamente estarán presentes con la primera serie.

Debemos resaltar que la aparición del letrero ¡Muy bien! no es el objetivo de la actividad, sino es una confirmación de que los estudiantes están haciendo correctamente la tarea. Según la Teoría de las Situaciones Didácticas esta retroacción del medio no es adecuada, porque se está emitiendo un juicio sobre las acciones del estudiante.

La actividad como se está empleando provoca que los estudiantes puedan desviar la intención de la actividad, preocupándose por la aparición del letrero ¡Muy bien! Y no porque el segmento cumpla las propiedades del espejo. En este punto, el profesor debe evitar que los estudiantes solo busquen que salga el letrero; una manera de hacerlo es interviniendo en alguna de las series para preguntar por la estrategia que están usando.

En esta tarea existe también la dificultad de la validación, porque puede que el estudiante esté haciendo la tarea perceptivamente. Lo ideal sería modificar el medio de manera que cuando el estudiante ubique el segmento, este no responda a la acción de manera inmediata con el letrero. Una solución (planeada a los expertos en didáctica de las matemáticas, encargados de preparar el problema y el medio) es que el estudiante realice cada acción y den clic a una parte vacía de la pantalla para que el letrero aparezca. Esto con la finalidad de dar la oportunidad a cada estudiante de anticipar las acciones y de que busquen una estrategia para llegar a un conocimiento (poner el segmento en la mitad).

### **3.3.3 Puesta en común**

El análisis de esta segunda tarea se realizará por partes debido a la extensión de la transcripción.

Antes de empezar esta segunda tarea, el análisis a priori sugiere realizar una puesta en común de la primera tarea para que todos los estudiantes identifiquen las condiciones en las cuales un segmento representa un espejo entre los dos triángulos.

Luego de esto, vendrá una etapa donde el profesor mostrará la quinta figura y pasará a un estudiante a hacer la construcción del segmento que representa el eje de simetría.

Por último se les pide a todos los estudiantes que construyan dicho segmento que resista el arrastre del punto sobre el círculo. Puesto que al mover el punto sobre el círculo, el eje de simetría cambia de pendiente, provocando el cambio de posición del triángulo punteado. El objetivo es crear un segmento que siga siendo el espejo entre los dos triángulos aun cuando el triángulo punteado cambia de posición.

#### **3.3.3.1 Análisis a priori**

En esta tarea se introducirá por primera vez el arrastre para validar una construcción, invalidando las estrategias de ajuste perceptivo de las figuras. Este cambio en el contrato didáctico no será fácilmente comprendido o aceptado por los estudiantes. Por eso es necesario que el profesor lo ‘ponga en escena’, delante de todo el grupo, para convencerlos mediante un ejemplo.

Una vez terminada la primera tarea con las cuatro figuras iniciales, el profesor organizará una puesta en común para resaltar las condiciones que debe cumplir el segmento para que represente el ‘espejo’ entre el triángulo continuo y el punteado.

### **3.3.3.2 Análisis a posteriori**

La puesta en común<sup>17</sup> buscaba que los estudiantes observaran las condiciones que necesita un segmento para representar un espejo entre un par de triángulos.

Podemos decir que no se cumplió del todo el objetivo de la tarea, pues aunque las cuatro propiedades mencionadas por los estudiantes, descritas a continuación:

1. El movimiento de los triángulos es opuesto con respecto al espejo, siempre y cuando se aleje con respecto a este.
2. Siempre los triángulos delgados mueven a los gruesos, dado que hay una relación de dependencia.
3. Cada vértice tiene su correspondiente y las rectas que pasan por cada par de vértices son paralelas y respecto al espejo son perpendiculares.
4. Hay un vértice que permite girar y otro que hacía dar el movimiento al triángulo delgado].

Son propiedades que se cumplen para construir el eje de simetría, no eran las que se buscaban directamente con la puesta en común. La profesora debía centrarse en la idea que el espejo pasa por la mitad y no hablar de perpendicularidad, ni paralelismo durante la puesta en común, ya que estos términos no ayudan a la solución del problema.

Es importante resaltar que los términos matemáticos no se deben usar mientras los estudiantes construyen su conocimiento en interacción con el medio, porque los estudiantes pueden copiar los términos y emplearlos sin saber qué significan. Los profesores deben tomar conciencia que el hecho de utilizar una palabra no garantiza la

---

<sup>17</sup> Anexo 2, Actividad 3- Puesta en Común.

comprensión de un concepto, por tanto lo importante no es el uso del término, sino lo que hay detrás de él.

Según la Teoría de las Situaciones Didácticas la profesora no debe usar los términos matemáticos, sino los términos que utilizan los estudiantes antes de la institucionalización. Después de esta, se introduce el lenguaje oficial y se exige su uso, pues ya se ha garantizado que los estudiantes han identificado las propiedades matemáticas que tiene cada término.

Un aspecto que se trabajó durante el comienzo de la puesta en común fue el hecho de ubicar el segmento en la mitad o en el centro de los dos triángulos como decían los estudiantes en la Tabla 47<sup>18</sup>.

“La recta que funciona como la división de un espejo y lo que está reflejando debe ir prácticamente en el centro para allí funcionar como la división del espejo. Nuestra estrategia es calcular donde se encuentra el centro y ubicar hay (sic) la recta”

“En la recta (sic) que funciona como el espejo debe estar en la mitad de los dos triángulos para lograr el objetivo”

La profesora debía interrogar a sus estudiantes sobre esta idea, pues no bastaba con ubicar el segmento en medio de los dos triángulos para completar la tarea; sin embargo no lo hizo.

La tabla 51 evidencia una estrategia de uno de los estudiantes para completar la tarea con éxito, la profesora validó esta estrategia:

**Estudiante 6:** Yo me paro en la mitad de estos dos (señalando el par de vértices correspondientes más cercanos entre sí) y pongo el segmento ahí.

(El estudiante que se encuentra en el computador base arrastra el extremo del segmento hasta donde el estudiante 5 está señalando en el tablero, como se muestra en la figura 31).

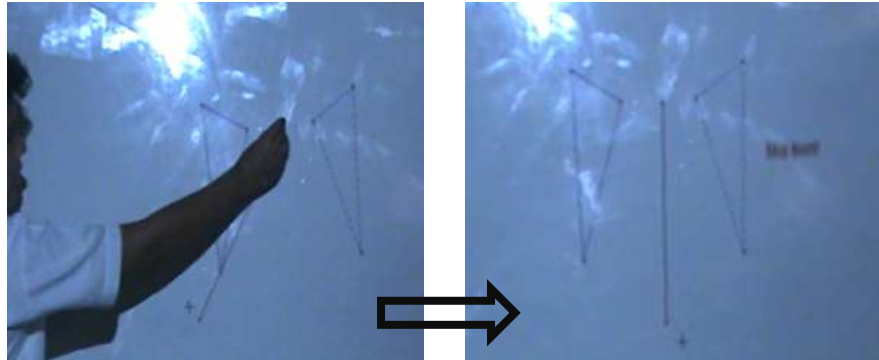
**Estudiante 6:** Después tomo el otro extremo que se deja mover y lo muevo hasta que dé.

---

<sup>18</sup> Anexo 2, Actividad 3- Puesta en Común. Las demás Tablas hasta la 54 serán analizadas en esta sección.

**Profesora:** ¡Ah! Empezó a moverlo a desplazarlo. O sea que usted ubicó un punto, fija uno de los puntos y el otro es el que lo mueve. Bueno listo muy bien señor...

**Figura 31: Secuencia de solución para segunda tarea de la actividad 3.**



Ese momento la profesora tenía que corregir al estudiante y decirle que el segmento debía ubicarse en medio de dos parejas de puntos correspondientes y no se una sola pareja como afirmaba el estudiante. Sin embargo, la profesora validó dicha estrategia e impulsó a sus estudiantes a encontrar otras.

En la Tabla 52 se muestra cómo un estudiante utiliza la intersección de la traza aplicada a dos vértices correspondientes de triángulos para ubicar el segmento que funciona como espejo. Una vez el estudiante comparte la estrategia, la profesora le dice que está bien e inmediatamente evacúa la situación sin dar lugar a una discusión del por qué funciona o si funciona en todos los casos. La profesora pudo haber preguntado a sus estudiantes: “¿Qué pasa si los círculos descritos por la traza no se cortan?” para favorecer la puesta en común y descartar estrategias erróneas.

Del mismo modo sucedió con lo descrito en la Tabla 54, donde los estudiantes 1 y 2 utilizaron un método para ubicar el espejo a base de rectas trazadas entre vértices no correspondientes de los triángulos; esta estrategia tampoco fue explorada por la profesora.

Figura 32: Solución usando traza.

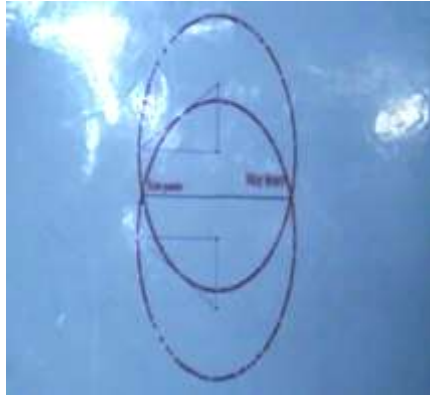
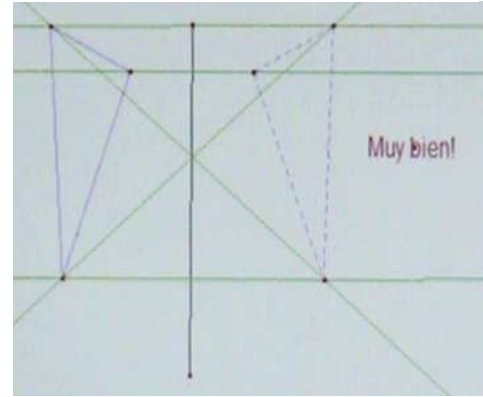


Figura 33: Solución usando rectas entre vértices no correspondientes.



Estas dos estrategias de solución descritas en las Tablas 52 y 54 son correctas, pero los estudiantes no tienen suficiente control sobre la situación para validar o invalidar dichas acciones. Los estudiantes además, no están en la capacidad de explicar matemáticamente sus acciones o no tienen las herramientas para hacerlo. Desde el punto de vista de la Teoría de las Situaciones Didácticas (TSD), estas estrategias no son fáciles de justificar, puesto que no hay elementos en la actividad o actividades anteriores que justifiquen matemáticamente esas estrategias. Se recomienda pensar en alguna forma de bloquear esas estrategias restringiendo el medio.

Durante la discusión de ubicar el segmento en la mitad, la profesora utilizó el término punto medio:

**Profesora [Dirigiéndose a todos los estudiantes]:** Pero igual, ese punto de abajo yo podría ubicarlo, como es sobre una recta, yo lo podría ubicar un poquito más allá o un poquito más acá. Ojo no necesariamente me garantizaría que fuera el punto medio. Lo que sí tendríamos que tener en cuenta es que los puntos que pertenecen al espejo quedan sobre la misma línea, porque son colineales.

Nuevamente resaltamos a los profesores tener mucha prudencia con el lenguaje que utilizan antes de la institucionalización, pues aunque ninguno de los estudiantes notó el término “punto medio”, ella pudo

afectar la situación a-didáctica con el uso de esta palabra. Creemos que es de total importancia que el análisis a priori contenga algunas ayudas para el profesor sobre el tipo de respuestas que podrían dar a los estudiantes o de pregunta que debería hacerle a los mismos.

### 3.3.4 Segunda tarea – primera parte

#### 3.3.4.1 Análisis a priori

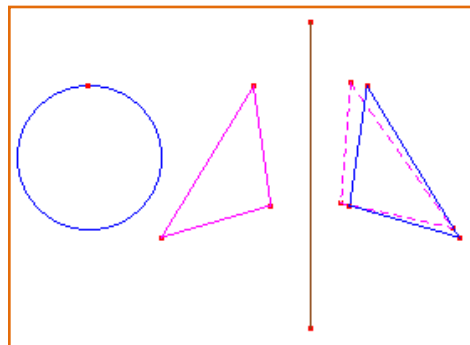
**Segunda tarea: (En el archivo 5 de la actividad) construir un segmento de modo que represente el espejo que refleja el triángulo delgado en el triángulo punteado.**

Se mostrará la quinta figura y pasará a un estudiante al frente, para que haga la construcción del segmento que representa el espejo mencionado.

Se espera que inicialmente el estudiante se pregunte cómo construir el segmento, de modo que el profesor debe intervenir para orientar el manejo de la herramienta 'segmento', dado que es la primera vez que se les pide que construyan. Así, el estudiante construirá el segmento de manera perceptiva para ubicarlo como lo hacía en la tarea previa, buscando que represente el espejo entre los dos triángulos. Una vez el estudiante ha ajustado perceptivamente el segmento, el profesor mostrará la herramienta 'simetría axial' para construir el triángulo simétrico del continuo con respecto al segmento que él ha construido perceptivamente. Pueden presentarse dos situaciones:

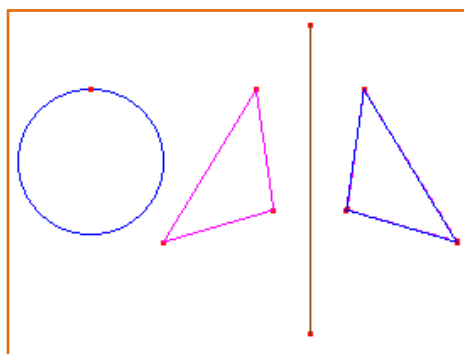
- ✓ El triángulo construido (azul) no coincide con el triángulo punteado, lo cual indicaría que el segmento quedó mal construido. Entonces el estudiante buscará acomodar el segmento hasta que los triángulos coincidan completamente.

**Figura 34: El triángulo simétrico construido no coincide con el punteado**



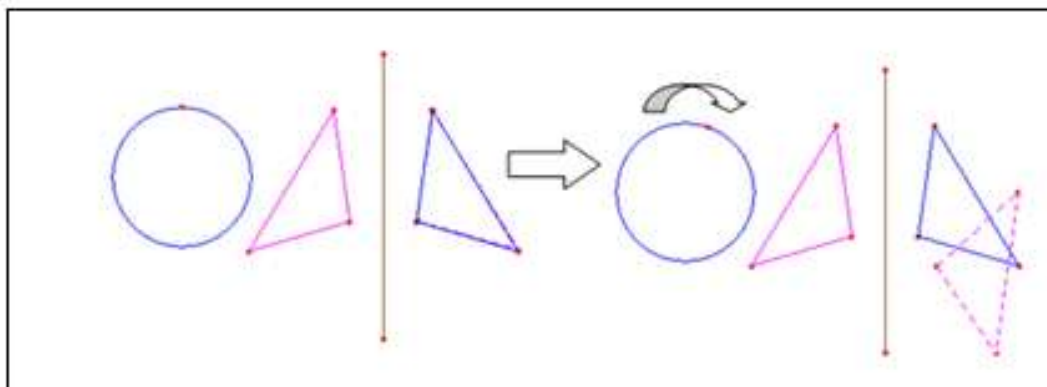
- ✓ El triángulo construido (azul) coincide con el triángulo punteado, lo cual indicaría que el segmento quedó 'bien ubicado'.

**Figura 35: El triángulo simétrico coincide con el punteado.**



Una vez validada esta tarea perceptiva, el profesor pedirá al estudiante que mueva el punto sobre el círculo, provocando la siguiente situación:

**Figura 36: Movimiento del punto sobre el círculo.**



Al mover el punto sobre el círculo el eje de simetría cambia de pendiente, provocando el cambio de posición del triángulo punteado, y queda en evidencia que el espejo queda mal ubicado; el profesor explicará que 'ahora se trata de construir un espejo que resista el arrastre del punto sobre el círculo', es decir que siga siendo el espejo entre los dos triángulos aun cuando el triángulo punteado cambie de posición.

### **3.3.4.2 Análisis a posteriori**

El análisis a priori sugería poner a un estudiante a realizar la tarea antes de que todos empezaran a trabajar en ella. Todo lo que se tenía previsto para esta situación ocurrió. Además, la tarea se planteó como estaba previsto en el análisis a priori a excepción de una palabra, pues la profesora dio la tarea con un pequeño cambio:

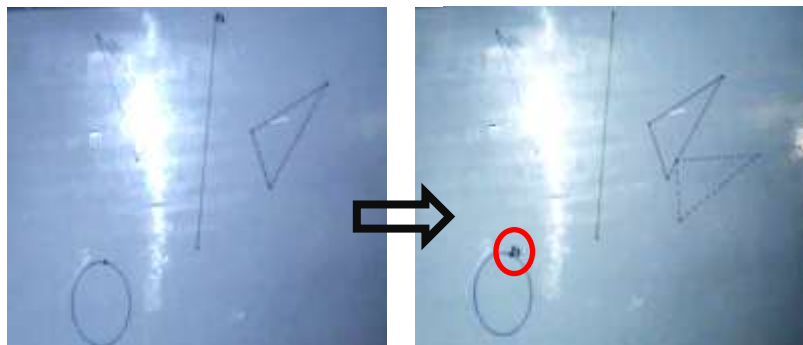
**Profesora:** Entonces, nuestro objetivo es que ese espejo que vamos a pintar sirva para todas las posiciones del triángulo simétrico. ¿Me hice entender?

No se trataba de pintar el espejo que sirva para todas las posiciones del triángulo simétrico sino del triángulo punteado.

La primera acción se ve en la Tabla 55<sup>19</sup> donde el estudiante ubicó el segmento perceptivamente donde creía que podía ir el espejo, posteriormente en la Tabla 56 podemos ver cómo la profesora enseña a los estudiantes la herramienta simetría axial de Cabri. La acción del estudiante y la respuesta de la profesora están previstas en el análisis a priori.

En las Tablas 57 y 58 se muestra cómo el estudiante se enfrenta a la primera situación prevista en el análisis a priori, es decir, mover el espejo (eje de simetría) hasta que el triángulo simétrico quede superpuesto sobre el triángulo punteado. Finalmente en la Tabla 59 se ve cómo el estudiante mueve el punto sobre el círculo (a pedido de la profesora) y el triángulo deja de estar superpuesto, es decir, deja de ser el simétrico. Estas acciones también estaban previstas en el análisis a priori.

**Figura 37: Verificación del triángulo simétrico.**



<sup>19</sup> Anexo 2, Actividad 3, Tarea 2-Primera parte de la actividad. Las demás Tablas hasta la 59 se analizarán en esta misma sección.

### 3.3.5 Segunda tarea – segunda parte

#### 3.3.5.1 Análisis a priori

Al mover el punto sobre el círculo el eje de simetría cambia de pendiente, provocando el cambio de posición del triángulo punteado, y queda en evidencia que el espejo queda mal ubicado; el profesor explicará que ‘ahora se trata de construir un espejo que resista el arrastre del punto sobre el círculo’, es decir que siga siendo el espejo entre los dos triángulos aun cuando el triángulo punteado cambie de posición.

Una vez que se ha invalidado la estrategia de ajuste perceptivo mediante el arrastre, finaliza la puesta en común y cada grupo debe intentar resolver el problema.

En el momento que los estudiantes manifiesten que el segmento debe ubicarse de manera que al mover el interruptor, el segmento se mantenga sobre los puntos medios de los puntos simétricos, el profesor debe intervenir para enseñarles la herramienta punto medio.

#### ✓ Análisis de la interacción sujeto-medio

**Intención:** construir un segmento de modo que represente el espejo que refleja el triángulo delgado en el triángulo punteado.

**Acción 1:** usar la herramienta ‘segmento’ y construir perceptivamente un segmento que pase por la mitad de los puntos correspondientes.

**Acción de validación 1:** construir el triángulo simétrico del continuo con respecto al segmento.

**Retroacción 1:** el triángulo construido coincide con el punteado, en caso contrario el estudiante podría mover el segmento hasta que los dos triángulos coincidan completamente.

**Acción de validación 2:** mover el interruptor.

**Retroacción 2:** el triángulo punteado se traslada y el segmento queda mal ubicado.

**Interpretación:** la acción 1 no permite concluir la tarea.

**Validación:** es necesario cambiar de estrategia.

**Acción 2:** arrastrar el triángulo continuo hasta hacer coincidir un lado de éste con el lado correspondiente del punteado y construir un segmento sobre ese lado.

**Acción de validación 3:** construir el triángulo simétrico del continuo con respecto al segmento.

**Retroacción 3:** el triángulo construido coincide con el punteado.

**Acción de validación 4:** mover el interruptor.

**Retroacción 4:** el triángulo punteado se traslada y el segmento queda mal ubicado.

**Interpretación:** la acción 2 no permite concluir la tarea.

**Validación:** es necesario cambiar de estrategia.

**Acción 3:** Mover el triángulo continuo hasta que se cruce con el triángulo punteado y construir un segmento que pase por los puntos de intersección de los dos triángulos.

**Acción de validación 5:** construir el triángulo simétrico del continuo con respecto al segmento.

**Retroacción 5:** el triángulo construido coincide con el punteado.

**Acción de validación 6:** mover el interruptor.

**Retroacción 6:** el triángulo punteado se traslada y el segmento queda mal ubicado.

**Interpretación:** la acción 2 no permite concluir la tarea.

**Validación:** es necesario cambiar de estrategia.

**Acción 4:** usar la herramienta 'punto medio' para marcar los puntos medios de los puntos correspondientes y construir un segmento con extremos en dos de esos puntos.

**Acción de validación 7:** construir el triángulo simétrico del continuo con respecto al segmento.

**Retroacción 7:** el triángulo construido coincide con el punteado.

**Acción de validación 8:** mover el interruptor.

**Retroacción 8:** el segmento se mantiene sobre los puntos medios construidos.

**Interpretación:** el segmento debe construirse a partir de los puntos medios de puntos correspondientes.

**Validación:** la estrategia permite concluir la tarea.

Los estudiantes después de ensayar estrategias perceptivas e invalidarlas, harán la pregunta que se espera que se planteen. ¿Cómo hacer para que el segmento quede sobre los puntos medios de los puntos correspondientes, aún después de mover el interruptor? En ese momento el profesor interviene para indicarles cómo usar la herramienta 'punto medio'. De este modo se alcanza el objetivo de la tarea.

### **3.3.5.2 Análisis a posteriori (a)**

Las Tablas<sup>20</sup> 60, 61,62 y 63 muestran cómo los estudiantes realizaron las primeras estrategias para solucionar la tarea, ninguna prevista en el análisis a priori.

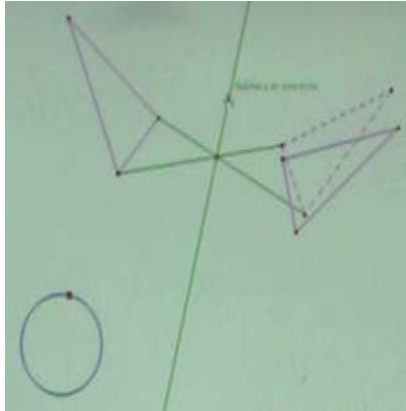
En la primera tabla trazaron segmentos entre vértices no correspondientes con el fin de encontrar un punto de corte por donde pasar el espejo, es decir, buscaron un lugar por donde pasar el segmento y acomodarlo hasta que funcione y lograr el objetivo; sin

---

<sup>20</sup> Anexo 2, Actividad 3, Tarea 2-Segunda parte de la actividad (a).

embargo, dicha estrategia no les funcionó, pues la estrategia la invalidó el medio.

**Figura 38: Estrategia usando segmentos entre vértices no correspondientes.**

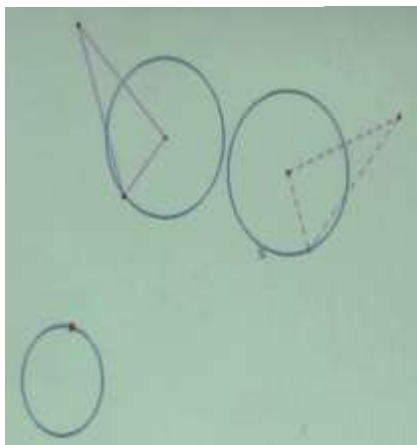


En la segunda tabla, los estudiantes querían generar una estrategia utilizando círculos, este uso tal vez se debe a la construcción de la traza hecha en la Tabla 52<sup>21</sup>. Con esta construcción ellos querían encontrar dos puntos de intersección entre los círculos para poder ubicar el segmento correctamente; sin embargo, los círculos no se intersecaron y tampoco se les ocurrió la idea de arrastrar el triángulo continuo para que se diera dicha intersección. Este hecho hizo que los estudiantes abandonaran esa estrategia. Si los estudiantes hubieran intersecado los círculos, la estrategia habría funcionado, pues se podría pintar el segmento que funciona como eje de simetría. No obstante, el espejo solo es eficaz en caso de que la intersección se mantenga.

---

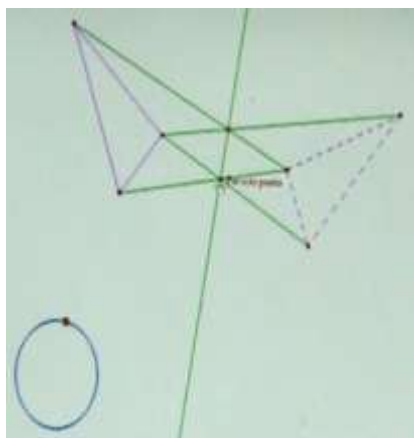
<sup>21</sup> Anexo 2, Actividad 3, Puesta en común.

**Figura 39: Estrategia usando circunferencias.**



Finalmente en la última Tabla utilizaron la misma estrategia que usaron para la primera, pero esta vez cruzaron dos pares de segmentos para poder obtener dos puntos de intersección para ubicar el segmento que funciona como eje de simetría o espejo. Esta vez la estrategia es un éxito y el estudiante logra resolver la tarea.

**Figura 40: Estrategia de solución para la segunda tarea de la actividad 3.**



Las tres estrategias fueron invalidadas por el medio, pero no significa que no sean correctas. En realidad las dos últimas estrategias pueden llegar a ser correctas si los estudiantes hubieran tenido mejor control sobre ellas. En el caso de los círculos, si su radio hubiese sido mayor se

crearían los puntos de corte que querían los estudiantes; y en el caso de cruzar los segmentos, la estrategia correcta era usar rectas en vez de segmentos para encontrar los dos puntos de intersección; de modo que aunque los triángulos estuviesen superpuestos la recta que representa el espejo no se desaparecería.

Las estrategias resultan correctas, pero los estudiantes no tienen las herramientas para explicarlas. Además, desde el punto de vista de la TSD no son fáciles de justificar puesto que no hay elementos en las actividades anteriores que justifiquen matemáticamente esas estrategias. Nuevamente se recomienda pensar en alguna forma de bloquearlas restringiendo al medio y se propone no incluirlas en el análisis a priori, pero sí que se mencionen a modo de recomendación para evitar que se den en otros casos.

### **3.3.5.3 Análisis a posteriori (b)**

En esta segunda parte, exactamente en las Tablas<sup>22</sup> 64, 65, 66 y 67, los estudiantes realizaron la estrategia de ubicar un segmento y ajustarlo perceptivamente hasta que fuera el espejo. Esta estrategia estaba prevista en el análisis a priori, como la acción 1. Como se esperaba, la retroacción del medio les permitió invalidar dicha acción.

En la Tabla 66 esta misma acción se cumplió con una ligera variante, ya que para la retroacción 1 el estudiante no movió el segmento para superponer los triángulos, sino que movió el punto sobre el círculo para superponerlos. Esta estrategia utilizada por los estudiantes es inusual porque el punto sobre el círculo debe moverse para verificar que el espejo siempre funcione, ellos no deberían moverlo para superponer los triángulos, pues ya deben estar conscientes que no funcionará.

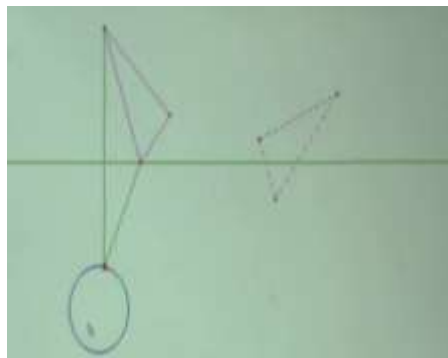
---

<sup>22</sup> Anexo 2, Actividad 3, Tarea 2-Segunda parte (b). Las demás Tablas hasta la 72 se analizarán en esta misma sección.

La siguiente acción que se dio fue la de relacionar los triángulos y el círculo, como se muestra en la Tabla 68. A continuación traemos a colación un segmento de la transcripción donde esto sucede:

**Estudiante 2:** Es que al hacerlo necesariamente hay que hacerlo en la mitad. Sería hallar la mitad entre el triángulo (señalando con su dedo el triángulo continuo) y el círculo; y después entre los dos triángulos (señalando con el dedo el triángulo continuo y el triángulo punteado), ¿Sí? Pero entonces, sería ubicar dependiendo de la mitad de los...

**Figura 41: Estrategia de solución relacionando los triángulos y el círculo.**

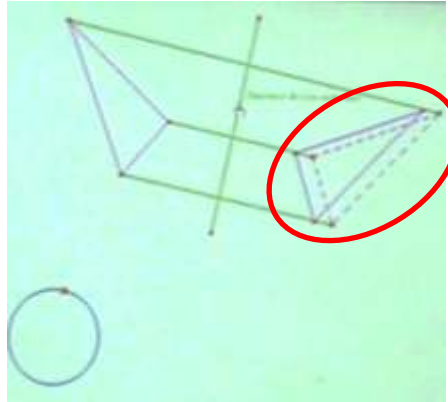


Al tener clara ya la idea de la mitad, los estudiantes trataron de sujetar con segmentos el triángulo al círculo, pero desistieron de la estrategia sin verificar si funcionaba o no. En la Tabla 70 se retoma esta estrategia añadiendo el hecho de incluir las rectas paralelas entre los triángulos. Esta estrategia no estaba prevista en el análisis a priori, pero de igual modo, el medio la invalidó. Debido a la intención que tenían los estudiantes al implementar esta estrategia creemos que es conveniente agregarla al análisis a priori.

En la Tabla 69 los estudiantes realizan una nueva acción no prevista por el análisis a priori. En esta estrategia los estudiantes se ayudan de las rectas paralelas entre los vértices correspondientes de los triángulos para intentar ubicar perceptivamente el espejo en la mitad. Los estudiantes querían aplicar la característica de que el espejo debía ser perpendicular a dichas paralelas, esta acción está sujeta a las

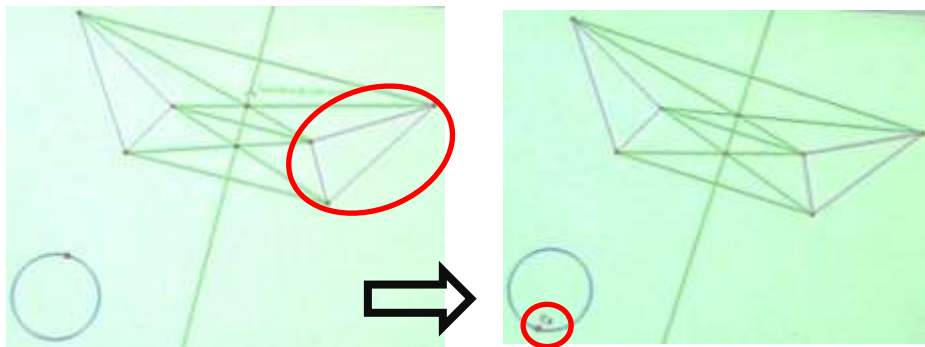
conclusiones que se dieron en la puesta en común. De nuevo el medio invalidó la acción. Resaltamos que en este punto los estudiantes ya tienen claras las condiciones que debe cumplir el espejo, siendo uno de los objetivos de esta la actividad.

**Figura 42: Estrategia de solución usando aproximación del segmento.**



Otras estrategias que se dieron están descritas en las Tablas 71 y 72. En ellas se refleja cómo los estudiantes se ayudan de segmentos paralelos formados entre los triángulos y de segmentos entre vértices no correspondientes de los mismos para completar la tarea. Nuevamente recordamos que estas estrategias aunque no están previstas en el análisis a priori, no es necesario incluirlas, es mejor bloquear el medio para evitar que aparezcan.

**Figura 43: Estrategia de solución correcta.**



#### **3.3.5.4 Análisis a posteriori (c)**

Según el análisis a priori, cuando los estudiantes identificaran las condiciones que debía cumplir el espejo, agotarían todas sus estrategias de construcción y surgiría la pregunta: ¿Cómo hacer para que el segmento quede sobre los puntos medios de los puntos correspondientes aún después de mover el punto sobre el círculo? En este momento la profesora debería indicarles y enseñarles el uso de la herramienta punto medio. En esta clase se dio un pequeño cambio a lo previsto, pues la profesora abordó esta situación en forma de puesta en común, haciendo que los estudiantes compartieran las distintas estrategias y buscaran con cada una de ellas cómo se podía solucionar la tarea.

En la discusión, los estudiantes seguían con la idea clara que el espejo debería ir en la mitad, pero ninguno sabía cómo garantizarlo en Cabri. Una estudiante después de varios intentos encontró la clave para solucionar la tarea y mencionó la herramienta de punto medio. Las Tablas<sup>23</sup> 79, 80, 81, 82, 83 y 84 evidencian cómo los estudiantes utilizan dicha herramienta para crear los puntos por dónde debe pasar el espejo.

**Profesora:** ¿Qué hay que tener en cuenta en ese espejo?

**Estudiante 12:** El punto medio.

**Profesora:** ¿El qué Vilma?

**Estudiante 12:** Punto Medio.

**Profesora:** Venga Vilma. ¿Por qué hay que tener en cuenta el punto medio? ¿El punto medio de quién?

**Estudiante 12:** De los dos triángulos.

**Profesora [Dirigiéndose a todos los estudiantes]:** Y ¿yo puedo hallar un punto medio entre los dos triángulos?

**Estudiante 12:** Si.

**Profesora:** ¿Entre los dos triángulos?

**Estudiante 12:** Si.

**Profesora:** A ver, ¿Cómo hallamos el punto medio? Por favor todos presten atención a lo que va hacer Vilma.

**Estudiante 12:** (Se dirige a versión precedente del archivo.

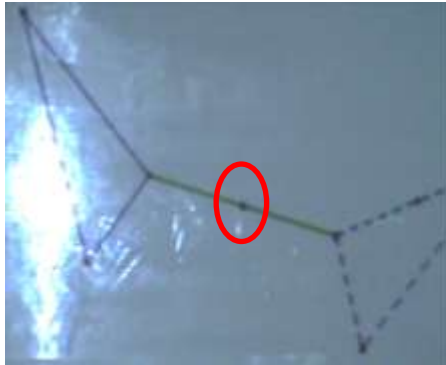
Con el puntero selecciona de la barra de herramientas la opción segmento. Da clic sobre el vértice del triángulo continuo donde se forma

---

<sup>23</sup> Anexo 2, Actividad 3, Tarea 2-Segunda parte (b).

el ángulo de  $90^\circ$  y seguidamente arrastra el cursor hasta el vértice correspondiente a este).  
(Selecciona de la barra de herramientas la opción punto medio. Selecciona con el puntero primero el vértice del triángulo continuo y luego el vértice correspondiente en el triángulo punteado).

**Figura 44: Uso de la herramienta punto medio.**



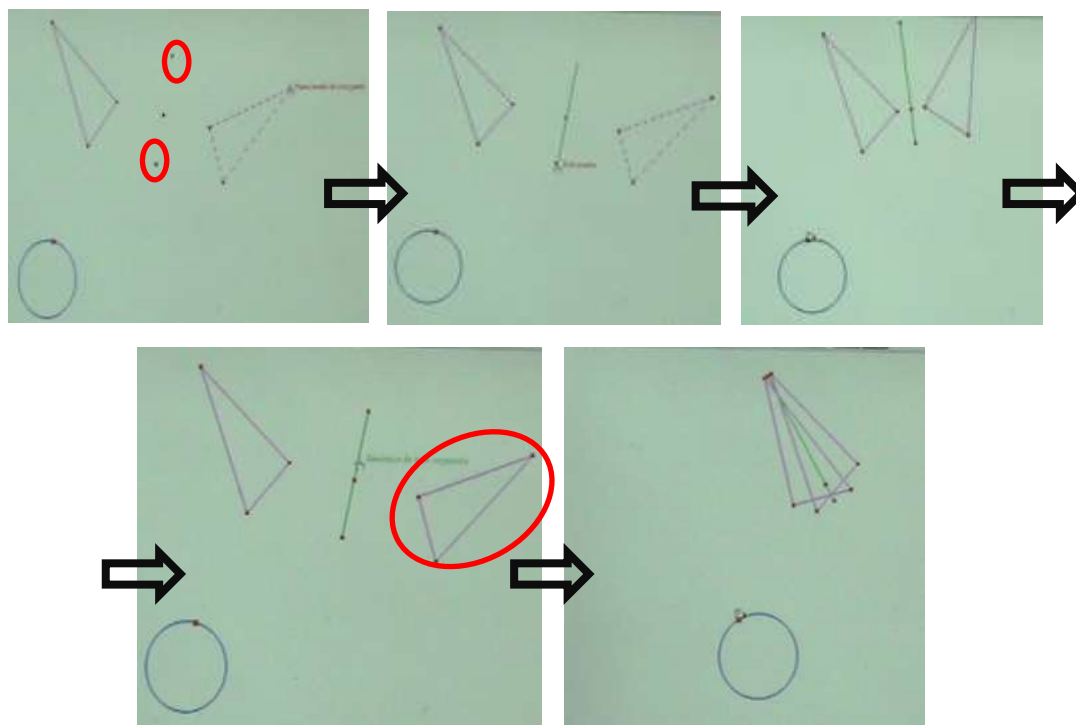
A pesar de que todos estaban de acuerdo con que el espejo debía ubicarse en los puntos medios de las distancias entre los vértices correspondientes de los triángulos, la mayoría no aprobaba que este espejo funcionara cuando se moviera el punto sobre el círculo. A continuación traemos a colación el fragmento de transcripción donde esto sucede:

**Profesora:** ... Vilma mueve el punto sobre el círculo ¿será que ese siempre va hacer el espejo?

**Estudiantes:** No.

Finalmente en las Tablas 83 y 84 se ve cómo los estudiantes realizan la construcción del triángulo simétrico a partir de ubicar el espejo sobre los puntos medios de los vértices correspondientes. Esta acción está prevista en el análisis a priori como la acción 4: usar la herramienta 'punto medio' para marcar los puntos medios de los puntos correspondientes y construir un segmento con extremos en dos de esos puntos.

Figura 45: Secuencia correcta de solución.



Podemos concluir que la mayoría de los estudiantes cumplieron con el objetivo de la actividad 3, pues en general aprendieron a ubicar correctamente el espejo (eje de simetría) partiendo de la identificación de los puntos medios entre los vértices correspondientes de los triángulos.

El trabajo de la profesora en la última parte de la construcción del eje de simetría estuvo bien dirigido, pues llevó a sus estudiantes a la construcción del mismo sin darles las pautas de cómo hacerlo.

## **4. CONCLUSIONES**

Sabiendo que nuestro objetivo principal es validar el análisis a priori de tres actividades de simetría axial diseñadas con la Teoría de las Situaciones Didácticas usando un software de geometría dinámica, experimentadas con estudiantes de séptimo grado de un colegio en Bucaramanga, basaremos este capítulo en los resultados obtenidos a lo largo de la investigación, dividiendo este capítulo en tres partes: en la primera expondremos conclusiones generales basadas en el objetivo del proyecto; en la segunda parte se tendrá en cuenta el análisis a posteriori para dar unas recomendaciones para las actividades diseñadas y el medio. Finalmente en la tercera parte se expondrán unas reflexiones para los profesores al momento implementar las actividades.

### **4.1 CONCLUSIONES GENERALES**

Después de analizar cada una de las situaciones de clase, podemos constatar que tanto las actividades como su análisis y el medio cumplieron con el objetivo de crear en los estudiantes un aprendizaje por adaptación. Aunque como era de esperarse, el análisis a priori no cubrió todo lo sucedido en la clase. En las clases surgieron estrategias nuevas que no se tenían previstas y que por lo tanto deben ser incluidas y estrategias que no son posibles de justificar y no deberían ser incluidas. Todas estas estrategias serán explicitadas en la segunda parte de este capítulo.

En cuanto al medio podemos decir que cumplió una buena labor, pero la adecuación del mismo necesita algunos cambios para que no se presenten confusiones a la hora de entregar las actividades a los estudiantes. De igual manera, en la segunda parte de este capítulo se explicaran cuáles son los cambios que creemos se deben dar.

Otro aspecto importante que se debe tener en cuenta, es que el medio no puede inhabilitar todas las acciones de los estudiantes; es decir, existen acciones que no puede impedir el medio. Un ejemplo que traemos a colación es la acción del estudiante 1 para la primera tarea de la actividad 1, cuando usó cuadros de selección para mover las figuras (triángulos delgados). Esta acción no se puede impedir en el medio, pero el profesor puede intervenir para evitar que los estudiantes realicen dichas acciones.

Además, los estudiantes con el auge tecnológico de los últimos tiempos pueden manejar diferentes herramientas que permiten alterar el medio y lograr desarrollar las tareas, pero no logran los objetivos de las mismas.

En base a esto, podemos distinguir dos tipos de soluciones que pueden dar los estudiantes a la hora de afrontar un problema. Uno de ellos es cuando a los estudiantes solo les importa los medios para lograr los objetivos, solo quieren llegar a la solución sin importarles qué herramientas usar para lograrlo, como por ejemplo cuando utilizaron la herramienta traza para ubicar el espejo. La solución a la tarea propuesta es válida y correcta, pero los estudiantes no tienen la capacidad de justificarla matemáticamente. Otro tipo de solución está ligado a aquellos estudiantes que se preocupan por dar soluciones que pueden justificarse teóricamente, es decir, los estudiantes identifican que lo importante no es la tarea sino el objetivo que está detrás de ella.

Para la TSD es importante rescatar y resaltar la segunda forma de solución, pues cuando los estudiantes intentan resolver una tarea o buscan una solución a ella, adquieren el saber matemático. Este saber tiene sentido matemáticamente para los estudiantes ya que lo pueden relacionar con una experiencia. Por lo tanto, para que todos los estudiantes estén enfocados en soluciones justificadas, el profesor debe

saber intervenir para evitar que se utilice el primer método y crear en los estudiantes una sensibilidad hacia el saber teórico.

Las intervenciones de profesor son parte importante al momento de aplicar las actividades, pero no es posible reglamentar todas las intervenciones del profesor en el análisis a priori; pues siempre podrán aparecer nuevas acciones no previstas, por tal motivo se requiere que los profesores tengan total control del marco teórico, para saber cuándo es necesario intervenir y cuando es mejor abstenerse de hacerlo.

Está claro que con este proyecto se enriqueció el análisis a priori de las actividades de simetría axial, pues aparecieron nuevas acciones y se dieron situaciones no previstas. Sin embargo, somos conscientes que tanto al análisis a priori como al análisis a posteriori les hace falta nuevas estrategias que pueden aparecer una vez se aplican en otras instituciones.

## **4.2 RESPECTO AL ANÁLISIS A PRIORI Y EL MEDIO**

En esta sección presentamos conclusiones y recomendaciones para el análisis a priori que surgieron a lo largo de la investigación, además una serie de recomendaciones para la utilización del medio y la construcción de las actividades.

### **4.2.1 Actividad 1**

Durante el transcurso de la primera tarea, algunas de las acciones previstas del análisis a priori se cumplieron, mientras que hubo otras que no estaban previstas como utilizar cuadros de selección y buscar en el menú de herramientas opciones para alcanzar el objetivo de la primera tarea. Aunque estas estrategias fueron invalidadas por el medio, es importante mencionarlas y tenerlas en cuenta para incluirlas dentro del análisis a priori.

Los estudiantes tomaron conciencia de los movimientos contrarios de los triángulos, siendo este el primer objetivo del análisis a priori para esta actividad, cabe resaltar que los estudiantes notaron esta propiedad trabajando en la primera tarea.

Respecto a la segunda tarea, notamos que no tiene ningún propósito si se incluye después de la tarea de meter los triángulos gruesos dentro del cuadrado, ya que los estudiantes conocen de antemano la dependencia de los triángulos. Por lo tanto creemos conveniente su inclusión dentro del análisis a priori, pero asignándola como primera tarea e incluyendo su respectivo análisis a priori.

Observamos que se dieron las acciones 1, 2 y 3 del análisis a priori para la solución de la tercera tarea; además se evidenció cómo los estudiantes agotaron todas las opciones para meter todos los triángulos dentro del cuadrado. Hasta este punto el análisis cumple con las expectativas, pero consideramos importante la inclusión de la siguiente pregunta para esta tarea: ¿Por qué creen ustedes que es imposible resolver esta tarea? Esta pregunta es necesaria, porque la tarea puede quedar inconclusa de no usarla y los estudiantes pueden tener la oportunidad de argumentar matemáticamente el por qué no se puede cumplir el objetivo de la tarea.

Para la cuarta tarea, se cumplieron todas las acciones previstas en el análisis, inclusive la de juntar triángulos no correspondientes. Pero no se cumplió uno de los objetivos, que los estudiantes notaran que los cuadrados iban ubicados a lo largo de una recta (eje de simetría). Esto no se logró porque el análisis no precisa sobre esta situación, por tal razón es indispensable la inclusión de la pregunta: ¿Si tuviera más cuadrados dónde podría colocarlos de manera que pudieran meterse un triángulo delgado y su correspondiente grueso?

Otra forma de favorecer este objetivo de la actividad es reformulando la tarea cuatro de la siguiente manera: “Colocar los cuadrados en la pantalla de manera que puedan meterse todos los triángulos en cada uno de ellos”. Con esta propuesta evitamos el error que los estudiantes junten triángulos no correspondientes, pues todos los triángulos deberán ir a todos los cuadrados.

Al final del desarrollo de las series, podemos concluir que es imposible asegurar que los estudiantes hayan interiorizado las diferencias en la orientación de los cuadrados en las diferentes series.

En cuanto al concurso se refiere, podemos decir que una de las estrategias que se presentaron fue la alineación de los cuadrados teniendo en cuenta sus lados o su simetría, esta estrategia es incorrecta porque no se cumple para todos los casos, pero el medio no la invalidó en ninguna de las cuatro series. Esto se debe a que sólo se manejan inclinaciones estándar, por eso creemos indispensable incluir más series y más concursos con diferentes orientaciones para invalidar este tipo de estrategias. Además con estas cuatro series los estudiantes inconscientemente interiorizaban solo cuatro posiciones para los cuadrados, otro aliciente para la necesidad de incluir nuevos archivos.

Para el mejoramiento del medio recomendamos sustituir los cuadrados por círculos, pues con este cambio podemos evitar estrategias como la descrita en el párrafo anterior, donde los estudiantes tienen en cuenta la simetría de los cuadrados y no la de los triángulos para cumplir con el objetivo de la tarea. Además sería conveniente cambiar los triángulos de manera que no sean congruentes entre sí, para evitar que los estudiantes presenten dificultades a la hora de ubicar las parejas de triángulos correspondientes.

### **4.2.2 Actividad 2**

Los objetivos con esta actividad no se cumplieron a cabalidad. Los estudiantes logran pasar de una visión global de los triángulos a una visión de sus partes, pero el objetivo de las diferentes orientaciones del eje sigue sin cumplirse, no existen evidencias que corroboren el cumplimiento de este objetivo.

La mayoría de acciones previstas en el análisis a priori para esta actividad no se dieron, debido a que no se presentó una situación a-didáctica; es decir, no se dio un aprendizaje por adaptación por parte de los estudiantes. Aun así, las acciones 1 y 3 del análisis a priori se presentaron. Sin embargo, no estaba prevista para esta actividad la estrategia de ubicar el triángulo grueso paralelo al punteado.

Finalmente la observación que hacen los estudiantes filmados diciendo que los triángulos grueso y delgado son opuestos resulta ser una propiedad de la simetría axial, esta propiedad no se menciona ni se trabaja en ningún apartado del análisis a priori. Por esta razón es conveniente su inclusión para enriquecer el análisis.

Podemos concluir, que a pesar de los inconvenientes en la formulación de la actividad 2, esta nos proporcionó aportes interesantes para el enriquecimiento del análisis a priori. Además de importantes recomendaciones al momento de aplicar la actividad, que serán abordadas más adelante.

### **4.2.3. Actividad 3**

En la actividad 3 se realizó una actividad introductoria porque los estudiantes no identificaban el espejo entre los triángulos; además la profesora no encontró posible explicitar la tarea sin el uso de la palabra espejo. Esta actividad resultó adecuada para la identificación del espejo, pero la utilización de la traza trajo consigo estrategias de solución no

esperadas. Por tal razón, recomendamos otras acciones como regresar a actividades anteriores o reformular el enunciado de la tarea si en algún caso no se ha mencionado dicha palabra.

Como señalamos anteriormente, la herramienta traza puede resultar no conveniente, puesto que puede dar lugar a una variedad de acciones no prevista en el análisis a priori que pueden resultar imposibles de explicar con los conocimientos matemáticos de los alumnos. Por tanto no deberían tenerse en cuenta para el análisis a priori, pero sí deberían mencionarse a modo de recomendación para evitar que aparezcan y distorsionen el objetivo de la actividad.

Otro aspecto importante es la figura del “MUY BIEN”; el letrero que sale cuando el segmento se encuentra en la mitad de los dos triángulos correspondientes. Dicho letrero puede resultar ciertamente conflictivo y puede llegar a complicar el objetivo de la actividad, pues sale inmediatamente el segmento está bien ubicado como espejo; sin embargo, no es posible garantizar con las evidencias tomadas si los estudiantes pensaban en ubicar el segmento equidistante entre los triángulos, o solo movían el segmento esperando a que apareciera el letrero.

Desde el punto de vista de TSD, el letrero “MUY BIEN” no es una retroacción correcta, porque está juzgando las acciones de los estudiantes, interrumpiendo el proceso de validación. Por esta razón y con el fin de evitar que el “MUY BIEN” pase de ser una confirmación (de que se está haciendo bien la tarea) a ser un objetivo, se recomienda la modificación del medio para esta actividad, ya sea incluyendo un botón que permita validar si el segmento está bien puesto o no, o limitando la aparición del letrero a alguna condición extra.

El análisis a priori no tiene un análisis de la secuencia para la actividad 3. Creemos que es importante su inclusión, puesto que sería una buena herramienta para que el profesor tenga presente qué condiciones deberán saber sus estudiantes sobre el eje de simetría antes de empezar su construcción.

Además durante la investigación se evidenció que no todas las estrategias surgían trabajando en la primera serie, los estudiantes desarrollaron nuevas estrategias trabajando a lo largo de las series. Estrategias que merecen ser tenidas en cuenta para incluirlas en el análisis a priori. Una de ellas fue ubicar un extremo del segmento colineal con los vértices correspondientes de los triángulos correspondientes.

Durante la puesta en común, es importante que los estudiantes tengan claro que el espejo pasa por el punto medio, cualquier otra característica como perpendicularidad, paralelismos no son importantes en este momento e inclusive ni siquiera deberían mencionarse.

Finalmente podemos agregar que en la última parte de la actividad según el análisis a priori, se pedía que la profesora presentara a los estudiantes la herramienta *punto medio*, vemos en el desarrollo de nuestra investigación la profesora decidió hacer una puesta en común para que fueran los estudiantes quienes explicitaran la necesidad del punto medio. Esta estrategia estuvo bien abordada por parte de la profesora y se cumplió con el objetivo deseado. Por esta razón la utilización de una puesta en común para indicar el punto medio es una buena estrategia para incluir en el análisis a priori.

### **4.3 REFLEXIONES PARA EL PROFESOR**

En esta sección se enmarcarán una serie de recomendaciones para el profesor, de modo que sirvan como ayuda al momento de utilizar las actividades diseñadas de simetría axial.

La primera recomendación que se le puede hacer a un profesor antes de empezar a trabajar con las actividades, es que tengan total aprehensión del análisis a priori. Entre más interiorizado esté el análisis por parte del profesor, más sencillo será la aplicación de las actividades.

Las intervenciones del profesor sugerimos reducir las a las mínimas y necesarias; las intervenciones del profesor no deben señalar errores o sugerir estrategias porque anularía la validación de los estudiantes, por ende su aprendizaje por adaptación. Las intervenciones son importantes cuando el estudiante manifieste abandonar el problema, en ese punto el profesor debe relanzar el problema y enfocar de nuevo al estudiante para que logre el objetivo propuesto.

Durante el desarrollo del concurso de la primera actividad, sugerimos seguir las indicaciones del análisis a priori. Resulta poco conveniente que una vez empezado el concurso se interrumpa para trabajar de nuevo con las series o con los mismos archivos del concurso; inclusive, por ningún motivo los estudiantes deben trabajar con los archivos del concurso antes de enfrentarse a ellos. Es importante tener en cuenta que para el análisis a priori no se puede compartir la estrategia ganadora si no se ha terminado el concurso, porque desde el punto de vista de TSD cuando se explica la estrategia ganadora ya no tiene sentido seguir con el concurso, pues todos tienen la misma idea de solución.

El análisis a priori busca que todas las posibles acciones de los estudiantes puedan ser validadas o invalidadas por el medio, no es

indispensable que todas las acciones se den, por esta razón es importante que el profesor tenga en cuenta la planeación del análisis a priori, para que no se corra el riesgo de perder el propósito de cada actividad. Además, es indispensable que el profesor confíe plenamente en el problema (la tarea) y en el medio como dos herramientas para conseguir los propósitos previstos. Si el profesor no confía en el análisis sucederá lo que llamamos “exploración guiada”, en donde buscará por todos los medios que los estudiantes identifiquen las propiedades que en realidad debían identificar por sí solos interactuando con el medio.

Mientras los estudiantes estén creando su conocimiento en interacción con el medio, el profesor no debería dar términos matemáticos formales, porque los estudiantes pueden absorberlos y usarlos de manera indiscriminada sin saber siquiera su significado. El lenguaje formal se usa en la institucionalización y además a partir de ese momento se exige su uso, es ahí donde el espejo deja de ser espejo para llamarse eje de simetría.

Tener total claridad de las tareas y los objetivos de ellas es una labor importante para el profesor, es imprescindible comprender los enunciados de las tareas y saber qué es lo que se desea obtener con cada una; de esto depende el buen funcionamiento de las actividades.

La investigación nos permitió comprobar que el uso de la Teoría de las Situaciones Didácticas en el aula no es sencillo de aplicar, pero pudimos constatar que generó verdaderos aprendizajes en los estudiantes. Estas tres actividades planteadas nos mostraron que no es necesario que los estudiantes conozcan el medio antes de enfrentarse a él, pero sí que los docentes se apropien del análisis a priori para generar una situación didáctica. Se evidenció que los estudiantes construyeron su propio conocimiento, por lo que ahora la labor del profesor es aplicar la última

actividad y organizar la institucionalización, donde introducirá los términos matemáticos como por ejemplo: simetría axial, eje de simetría, perpendicularidad, paralelismo y punto medio.

## 5. REFERENCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- Acosta, M., Monroy, L., & Rueda, K. (2010). *SITUACIONES A-DIDÁCTICAS PARA LA ENSEÑANZA DE LA SIMETRÍA AXIAL UTILIZANDO CABRI COMO MEDIO*. INTEGRACIÓN, Vol. 28 (número 2), pág. 173–189.
- Acosta, M. (en prensa). *MARCO TEÓRICO DEL PROYECTO INSTITUCIONAL DE USO DE SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA*.
- Artigue, M. D. (1995). *INGENIERÍA DIDÁCTICA EN EDUCACIÓN MATEMÁTICA*. Bogotá: Iberoamérica.
- Castiblanco, C., Urquina, H., Camargo L. & Acosta, M. (2004). *PENSAMIENTO GEOMÉTRICO Y TECNOLOGÍAS COMPUTACIONALES*. Ministerio de Educación Nacional, Serie documentos. Bogotá.
- Margolinas, C.(2009). *LA IMPORTANCIA DE LO VERDADERO Y LO FALSO EN LA CLASE DE MATEMÁTICAS*. (Primera edición en español; Acosta M.E. y Fiallo J.E., Trabajo original: De l'importance du vrai et du faux dans la classe de mathématiques, publicado en 1993), Publicaciones UIS.
- MEN. M. d. (2004). *PENSAMIENTO GEOMÉTRICO Y TECNOLOGÍAS COMPUTACIONALES*. Bucaramanga: Enlaces Editores.
- Murillo, R. (2005). *IMPLEMENTACIÓN DEL SOFTWARE DE GEOMETRÍA DINÁMICA EN LA ENSEÑANZA DE LA ASIGNATURA DE MATEMÁTICAS Y SU DIDÁCTICA*. Universidad de Granada
- Parada, S., & Fiallo, J. (2012) *UNA MIRADA CON PROFESORES DE SANTANDER (COLOMBIA) SOBRE EL USO DE TECNOLOGÍAS EN CLASE DE MATEMÁTICA*. (Ed) Memoria Congreso iberoamericano de Aprendizaje Mediado por Tecnología, 757-766. Universidad Nacional Autónoma de México.
- Pérez, L., Quiñones, J. (2012) *ANÁLISIS A PRIORI ACTIVIDADES DE SIMETRÍA AXIAL*. Documento no publicado del subgrupo Nuevas Tecnologías EDUMAT-UIS.
- Ríos, Y. (2007). *UNA INGENIERÍA DIDÁCTICA APLICADA SOBRE FRACCIONES*. *Redalyc*, 13(2), 134-135.

Sadovsky, P. (s.f.). *LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS: UN MARCO PARA PENSAR Y ACTUAR LA ENSEÑANZA DE LA MATEMÁTICA*. Recuperado el 7 de abril de 2014, de Universidad Pedagógica Veracruzana:  
[http://upvv.clavijero.edu.mx/cursos/desarrollo\\_del\\_pensamiento\\_matematico/programa/documentos/Patricia.pdf](http://upvv.clavijero.edu.mx/cursos/desarrollo_del_pensamiento_matematico/programa/documentos/Patricia.pdf).

Torres, B. (2013). *CONCEPCIONES Y PRÁCTICAS PEDAGÓGICAS DE LOS PROFESORES DE MATEMÁTICAS SOBRE LA TEORÍA DE LAS SITUACIONES DIDÁCTICAS-Caso del proyecto Institucional de Geometría Dinámica del grupo EDUMAT – UIS*. Universidad Industrial de Santander.

## 6. ANEXOS

### ANEXO 1

Análisis a priori de las actividades se simetría axial

### ANEXO 2

Actividad 1

Tarea 1

Tarea **¡Error! Marcador no definido.**

Tarea 3

Tarea 4

Secuencia

Puesta en Común

Concurso – Primera Etapa (a)

Concurso – Primera Etapa (b)

Concurso Segunda Etapa

Actividad 2

Antes de la Tarea

Después de la Tarea

Secuencia

Actividad 3

Tarea 1 – Antes de la Tarea

Tarea 1 – Después de la Tarea

Secuencia

Puesta en común

Tarea 2 – Primera Parte

Tarea 2 – Segunda Parte (a)

Tarea 2 – Segunda Parte (b)

Tarea 2 – Segunda Parte (c)